UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE CASSILÂNDIA
CURSO DE MATEMÁTICA

CECÍLIA MARQUES PEREIRA

LOGARITMOS: Aspectos Históricos e Aplicações Compatíveis ao Ensino Médio

Cassilândia
2015

CECÍLIA MARQUES PEREIRA

LOGARITMOS: Aspectos Históricos e Aplicações Compatíveis ao Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS, Unidade Universitária de Cassilândia-MS, como exigência parcial para Licenciatura do curso de Matemática.

Orientador: Prof. Me. Valmir Ancelmo Dias

Cassilândia

2015

P49L Pereira, Cecília Marques

Logaritmos: aspectos históricos e aplicações compatíveis ao ensino médio / Cecília Marques Pereira. Cassilândia, MS: UEMS, 2015.

40p. ; 30cm.

Monografia (Graduação) – Licenciatura em Matemática – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2015.

Orientador: Prof. Msc. Valmir Ancelmo Dias.

1. Logaritmos 2. Aspectos históricos 3. Propriedades e aplicações I. Título.

CECÍLIA MARQUES PEREIRA

LOGARITMOS: Aspectos Históricos e Aplicações Compatíveis ao Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso Apresentado e Aprovado para obtenção do grau de Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Unidade Universitária de Cassilândia.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Me. Valmir Ancelmo Dias
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – Orientador

____

Prof. Me. Eder Pereira Neves
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – Examinador

____

Prof.ª Dra. Regina Litz Lamblém
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – Examinadora

Cassilândia,____/___/_______/

DEDICATÓRIA

Dedico, a Deus, que conhece meu coração.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado a oportunidade de concluir este curso de Licenciatura em Matemática.

Ao meu esposo, pois se não tivesse sido por ele, às vezes não estaria aqui e nem tinha chegado até o final e também à minha filha por ter compreendido todas as noites que ela teve que ficar em casa com sua tia ou das vezes que teve que ir até a universidade para que eu não perdesse aulas.

Não posso deixar de agradecer meu professor e orientador Valmir, pois, se não fosse por ele ter me ajudado e orientado eu não teria conseguindo desenvolver este trabalho.

Enfim, quero agradecer todos que, de uma forma e outra, me incentivaram e me ajudaram a vencer esta etapa da minha vida, que jamais eu imaginaria que conseguiria ir até o final.

RESUMO

Neste trabalho, através de pesquisa bibliográfica, serão abordados alguns aspectos significativos do desenvolvimento histórico dos Logaritmos, definição, propriedades e algumas aplicações compatíveis ao Ensino Médio. Pretendemos, com isso, enfatizar a importância de estudar Logaritmos no Ensino Médio e, talvez, facilitar o entendimento sobre o tema, a quem possa se interessar.

PALAVRAS-CHAVE: Logaritmos; Aspectos Históricos; Propriedades; Aplicações; Importância.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Dentre as dificuldades que cada aluno possui, não só no Ensino Fundamental, mas também no Ensino Médio, figuram os Logaritmos.

Na maioria dos livros didáticos do Ensino Médio os Logaritmos são apresentados como sendo o expoente de uma potência, ou seja, se $b^x = a$, então x é o LOGARITMO de a na base b.

Os Logaritmos possuem aplicação em diversos problemas do nosso cotidiano, como, por exemplo, na resolução de problemas de Matemática Financeira, de crescimento populacional (Geografia), de Medicina, entre outros. Daí a motivação para a escolha do tema Logaritmos para o desenvolvimento desse Trabalho de Conclusão de Curso.

Fazendo uma revisão bibliográfica, dentre os vários trabalhos relevantes encontrados sobre a temática, ressaltamos as Dissertações de Mestrados de Ferreira (2006) que propõe verificar a utilização de uma sequência didática, elaborada, segundo as etapas da Engenharia Didática, com problemas que privilegiam situações reais incentivando à pesquisa e atividades relacionadas ao surgimento dos Logaritmos, contribuindo para a construção e compreensão do conceito de Logaritmo por parte dos alunos; de Oliveira (2013) que trata da utilização dos Objetos de Aprendizagem (OA) em salas de aula, sendo objetivo do mesmo investigar se o uso de objetos de aprendizagem pode facilitar o desenvolvimento de conteúdos em sala de aula, favorecendo ao processo ensino aprendizagem; de Couto (2013) que buscou por um estudo histórico dos logaritmos, dando atenção especial à construção formalizada de seus conceitos e sugeriu uma aplicação no Ensino Médio com a utilização de um software matemático; de Silva (2013) que elaborou uma sequência didática que deve ser aplicada em turmas do 1º ano do Ensino Médio, seguindo as orientações estabelecidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais; de Kropf (2014) que trata de possíveis aplicações dos Logaritmos à área de saúde; e de Vidigal (2014) que propõe analisar a utilização de uma sequência de atividades que privilegiam situações problemas reais e históricas, incentivando a investigação Matemática e contribuindo para a ressignificação do conceito de Logaritmo, bem como, para a compreensão de algumas aplicações por parte dos alunos. Porém, os enfoques dados em cada um dos trabalhos citados anteriormente são diferentes, ou num nível mais aprofundado, do que queremos dar no nosso trabalho.

O nosso trabalho tem como objetivo abordar alguns aspectos históricos dos Logaritmos, definição, propriedades e algumas aplicações compatíveis ao Ensino Médio; visando ressaltar a importância desse assunto para este nível.

Para isso, organizamos este trabalho em capítulos. No Capítulo 1, apresentaremos uma sucinta história desde o surgimento dos Logaritmos até os dias atuais.

No Capítulo 2, faremos um estudo, a partir da definição de Logaritmo, de suas propriedades e da Função Logarítmica.

No Capítulo 3, apresentaremos algumas aplicações dos Logaritmos, em diversos tipos de problemas, compatíveis ao Ensino Médio.

CAPÍTULO 1

DO SURGIMENTO AOS DIAS ATUAIS: Uma sucinta história sobre os Logaritmos

A ideia de número que conhecemos hoje sofreu ao longo do tempo muitas modificações significativas tanto na grafia quanto na forma das operações aritméticas.

Para Eves (2004) muitos cálculos numéricos foram desenvolvidos ao longo do tempo para resolver diversos problemas, principalmente nos campos da astronomia, da navegação, do comércio, na engenharia e até mesmo a serviço da guerra, o desenvolvimento destes cálculos tornaram as operações cada vez mais rápidas e mais precisas e cresceram continuamente.

Ainda Eves (2004) enfatiza que quatro notáveis invenções contribuíram para esta crescente demanda: a notação Indu-árabica, as Frações Decimais, os Logaritmos e os Modernos Computadores. Durante o desenvolvimento deste trabalho vamos dar mais atenção o terceiro destes grandes dispositivos aritméticos.

Portanto, logo após a difusão dos números Indu-arábico dado por Leonardo Fibonacci (1175-1250) e as Frações Decimais de Simon Stevin (1548-1620) a história atribui uma enorme contribuição referente aos Logaritmos a John Napier (1550-1617).

Garbi (2006) destaca que a glória máxima britânica do século XVI foi John Napier, nascido de família nobre escocesa, se destacou nas áreas de Astronomia, Engenharia, Física e Matemática.

Imagem 1: John Napier (1550-1617)

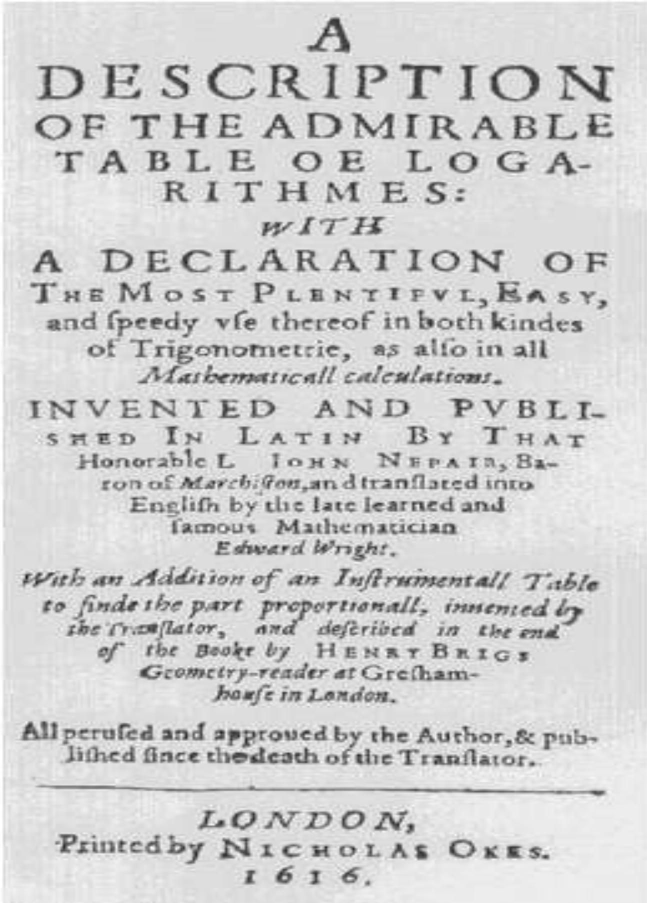
Fonte: Garbi (2006, p. 126)

No ramo da Matemática, Napier se destacou contribuindo com quatro produtos, que o colocou em um patamar de gênio para história da Matemática, que são eles, segundo Eves (2004):

> (...) (1) a invenção dos logaritmos; (2) um engenhoso mnemônico, conhecido como regra das partes circulares, para reproduzir fórmulas usadas na resolução de triângulos esféricos; (3) pelo menos duas fórmulas trigonométricas de um grupo de quatro conhecidas como *analogias de Napier,* úteis na resolução de triângulos esféricos obliquângulos; (4) a invenção de um instrumento, conhecido como *barras de Napier* ou *ossos de Napier*, usado para efetuar mecanicamente multiplicações, divisões e extrair raízes quadradas de números. (EVES, 2004, p.342)

A obra Mirifici Logaritrmorum Canonis Descriptio (Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos), publicado em 1614, Napier apresentou seu revolucionário método para tornar menos engenhosos os cálculos aritméticos, principalmente aqueles ligados a Astronomia.

Figura 2: Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos, 1614



A
DESCRIPTION
OF THE ADMIRABLE
TABLE OE LOGA-
RITHMES:
WITH
A DECLARATION OF
THE MOST PLENTIFVL, EASY,
and speedy vse thereof in both kindes
of Trigonometrie, as also in all
Mathematicall calculations.
INVENTED AND PVBLI-
SHED IN LATIN BY THAT
Honorable L. IOHN NEPAIR, Ba-
ron of *Marchiston*, and translated into
English by the late learned and
famous Mathematician
Edward Wright.
*With an Addition of an Instrumentall Table
to finde the part proportionall, invented by
the Translator, and described in the end
of the Booke by* HENRY BRIGS
Geometry-reader at Gresham-
house in London.
All perused and approued by the Author, & pub-
lished since the death of the Translator.

LONDON,
Printed by NICHOLAS OKES.
1616.

Fonte: logaritmomusica.html

Como sabemos hoje os logaritmos são instrumentos de cálculo muito poderoso, pois reduzem multiplicações e divisões, de considerável complexidade, em simples processos de adição e subtração.

A relação trigonométrica $2\cos A.\cos B = \cos(A+B)+\cos(A-B)$, bastante conhecida na época de Napier, foi uma desencadeadora de tudo isso, pois a ideia se desenvolve fazendo com que o produto de dois números $2\cos A.\cos B$ dê lugar a adição $\cos(A+B)+\cos(A-B)$.

Para Eves (2004) as três fórmulas trigonométricas $2\cos A\cos B = sen(A+B)+sen(A-B)$, $2\cos A\, senB = sen(A+B)-sen(A-B)$ e $2senA\, senB = \cos(A-B)-\cos(A+B)$, juntamente com a que mencionamos anteriormente, são consideradas as quatro relações trigonométricas conhecidas como fórmulas de Werner. Isto se deve ao fato que o matemático alemão Johannes Werner (1468-1528) tê-las utilizadas para simplificar cálculos de comprimentos relacionados à Astronomia.

Estas relações foram utilizadas por matemáticos por muito tempo e estas conversões de produto em adições eram conhecidas na época como método da prostaférese, cujo seu significado é de origem grega que denomina “adição e subtração”.

Embora Napier dominasse a técnica da prostaférese, ele deixou-a de lado para desenvolver um método mais simplista que não restringia somente aos senos e cossenos dos ângulos das fórmulas de Werner. Nas abordagens de Napier para eliminar os cálculos tenebrosos envolvendo multiplicações e divisões, seu método se desvincula da prostaférese pelo fato que se baseia em termos de uma progressão geométrica.

Para Iezzi (2010), a técnica de Napier foi associar os termos da Progressão Geométrica (PG): b, b^2, b^3, b^4, b^5,…, b^n, com os termos de uma Progressão Aritmética (PA): 1, 2, 3, 4, 5,..., n. Neste caso, o produto dos dois termo da primeira progressão é $b^x.b^y$, é associado à soma de $x + y$, dos termos da segunda progressão.

Por exemplo:

Tabela 1: Associação de uma PA com uma PG

PA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
PG	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16394

Fonte Própria, 2015.

Para calcular, por exemplo:

512×16, basta observar que 512 na segunda linha corresponde a 9 da primeira. E, 16 na segunda linha corresponde a 4 na primeira.

Como, $9 + 4 = 13$ e 13 corresponde a 8192 na segunda linha.

Assim, $512 \times 16 = 8192$ é o resultado encontrado em uma simples operação de adição.

Boyer (1999), afirma que a obra de Napier pode ser explicada facilmente, pois para manter uma progressão geométrica de potência inteira de um número dado, é essencial que o número dado seja muito próximo de um. O número escolhido por Napier foi $(1-10^{-7}) = 0{,}9999999$

> [...] Assim os termos da progressão de potências crescentes ficam realmente próximos – próximos demais, na verdade. Para chegar a um equilíbrio e evitar decimais Napier multiplicou cada potência por 10^7. Isto é, se $N=10^7(1-1/10^7)^L$, então L é o "logaritmo" de Napier do número N. Assim seu logaritmo de 10^7 é 0, seu logaritmo de $10^7(1-1/10^7)$= 0,9999999 é 1 [...]. (BOYER, 1999, p.214).

Boyer (1999) continua enfatizando que, a Função Logarítmica está diretamente associada à definição de Napier e, nas demonstrações onde envolve Logaritmo. No ano de 1614, logo após a publicação de Napier, as definições e aplicações dos Logaritmos chegaram ao seu apogeu, despertando interesse de muitos matemáticos da época, dentre estes, o entusiasta docente e pesquisador Henry Briggs (1561-1631), professor de geometria do Gresham College de Londres e Oxford. Em uma visita a Napier na Escócia, eles decidiram modificar o método dos Logaritmos. Briggs sugeriu o uso de potência de base dez, e Napier concordou, pois ele já teria pensado nisso. Eves (2004) destaca que foi neste encontro que Napier e Briggs reconheceram realmente que as tábuas de Logaritmos deveriam ser alteradas, surgindo assim os Logaritmos Briggsianos ou comuns, os Logaritmos que conhecemos hoje, de base decimal.

Após a morte de Napier caiu sobre Briggs a responsabilidade de construir a primeira tabela dos Logaritmos. Briggs não fez como Napier fazia: colocar as potências de um número perto de 10, ele já começou logo com $\log 10 = 1$ e após, encontrou outros Logaritmos tomando raízes sucessivas. No mesmo ano da morte de Napier, Briggs publicou os Logaritmos de 1 a 1000, sendo calculado cada um com quatorze casas decimais. Em 1624, Briggs aumentou a tabela dos Logaritmos comum de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000. Foi a partir desse trabalho que os Logaritmos passaram a ser realizado como é hoje. A invenção dos Logaritmos teve aceitação quase que imediata, talvez, por sua grande utilidade.

Para Eves (2004) a palavra Logaritmo significa "o número de razão" e foi adotada por Napier depois dele ter usado a expressão número artificial. Briggs introduziu a palavra mantissa, que é um termo latino de significado "adição" ou "contrapeso" e que no século XVII ficou conhecido como "apêndice". Ainda Eves (2004) destaca que as impressões das tabelas de resultados de Logaritmos também traziam as tabelas de mantissa, somente no século XVIII se tornou como praxe apresentar somente as tabelas de mantissa.

Eves (2004) continua enfatizando que a maravilhosa invenção de Napier foi entusiasticamente adotada por toda Europa. No ramo da Astronomia, em particular Pierre Simon de Laplace (1749-1827) afirmou que, a invenção dos Logaritmos "ao diminuir o trabalho, dobrou a vida do astrônomo". Boaventura Cavalieri (1598-1647) dentre as suas contribuições para a Matemática, empenhou-se a divulgar os Logaritmos pela Itália, de maneira análoga aconteceu com Johann Kepler (1571-1630) na Alemanha, posteriormente nas aplicações musicais de Johann Sebastian Bach (1685-1750) e Edmund Wingate (1596-1656) na França e muitos outros Matemáticos.

Eves (2004) destaca ainda que muitos historiadores que escrevem sobre a história da Matemática não colocam Napier como sendo o principal inventor dos Logaritmos:

> O único rival de Napier quanto à prioridade da invenção dos logaritmos foi o suíço Jobst Bürgi (1552-1632), um construtor de instrumentos. Bürgi concebeu e construiu uma tábua de logaritmos independente de Napier e publicou seus resultados em 1620, seis anos depois de Napier anunciar sua descoberta ao mundo. Embora os dois tenham concedido a ideia dos logaritmos muito antes de publicá-la, acredita-se geralmente que Napier teve a ideia primeiro. Entretanto a abordagem de Napier era geométrica, a de Bürgi era algébrica. Hoje em dia, um logaritmo é universalmente considerado como expoente; assim, se $n = b^x$, dizendo que x é o logaritmo na base b. Dessa definição, as leis de logaritmos decorrem imediatamente das leis dos expoentes. Uma das incongruências da história da matemática é que os logaritmos foram descobertos antes de usarem expoentes. (EVES, 2004, p.346)

No que se refere a Bürgi, Garbi (2006) destaca que a participação deste importante matemático para o desenvolvimento dos Logaritmos foi notória, ao gerar tabelas de Logaritmos através de potenciação do número 1,0001, Bürgi produziu tabelas logarítmicas próxima do número e, as tabelas que Napier utilizava eram caracterizadas por números próximos de $1/e$, é muito significativo estas duas característicass tanto de Napier quanto de Bürgi, pois muitos historiadores acreditam se tratar de um outro exemplo no ramo da Matemática de uma invenção ser desenvolvida independentemente por duas pessoas.

Para Garbi (2006) a participação de Leonard Paul Euler (1707-1783) no desenvolvimento dos Logaritmos foi importantíssima. Das diversas contribuições que realizou para a Matemática, Euler se destacou por apresentar uma caracterização do número natural e irracional e, sendo o resultado do limite $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, na qual aproxima dos resultados encontrados na tabela de Napier e Bürgi. Euler desenvolveu uma nova base para os Logaritmos conhecido como Logaritmo Natural (ln) ou Logaritmo na Base de Euler (e).

Um importante estudo que utiliza os Logaritmos Decimais foi desenvolvido por Charles Francis Richter (1900-1985) juntamente com Beno Gutenberg (1889-1960), dois cientistas no ramo da Sismologia que desenvolveram uma escala que quantifica a energia liberada pelos terremotos. A escala Richter, como é conhecida, é baseada na amplitude das ondas produzidas pelos terremotos, eles definiram magnitude de um terremoto como sendo o Logaritmo na base 10 da amplitude máxima das ondas.

Ainda Eves (2004) enfatiza a importância do Logaritmo para o desenvolvimento da Matemática. Pelo mundo, muitos países adotaram o ensino de Logaritmos em sua grade curricular, em destaque a Nicarágua país situado na América Central em 1971 em uma série comemorativa lançou selos que continham fórmulas matemáticas, uma delas era uma homenagem a Napeir e sua invenção, os Logaritmos. Muitos cientistas da época não pouparam elogios à iniciativa da Nicarágua, pois estas fórmulas, na opinião deles, contribuíram muito mais para o crescimento da humanidade do que os reis e generais que muitas vezes apareciam nos selos e postais.

Imagem 3: Selo dedicado aos Logaritmos de Nepier

Fonte: selos-postais-de-matematica.html

Há muito tempo se ensina Logaritmo, a figura de uma estudante com régua e instrumentos que favorecia o cálculo no início do século XX, dá lugar às máquinas de calcular, das mais simples até mesmo aos sofisticados computadores, Eves (2004) destaca a importância de ensinar Logaritmos mesmo em tempos modernos, pois:

> Hoje, porém com o advento das espantosas e cada vez mais baratas calculadoras portáteis, ninguém mais em sã consciência usa uma tábua de logaritmos ou régua de cálculo para fins computacionais. O ensino de logaritmos, como um instrumento de cálculo, está desaparecendo nas escolas, os famosos construtores de réguas de cálculo de precisão estão desativando sua produção e célebres manuais de tábuas matemáticas estudam a possibilidade de abandonar as tábuas de logaritmos. Os produtos da grande invenção de Napier tornaram-se peças de museu.
> A função logaritmo, porém, nunca morrerá, pela simples razão de que as variações exponenciais e logarítmicas são partes vitais da natureza e da análise, consequentemente, um estudo das propriedades da função logaritmo e de sua inversa, a função exponencial, permitirá sempre uma parte importante do ensino da matemática. (EVES, 2004, p.347)

Segundo Iezzi (2010), os Logaritmos só tiveram inserção nos livros didáticos, após a Reforma da Educação Brasileira proposta por Benjamim Constant, no Decreto nº 891, em 8 de novembro de 1890. Após esta reforma que os Logaritmos começaram a ser apresentados por Teoria Algébrica dos Logaritmos, mas, só se tornou oficial, em 1912, nos livros didáticos de Matemática.

Segundo Silva (2013) os Logaritmos são ensinados, há algum tempo, no Ensino Médio e no começo dos cursos de Matemática. Embora a invenção dos Logaritmos tenha sido um acessório para facilitar as contas de números grandes, hoje pode se dizer que eles são importantes para entendermos alguns fenômenos no nosso quotidiano. O Logaritmo sempre ocupou uma posição de destaque no currículo escolar brasileiro, uma prova disso, é que desde a criação desse currículo até os dias atuais, o mesmo, faz parte dos conteúdos que os jovens brasileiros devem aprender.

CAPÍTULO 2

LOGARITMOS: Definição, Propriedades e Função Logarítmica

Neste Capítulo faremos um estudo, a partir da Definição de Logaritmo, de suas propriedades e da Função Logarítmica. Embasaremos nossa apresentação do conteúdo em Iezzi (2010), Lima (2012), Paiva (2013), e Souza (2013).

2.1 UMA SITUAÇÃO MOTIVADORA E DEFINIÇÃO

A seguinte situação motivadora está presente em Iezzi (2010, p. 151): Um caminhão custa hoje R$100.000,00 e sofre uma desvalorização de 10% por ano de uso. Depois de quanto tempo de uso o valor de veículo será igual a R$20.000,00?

Para resolver, sem o uso de Logaritmos, podemos pensar que a cada ano que passa o valor do caminhão fica sendo 90% do que um ano atrás, então, seu valor evolui da seguinte forma:

Tabela 2: Evolução do Valor do Caminhão

Tempo Decorrido (em anos)	Valor Inicial do Caminhão no Período (em R$)	Depreciação do Caminhão – 10% do Valor Inicial do Caminhão no Período (em R$)	Valor Final do Caminhão no Período (em R$)
01	100.000,00	10.000,00	90.000,00
02	90.000,00	9.000,00	81.000,00
03	81.000,00	8.100,00	72.900,00
04	72.900,00	7.290,00	65.610,00
05	65.610,00	6.561,00	59.049,00
06	59.049,00	5.904,90	53.144,10
07	53.144,10	5.314,41	47.829,69
08	47.829,69	4.782,97	43.046.72

09	43.046.72	4.304.67	38.742,05
10	38.742,05	3.874,20	34.867,85
11	34.867,85	3.486,78	31.381,07
12	31.381,07	3.138,11	28.242,96
13	28.242,96	2.824,30	25.418,66
14	25.418,66	2.541,87	22.876,79
15	22.876,79	2.287,68	20.589,11
16	20.589,11	2.058,91	18.530,20

Fonte Própria, 2015.

Podemos perceber que entre o 15º e 16º ano o valor do caminhão estará em R$20.000,00. Utilizando Logaritmos, além de resolvermos bem mais rápido, obteremos o instante exato em que o caminhão estará valendo R$20.000,00, o que será possível (e feito) na seção 2.3.

Uma definição formal para Logaritmo pode ser a seguinte:

Definição 2.1. Sejam a e b números reais positivos e $b \neq 1$. Chama-se LOGARITMO de a na base b o expoente x tal que $b^x = a$. Simbolicamente: $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$, ou seja, "se logaritmo de a na base b é igual a x, então b elevado a x é igual a a"; e vice versa, "se b elevado a x é igual a a, então, logaritmo de a na base b é igual a x" (para a e b reais positivos e $b \neq 1$).

Da definição 2.1 temos que: a é o logaritmando; b é a base do logaritmo e x é o logaritmo de a na base b.

É comum dar um enfoque maior nos Logaritmos Decimais, ou seja, nos logaritmos cuja base é 10. E, por convenção, omiti-se a escrita da mesma: $\log a = x$, "logaritmo de a na base 10 é igual a x".

2.2 PROPRIEDADES DECORRENTES DA DEFINIÇÃO DE LOGARITMO

A seguir, as propriedades decorrentes da Definição – chamaremos de D_i (com i variando de 1 a 5) tais propriedades.

- $\boldsymbol{D_1}$**:** $\log_b b = 1$.

De fato, pois, se $\log_b b = x$, então, $b^x = b$. Portanto: $x = 1$.

- $\boldsymbol{D_2}$**:** $\log_b 1 = 0$.

De fato, pois, se $\log_b 1 = x$, então, $b^x = 1$. Portanto: $x = 0$.

- $\boldsymbol{D_3}$**:** $\log_b a^y = y. \log_b a$ ($y \in \mathbb{R}$).

Fazendo $\log_b a = x$, tem-se: $b^x = a$.

Elevando ambos os membros dessa última igualdade por y: $(b^x)^y = a^y \Leftrightarrow b^{yx} = a^y$.

Pela Definição 2.1 teremos $b^{xy} = a^y \Leftrightarrow yx = \log_b a^y$.

Como $\log_b a = x$, substituindo x por $\log_b a$ no primeiro membro de $yx = \log_b a^y$, temos $y. \log_b a = \log_b a^y$.

- $\boldsymbol{D_4}$**:** $\log_b b^x = x$.

De fato, pelas Propriedades $\boldsymbol{D_3}$ **e** $\boldsymbol{D_1}$, temos $\log_b b^x = x. \log_b b = x.1$, portanto: $\log_b b^x = x$.

- $\boldsymbol{D_5}$**:** $b^{\log_b a} = a$.

De fato, fazendo $\log_b a = x$, tem-se: $b^x = a$.

Substituindo, nesta última igualdade, x por $\log_b a$, teremos: $b^{\log_b a} = a$.

2.3 OUTRAS PROPRIEDADES

A seguir, outras propriedades, também chamadas de Propriedades Operatórias – chamaremos de O_i (com i variando de 1 a 3) tais propriedades.

Consideraremos a, b e c números reais positivos, com $b \neq 1$.

- $\boldsymbol{O_1}$**: Logaritmo do Produto:** $\log_b a.c = \log_b a + \log_b c$.

De fato, $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$ e $\log_b c = y \Leftrightarrow b^y = c$.

Assim, podemos escrever $b^x. b^y = a.c \Leftrightarrow b^{x+y} = a.c$.

E, pela Definição 2.1, teremos $b^{x+y} = a.c \Leftrightarrow x + y = \log_b a.c$.

Portanto, $\log_b a + \log_b c = \log_b a.c$.

- $\boldsymbol{O_2}$**: Logaritmo do Quociente:** $\log_b \frac{a}{c} = \log_b a - \log_b c$.

De fato, $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$ e $\log_b c = y \Leftrightarrow b^y = c$.

Assim, podemos escrever $\frac{b^x}{b^y} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow b^{x-y} = \frac{a}{c}$.

E, pela Definição 2.1, teremos $b^{x-y} = \frac{a}{c} \Leftrightarrow x - y = \log_b \frac{a}{c}$.

Portanto, $\log_b a - \log_b c = \log_b \frac{a}{c}$.

Agora, votaremos na situação motivadora inicial e faremos a resolução utilizando Logaritmos, ou seja, resolveremos o seguinte problema: Um caminhão custa hoje R$100.000,00 e sofre uma desvalorização de 10% por ano de uso. Depois de quanto tempo de uso o valor de veículo será igual a R$20.000,00?

Teremos em n anos: $v(n) = 100000.0{,}9^n$, sendo $v(n)$ o valor do caminhão no final de n anos. De fato, pois:

Para $n = 1$, teremos $v(n) = 100000.(0.9)^1 = 90000$; para $n = 2$, teremos $v(n) = 100000.(0{,}81) = 81000$; para $n = 3$, teremos $v(n) = 100000.(0{,}729) = 72900$ (valores que conferem com os da Tabela 2).

Na situação apresentada queremos saber o valor de n para $v(n) = 20000$, ou seja, $100000.(0.9)^n = 20000 \Leftrightarrow (0{,}9)^n = \frac{20000}{100000} \Leftrightarrow (0{,}9)^n = 0{,}2$, aplicando Logaritmo Decimal em ambos os membros dessa última igualdade e pela Propriedade D_3, temos $\log(0{,}9)^n = \log 0{,}2 \Leftrightarrow n \log 0{,}9 = \log 0{,}2 \Leftrightarrow n = \frac{\log 0{,}2}{\log 0{,}9}$.

Utilizando uma calculadora científica teremos: $n = \frac{\log 0{,}2}{\log 0{,}9} = \frac{-0{,}69897}{-0{,}0457575} = 15{,}276\ anos$, isto é, $n \cong 15\ anos, 3\ meses\ e\ 9\ dias$.

Poderíamos, ainda, aplicar a Propriedade O_2 e utilizarmos os Logaritmos Decimais, isto é, $n = \frac{\log 0{,}2}{\log 0{,}9} = \frac{\log \frac{2}{10}}{\log \frac{9}{10}} = \frac{\log 2 - \log 10}{\log 9 - \log 10} = \frac{\log 2 - 1}{\log 9 - 1}$.

Utilizando uma calculadora científica teremos: $n = \frac{\log 2 - 1}{\log 9 - 1} = \frac{0{,}301030 - 1}{0{,}954243 - 1} = \frac{-0{,}69897}{-0{,}045757} = 15{,}276$, isto é, $n \cong 15\ anos, 3\ meses\ e\ 9\ dias$.

- **O_3: Mudança de Base:** $\log_b a = \frac{\log_k a}{\log_k b}$ $(k \in \mathbb{R}_+^*\ e\ k \neq 1)$.

De fato, $\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$ e $\log_k a = y \Leftrightarrow k^y = a$.

Daí, temos que $b^x = a\ e\ k^y = a \Leftrightarrow b^x = k^y$.

Pela Definição 2.1 $b^x = k^y \Leftrightarrow \log_k b^x$.

Pela Propriedade D_3, podemos escrever $y = \text{x}.\log_k b$.

E, portanto, $\log_k a = \log_b a\,.\log_k b \Rightarrow \frac{\log_k a}{\log_k b} = \log_b a$.

2.4 LOGARITMO NATURAL

Quando consideramos como base do Logaritmo o número Irracional e denominado de constante ou número de Euler ($e \cong 2{,}71828$), resultado do limite $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$, temos o chamado Logaritmo Natural $\log_e a = \ln a$ (para a real positivo). Porém, às vezes é chamado de Logaritmo Neperiano, do nome do matemático John Napier, o que é considerado um erro, pois, no chamado Logaritmo Neperiano, Napier utilizou a base $\frac{1}{e}$ e não a base e, como no Logaritmo Natural.

> Alguns autores chamam o logaritmo natural de “logaritmo neperiano”, em homenagem a John Napier, autor da primeira tábua de logartimos, em 1614. Entretanto, tal denominação não é inteiramente apropriada, pois o logaritmo originalmente definido por Napier não coincide com o logaritmo natural. (LIMA, 2012, p. 220)

Graficamente podemos perceber, mais facilmente, as diferenças entre Logaritmo Natural ($f(x) = \ln x = \log_e x$) e Logaritmo Neperiano ($g(x) = \log_{\frac{1}{e}} x$), conforme figura a seguir:

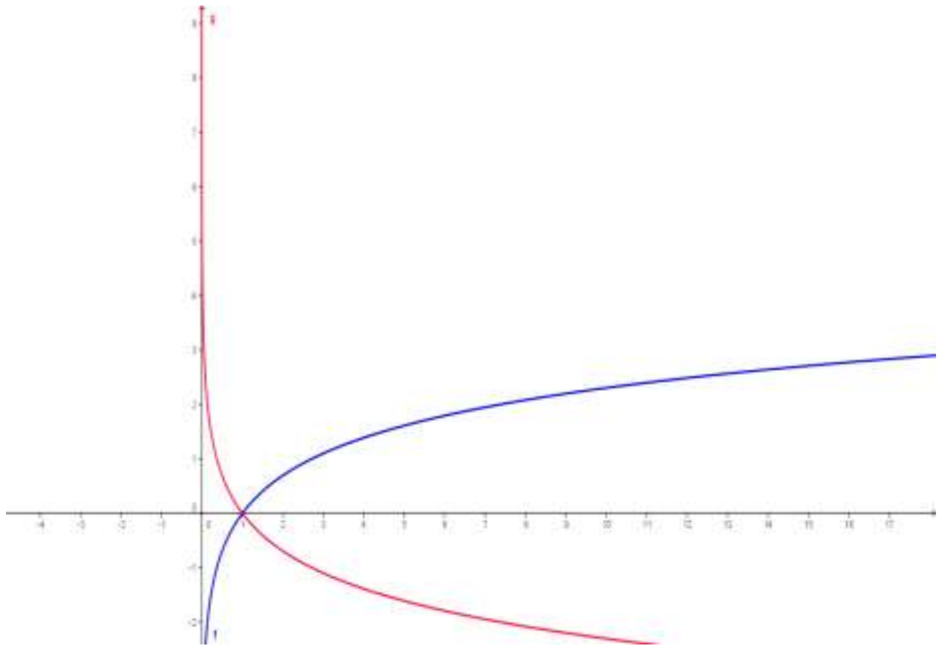


Figura 1: Gráficos das funções $f(x) = \ln x = \log_e x$ e de $g(x) = \log_{\frac{1}{e}} x$.

Vale ressaltar que todas as propriedades utilizadas nos Logaritmos Decimais são válidas para o Logaritmo Natural – chamaremos de N_i (com i variando de 1 a 5) tais propriedades.

- $\boldsymbol{N_1}$**:** $\ln 1 = 0$.
- $\boldsymbol{N_2}$**:** $\ln e = 1$.
- $\boldsymbol{N_3}$**:** $\ln a^n = n.\ln a$, consequentemente: $\ln e^n = n$.
- $\boldsymbol{N_4}$**:** $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$.
- $\boldsymbol{N_5}$**:** $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

2.5 LOGARITMO DECIMAL e LOGARITMO NATURAL

Se quisermos mudar de uma base qualquer para a base e, basta aplicarmos a Propriedade O_3 (mudança de base), como segue: $\log_b a = \frac{\log_e a}{\log_e b} = \frac{\ln a}{\ln b}$.

E, da base e para uma base b qualquer, teremos $\ln a = \log_e a$, na base b teremos: $\ln a = \log_e a = \frac{\log_b a}{\log_b e}$.

2.5.1 Da Base 10 para a Base e

Se a base for a decimal, ou seja, se $b = 10$, teremos $\log a = \frac{\ln a}{\ln 10} =\cong \frac{\ln a}{2{,}3} \cong 0{,}435.\ln a$, isto é: $\log a \cong 0{,}435.\ln a$.

2.5.2 Da Base e para a Base 10

Se a base for e, ou seja, se $b = 10$, teremos $\ln a = \log_e a = \frac{\log_{10} a}{\log_{10} e} = \frac{\log a}{0{,}43429} \cong 2{,}3.\log a$, isto é: $\ln a \cong 2{,}3.\log a$.

2.6 FUNÇÃO LOGARÍTMICA

Como, no Ensino Médio, os alunos veem a Função Logarítmica $(f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, tal\ que\ f(x) = \log_b x\ \ com\ b \in \mathbb{R}_+^* e\ b \neq 1)$ após terem visto a Função Exponencial $(f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, tal\ que\ f(x) = a^x, com\ a \in \mathbb{R}_+^* e\ a \neq 1)$, podemos introduzir, então, a Função Logarítmica como sendo a Função Inversa da Função Exponencial.

A seguir, suas principais propriedades – Chamaremos de E_i (com i variando de 1 a 3) as propriedades da Função Exponencial e de L_i (com i variando de 1 a 3) as propriedades da Função Logarítmica:

2.6.1 Propriedades 1:

E_1) Sendo $b \in \mathbb{R}_+^*$ e b$\neq$ 1, tem-se $b^x = b^y \Leftrightarrow x = y$

L_1) Sendo $\{x, y, b\} \subset \mathbb{R}_+^*$, e b$\neq$ 1, tem-se $\log_b x = \log_b y \Leftrightarrow x = y$

2.6.2 Propriedades 2:

E_2) A Função Exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, tal\ que\ f(x) = a^x, com\ a \in \mathbb{R}_+^* e\ a \neq 1$, é crescente em todo seu domínio se, e somente se, $a > 1$, conforme ilustrado na figura 2:

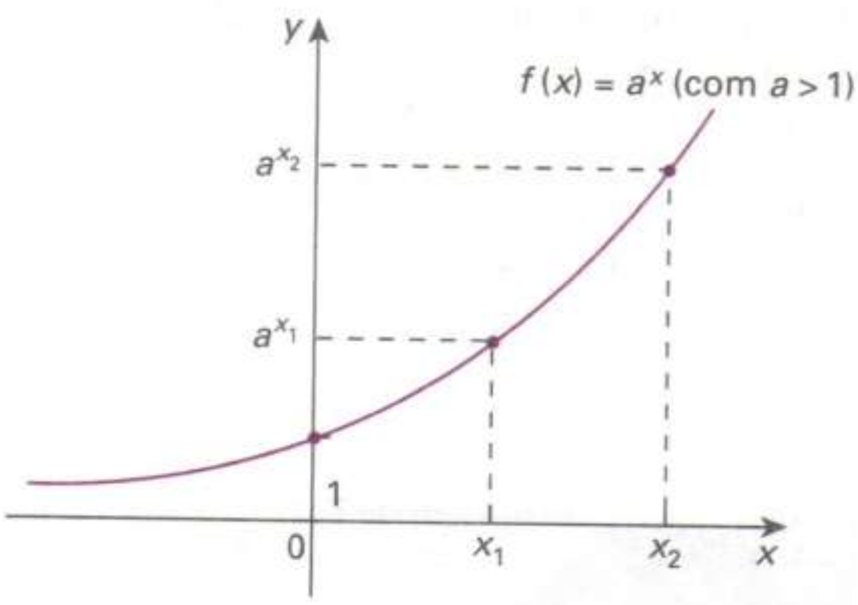


Figura 2: Gráfico da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, tal\ que\ f(x) = a^x, com\ a \in \mathbb{R}_+^* e\ a \neq 1$.

L_2) A Função Logarítmica $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, tal\ que\ f(x) = \log_b x\ com\ b \in \mathbb{R}_+^* e\ b \neq 1$, é crescente em todo seu domínio se, e somente se, $b > 1$, conforme ilustrado na figura 3:

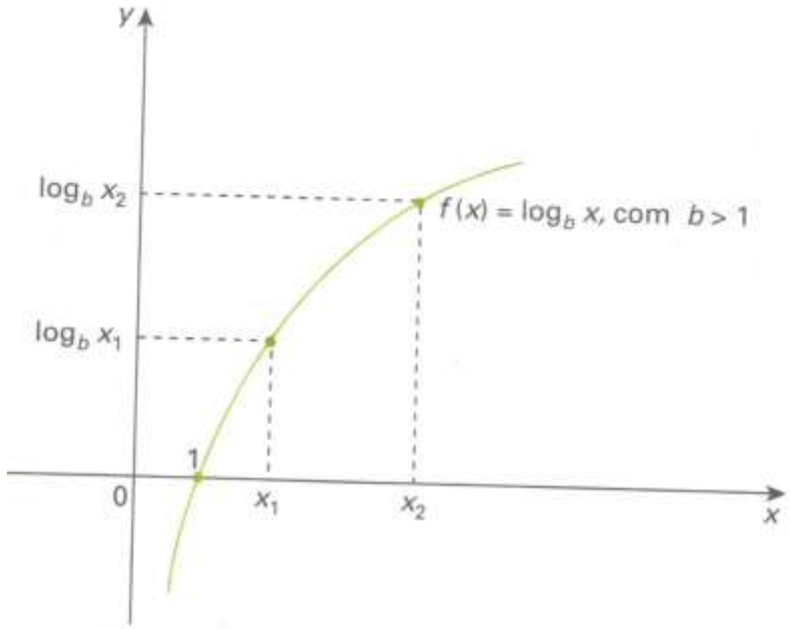


Figura 3: Gráfico da função$f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, tal\ que\ f(x) = \log_b x\ \ com\ b \in \mathbb{R}_+^* e\ b \neq 1$.

2.6.3 Propriedades 3:

E_3) A Função Exponencial $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, tal\ que\ f(x) = a^x, com\ a \in \mathbb{R}_+^* e\ a \neq 1$, é decrescente em todo seu domínio se, e somente se, $0 < a < 1$, conforme ilustrado na figura 4:

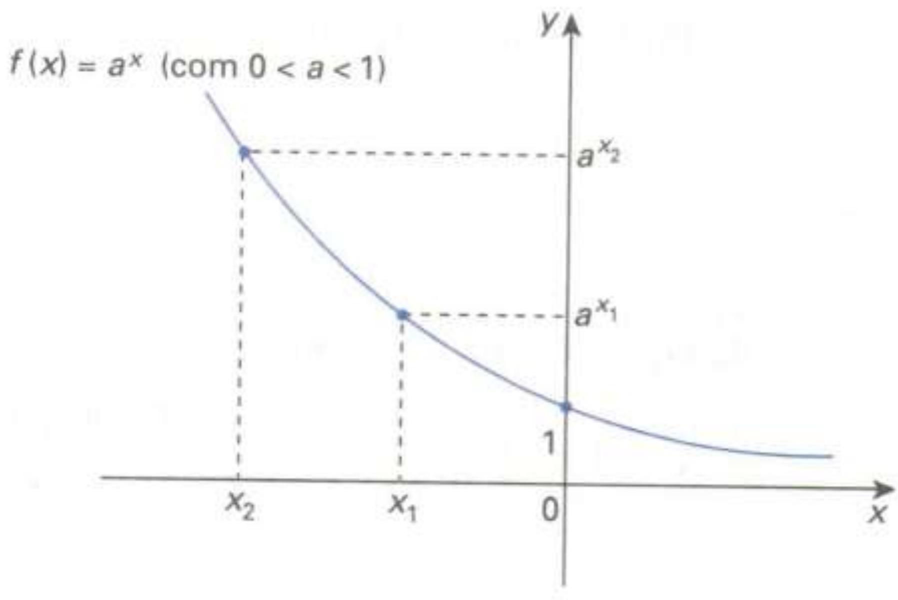


Figura 4: Gráfico da função$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*, tal\ que\ f(x) = a^x, com\ a \in \mathbb{R}_+^* e\ a \neq 1$.

$L_3)$ A Função Logarítmica $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, tal\ que\ f(x) = \log_b x\ \ com\ b \in \mathbb{R}_+^* e\ b \neq 1$, é crescente em todo seu domínio se, e somente se, $0 < b < 1$, conforme ilustrado na figura 5:

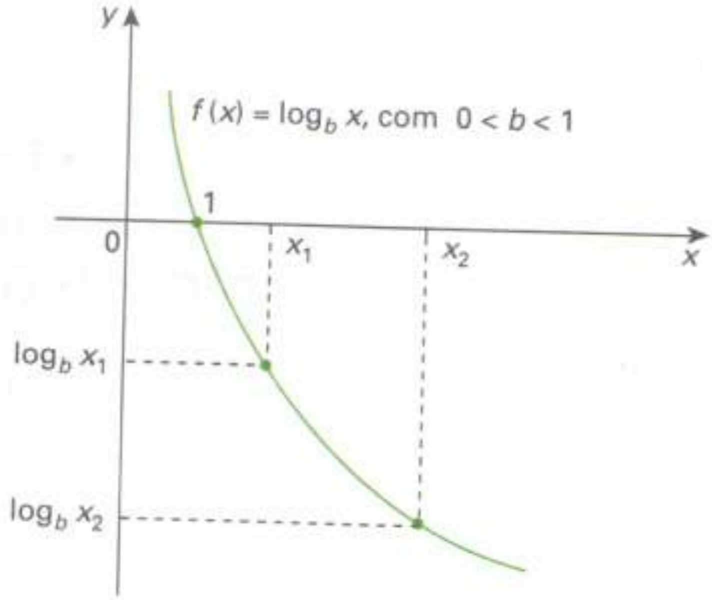


Figura 5: Gráfico da função $f: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, tal\ que\ f(x) = \log_b x\ \ com\ b \in \mathbb{R}_+^* e\ b \neq 1$.

No próximo capítulo apresentaremos algumas aplicações, do que foi exposto neste capítulo, direcionadas ao Ensino Médio.

CAPÍTULO 3

LOGARITMOS: Aplicações

Apresentaremos algumas aplicações dos Logaritmos em diversos tipos de problemas.

Acreditamos que através do estudo, cada pessoa passa a ter uma perspectiva de vida melhor. E, isso ocorrerá de forma mais significativa, quando o ensino passa a ter mais significado para o aluno; defendemos então que, no caso específico dos Logaritmos, esse ensino seja associado a aplicações em outras áreas do conhecimento e, se possível, ao cotidiano do aluno.

> O trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de aplicação em outras áreas de conhecimento, como Química, Biologia, Matemática Financeira, etc. Procedimentos de resolução de equações sem que haja um propósito maior devem ser evitados. Não se recomenda neste nível de ensino um estudo exaustivo dos logaritmos. (BRASIL, 2006, p.75)

De modo geral, para solucionar exercícios de aplicação é necessário que o aluno saiba como resolver equação exponencial, com isso se torna meio que obrigatório que se aprenda isso antes.

BRASIL (2002) ressalta a importância dos alunos compreenderem bem o caráter logarítmico:

> Um aluno que compreender o caráter logarítmico dessa escala, saberá que um terremoto caracterizado pelo nível 7 não tem uma intensidade só acrescida em 3, relativamente a um abalo de nível 4, mas sim mil vezes esta intensidade, ou seja multiplicada por 10^3. Usa-se ainda uma escala logarítmica para definir o pH de substâncias, coeficiente que caracteriza a condição mais ácida ou mais básica de soluções. Também populações de micro-organismos podem variar exponencialmente, tornando a escala logarítmica igualmente conveniente em Biologia. (BRASIL, 2002, p. 26).

Segundo SOUZA (2013) para compreender bem o Logaritmo, o aluno deve saber resolver equações exponenciais. Como: $3^x = 81 \Rightarrow 3^x = 4 \Rightarrow x = 4$. O valor de

4, corresponde ao Logaritmo de 81 na base 3, que pode ser indicado por $\log_3 81 = 4$; como podemos ver (e, vimos no capítulo 1), resolver Logaritmo recai em resolver uma equação exponencial.

3.1 ALGUMAS APLICAÇÕES DOS LOGARITMOS COMPATÍVEIS AO ENSINO MÉDIO

> Do mesmo modo que Napier e Burgi estavam à procura de conhecimento e novas tecnologias, outros intelectuais também contribuíram para maior aprofundamento deste conhecimento. Desta forma, com o passar do tempo, o cálculo de logaritmos e as tábuas logarítmicas passaram a ser consideradas por muitos, como ferramentas obsoletas depois do surgimento das calculadoras e de potentes computadores. No entanto, não se pode dizer que os logaritmos estão à beira da extinção, pois cada vez mais a ciência tem mostrado que alguns fenômenos físicos, químicos e biológicos estão relacionados aos logaritmos. (COUTO, 2013, p. 14)

Os Logaritmos podem ser utilizados, por exemplo, para calcular o saldo de uma poupança no fim do primeiro mês de aplicação, os decibéis relativos ao nível sonoro, a magnitude dos terremotos, o crescimento populacional e decaimento radioativo.

Para exemplificar uma amostra de elementos químicos presente na atmosfera. Vamos considerar uma amostra de 1 kg de plutônio, elemento químico que perde 0,4% de sua massa a cada século. (PAIVA, 2013 p.239)

Aplicando a fórmula do montante, com taxa negativa, obtemos a função que descreve o tempo t, em século, em função da massa remanescente M dessa amostra, em quilograma:

$M = (1 - 0{,}004)^t$. Portanto, $\mathrm{t} = \log_{0{,}996} M$

Outro exemplo de aplicação dos Logaritmos é na medicina para ver a quantidade de dosagem residual de um remédio que fica no corpo humano, por exemplo.

A Escala Richter mede a magnitude de um terremoto. Os terremotos originam-se dos movimentos das placas tectônicas. O atrito de uma placa contra outra forma ondas que são responsáveis pelas vibrações que causam o terremoto. O sismógrafo mede a amplitude e a frequência destas vibrações, utilizando-se uma equação logarítmica podendo calcular a magnitude do terremoto.

Nas próximas seções apresentaremos a resolução de alguns problemas utilizando os Logaritmos.

3.1.1 Na Matemática – Geometria Espacial

Uma caixa-d'água com 5000 litros de capacidade tem, internamente, a forma de um cubo.

Adotando o valor $\log 5 = 0{,}69$ e os valores da tabela, calcular a medida, em metro, de cada aresta do cubo. (PAIVA, 2013, p. 251)

Tabela 3: Alguns valores de 10^x em função de x

x	10^x
0,20	1,58
0,21	1,62
0,22	1,66
0,23	1,70
0,24	1,74
0,25	1,78

PAIVA, 2013, p. 251.

Resolução:

Como 1 L= 1 dm^3, então: 5.000 dm^3= 5m^3

Assim, indicando por a a medida, em metro, da aresta do cubo, obtemos:

$$a^3 = 5 \Rightarrow 3 = \log_a 5$$

Pela Propriedade O_3 (mudança de base), transformamos o Logaritmo para base 10:

$$3 = \log_a 5 \Rightarrow 3 = \log 5 / \log a$$

Portanto, $\log a = \frac{\log 5}{3} = \frac{0{,}69}{3} = 0{,}23 \Rightarrow a = 10^{0{,}23}$

Observando a tabela, concluímos que a = 1,70.

Logo, cada aresta do cubo mede 1,70 m.

3.1.2 Na Matemática Financeira

Uma pessoa aplicou a importância de R$ 500,00 numa instituição bancária que paga juros mensais de 3,5%, no regime de juros compostos. Quanto tempo após a aplicação o montante será de R$ 3 500,00? (SILVA, 2015)

Resolução:

Nos casos envolvendo a determinação do tempo e juros compostos, a utilização das técnicas de logaritmos é imprescindível.

A fórmula para o cálculo dos juros compostos é $M = C.(1+i)^t$. De acordo com a situação problema temos,

M (montante) = 3500

C (capital) = 500

i (taxa) = 3,5% = 0,035

Assim,

$$M = C.(1+i)^t$$

$$3500 = 500.(1+0{,}035)^t$$

$$\frac{3500}{500} = 1{,}035^t$$

$$1{,}035^t = 7$$

Aplicando Logaritmo em ambos os membros da igualdade acima obtemos,

$$\log 1{,}035^t = \log 7$$

Aplicando a Propriedade D_3 temos,

$$t.\log 1{,}035 = \log 7$$

Utilizando a tecla log da calculadora científica obtemos,

$$t.0{,}0149 = 0{,}8451$$

$$t = \frac{0{,}8451}{0{,}0149}$$

$$t = 56{,}7$$

Portanto, após 56,7 meses o montante será de R$ 3500,00.

3.1.3 Na Geografia – Crescimento Populacional

Em uma determinada cidade, a taxa de crescimento populacional é de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos a população desta cidade irá dobrar, se a taxa crescimento continuar a mesma. (SILVA, 2015)

Resolução:

$$População\ do\ ano\ base = P_0$$

$$População\ após\ um\ ano = P_0.(1{,}03) = P_1$$

$$População\ após\ dois\ anos = P_0.1{,}03^2 = P_2$$

$$População\ após\ x\ anos = P_0.1{,}03^x = P_x.$$

Vamos supor que a população dobrará em relação ao ano-base após x anos, sendo assim temos,

$$P_x = 2.P_0$$

$$P_0.(1{,}03)^x = 2.P_0$$

$$(1{,}03)^x = 2$$

Aplicando Logaritmo em ambos os membros da igualdade anterior temos,

$$\log(1{,}03)^x = \log 2$$

Aplicando a Propriedade D_3 temos,

$$x.\log(1{,}03) = \log 2$$

Utilizando a tecla log da calculadora científica obtemos,

$$x.0{,}0128 = 0{,}3010$$

$$x = \frac{0{,}3010}{0{,}0128}$$

$$x = 23{,}5$$

Portanto, a população dobrará em aproximadamente 23,5 anos.

3.1.4 Na Química

Determine o tempo que leva para que 1000 g de certa substância radioativa, que se desintegra a taxa de 2% ao ano, se reduzem a 200 g. Utilize a seguinte expressão: $Q = Q_0.e^{-r.t}$, em que Q é a massa da substância, r é a taxa e t é o tempo em anos. (SILVA, 2015)

Resolução:

Como $Q = Q_0 . e^{-r.t}$ então,

$$200 = 1000. e^{-0,02.t}$$

$$\frac{200}{1000} = e^{-0,02.t}$$

$$\frac{1}{5} = e^{-0,02.t}$$

Aplicando a Definição 2.1 (de Logaritmo) temos,

$$-0,02. t = \log_e \frac{1}{5}$$

$$-0,02. t = \log_e 5^{-1}$$

Aplicando a Propriedade D_3 temos,

$$-0,02. t = -1. \log_e 5$$

Como Logaritmo na base e é igual a ln temos,

$$0,02. t = \ln 5$$

$$t = \frac{\ln 5}{0,02}$$

Utilizando a tecla ln da calculadora científica obtemos,

$$t = \frac{1,6094}{0,02}$$

$$t = 80,47$$

Portanto, a substância levará 80,47 anos para se reduzir a 200 g.

3.1.5 Na Biologia

A altura de uma espécie de árvore pode ser modelada pela função $h(t) = 1,2 + \log(t + 1)$, em que h é a altura medida em metros e t é o tempo em anos $(0 \leq t \leq 9)$. Determine a altura dessa espécie de árvore após 5 anos (dados: $\log 2 = 0,3$ e $\log 3 = 0,48$). (FARAGO, 2010, p. 10 – Adaptado)

Resolução:

Substituindo t por 5 temos,

$$h(5) = 1,2 + \log(5 + 1) = 1,2 + \log 6$$

Substituindo 6 por (2.3),

$$h(5) = 1{,}2 + \log(2.3)$$

Aplicando a Propriedade O_1,

$$h(5) = 1{,}2 + \log 2 + \log 3$$

Utilizando fornecidos pela questão temos

$$h(5) = 1{,}2 + 0{,}3 + 0{,}48$$

Daí,

$$h(5) = 1{,}98$$

Portanto, a altura dessa espécie de árvore será, após 5 anos, de 1,98 m.

3.1.6 Na Física

O nível sonoro de um ambiente (N), em decibéis (dB), pode ser calculado por meio da lei de Weber-Fechner, que é dada por $N = 10.\log\frac{I}{10^{-12}}$, em que I é a intensidade sonora medida em watts por metro quadrado (W/m^2). Sabendo que uma conversa em um ambiente fechado emite um nível sonoro de 45 dB, qual a intensidade sonora dessa conversa? (SOUZA, 2013, p. 199 – Adaptado)

Resolução:

Substituindo N por 45 temos,

$$45 = 10.\log\frac{I}{10^{-12}}$$

$$45 = \log(\frac{I}{10^{-12}})^{10}$$

Aplicando a Definição 2.1 (de Logaritmo) teremos,

$$(\frac{I}{10^{-12}})^{10} = 10^{45}$$

$$\frac{I^{10}}{10^{-120}} = 10^{45}$$

$$I^{10} = 10^{-120+45}$$

$$I = \sqrt[10]{10^{-75}}$$

$$I = 10^{\frac{-75}{10}}$$

$$I = 10^{-7,5}$$

Se for uma questão de múltipla escolha, muito provavelmente que no Ensino Médio, essa resposta é satisfatória. Porém, com o auxílio de uma calculadora científica pode-se chegar ao seguinte resultado:

$$I = (3{,}1622776E - 8) = 0{,}00000003162277$$

Portanto, a intensidade sonora da referida conversa é de:

$$10^{-7{,}5} W/m^2 \cong 0{,}00000003162277\, W/m^2$$

3.1.7 Na Medicina

Determine quando as válvulas da artéria aorta se fecham, a pressão P, em mmHg (milímetro de mercúrio), no interior dessa artéria, durante o fechamento, pode ser expressa em função do tempo t, em segundo, por meio da equação $P = 95. e^{-0{,}49.t}$. Após o fechamento das válvulas, em quanto tempo a pressão atingira 70 mmHg? (PAIVA, 2013, p. 251)

Resolução:

Para $P = 70$ temos,

$$70 = 95. e^{-0{,}49.t}$$

$$e^{-0{,}49t} = \frac{70}{95}$$

Aplicando a Definição 2.1 (de Logaritmo) no primeiro membro temos,

$$\log_e \frac{70}{95} = -0{,}49. t$$

$$t = \frac{\log_e \frac{70}{95}}{-0{,}49}$$

Como Logaritmo na base e é igual a ln temos,

$$t = \frac{\ln \frac{70}{95}}{-0{,}49}$$

Utilizando a tecla ln da calculadora científica obtemos,

$$t \cong \frac{-0{,}30538}{-0{,}49}$$

$$t \cong 0{,}62$$

Portanto, em 0,62 segundos atingirá a pressão de 70 mmHg.

Como podemos perceber, nos exemplos citados anteriormente, há várias possibilidades de aplicações dos Logaritmos compatíveis ao Ensino Médio e que podem ser exploradas pelos professores para dar mais significado ao conceito de Logaritmo, reforçando, assim, a importância do mesmo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a pesquisa realizada para este trabalho, observamos que os Logaritmos tem grande importância na nossa vida. Quem diria que para fazer cálculos sobre a intensidade dos terremotos se usaria os Logaritmos, para calcular porcentagem, na Matemática Financeira, etc. Os Logaritmos também são importantes para o mundo da tecnologia, sem falar que com a invenção dos Logaritmos aquelas contas com números grandes tornaram-se muito mais fáceis – o que para a época em que Napier os criou foi primordial.

Finalizamos este Trabalho de Conclusão do Curso de Licenciatura em Matemática crendo que atingimos os nossos objetivos traçados inicialmente, ou seja, apresentar alguns aspectos históricos dos Logaritmos, a definição e propriedades dos Logaritmos, as funções logarítmicas e algumas aplicações compatíveis ao Ensino Médio. E, com isso, enfatizar a importância de estudar Logaritmos, neste nível de ensino e, talvez, facilitar o entendimento de quem possa se interessar pelo assunto.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da Matemática** / Carl B. Boyer; tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

______. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Média e Tecnológica (SEMTEC). **PCN + Ensino médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMTEC, 2002.

COUTO, Sidney Dias. **Logaritmos: conceitos e aplicações** / Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado). Lavras: UFLA, 2013. Disponível em: http://repositorio.ufla.br/bitstream/1/2104/2/DISSERTACAO_Logaritmos%20conceitos%20e%20aplica%C3%A7%C3%B5es.pdf. Acesso em 22 de agosto de 2015.

EVES, Howard, **Introdução à história da Matemática**, Campinas,SP: Editora da Unicamp, 2004.

FARAGO, Jorge Luiz. Matemática: 1ª série, volume 4 / Jorge Luiz Farago, Lucio Nicolau dos Santos Carneiro; ilustrações Angela Giseli... [et al]. – 1. ed. – Curitiba: Positivo, 2010.

FERREIRA, Ronize Lampert. **Uma sequência de ensino para o estudo de Logaritmos usando a Engenharia Didática.** Dissertação de Mestrado – UNIFRA, Santa Maria, 2006. Disponível em http://tede.unifra.br/tde_arquivos/3/TDE-2007-06-18T064601Z-13/Publico/Ronize%20Lampert%20Ferreira.pdf. Acesso em 11 de julho de 2015.

GARBI, Gilberto Geraldo, **A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática**, São Paulo-SP: Editora da Física, 2006.

IEZZI, Gelson. **Matemática: ciência e aplicações, 1**: ensinomédio/ Gelson Iezzi... [et al.]. –São Paulo: Saraiva, 2010.

KROPF, Marcelo Albuquerque Lemgruber. **Aplicações dos Logaritmos na área de saúde.** Dissertação de Mestrado – IMPA, Rio de Janeiro, 2014. Disponível em http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/downloads/PROFMAT/trabalho_conclusao_curso/2014/marcelo_kropf.pdf. Acesso em 11 de julho de 2015.

LIMA, Elon Lages. **A matemática do ensino médio – volume 1 /** LIMA... [et al.]. 10. ed. – Rio de Janeiro: SBM 2012.

OLIVEIRA, Ricardo de Carvalho. Objetos de aprendizagem: uma estratégia para facilitar a compreensão de logaritmos. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2013. Disponível em http://www.profmat-sbm.org.br/dissertacoes?polo=&titulo=&aluno=ricardo+de+carvalho+oliveira. Acesso em 11 de julho de 2015.

PAIVA, Manoel. **Matemática – volume 1** / Manoel Paiva. – 2. ed. – São Paulo: Moderna, 2013.

SILVA, Josiel Pereira da. **Logaritmos e Aplicações** / Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Centro de Ciências e Tecnologia, 2013. Disponível em http://www.mat.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Josiel.pdf. Acesso em 22 de agosto de 2015.

SILVA, Marcos Noé Pedro da. **Aplicação dos Logaritmos**. Mundo Educação, 2015. Disponível em: http://www.mundoeducacao.com/matematica/aplicacao-dos-logaritmos.htm. Acesso em 19 de setembro de 2015.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar: matemática: 1** / Joamir Roberto de Souza. – 2. ed. – São Paulo: FTD, 2013.

VIDIGAL, Carlos Eduardo Ladeira. **(Re)significando o conceito de logaritmo.** Dissertação de Mestrado – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2014. Disponível em: http://www.biblioteca.pucminas.br/teses/EnCiMat_VidigalCEL_1.pdf. Acesso em 11 de julho de 2015.