UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL

RENAN PEREIRA PAES

RELATIVIDADE: DO ESPAÇO-TEMPO DE *MINKOWSKI* ÀS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

DOURADOS-MS

2015

RENAN PEREIRA PAES

RELATIVIDADE: DO ESPAÇO-TEMPO DE *MINKOWSKI* ÀS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Física, como requisito à obtenção do título de Licenciado em Física da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, sob a orientação do Professor Dr. Paulo Souza da Silva.

Orientador: Professor Dr. Paulo Souza da Silva

DOURADOS-MS

2015

RENAN PEREIRA PAES

RELATIVIDADE: DO ESPAÇO-TEMPO DE *MINKOWSKI* ÀS EQUAÇÕES DE EINSTEIN

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Física, como requisito à obtenção do título de Licenciado em Física da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, sob a orientação do Professor Dr. Paulo Souza da Silva.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Paulo Souza da Silva

____

Prof. Dr. Edmilson de Souza

____

Prof. Dr. Gilmar Praxedes Daniel

DOURADOS-MS

2015

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por que nele vivemos, nos movemos e somos.*

À minha mãe, Josélia Pereira Silva, e ao meu pai, Edevaldo Paes da Silva e à minha irmã, Ariane Pereira Paes Fernandes.

Ao meu orientador Professor Dr. Paulo Souza da Silva, por tolerar o meu temperamento e minha teimosia.

* Atos dos Apóstolos 17: 28

"É um grande sinal de mediocridade elogiar sempre moderadamente."

Leibniz

RESUMO

O cálculo tensorial satisfaz com elegância a exigência de que as leis da física sejam as mesmas em qualquer referencial inercial, que, junto com o princípio de constância da velocidade da luz – estabelecem a condição *sine qua non* para a teoria da relatividade restrita – resgatando o princípio da relatividade de Galileu que havia ficado para trás, e de certo modo, cada vez mais longe. *Mutatis mutandis*: do mesmo modo que Einstein estabelece a simetria das leis da física para referenciais inerciais, ele impõe esta simetria para referenciais não-inerciais.

Neste trabalho, exploramos algumas propriedades matemáticas do espaço-tempo de Minkowski. Através do formalismo tensorial, podemos estudar com mais clareza os aspectos físico-matemáticos da estrutura da relatividade restrita, como a transformação de Lorentz. Já no campo da relatividade geral, a álgebra tensorial começa a apresentar suas limitações, com isto, apresentamos o conceito de derivada covariante. A derivada covariante, como veremos, leva em consideração os aspectos geométricos da superfície na qual se está analisando. Através dela, podemos encontrar o Tensor de Riemann, e a partir deste deduzir às equações que relacionam à curvatura do espaço-tempo à densidade de matéria e energia presentes no espaço.

Palavras-chave: Transformações de Lorentz, espaço-tempo de Minkowski, equações de Einstein.

ABSTRACT

The tensor calculus meets with elegance the requirement that the laws of physics are the same in any inertial frame, along with the principle of constancy of the speed of light - establish the *sine qua non* condition for the theory of relativity - rescuing the principle of Galilean relativity that were left behind, and in a way, farther and farther. *Mutatis mutandis*: just as Einstein establishes the symmetry of physical laws for inertial reference frames, it imposes this symmetry for non-inertial reference frames.

In this paper, we explore some mathematical properties of Minkowski spacetime. Through the tensor formalism, we can study more clearly the physical and mathematical aspects of special relativity framework, as the Lorentz transformation. In the field of general relativity, tensor algebra begins to show its limitations, with that, we present the concept of covariant derivative. The covariant derivative, as we shall see, takes into account the geometric aspects of the surface on which is being analyzed. Through it, one may find the Riemann tensor, and from that deduce the equations that relate the curvature of space-time to the density of matter and energy present in space.

Keywords: Lorentz transformations, Minkowski spacetime, Einstein's equations.

SUMÁRIO

Introdução

No final do século XIX a física estava dividida em três grandes áreas, a mecânica, o eletromagnetismo e a teoria do calor. Na fronteira entre estas áreas haviam problemas nos quais os conceitos se sobrepunham. O problema da radiação térmica de corpo negro em equilíbrio, no qual, Max Planck houvera trabalhado, era um problema de fronteira da física porque se encontrava entre o eletromagnetismo e a teoria do calor. Este problema tornou-se o cerne da mecânica quântica. O problema do movimento browniano encontra-se na fronteira entre a mecânica e o estudo do calor e culminou no surgimento de uma nova mecânica estatística. Finalmente, na eletrodinâmica dos corpos em movimento encontramos como o nome sugere um problema que envolve mecânica e o eletromagnetismo. (RENN, 2004)

Até o início do século XX, para descrever um mesmo fenômeno era necessário utilizar duas teorias, por exemplo, para descrever o movimento de uma partícula com carga e massa, era necessário dispor da teoria do eletromagnetismo maxwelliano e da mecânica newtoniana, ao mesmo tempo. Enquanto o eletromagnetismo possui uma dinâmica centrada no movimento de partículas que possuem cargas, a mecânica tem uma dinâmica que descreve o movimento de partículas que possuem massa. Esta assimetria era um embaraço para a física, e alguns físicos da época estavam concentrados em estabelecer uma teoria que unificasse o eletromagnetismo e a mecânica de modo que uma simetria fosse estabelecida entre estas duas teorias. (RENN, 2004)

Para impor uma simetria entre estas duas dinâmicas, era necessário propôr que ambas seguissem um princípio relativístico tal que todas as observações de fenômenos implicando massa e carga levaria a alteração da à época ainda recente, pouco testada e pouco compreendida dinâmica maxwelliana, a fim de que se pudesse preservar, a consolidada mecânica newtoniana, por este caminho trilhou Lorentz e Poincaré. Einstein por outro lado seguiu o caminho precisamente oposto, privilegiou Maxwell sobre Newton, expandindo o Princípio da Relatividade de Galileu que antes era limitado a fenômenos da mecânica para toda a física, este é o primeiro postulado da Teoria da Relatividade Restrita. O segundo postulado é chamado de postulado da constância da velocidade da luz.

(GAZZINELLI, 2009)

A estrutura de Minkowski é elaborada para fornecer um formalismo versátil que descreve a relação entre espaço e tempo, em acordo com os princípios relativísticos. Podemos, também, extrair uma visão mais elaborada do tempo, na estrutura formal logicamente consistente do espaço-tempo de Minkowski, onde podemos definir um evento dentro desse espaço-tempo com quatro coordenadas (t,x,y,z), onde t é a coordenada do tempo. Matematicamente, isto sugere que o tempo é uma dimensão linear, ortogonal com as outras três coordenadas do espaço, e assim, naturalmente conduz para a concepção do tempo como sendo a quarta dimensão da realidade. (HERDEIRO, 2011/2012)

Espaço-tempo de Minkowski

Os princípios da relatividade restrita são mais facilmente incorporados nas leis da física usando o conceito de *espaço-tempo* de *Minkowski*, introduzido por Hermann Minkowski com o advento do cálculo tensorial. O espaço-tempo de Minkowski junta o espaço e o tempo numa única entidade. Normalmente estamos familiarizados com um mundo tridimensional, nos movemos no espaço e no tempo, mas apenas no espaço podemos ir e voltar. O tempo que aqui é “apenas” uma dimensão espacial, foge ao nosso controle. Einstein, de início, julgou que Minkowski obscureceu as suas ideias com formalismo matemático desnecessário. Apenas mais tarde, quando começou a trabalhar na relatividade geral, passou a utilizá-lo, como veremos a diante, o uso do cálculo tensorial e algumas propriedades de geometria diferencial foram fundamentais para o desenvolvimento da relatividade geral. (GAZZINELLI, 2009)

As transformações de Lorentz têm a característica de conectar dois eventos no espaço-tempo. O intervalo onde os fenômenos físicos ocorrem, segundo a relatividade, é um espaço vetorial de quatro dimensões. De acordo com Bassalo (2006) cada ponto deste espaço é um evento e será identificado de acordo com:

$$x^1 = ict \quad , \quad x^2 = x \quad , \quad x^3 = y \quad , \quad x^4 = z \quad , \tag{1}$$

São as coordenadas contravariantes , em termo destas coordenadas, a métrica fica:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + (dx^4)^2 \tag{2}$$

Além das coordenadas contravariantes, define-se as coordenadas covariantes, com índices inferiores. Combinando as coordenadas covariantes e contravariantes, temos que:

$$ds^2 = dx_1 dx^1 + dx_2 dx^2 + dx_3 dx^3 + dx_4 dx^4 \quad , \tag{3}$$

e podemos escrever:

$$ds^2 = \sum_1^4 dx_u dx^u \tag{4}$$

Podemos relacionar a métrica com o tensor métrico:

$$ds^2 = \sum_1^4 \sum_1^4 g_{uv} dx^u dx^v \tag{5}$$

Há, ainda, uma notação mais abreviada que é simplesmente $ds^2 = g_{uv} dx^u dx^v$ onde adotamos a convenção de que sempre que um índice é repetido em um dado termo, temos que somar termos análogos fazendo variar o índice de 1 a n. A não ser que seja especificado outra coisa. É o que se chama *convenção da soma*, ou *convenção de Einstein*. Neste caso, convém lembrar que estamos trabalhando com quadrivetores e assim sendo, utilizaremos de forma implícita índices que variam de um a quatro. É importante notar que, de acordo com a relatividade, a distância entre os dois eventos no espaço-tempo é um invariante. (BARATA, 2015; BASSALO, 2006; NETO, 2010)

As componentes g_{uv} são componentes de um tensor covariante de segunda ordem, chamado de tensor métrico ou tensor fundamental. Podemos escolher esse tensor e o faremos sempre, de modo a torná-lo simétrico. (BASSALO, 2006)

$$g_{uv} = g^{uv} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Esta definição de tensor métrico permite utilizar o espaço de Minkowski sem o imaginário i. Esta escolha, implementa ainda, a característica geométrica de um universo plano, homogêneo e estático. (CARROLL, 2015)

Assim, com esta definição e considerando o *sistema relativístico de unidade* com c=1, definiremos, de acordo com Bassalo (2006) o tensor contravariante e covariante da seguinte maneira:

$$x^u = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (t, x, y, z) = (t, \vec{r}) \tag{7}$$

$$x_u = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (t, -x, -y, -z) = (t, -\vec{r}) \tag{8}$$

Por definição, as transformações de Lorentz deixam invariante este intervalo entre dois eventos:

$$ds^2 = g_{uv} dx^u dx^v \tag{9}$$

$$ds^2 = dx_u dx^u \tag{10}$$

$$ds'^2 = dx'_p dx'^p \tag{11}$$

$$ds'^2 = ds^2 \quad . \tag{12}$$

Nesse espaço de Minkowski, a transformação de Lorentz pode ser escrita na forma:

$$x'^{u}=\Lambda^{u}_{v}x^{v} \quad . \tag{13}$$

Onde a *matriz de Lorentz* é definida por Bassalo (2006) e Neto (2010) como:

$$\Lambda^{u}_{v}=\begin{bmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} x'^{1} \\ x'^{2} \\ x'^{3} \\ x'^{4} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \gamma & -v\gamma & 0 & 0 \\ -v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x^{1} \\ x^{2} \\ x^{3} \\ x^{4} \end{bmatrix} \tag{15}$$

Note-se que a transformação de Lorentz é o que conecta os dois eventos. De um modo mais geral, uma transformação L definida pela expressão:

$$x'^{u}=L^{u}_{\alpha}x^{\alpha} \tag{16}$$

é uma transformação de Lorentz, se ela preserva o produto escalar, ou seja,

$$x'^{u}y'_{u}=x^{\alpha}y_{\alpha} \tag{17}$$

usando a expressão de transformação geral na equação acima, virá:

$$L^{u}_{\alpha}x^{\alpha}y'_{u}=x^{\alpha}_{\alpha} \tag{18}$$

onde podemos reescrever que:

$$y'_{u}=g_{\beta u}y'^{\beta}\, e\, y_{\alpha}=g_{\alpha p}y^{p} \tag{19}$$

resultando,

$$L^{u}_{\alpha}x^{\alpha}g_{\beta u}y'^{\beta}=x^{\alpha}g_{\alpha p}y^{p} \tag{20}$$

onde,

$$y'^{\beta}=L^{\beta}_{p}y^{p} \tag{21}$$

resultando em:

$$L^{u}_{\alpha}x^{\alpha}g_{\beta u}L^{\beta}_{p}y^{p}=g_{\alpha p}x^{\alpha}y^{p} \tag{22}$$

sobrando:

$$L^{u}_{\alpha}g_{\beta u}L^{\beta}_{p}=g_{\alpha p} \quad . \tag{23}$$

A expressão acima, nada mais é que uma operação com matrizes, podemos encontrar por meio desta relação o determinante de L. (BASSALO, 2006)

$$|L||g||L|=|g| \rightarrow |L^2|=1 \rightarrow |L|=\pm 1 \quad .$$

A transformação se chama própria ou continua quando o determinante é igual a 1. Por outro lado, quando a determinante de L assume o valor de -1, então, a transformação é própria ou descontínua. Além dessa classificação das transformações L, existe uma outra que envolve o elemento L_0^0 . (BASSALO, 2006)

$$(L_0^0)^2=1+\sum_{k=1}^{k=3}(L_0^k)^2 \qquad (24)$$

Quando $L_0^0 \geq 1$, a transformação é ortocrônica, pois ela preserva o sinal do tempo, ou seja, o passado se transforma em passado, o presente se transforma em presente, e o futuro se converte em futuro. Se $L_0^0 \leq -1$, a transformação se denomina não-ortocrônica ou heterocrônica. (BARATA, 2015; BASSALO, 2006; NETO, 2010)

Considerando estes dados podemos classificar essas transformações:

- $L^{\uparrow}_{+}$ Transformação de Lorentz Própria e Ortocrônica
  $|L|=1$ e $L_0^0 \geq 1$.
- $L^{\downarrow}_{+}$ Transformação de Lorentz Própria e Heterocrônica
  $|L|=1$ e $L_0^0 \leq -1$.
- $L^{\uparrow}_{-}$ Transformação Imprópria e Ortocrônica
  $|L|=-1$ e $L_0^0 \geq 1$.
- $L^{\downarrow}_{-}$ Transformação de Lorentz Imprópria e Heterocrônica
  $|L|=-1$ e $L_0^0 \leq -1$.

Destes quatro elementos, apenas $L^{\uparrow}_{+}$ forma um grupo, conhecido como *Grupo de Lorentz restrito.* Os demais não formam grupos. Contudo, segundo Barata (2015) e Bassalo (2006) pode-se formar grupos com a reunião de $L^{\uparrow}_{+}$ com um dos outros três, da seguinte forma:

- $L^{\uparrow}_{+}$U $L^{\downarrow}_{+}$ *Sub-grupo de Lorentz ortocrônico.*
- $L^{\uparrow}_{+}$U $L^{\uparrow}_{-}$ *Sub-grupo de Lorentz próprio.*
- $L^{\uparrow}_{+}$U $L^{\downarrow}_{-}$ Sub-grupo de Lorentz ortocroro.

Estas operações formam subgrupos de Lorentz, de modo que $L^{\uparrow}_{+}$ é chamado de *grupo de Lorentz próprio e ortocrônico* ou simplesmente de *grupo de Lorentz restrito*. (BARATA, 2015)

A *transformação de inversão espacial* ou *transformações de paridade* é definida pela matriz:

$$P^u_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Esta transformação aplicada a um quadrivetor inverte a posição da partícula no espaço e conserva o tempo. Assim, dado o quadrivetor posição:

$$x'^u = P^u_v x^v = (t, -\vec{r}) \quad (26)$$

A transformação de inversão temporal, como o próprio nome sugere, inverte o sentido do tempo de um quadrivetor e conserva a posição da partícula. Esta transformação é definida pela matriz a seguir. (BARATA, 2015; BASSALO, 2006; NETO, 2010)

$$T^u_v = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Dado o quadrivetor posição:

$$x'^u = T^u_v x^v = (-t, \vec{r}) \quad (28)$$

As transformações de inversão espacial e temporal são impróprias, uma vez que ambas possuem determinantes iguais a -1.

Há um consenso na física de que o grupo de Lorentz restrito representa uma simetria na natureza (na ausência de campos gravitacionais). O estudo de interações fracas em física de partículas elementares já revelou que a troca de paridade não é uma transformação de simetria. A chamada *transformação CPT* envolve as operações sucessivas de troca de carga, ou partícula-antipartícula, de paridade e de inversão temporal. No campo de estudos da *teoria quântica de campos* é um fato teórico bem consolidado de que a transformação CPT é uma transformação de simetria. No entanto, a simetria CP é violada, certos processos da física de partículas elementares, indicam fortemente que a inversão temporal também não seria uma simetria da natureza. Entretanto ainda não há evidências experimentais concretas de que a simetria de inversão temporal é violada, por serem de dificílima constatação. (BARATA, 2015)

Observe que $L^{\uparrow}_{-}$ contém a operação de inversão espacial, ou simplesmente paridade, assim como $L^{\downarrow}_{+}$ contém a inversão temporal, e o elemento $L^{\downarrow}_{-}$ contém inversão temporal e espacial. (BARATA, 2015)

Energia e Momento

O tempo medido por um observador em repouso em relação ao seu referencial S' é denominado tempo próprio. Se este observador se desloca com uma velocidade v em relação a um observador em repouso. (GAZZINELLI, 2009; BASSALO, 2006)

$$d\tau^2 = ds^2 \tag{29}$$

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{30}$$

$$d\tau^2 = dt^2\left[1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] \tag{31}$$

$$d\tau = dt\sqrt{1-v^2} \tag{32}$$

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \tag{33}$$

supondo que o quadrivetor posição seja $x^u(t,\vec{r})$ definimos de *quadrivelocidade*, ou *quadrivetor velocidade* a seguinte relação:

$$v^u = \frac{dx^u}{d\tau} \tag{34}$$

$$v^u = \frac{dx^u}{dt}\frac{dt}{d\tau} \tag{35}$$

como,

$$d\tau = \frac{dt}{\gamma} \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{d\tau} = \gamma$$

teremos,

$$v^u = \gamma(1,\vec{v}) \tag{36}$$

Sendo m a massa de repouso de uma partícula, define-se o seu *quadrimomentum* da seguinte forma:

$$p^u = \overline{p} = m\,v^u \tag{37}$$

De acordo com a definição relativista de energia, temos:

$$E = \gamma mc^2 \tag{38}$$

como adotamos o sistema relativístico de unidade:

$$E = \gamma m \tag{39}$$

onde

$$\vec{p}=E\vec{v} \quad \rightarrow \quad E\vec{v}=\gamma m\vec{v} \quad \rightarrow \quad \vec{p}=\gamma m\vec{v}$$

$$p^2=\frac{m^2v^2}{1-v^2} \tag{40}$$

$$1-v^2=m^2\frac{v^2}{p^2} \quad \rightarrow \quad 1-v^2=\frac{m^2}{E^2} \quad \rightarrow \quad E^2=m^2+p^2$$

de acordo com a expansão binomial

$$(1+x)^k=1+kx+\frac{k(k-1)x^2}{2!}+...+\frac{k(k-1)...(k-n-1)x^n}{n!} \tag{41}$$

para $p \ll 1$

$$E \approx m+\frac{p^2}{2m} \tag{42}$$

que nada mais é que a energia não-relativística de uma partícula. Multiplicando o quadrivetor velocidade por m, teremos:

$$p^u=mv^u=m\gamma(1,\vec{v}) \tag{43}$$

$$p^u=(m\gamma, m\gamma\vec{v}) \tag{44}$$

$$p^u=(E,\vec{p}) \tag{45}$$

É importante observar que na relatividade, os princípios de conservação da energia e do *momentum* são reunidos em apenas um principio: *princípio de conservação do quadrimomentum.* (BASSALO, 2006) Em colisões relativisticas, energia e *momentum* são sempre conservados. Em outras palavras, todas as quatros componente do quadrivetor energia *momentum* são conservados. Derivando o quadrivetor do momento encontramos o quadrivetor força também denominado de *força de Minkowski,* definido por Bassalo (2007) da seguinte forma:

$$F^u=\frac{dp^u}{d\tau} \tag{46}$$

$$F^u=\frac{d}{d\tau}(E,\vec{p}) \tag{47}$$

$$F^u=\gamma(\frac{dE}{dt},\frac{d\vec{p}}{dt}) \tag{48}$$

por definição da mecânica clássica:

$$\frac{dE}{dt}=\vec{F}\circ\vec{v} \quad \text{e} \quad \frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$$

$$F^u=\gamma\vec{F}(\vec{v},1) \tag{49}$$

Podemos ainda obter a forma covariante, utilizando a o quadrimomento em sua forma contravariante:

$$p_u = g_{uv}\, p^v \qquad (50)$$

Voltando à definição da força de Minkowski:

$$F_u = \frac{d}{d\tau}(E, -\vec{p}) \qquad (51)$$

$$F_u = \gamma \vec{F}(\vec{v}, -1) \qquad (52)$$

Até aqui trabalhamos com os efeitos que à teoria tem sobre uma partícula, no entanto isto não é tudo, como veremos o campo possuí propriedade peculiares que muitas vezes são contra-intuitivas. Para demonstrar às propriedades de um campo eletromagnético, consideramos de início a terceira e a quarta equação de Maxwell para um região livre da interação com cargas e correntes. (BASSALO, 2007; FRENKEL, 1996; NETO, 2010)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (53)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (54)$$

Multiplicando a terceira equação de Maxwell (69) pelo campo magnético e a quarta equação de Maxwell (70) pelo campo elétrico:

$$\vec{B}(\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{B}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (55)$$

$$\vec{E}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (56)$$

subtraindo, teremos:

$$\vec{B}(\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\vec{B}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (57)$$

usando a propriedade do operador diferencial *nabla*, podemos reescrever:

$$\vec{\nabla}(\vec{f} \times \vec{g}) = \vec{g}(\vec{\nabla} \times \vec{f}) - \vec{f}(\vec{\nabla} \times \vec{g}) \qquad (58)$$

$$\vec{B}(\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla}(\vec{E} \times \vec{B}) \qquad (59)$$

retornando à equação,

$$\vec{B}(\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = -\vec{B}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (60)$$

podemos reescreve-lá

$$\vec{\nabla}(\vec{E} \times \vec{B}) = -\vec{B}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (61)$$

onde

$$\vec{B}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial B^2}{\partial t} \qquad (62)$$

$$\vec{E}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} \qquad (63)$$

substituindo, obteremos

$$\vec{\nabla}\circ(\vec{E}\times\vec{B})=-\frac{1}{2}\frac{\partial B^2}{\partial t}-\mu_0\varepsilon_0\frac{1}{2}\frac{\partial E^2}{\partial t} \qquad (64)$$

reorganizando os termos obteremos

$$\frac{\vec{\nabla}\circ(\vec{E}\times\vec{B})}{\mu_0}+\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{B^2}{\mu_0}+\varepsilon_0 E^2\right\}=0 \qquad (65)$$

por convenção adotamos que $\vec{s}=\frac{\vec{E}\times\vec{B}}{\mu_0}$, onde $\vec{s}$ é o vetor de *Poynting.* E temos que:

$$\vec{\nabla}\circ\vec{s}+\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{B^2}{\mu_0}+\varepsilon_0 E^2\right\}=0 \qquad (66)$$

Esta equação possui uma forma comum que determina na física o que chamamos de equação de continuidade e implementa, neste caso, um princípio de conservação relativo à energia do campo eletromagnético. Em outras palavras, acabamos de demonstrar que o campo conserva energia. Consideremos agora uma partícula que se move sujeita a este campo. De acordo com a segunda lei de Newton. (NETO, 2010)

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}) \qquad (67)$$

Para uma distribuição de cargas, teremos:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\int\rho(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})\,dv \qquad (68)$$

onde $\vec{j}=\rho\vec{v}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\int(\rho\vec{E}+\vec{j}\times\vec{B})\,dv \qquad (69)$$

da lei de Gauss

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0}=\vec{\nabla}\circ\vec{E} \;\rightarrow\; \rho=\varepsilon_0\vec{\nabla}\circ\vec{E} \qquad (70)$$

da lei de *Ampére-Maxwell*

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu\vec{j}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \;\rightarrow\; \vec{j}=\frac{\vec{\nabla}\times\vec{B}}{\mu_0}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (71)$$

retornando à segunda lei de Newton, substituindo equação (70) e equação (71) na equação (71) , teremos:

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\int\left\{(\varepsilon_0\vec{\nabla}\vec{E})\vec{E}+(\frac{\vec{\nabla}\times\vec{B}}{\mu_0}-\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})\times\vec{B}\right\}dv \quad (72)$$

onde substituiremos

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}=\frac{\partial(\vec{E}\times\vec{B})}{\partial t}-\vec{E}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \rightarrow$$

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\times\vec{B}=\frac{\partial(\vec{E}\times\vec{B})}{\partial t}-\vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\int\left\{\varepsilon_0(\vec{\nabla}\vec{E})\vec{E}+\frac{\vec{\nabla}\times\vec{B}}{\mu_0}-\varepsilon_0\frac{\partial(\vec{E}\times\vec{B})}{\partial t}-\varepsilon_0\vec{E}(\vec{\nabla}\times\vec{E})\right\}dv \quad (73)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\vec{p}+\varepsilon_0\int(\vec{E}\vec{\nabla}\times\vec{E})dv\right\}=\varepsilon_0\int\left\{(\vec{\nabla}\vec{E})\vec{E}-\vec{E}(\vec{\nabla}\times\vec{E})+(\frac{\vec{\nabla}\times\vec{B}}{\mu_0\varepsilon_0})\times\vec{B}\right\}dv \quad (74)$$

podemos reescrever o lado direito da equação na forma tensorial, onde:

$$\vec{E}(\vec{\nabla}\vec{E})-\vec{E}\times(\vec{\nabla}\vec{E})=\partial_i(E_iE_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}E^2) \quad (75)$$

$$(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B}=\vec{B}(\vec{\nabla}\vec{B})-\vec{B}(\vec{\nabla}\times\vec{B})=\partial_i(B_iB_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}B^2) \quad (76)$$

o lado esquerdo por sua vez

$$\vec{p}=\int p_j dv \quad (77)$$

e podemos finalmente escrever a equação,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{p_j+\varepsilon_0\vec{E}\times\vec{B}\right\}=\varepsilon_0\partial_i\left\{E_iE_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}E^2\right\}+\frac{\partial_i}{\mu_0}\left\{B_iB_j-\frac{1}{2}\delta_{ij}B^2\right\} \quad (78)$$

do vetor de Poynting obtemos a relação:

$$\mu_0 s_j=\vec{E}\times\vec{B} \quad (79)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{p_j+\varepsilon_0\mu_0 s_j\right\}=\partial_i\left\{\varepsilon_0E_iE_j+\frac{B_iB_j}{\mu_0}-\frac{1}{2}\delta_{ij}\varepsilon_0E^2+\frac{B^2}{\mu_0}\right\} \quad (80)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{p_j+\varepsilon_0\mu_0 s_j\right\}-\partial_i\left\{\varepsilon_0E_iE_j+\frac{B_iB_j}{\mu_0}-\frac{1}{2}\delta_{ij}(\varepsilon_0E^2+\frac{B^2}{\mu_0})\right\}=0 \quad (81)$$

onde encontramos a definição do tensor de campo eletromagnético, ou simplesmente tensor de Maxwell.(NETO, 2010)

$$T_{ij}=-\varepsilon_0E_iE_j-\frac{B_iB_j}{\mu_0}+\frac{1}{2}\delta_{ij}(\varepsilon_0E^2+\frac{B^2}{\mu_0}) \quad (82)$$

Essa é a equação de continuidade, e implementa o significado físico de conservação do momento, ou seja, além de energia, o campo eletromagnético conserva momento. (NETO, 2010)

$$\frac{\partial}{\partial t}\{p_j+\varepsilon_0\mu_0 s_j\}+\partial_i T_{ij}=0 \qquad (83)$$

Portanto, não há sentido, em termos de energia e momento, tratar de modo separado, a parte referente ao campo e a parte referente à partícula. O dois termos devem ser trabalhados em conjunto. Em outras palavras, o momento total de uma partícula depende também do campo, passando assim a ser acrescido do produto de um quadrivetor - que desempenha o papel de potencial devido ao campo - com uma constante relativa a carga da partícula. O momento depende portanto, da interação que a partícula tem com campo. (BASSALO, 2007; FRENKEL, 1996; CARROLL, 1997; HERDEIRO, 2011/2012)

Em outras palavras, do mesmo modo que uma partícula elementar, como por exemplo, o elétron, possui carga, e devido a essa carga um campo eletromagnético é gerado. Do mesmo modo, uma partícula com massa gera um campo gravitacional. (NETO, 2010)

O fato do campo conservar energia e momento é uma consequência do eletromagnetismo clássico, e embora, graças à Teoria da Relatividade Restrita tenha unificado o conceito de energia e matéria (como vimos, matéria e energia transformam-se continuamente um no outro), esta implicação de conservação sugere ainda uma preocupação com o campo. Além desta previsão teórica do eletromagnetismo, a Teoria da Relatividade Restrita embora tenha estabelecido uma simetria entre o eletromagnetismo e a mecânica newtoniana, acabou por estabelecer outra assimetria, desta vez, entre a mecânica newtoniana e a própria Teoria da Relatividade Restrita. (HERDEIRO, 2011/2012)

Para compreender a inconsistência que havia entre a gravitação newtoniana e a Teoria da Relatividade Restrita. Imaginemos (isto é um *Gadankenexperiment*) que o Sol desaparece. De acordo com a teoria newtoniana, a ausência do campo gravítico do Sol seria sentido instantaneamente. Porém a causalidade relativista impõe que nenhuma interação, sinal ou informação pode propagar-se mais rápido do que a velocidade da luz. (HERDEIRO, 2011/2012)

CAPÍTULO 4

Teoria da Relatividade Geral

Existem quatro interações fundamentais na natureza. A gravitacional, e a eletromagnética são as que fazem parte do nosso cotidiano. As outras duas, as chamadas interações fraca e forte, não estão ao nosso alcance direto e imediato. A esfera de atuação destas interações se restringem ao cenário da *Mecânica Quântica*, ou seja, ao nível microscópico - subatômico. A *Teoria da Relatividade Geral*, como veremos a seguir nada mais é do que uma teoria relativista da gravidade, e contrasta com a Mecânica Quântica por ser um teoria que explica o universo ao nível macroscópico. (NETO, 2010)

Do mesmo modo que Einstein estendeu o princípio da relatividade de Galileu para toda à física, impondo a *equivalência* de referenciais inerciais, mais tarde, Einstein impõe a equivalência para referenciais não-inerciais, ou seja, estendeu o princípio da relatividade para todos os referenciais, inerciais e não-inerciais. É esta a razão do nome *Relatividade Geral*, significando que não é possível distinguir se a força sofrida por uma massa é devido a ela estar na presença de um campo gravitacional ou num referencial acelerado. (CARROLL, 1997; HERDEIRO, 2011/2012; NETO, 2010)

O formalismo proposto por Minkowski apresenta uma limitação do ponto de vista da relatividade geral, o espaço-tempo em relatividade restrita está contido na geometria euclidiana e não leva em consideração eventuais deformidades como torção ou a curvatura deste plano. Ainda, na relatividade restrita, a menor distância entre dois eventos é uma reta, em relatividade geral, a geometria é curva e encontra o seu formalismo mais preciso e elegante usando elementos de geometria diferencial – não usando a geometria euclidiana portanto, e sim a *geometria riemanniana*. (CARROLL, 1997; HERDEIRO, 2011/2012)

Consideremos inicialmente dois pontos em um espaço *riemanniano* separados por uma distância dx. Sejam $A_u(x)$ um tensor covariante de primeira ordem definido em x e $A_u(x+dx)$ definido em $x+dx$. O conceito usual de derivada não se aplica nesta situação, isto é, à definição:

$$\lim_{dx \to 0} \frac{A_u(x+dx)-A_u(x)}{dx}$$

só é aplicável em espaços euclidianos. (HERDEIRO, 2011/2012)

O deslocamento de um ponto a outro não depende apenas da distância mas sobretudo da curvatura do espaço. (CARROLL, 1997) Assim escrevemos

$$A_u(x) \rightarrow A_u(x) + \Gamma^{\lambda}_{uv} A_{\lambda}(x) dx^{v} \tag{84}$$

Este processo denomina-se *deslocamento paralelo* ou *transporte paralelo*. Os coeficientes Γ^{λ}_{uv} chamam-se conexão e incorpora a curvatura do espaço. A derivada covariante de acordo com Herdeiro (2011/2012) e Neto (2010), portanto, depende das propriedades geométricas do espaço, e é definida por:

$$dx^{v} D_v A_u(x) = A_u(x) - [\Gamma^{\lambda}_{uv} A_{\lambda}(x) dx^{v}] \tag{85}$$

$$dx^{v} D_v A_u = dx^{v} (\partial_v A_u - \Gamma^{\lambda}_{uv} A_{\lambda})$$

$$D_v A_u = \partial_v A_u - \Gamma^{\lambda}_{uv} A_{\lambda} \tag{86}$$

A generalização para tensores de segunda ordem, pode ser feita diretamente. Por exemplo:

$$D_{\alpha} T_{uv} = \partial_{\alpha} T_{uv} - \Gamma^{\lambda}_{u\alpha} T_{\lambda v} - \Gamma^{\lambda}_{v\alpha} T_{u\lambda} \tag{87}$$

A derivada covariante de um produto segue a mesma regra das derivadas elementares. Para verificar isto, consideremos de inicio, dois vetores, $A_u(x)$ e $B_v(x)$. Como o produto $A_u B_v$ é um tensor de segunda ordem. Obtemos:

$$D_{\alpha}(A_u B_v) = \partial_{\alpha}(A_u B_v) - \Gamma^{\lambda}_{u\alpha} A_{\lambda} B_v - \Gamma^{\lambda}_{v\alpha} A_u B_{\lambda} \tag{88}$$

$$D_{\alpha}(A_u B_v) = B_v \partial_{\alpha} A_u + A_u \partial_{\alpha} B_v - \Gamma^{\lambda}_{u\alpha} A_{\lambda} B_v - \Gamma^{\lambda}_{v\alpha} A_u B_{\lambda}$$

$$D_{\alpha}(A_u B_v) = (\partial_{\alpha} A_u - \Gamma^{\lambda}_{u\alpha} A_{\lambda}) B_v + A_u (\partial_{\alpha} B_v - \Gamma^{\lambda}_{v\alpha} A_u B_{\lambda})$$

$$D_{\alpha}(A_u B_v) = B_v D_{\alpha} A_u + A_u D_{\alpha} B_v \tag{89}$$

Podemos obter a derivada covariante de um tensor contravariante a partir de um escalar, por definição de Herdeiro (2011/2012) e Neto (2010):

$$D_v(A^{u} B_u) = \partial_v (A^{u} B_u) \tag{90}$$

$$A^{u} D_v(B_u) + B_u D_v(A^{u}) = A^{u} \partial_v (B_u) + B_u \partial_v (A^{u})$$

$$A^{u} D_v(B_u) + B_u D_v(A^{u}) - A^{u} \partial_v (B_u) = B_u \partial_v (A^{u})$$

como

$$D_v B_u = \partial_v B_u - \Gamma^{\lambda}_{uv} B_{\lambda} \tag{91}$$

substituindo na equação anterior, temos:

$$A^{u}[\partial_v B_u - \Gamma^{\lambda}_{uv} B_{\lambda}] + B_u D_v(A^{u}) - A^{u} \partial_v (B_u) = B_u \partial_v (A^{u}) \tag{92}$$

$$A^{u}[\partial_{v}B_{u}-\Gamma^{\lambda}_{uv}B_{\lambda}-\partial_{v}(B_{u})]+B_{u}D_{v}(A^{u})=B_{u}\partial_{v}(A^{u})$$

$$B_{u}D_{v}(A^{u})-A^{u}\Gamma^{\lambda}_{uv}B_{\lambda}=B_{u}\partial_{v}(A^{u})$$

$$B_{u}D_{v}(A^{u})=B_{u}\partial_{v}(A^{u})+A^{u}\Gamma^{\lambda}_{uv}B_{\lambda}$$

$$A^{u}\Gamma^{\lambda}_{uv}B_{\lambda}\rightarrow B_{u}\Gamma^{u}_{\lambda v}A^{\lambda}$$

$$B_{u}D_{v}A^{u}=B_{u}\partial_{v}A^{u}+B_{u}\Gamma^{u}_{\lambda v}A^{\lambda}$$

$$B_{u}D_{v}A^{u}=B_{u}(\partial_{v}A^{u}+\Gamma^{u}_{\lambda v}A^{\lambda})$$

$$D_{v}A^{u}=\partial_{v}A^{u}+\Gamma^{u}_{\lambda v}A^{\lambda} \qquad (93)$$

Estas noções de geometria diferencial são fundamentais para a compreensão da relatividade geral, como veremos adiante. Ao contrário da derivada usual, a derivada covariante não possui propriedade comutativa, ou seja:

$$D_{\alpha}(D_{v}A_{u})\neq D_{v}(D_{\alpha}A_{u}) \qquad (94)$$

Por definição, de acordo com Herdeiro (2011/2012) e Neto (2010), o *tensor de Riemann,* que descreve a curvatura do espaço-tempo, para qualquer campo A_{u} ,obedece a seguinte relação:

$$D_{\alpha}(D_{v}A_{u})-D_{v}(D_{\alpha}A_{u})=A_{\lambda}R^{\lambda}_{uv\alpha} \qquad (95)$$

Expandindo o primeiro termo, obtemos:

$$D_{\alpha}(D_{v}A_{u})=\partial_{\alpha}(D_{v}A_{u})-\Gamma^{\lambda}_{u\alpha}D_{v}A_{\lambda}-\Gamma^{\lambda}_{v\alpha}D_{\lambda}A_{u} \qquad (96)$$

onde,

$$D_{v}A_{u}=\partial_{v}A_{u}-\Gamma^{\lambda}_{uv}A_{\lambda} \qquad (97)$$

$$D_{v}A_{\lambda}=\partial_{v}A_{\lambda}-\Gamma^{\sigma}_{\lambda v}A_{\sigma} \qquad (98)$$

$$D_{\lambda}A_{u}=\partial_{\lambda}A_{u}-\Gamma^{\sigma}_{u\lambda}A_{\sigma} \qquad (99)$$

implicando em:

$$D_{\alpha}(D_{v}A_{u})=\partial_{\alpha}(\partial_{v}A_{u}-\Gamma^{\lambda}_{uv}A_{\lambda})-\Gamma^{\lambda}_{u\alpha}(\partial_{v}A_{\lambda}-\Gamma^{\sigma}_{\lambda v}A_{\sigma})-\Gamma^{\lambda}_{v\alpha}(\partial_{\lambda}A_{u}-\Gamma^{\sigma}_{u\lambda}A_{\sigma})$$

$$D_{\alpha}(D_{v}A_{u})=\partial_{\alpha}\partial_{v}A_{u}-\partial_{\alpha}(\Gamma^{\lambda}_{uv}A_{\lambda})-\Gamma^{\lambda}_{u\alpha}\partial_{v}A_{\lambda}+\Gamma^{\lambda}_{u\alpha}\Gamma^{\sigma}_{u\lambda}A_{\sigma}-\Gamma^{\lambda}_{v\alpha}(\partial_{\lambda}A_{u}-\Gamma^{\sigma}_{u\lambda}A_{\sigma})$$

$$D_{\alpha}(D_{v}A_{u})=\partial_{\alpha}\partial_{v}A_{u}-A_{\lambda}\partial_{\alpha}\Gamma^{\lambda}_{u\alpha}-\Gamma^{\lambda}_{u\alpha}\partial_{v}A_{\lambda}+\Gamma^{\lambda}_{u\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\lambda v}A_{\sigma}-\Gamma^{\lambda}_{v\alpha}(\partial_{\lambda}A_{u}-\Gamma^{\sigma}_{u\lambda}A_{\sigma})$$

Os termos, $\partial_{\alpha}\partial_{v}A_{u}$; $\Gamma^{\lambda}_{uv}\partial_{\alpha}A_{\lambda}$; $\Gamma^{\lambda}_{u\alpha}\partial_{v}A_{\lambda}$; $\Gamma^{\lambda}_{u\alpha}(\partial_{\lambda}A_{\lambda}-\Gamma^{\sigma}_{u\lambda}A_{\sigma})$ são simétricos com relação aos índices α e v . Estes termos desaparecem na subtração $D_{\alpha}(D_{v}A_{u})-D_{v}(D_{\alpha}A_{u})$. Efetuando esta operação obtemos:

$$A_{\lambda}\partial_{\alpha}\Gamma^{\lambda}_{uv}+\Gamma^{\lambda}_{u\alpha}\Gamma^{\sigma}_{\lambda v}A_{\sigma}+A_{\lambda}\partial_{v}\Gamma^{\lambda}_{u\alpha}-\Gamma^{\lambda}_{uv}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\alpha}A_{\sigma}$$

$$A_\lambda \partial_\sigma \Gamma^\lambda_{u\alpha} - A_\lambda \partial_\alpha \Gamma^\lambda_{u\alpha} + \Gamma^\lambda_{u\alpha} \Gamma^\sigma_{\lambda v} A_\sigma - \Gamma^\lambda_{uv} \Gamma^\sigma_{\lambda\alpha} A_\sigma$$

$$A_\lambda (\partial_v \Gamma^\lambda_{u\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^\lambda_{uv} + \Gamma^\sigma_{u\alpha} \Gamma^\lambda_{\sigma v} - \Gamma^\sigma_{uv} \Gamma^\lambda_{\sigma\alpha})$$

Voltando à definição do tensor de Riemann:

$$D_\alpha (D_v A_u) - D_v (D_\alpha A_u) = A_\lambda R^\lambda_{uv\alpha}$$

$$A_\lambda R^\lambda_{uv\alpha} = A_\lambda (\partial_v \Gamma^\lambda_{u\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^\lambda_{uv} + \Gamma^\sigma_{u\alpha} \Gamma^\lambda_{\sigma v} - \Gamma^\sigma_{uv} \Gamma^\lambda_{\sigma\alpha})$$

$$R^\lambda_{uv\alpha} = \partial_v \Gamma^\lambda_{u\alpha} - \partial_\alpha \Gamma^\lambda_{uv} + \Gamma^\sigma_{u\alpha} \Gamma^\lambda_{\sigma v} - \Gamma^\sigma_{uv} \Gamma^\lambda_{\sigma\alpha} \quad (100)$$

contrações do tensor de Riemann produzem o *tensor de Ricci*, α → λ.

$$R_{uv} = R^\lambda_{uv\alpha} \quad (101)$$

o tensor de Riemann é simétrico em relação aos índices u e v. Contraindo novamente obtemos o *escalar de Ricci*

$$R = g^{uv} R_{uv} \quad . \quad (102)$$

As *equações de Einstein* que descrevem o campo gravítico por definição de Carroll (1997) e Herdeiro (2011/2012) são:

$$G_{uv} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{uv} \quad (103)$$

O *tensor de Einstein* pode ser definido, ainda de acordo com Carroll (1997) e Herdeiro (2011/2012), em função do tensor de Ricci e do escalar de Ricci:

$$G_{uv} \equiv R_{uv} - \frac{1}{2} g_{uv} R \quad (104)$$

Substituindo a definição acima nas equações de Einstein, obtemos:

$$R_{uv} - \frac{1}{2} g_{uv} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{uv} \quad (105)$$

Adotando o sistema relativístico de unidade, em que definimos, de acordo com Herdeiro (2011/2012), G=c=1, as equações adquirem a seguinte forma:

$$R_{uv} - \frac{1}{2} g_{uv} R = 8\pi T_{uv} \quad (106)$$

O tensor de Einstein relaciona a curvatura do espaço-tempo com a distribuição de matéria. Usando g^{uv} na equação anterior,

$$g^{uv} R_{uv} - \frac{1}{2} g^{uv} g_{uv} R = 8\pi g^{uv} T_{uv} \quad (107)$$

$$-R = 8\pi T \quad (108)$$

Voltando à equação e substituindo $-R = 8\pi T$

$$R_{uv}+\frac{1}{2}g_{uv}(8\pi T)=8\pi T_{uv} \tag{109}$$

$$R_{uv}=8\pi\left(T_{uv}-\frac{1}{2}g_{uv}T\right) \tag{110}$$

No vácuo, onde não há presença de matéria, o tensor energia-momento é nulo, as equações de Einstein portanto se reduzem a elegante afirmação. (CARROLL, 1997; HERDEIRO, 2011/2012; NETO, 2010)

$$R_{uv}=0 \tag{111}$$

É conveniente observar que a relatividade geral nos. mostra que o campo gravitacional está intrinsecamente ligado à matéria que o gera, e que a matéria é capaz de alterar as propriedades geométricas do espaço-tempo. Não é possível dissociar o campo gravitacional à matéria que o gera, do mesmo modo que não podemos eliminar um campo elétrico de uma carga elétrica. (CARROLL, 1997; NETO, 2010)

A geometria do espaço-tempo é portanto determinada pela presença de matéria e energia. Qualitativamente definimos o tensor energia-momento como fonte de densidades e fluxos de energia e momento – a matéria e a energia determinam como o espaço deve se curvar, do mesmo modo que o espaço-tempo determina como a matéria e a energia deve se mover. (HERDEIRO, 2011/2012)

O tensor energia-momento é simétrico e possui traço nulo, ou seja:

$$T_{uv}=T_{vu} \;\rightarrow\; T_{uv}g^{uv}=T \;\rightarrow\; T=0$$

Einstein compreende que a teoria newtoniana descreve com exatidão e elegância os fenomenos físicos que envolvem velocidades muito menores do que a da luz e campo gravitacional fraco. Então, superar e ao mesmo tempo englobar a mecânica clássica é uma condição *sine qua non* para o sucesso da nova teoria. Esta condição foi satisfeita e demonstrada pelo próprio Einstein em 1915, um ano mais tarde, o físico alemão Karl Schwarzschild obteve a solução exata das equações de campo no vácuo – conhecida como *métrica de Schwarzschild*, conseguindo explicar com sucesso o fenomeno da precessão da orbita de Mercúrio e prevendo novos fenomenos, entre eles, a deflexão de um raio de luz devido a presença de matéria. (HERDEIRO, 2011/2012)

A métrica de Schwarzschild é responsável também pela previsão teórica de fenomenos como a radiação gravitacional e o mais controverso, a Teoria do

Buraco Negro.

Vimos que o tensor de Riemann descreve a curvatura do espaço-tempo em função da conexão, mas a conexão propriamente ainda não foi explorada, definimos por conexão, de acordo com Carroll (1997), Herdeiro (2011/2012) e Neto (2010), o seguinte ente matemático:

$$\Gamma^{\lambda}_{uv}=\frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \bar{x}^{u}}\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{v}}\Gamma^{\alpha}_{\sigma p}+\frac{\partial \bar{x}^{\lambda}}{\partial x^{\sigma}}\frac{\partial^{2} x^{\sigma}}{\partial \bar{x}^{u}\partial \bar{x}^{v}}A_{\sigma} \tag{112}$$

O segundo termo da transformação de conexão evidência o seu caráter não tensorial. Esta definição é no entanto genérica, isto é, define um conceito arbitrário de conexão. Uma escolha possível e convencional, que aliás dá coerência ao nosso trabalho até aqui, é impor que a conexão seja simétrica. (HERDEIRO, 2011/2012; NETO, 2010)

$$\Gamma^{\lambda}_{uv}=\Gamma^{\lambda}_{vu}$$

Esta escolha implementa em relatividade geral a ausência de torção e o princípio de equivalência que discutimos anteriormente. Matematicamente a primeira coisa que a propriedade de simetria implica, é que a derivada covariante de um tensor métrico é zero. (CARROLL, 1997; HERDEIRO, 2011/2012; NETO, 2010)

$$D_{\alpha}g_{uv}=0 \tag{113}$$

Embora a derivada covariante do tensor métrico seja nula, ela obedece à regra de tensores usuais, ou seja:

$$D_{\alpha}g_{uv}=\partial_{\alpha}g_{uv}-\Gamma^{\lambda}_{u\alpha}g_{\lambda v}-\Gamma^{\lambda}_{v\alpha}g_{\lambda u} \tag{114}$$

ou simplesmente

$$\partial_{\alpha}g_{uv}-\Gamma^{\lambda}_{u\alpha}g_{\lambda v}-\Gamma^{\lambda}_{v\alpha}g_{\lambda u}=0 \tag{115}$$

realizando permutações cíclicas nos índices u,v e α na equação acima, obteremos:

$$\partial_{v}g_{\alpha u}-\Gamma^{\lambda}_{\alpha v}g_{\lambda u}-\Gamma^{\lambda}_{uv}g_{\lambda\alpha}=0 \tag{116}$$

$$\partial_{u}g_{v\alpha}-\Gamma^{\lambda}_{vu}g_{\lambda\alpha}-\Gamma^{\lambda}_{\alpha u}g_{\lambda v}=0 \tag{117}$$

multiplicando as equações (116) e (117) por $\frac{1}{2}$, e multiplicando a equação (115) por $-\frac{1}{2}$, e somando às três equações:

$$\frac{1}{2}\left\{\partial_\alpha g_{uv}+\partial_u g_{v\alpha}-\partial_\alpha g_{uv}\right\}+\frac{1}{2}g_{\lambda v}\left\{\Gamma^\lambda_{u\alpha}-\Gamma^\lambda_{\alpha u}\right\}+\frac{1}{2}g_{u\lambda}\left\{\Gamma^\lambda_{v\alpha}-\Gamma^\lambda_{\alpha v}\right\}-\frac{1}{2}g_{\alpha\lambda}\left\{\Gamma^\lambda_{uv}+\Gamma^\lambda_{vu}\right\}=0$$

$$\frac{1}{2}\left\{\partial_\alpha g_{uv}+\partial_u g_{v\alpha}-\partial_\alpha g_{uv}\right\}+g_{\lambda v}\Gamma^\lambda_{[u\alpha]}+g_{u\lambda}\Gamma^\lambda_{[v\alpha]}-g_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{(uv)}=0$$

$$\Gamma^\lambda_{(uv)}=\frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}\left\{\partial_\alpha g_{uv}+\partial_u g_{v\alpha}-\partial_\alpha g_{uv}\right\} \quad (118)$$

Em outras palavras, a conexão simétrica é determinada pela métrica. Em último caso a curvatura do espaço-tempo é expressa portanto em função do tensor métrico. (HERDEIRO, 2011/2012)

CAPÍTULO 5

Considerações Finais

O termo relatividade descreve, na melhor das hipóteses, o início da investigação científica de Einstein – a relatividade dos movimentos entre distintos referenciais inerciais. Mas não representam de maneira alguma o que há de mais belo, profundo e verdadeiro do trabalho de Einstein – a essência da relatividade é justamente a busca por constância, por princípios fundamentais sólidos. (GAZZINELLI, 2009)

Ao mesmo tempo que a Teoria da Relatividade impõe limites físicos ao movimento no universo – não há partícula que se mova acima da velocidade da luz e as leis da física devem ser válidas em qualquer referencial, a relatividade impõe limites às teorias que a antecederam – a mecânica clássica não pode explicar fenômenos como o movimento de uma partícula que se move em velocidade próxima a da luz. A relatividade geral supera e engloba a mecânica clássica. Não podemos esquecer que a Teoria da Relatividade não viola nenhum princípio da mecânica clássica. Por exemplo, o princípio de conservação de energia e o princípio de conservação do momento, não são violadas, mas são unificadas – princípio de conservação do *quadrimomento* – o que nada mais é que o resultado da proposta unificadora da Teoria da Relatividade Restrita. Por outro lado, a Teoria da Relatividade, ao mesmo tempo que preserva princípios da mecânica newtoniana, ela também rompe com a interpretação newtoniana do espaço e do tempo, como vimos, o espaço e o tempo do ponto de vista matemático é basicamente a mesma coisa. (BASSALO, 2006; HERDEIRO, 2011/2012)

Por uma questão de foco não deduzimos a lei do inverso do quadrado, que resulta da definição de campos gravitacionais fracos e pode ser obtido igualando o tensor de Ricci a zero e solucionando a equação. Também omitimos à dedução do tensor de Einstein que pode ser obtido através de sucessivas operações de derivas covariantes da *segunda identidade de Bianchi. (*NETO, 2010; HERDEIRO, 2011/2012)

As identidades de Bianchi seriam melhores aproveitadas em um estudo aprofundado da Teoria da Relatividade Geral. Para um estudo ainda mais completo em Relatividade Restrita, seria necessário explorar a interpretação geométrica das transformações de Lorentz. (BASSALO, 2006; GAZZINELLI, 2009)

Quando falamos em Relatividade Geral estamos quase sempre falando em T*eoria Clássica de Campos* – não levando em conta as interações fraca e forte, o motivo disto é muito simples, a gravidade tem grande alcance mas é muito fraca e ao nível da mecânica quântica é desprezível, por outro lado, as demais interações não tem o mesmo alcance que a gravidade tem e são desprezadas na mesma medida que a gravidade se torna mais atuante. (NETO, 2010)

Uma perspectiva possível e futura de trabalho está portanto em T*eoria Quântica de Campos* que, como o nome sugere, busca unificar a Teoria da Relatividade Geral com a Teoria Quântica. Uma outra perspectiva de trabalho futuro, reside em um estudo mais elaborado das equações de Einstein e uma abordagem mais densa em relatividade geral.

Bibliografia

BARATA, João Carlos Alves. **Curso de Física Matemática: Spinores e o Grupo de Lorentz**. 2015. Disponível em: http://denebola.if.usp.br/~jbarata/Notas_de_aula/capitulos.html. Acesso em: 18/11/2015.

BASSALO, José Maria Filardo. **Eletrodinâmica quântica.**2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2006.

BASSALO, José Maria Filardo. **Eletrodinâmica clássica.**2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007.

CARROLL, Sean M.. ***Lecture Notes on General Relativity***. 1997. Disponível em: http://arxiv.org/pdf/gr-qc/9712019.pdf. Acesso em: 30/08/2015.

FRENKEL, Josif. **Princípio de eletrodinâmica clássica.** 2. ed. São Paulo: EDUSP, 1996.

GAZZINELLI, Ramayana. **Teoria da relatividade especial**. 2. ed. São Paulo: Blücher, 2009.

HERDEIRO, Carlos A. R.. ***Notas de teoria da relatividade***. 2011/2012. Disponível em: http://gravitation.web.ua.pt/sites/gravitation.web.ua.pt/files/Notas_Relatividade.pdf. Acesso em: 30/08/2015.

NETO, João Barcelos. **Matemática para físicos com aplicações: Vetores, tensores e espinores, volume 1.** 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

RENN, Jürgen. A física clássica de cabeça para baixo: Como Einstein descobriu a teoria da relatividade especial. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 27, n. 1, p. 27 - 36, 2004.