

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
JULIANA LEONEL JACINTO

Considerações e Aplicações do Número e

CASSILÂNDIA
2015

JULIANA LEONEL JACINTO

Considerações e Aplicações do Número e

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentada à Universidade Estadual de
Mato Grosso do Sul, para obtenção do
título de graduando em Matemática
Licenciatura Plena.

Orientador: **Prof. Eder Pereira Neves.**

CASSILÂNDIA
2015

JACINTO, Juliana Leonel

Considerações e Aplicações do Número e. 2015.

60f; il.; 30 cm.

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul.

Orientador: Prof. Eder Pereira Neves.

1.Número *e* 2.Números Irracionais 3.Propriedades 4.Aplicações.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
Juliana Leonel Jacinto

Considerações e Aplicações do Número e

Trabalho de Conclusão de Curso como requisito parcial para obtenção do título de Graduação em Matemática Licenciatura Plena, na Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul-UEMS, à seguinte banca examinadora:

Prof. Me. Eder Pereira Neves (Orientador)

Prof. Esp. Tatiana Rozalia Guedes

Prof. Dr. Ailton Ribeiro de Oliveira

Dedico: Aos meus pais Maria Aparecida Leonel Pereira e Ezidío Jacinto Pereira, pelo amor e apoio, que não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse, por me ajudar a superar as dificuldades ao longo de minha vida, e não somente nestes anos como universitária, mas em todos os momentos Ele foi e é o maior Mestre que alguém poderia conhecer.

Ao meu orientador, Prof^o Eder Pereira Neves, pelo empenho dedicado à elaboração deste trabalho.

À Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul pela oportunidade de fazer o curso de Matemática, como também aos professores que estiveram presentes ao longo desses anos transmitindo conhecimento para minha formação.

Obrigada aos meus pais, Maria e Ezidio, e à minha família pela força e suporte que me deram para que eu pudesse terminar o curso, pois muitas vezes pensei até em desistir.

E também agradeço, meus amigos Jaqueline Gonçalves, Adenice, Dantiely, Alessandro, Renato e muitos outros que fiz ao longo do curso e que me motivaram ainda mais para que eu conseguisse chegar aonde estou.

“Para julgar um gênio, só outro gênio.”

E Laplace dizia a seus alunos: *“Leiam, leiam Euler, ele é o nosso mestre em tudo”*. (EVES-2004)

RESUMO

No presente trabalho, são apresentadas as características irracionais do número de Euler (e) e suas aplicações para o desenvolvimento teórico na Matemática. O trabalho tem como objetivo ressaltar, de maneira sucinta, as abordagens do número e encontradas em livros da biblioteca do curso de Matemática da UEMS, na Unidade Universitária de Cassilândia, Mato Grosso do Sul. As considerações que foram levantadas, neste trabalho, indicam que o conceito do número e pode minimizar os conflitos entre o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais. Tendo em vista a importância e a necessidade deste conceito, espera-se que a presente pesquisa possa servir de subsídio para professores e alunos que pretendam estudar o assunto em questão.

Palavras-chave: número e ; números irracionais; propriedades e aplicações;

SUMÁRIO

| | |
|---|----|
| Introdução..... | 10 |
| Capítulo I: O número de euler e os logaritmos..... | 16 |
| Capítulo II: Uma visão panorâmica do número de euler: Abordagem teórica e prática | 33 |
| 2.1 Sequências numéricas a determinação do número e | 33 |
| 2.2 Funções exponenciais e logarítmicas de base e | 35 |
| Capítulo III: Aplicação do conceito do número de euler | 45 |
| 3.1 O número e nos modelos probabilísticos | 45 |
| 3.1.1 Distribuição discreta de probabilidade: modelo de poisson | 45 |
| 3.1.2 Distribuição contínua de probabilidade: modelo de poisson..... | 48 |
| 3.2 O número de euler nas soluções de equações diferenciais ordinárias (edo)..... | 50 |
| 3.2.1 Fator de integração | 51 |
| 3.2.2 Resumo de método e algumas aplicações..... | 53 |
| 3.2.3 Variação de temperatura..... | 54 |
| 3.2.4 Problema de mistura | 54 |
| 3.2.5 Queda dos corpos | 55 |
| Considerações finais | 58 |
| Referências Bibliográficas..... | 60 |

INTRODUÇÃO

A noção de número que possuímos hoje tem por fundamento as diferentes maneiras com que as civilizações antigas, ao longo da história, desenvolviam algoritmos que, na medida do possível, possibilitavam a resolução de seus mais diversos problemas.

A criação do sistema de numeração decimal indu-arábico trouxe consigo um desenvolvimento de técnicas de contagem, algoritmos e operações numéricas fundamentais para diversas aplicações. É de suma importância indentificar o sistema de numeração, assim como também, deve-se observar se um número pertence ou não a um determinado conjunto numérico.

Para os Babilônicos, há cerca de 3000 e 2000 anos a.C, a utilização dos números era fundamental em suas aplicações, como na maneira peculiar que tinham para resolver problemas que envolviam áreas, fato que intriga historiadores até hoje, pois, já apresentavam resultados em seus cálculos utilizando números racionais e aproximações que simbolizavam números irracionais.

Uma das diversas maneiras significativas de apresentação de números na forma irracional seria uma consideração para o número π , sendo equivalente à raiz quadrada de 10, o que nos dias atuais seria uma boa representação, ainda que a $\sqrt{10}$ seja considerada um número irracional.

A Matemática Grega, cujos pilares se fundamentavam na demonstração, o empenho está essencialmente ligado a uma fundamentação e teorização de significados da existência de tais números, como por exemplo, a raiz quadrada de dois, que os intrigavam, pois a diagonal de um quadrado não tinha uma relação racional com os seus lados e o número π não poderia ser escrito na razão de dois números inteiros, o que contraria até mesmo os conceitos dos pitagóricos.

Da mesma forma, como a raiz quadrada de dois e o número π (sendo que até mesmo outros números) demonstram sua real importância por serem característicos em diversas abordagens, todos os quadrados do cálculo de sua diagonal serão sempre acompanhados pela $\sqrt{2}$, e em todos os círculos, o que na razão entre o seu comprimento e o diâmetro estará o número π .

Entretanto, outros números irracionais se tornaram importantes no desenvolvimento da Matemática, que dentre tantos, enfatizam-se, nesta pesquisa, as características, propriedades e aplicações do número e .

Normalmente, ele é apresentado como sendo uma base do logaritmo natural (\ln), mas suas aplicações vão muito além, sendo ferramentas importantíssimas para demonstrações e aplicações em diversos ramos da Matemática, as quais serão apresentadas posteriormente neste trabalho.

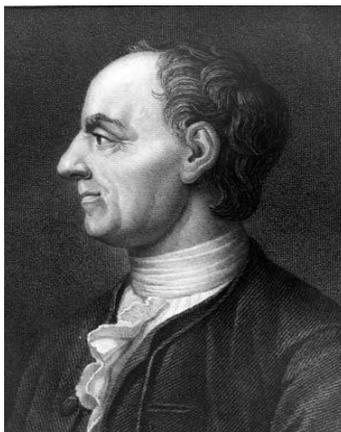
Machado (1990) destaca que os números irracionais, implicitamente, fazem parte de nossas vidas muito mais do que os números racionais.

Diante disso, Pommer (2010) afirma que, há vários modos de se definir o número de Euler. No ciclo básico, é possível entendê-lo e introduzi-lo, através da interligação de vários conceitos matemáticos da Matemática Elementar do próprio currículo deste ciclo e, ainda, ilustrar e relacionar a outros conceitos, normalmente abordados em Ensino Superior.

Monteiro (2007) retrata que um dos desafios de ensinar o número e está ligado em parte, à sua incompreensão, já que às vezes, o professor é surpreendido com imprecisões e equívocos a respeito de suas características e propriedades, confirmando a dificuldade e a sutileza desse assunto. Monteiro (2007) destaca ainda, que as máquinas de calcular, como as calculadoras e os computadores, são fundamentais para nos ajudar em cálculos envolvendo números irracionais, mas o cuidado que devemos tomar é que elas podem induzir a pensar que o número e , por exemplo, é somente um número e por mais sofisticados que sejam, suas memórias são finitas e não traduzem o resultado do limite, ou seja, são necessárias demonstrações específicas para justificar a caracterização de número irracional.

Para Maor (2008) o número e ficou internacionalmente conhecido pelo número de Euler, em homenagem ao matemático suíço, Leonhard Paul Euler (1707-1783), por ter sido o ele a dar características particulares e essenciais para a definição do número em questão.

Leonhard Paul Euler 1707-1783



Fonte:Eves-2004

Segundo Eves (2004), as contribuições de Euler para a Matemática são muito numerosas, até mesmo para serem integralmente apresentadas neste trabalho logo apenas algumas no plano elementar. Serão apresentados para começar, registra-se que se deve a Euler a implantação das seguintes notações:

| | |
|-----------|---|
| $f(x)$ | para funções, |
| e | para a base dos logaritmos naturais, |
| a, b, c | para os lados de um triângulo ABC, |
| s | para o semiperímetro do triângulo, |
| r | para o inraio do triângulo ABC, |
| R | para o circunraio do triângulo ABC, |
| \sum | para somatórios, |
| i | para a unidade imaginária $\sqrt{-1}$. |

Também, atribui-se a ele, a notabilíssima fórmula $e^{ix} = \cos x + isenx$ ¹ que, para $x = \pi$, se transforma em $e^{i\pi} + 1 = 0$, uma igualdade que relaciona cinco dos mais importantes números da Matemática. Por processos puramente formais, Euler chegou a um número enorme de relações curiosas, como, por exemplo, $e^{ix} = e^{-\pi/2}$. Um fato importante que se conseguiu estabelecer é que todo número real não-nulo r tem uma

¹ A demonstração desta identidade será apresentada em um capítulo específico

infinidade de logaritmos (para uma dada base), todos imaginários se $r < 0$ e todos, exceto um, se $r > 0$.

Ainda Maor (2008) destaca que, embora a literatura enfatize a importância do número e como a base dos logaritmos naturais, muitos matemáticos que antecederam Euler já observavam uma característica irracional nesse número.

Historicamente, os Babilônicos já utilizavam uma aproximação do número de Euler para problemas de juros compostos. Jacob Bernoulli (1654-1705), famoso matemático suíço, estudou um problema de juros compostos em 1683, justificando através de termos binomiais que o número e está compreendido entre 2 (dois) e 3 (três), uma aproximação aceitável até mesmo para a Matemática Contemporânea.

Segundo Maor (2008), o número e foi descoberto através de um problema de juros compostos, que se traduz para uma versão monetária brasileira para uma melhor discussão. Desse modo, apresenta-se o problema da seguinte maneira:

Problema - João emprestou ao seu amigo Pedro mil reais a juros de 100% ao ano. Qual seria a quantia de dinheiro que Pedro teria de devolver a João ao término de um ano?

Discussão e possíveis soluções – A princípio, podemos perceber que no final de um ano Pedro devolve a João a quantia de mil reais e mais mil reais de juros, mas isso seria o valor justo? Veja o porquê nas seguintes análises.

A discussão inicial seria mil reais nos primeiros seis meses e 1000 + 500 reais nos últimos seis meses restantes, totalizando R\$1.500,00 reais e os juros atribuídos nestes últimos seis meses, resultando em R\$2.250,00 reais, isto é, 1,5 mil + 50% de R\$1.500,00 que é igual a R\$2.250,00 reais. Porém, a discussão continua, se o ano fosse dividido em trimestres, meses, dias, horas e minutos, o resultado ainda seria o mesmo? Observe-se as tabelas abaixo, a primeira indicando o trimestre e a outra indicando os meses do ano:

| Período | Montante |
|--------------|---|
| 1º trimestre | 1 mil+ 25% de mil= 1,25 mil |
| 2º trimestre | 1,25 mil+ 25% de 1,25 mil = 1,25.1,25= 1,252 = 1,5625 mil |
| 3º trimestre | 1,5625 mil + 25% de 1,5625 mil = 1,5625.1,25 = 1,253 = 1,953125 mil |
| 4º trimestre | 1,953125 mil + 25% de 1,953125 mil = 1,254 = 2,4414063 mil |

Tabela 1: Cálculo para a aplicação de 1 mil, a 100% ao ano, supondo a correção trimestral dos juros

| Período | Montante |
|---------|--|
| 1º mês | 1 mil + 8,33% de mil = 1,083 mil |
| 2º mês | 1,083 mil + 8,33% de 1,083 mil = 1,083. 1,083 = 1,17289 mil. |
| 3º mês | 1,172889 mil + 8,33% de 1,172889 mil = 1,0832.1,083 = 1,0833= 1,27024 mil. |
| ... | ... |
| 12º mês | $1,083^{12} = 2,6034$ mil |

Tabela 2: Cálculo para a aplicação de 1 mil, a 100% ao ano, supondo a correção mensal dos juros

Assim, a uma taxa de $100/360 = 0,278\%$ ao dia, o devedor teria que pagar $1,00278^{360}$, ou seja, 2,7166825 mil. Deste modo, $\frac{100}{360.24} = 0,011574\%$ a hora, teria que ao final de um ano pagar: $1,00011574^{360.24} = 1,00011574^{8640} = 2,7181236$ mil.

Agora, se a taxa for dada por minuto, haver-se-ia $\frac{100}{360.24.60} = 0,00019290\%$ por minuto, o que, em um pagamento de dívida, de $1,000001929^{518400} = 2,7182618$ mil reais.

Pode-se observar que à medida que os períodos de tempo aumentam, ou seja, $n \rightarrow \infty$, os valores a serem pagos $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ convergem para o número e e, neste caso, o valor da dívida seria de e mil reais. A resolução deste problema será comentada novamente de forma analítica mais adiante no segundo capítulo.

O trabalho de conclusão de curso foi desenvolvido com o objetivo de fazer um sucinto levantamento histórico e teórico do número e . Para isso, em primeiro momento toma-se como base para a pesquisa bibliográfica os livros da biblioteca da UEMS, Unidade Universitária de Cassilândia.

Aspectos que serão observados no levantamento bibliográfico e nas discussões durante a pesquisa estão em detrimento da importância das várias possibilidades de abordagem do número de Euler, tema este que está vinculado à valorização da ideia e a importância da aproximação de números que são de suma importância para diversos ramos da ciência e esclarece significados capazes de se fazer compreender o conjunto dos números reais, sendo a união dos números racionais com os irracionais.

No entanto, a pesquisa tomou como base os livros que fazem parte do acervo do Curso de Licenciatura em Matemática da UUC (Unidade Universitária de Cassilândia),

com o intuito de fazer um estudo das diferentes maneiras de como o número e é apresentado e qual sua importância nos diversos ramos da Matemática.

O trabalho foi desenvolvido e organizado em três capítulos mais as considerações finais. Sendo que no primeiro capítulo, destaca-se O número de Euler e os logaritmos, no qual será apresentada de maneira sucinta, uma abordagem sistemática da história do número e aplicada aos logaritmos. No segundo - Uma visão panorâmica do número de euler: abordagem teórica e prática, - apresenta-se uma abordagem teórica do número e através de conceitos, demonstrações, algumas abordagens nas funções e no estudo de limites e derivadas de funções. Já no terceiro capítulo, Aplicação do conceito do número de euler, destaca-se algumas aplicações do número e nos modelos de probabilidade e algumas técnicas para se chegar na resolução de uma equação diferencial ordinária, e por fim, apresentaremos as considerações e discussões deste trabalho.

CAPÍTULO I

O NÚMERO DE EULER E OS LOGARITMOS

Neste capítulo, serão relatados alguns conceitos do número e aplicados aos logaritmos, para tanto apresenta-se de forma sucinta a história dos logaritmos e, a partir deste conceito como referência, definir-se-ão os logaritmos naturais, ou seja, o logaritmo na base e .

Segundo Garbi (2009), a glória máxima da Matemática Britânica do século XVI foi John Napier (1550-1617), astrônomo, engenheiro, físico e matemático, pertencia a uma família nobre escocesa e foi um dos precursores da teoria dos logaritmos. Após anos de estudos sobre os logaritmos, demonstrando teoremas e propriedades, este matemático publicou em 1614 um livro sobre o assunto intitulado *Mirifici Logarithmorum Canonis Disciptio* (Descrição da Maravilhosa Lei de Logaritmos).

Napier revolucionou a aritmética pelo fato de apresentar métodos para tornar menos trabalhosos os cálculos aritméticos, tais como a adição, a subtração, a multiplicação, a divisão, a potenciação e a radiciação, utilizados em astronomia, principalmente em viagens marítimas.

Eves (2004) relata que a palavra logaritmo provém do grego *logos = razão e arithmos = números*, ou seja, “número de razão” e foi introduzida por Napier, cuja grande descoberta sobre os logaritmos foi o que em suas demonstrações se apropriava do método que assemelha a prostaférese, que constitui em tornar a multiplicação e a divisão em operações simples de adição e subtração.

A fórmula trigonométrica $2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$ é um exemplo disso e já era bem conhecida na época de Napier. O interessante dessa importante identidade trigonométrica, é que neste caso o produto dos dois números, $2 \cos A \cos B$, é substituído pela soma dos dois números, $\cos(A + B) + \cos(A - B)$. Além desta relação trigonométrica existem outras três, as quais se procedem da mesma ideia:

$$2 \cos A \cos B = \cos(A + B) + \cos(A - B)$$

$$2 \cos A \operatorname{sen} B = \operatorname{sen}(A + B) - \operatorname{sen}(A - B)$$

$$2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

Estas quatro relações trigonométricas são conhecidas como fórmulas de Werner. Isto se deve ao fato de o matemático alemão Johannes Werner (1468-1528) tê-las utilizado para simplificar cálculos de comprimentos relacionados à astronomia.

Para Boyer (1996), a abordagem de Napier, diferencia da prostaférese propriamente dita, pois se baseia nos termos de uma progressão geométrica de potências inteiras $b, b^3, b^4, \dots, b^m, \dots, b^n, \dots$ aos da progressão aritmética $1, 2, 3, 4, \dots, m, \dots, n, \dots$, logo o produto de dois termos da progressão geométrica $b^m \cdot b^n = b^{m+n}$ está associado a soma $m + n$ dos termos correspondentes da progressão aritmética.

Assim, para manter os termos da progressão geométrica suficientemente próximos da interpolação de termos da progressão aritmética, Napier apropriou-se de um valor de b bem próximo de 1, que ele optou pelo número dado $1 - 10^{-7}$ (ou 0,9999999), para ter um equilíbrio e evitar decimais, multiplicou cada potência por 10^7 , isto é, se $N = 10^7(1 - 1/10^7)^L$, então L é o logaritmo de Napier do número N . Desse modo, seu logaritmo de 10^7 é 0, seu logaritmo de $10^7(1 - 1/10^7) = 9999999$ é 1, e assim por diante.

Ao dividir seus números e logaritmos por 10^7 haveria virtualmente um sistema de logaritmos de base $1/e$,

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \quad (\text{veremos mais adiante esta demonstração})$$

Boyer (1996) afirma que Napier não possuía o conceito de base de um sistema de logaritmos, pois sua definição era diferente da que se conhece hoje.

Segundo Eves (2004), a definição de Napier pode ser traduzida da seguinte maneira:

$$Nap \log y = \log_{1/e} \left(\frac{y}{10^7} \right), \text{ esta relação quebra a dicotomia de estabelecer os}$$

logaritmos neperianos (\ln), como sendo um logaritmo natural, devido ao fato de que os logaritmos neperianos decrescem conforme os números crescem, justamente ao contrário do que ocorre com os logaritmos naturais.

A definição de logaritmos apresentada nos livros didáticos é representada da seguinte maneira por Iezzi (1997): sendo a e b números reais positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de b na base a , o expoente x ao qual se deve elevar à base a de modo que a potência a^x seja igual a b .

Simbolicamente, $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$

Na expressão $\log_a b = x$, temos:

- a é a base do logaritmo;
- b é o logaritmando;
- x é o logaritmo;

Normalmente, quando os logaritmos são apresentados somente como $\log b$, dizemos que a base do logaritmo é decimal, ou seja, $\log b = x \Leftrightarrow 10^x = b$ e quando o logaritmo é representado por \ln a base do logaritmo será o número e , que é equivalente a $\log_e b = \ln b$.

Uma importante demonstração do conceito de logaritmo natural (\ln) é dada por Lima (1991), na qual ele constituiu o conceito do número e utilizando a área de uma faixa hiperbólica.

Para Lima (1991), esta demonstração foi realizada primeiramente em 1647 por um padre jesuíta belga, Gregory Saint Vincent (1584-1667), em seguida também por Isaac Newton (1642-1727) em 1660, sendo que ambos reconheceram uma relação estreita entre a área de uma faixa de hipérbole e os logaritmos. Embora nenhum dos dois tenha identificado realmente essa área com os logaritmos naturais, nem tenham reconhecido o número e , suas observações pioneiras mostram que a concepção geométrica de uma função logarítmica é uma ideia muito antiga, com mais de três séculos e meio de existência. Além de antiga, ela é natural e intuitiva, porque constitui uma excelente introdução ao Cálculo Integral.

Entretanto, daremos os primeiros passos no sentido de expor essa concepção, introduzindo a definição de área de uma faixa de hipérbole. Para isso, suponha-se que seja fixado no plano um sistema de eixos cartesianos, isto é, duas retas orientadas e perpendiculares entre si. Cada ponto do plano ficará então representado por um par ordenado (x, y) de números reais, que são suas coordenadas em relação aos eixos previamente fixados, sendo x a abscissa e y a ordenada do ponto em questão. Por simplicidade, apresenta-se apenas o ponto (x, y) , em vez de o ponto cujas coordenadas são x e y .

Seja H o ramo positivo do gráfico da função $y = 1/x$, isto é, da função que associa a cada número real positivo x o número $y = 1/x$. H é o subconjunto do plano constituído pelos pontos da forma $(x, 1/x)$, no qual $x > 0$. Em símbolos,

$$H = \left\{ (x, y), x > 0, y = \frac{1}{x} \right\}, \quad (1.a)$$

Geometricamente, H é o ramo da hipérbole $xy = 1$ que está contido no primeiro quadrante, ou seja, um ponto (x, y) do plano pertence ao conjunto H se e somente se, $x > 0$ e $xy = 1$.

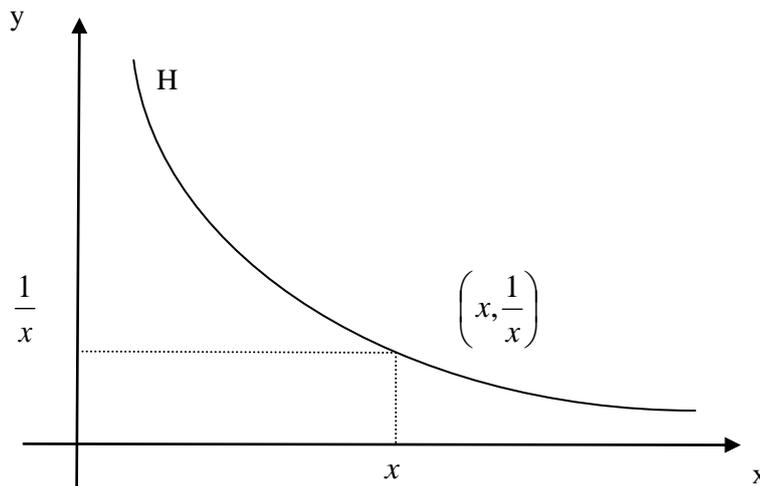


Figura 1.a: Gráfico da função $f(x) = 1/x$ para $x > 0$

Uma faixa de hipérbole é obtida quando fixamos dois números reais positivos a, b , com $a < b$, e tomamos a região do plano limitada pelas duas retas verticais $x = a, x = b$, pelo eixo das abscissas, e pela hipérbole H , essa região será indicada pelo símbolo H_a^b .

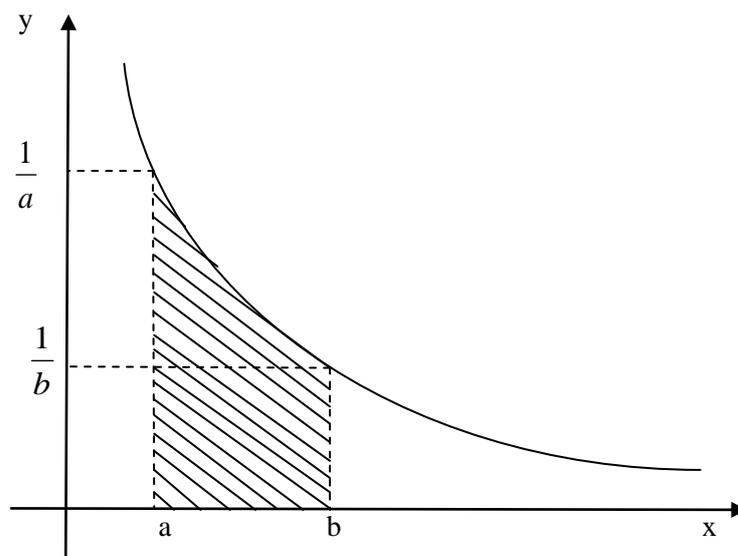


Figura 1.b: A região hachurada é a faixa H_a^b .

Portanto, a faixa H_a^b é formada pelos pontos (x, y) cujas coordenadas cumprem simultaneamente as condições $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq 1/x$. Na notação da teoria dos conjuntos, tem-se:

$$H_a^b = \left\{ (x, y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}. \quad (1.b)$$

Será demonstrado agora como se proceder a fim de calcular a área de uma faixa H_a^b .

Por meio de pontos intermediários, decompos o intervalo $[a, b]$ em um número finito de intervalos justapostos. Com base em cada um dos intervalos $[e, d]$ da decomposição (onde $e < d$), considera-se o retângulo de altura igual a $1/d$. O vértice superior direito desse retângulo será chamado de um retângulo inscrito na faixa H_a^b e toca a hipérbole H . A reunião desses retângulos inscritos constitui o que será chamado de polígono retangular inscrito na faixa H_a^b .

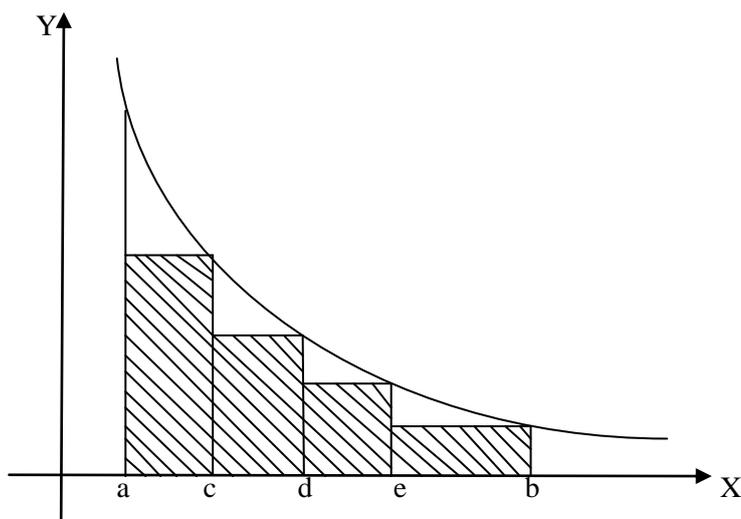


Figura 1.c: Polígono retangular Inscrito na faixa H_a^b .

É fácil calcular a área de um polígono retangular inscrito numa faixa, quando se conhecem os pontos de subdivisão do intervalo $[a, b]$.

Para calcular a área de uma faixa H_a^b podemos também adotar o seguinte método: dada uma decomposição de $[a, b]$ em intervalos justapostos, sobre cada intervalo $[c, d]$ da decomposição, em vez do retângulo inscrito com base $[c, d]$, será considerado o trapézio secante, que tem a mesma base, os dois lados verticais tendo comprimento $1/c$ e $1/d$ respectivamente, de modo que dois dos seus vértices toquem a hipérbole H . Como a curva $y = 1/x$ tem a concavidade voltada para cima, esse trapézio contém a faixa H_c^d em seu interior. A reunião dos trapézios assim obtidos forma um polígono trapezoidal secante à faixa H_a^b e a área desse polígono dá uma aproximação por excesso da área de H_a^b .

Convém observar que, como os lados inclinados desses trapézios se aproximam mais da hipérbole H do que as bases superiores dos retângulos inscritos, as aproximações obtidas deste modo são melhores às encontradas da maneira anterior. Isto se dá, mais acentuadamente, nos pontos mais próximos de 0, isto é, em faixas H_a^b com a e b pequenos. De fato, para valores pequenos de x , a curva $y = 1/x$ é muito inclinada.

Por outro lado, para valores muito grandes de x , a hipérbole $y = 1/x$ é pouco inclinada (isto é, quase horizontal) e, portanto, a base superior do retângulo inscrito é

uma boa aproximação para a curva. Muitas vezes, porém, necessitam-se de aproximações inferiores. Assim, é através de aproximações superiores, por exemplo, que nunca se poderá concluir que a área de H_1^3 seja maior que um.

Como ilustração calculemos uma aproximação superior para H_1^3 pelo método dos trapézios secantes, decompondo o intervalo $[1,3]$ em 8 intervalos de mesmo comprimento, igual a $1/4$.

Com este cálculo, obtém-se 8(oito) trapézios, sendo a área de cada um igual a $1/8$ (metade do lado horizontal) vezes a soma dos lados verticais. Ora os lados verticais desses trapézios têm medidas $1/x$, no qual $x=1, x=5/4, x=6/4, \text{ etc.}$ As medidas dos 9(nove) lados verticais são:

$$1 \quad 0,8 \quad 0,571 \quad 0,5 \quad 0,444 \quad 0,4 \quad 0,363 \quad 0,333.$$

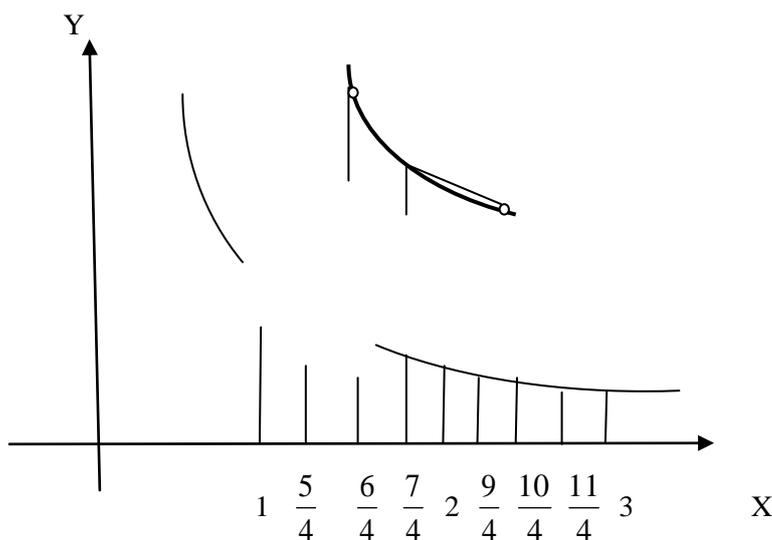


Figura 1.d: Aproximação de H_1^3 por trapézios secantes.

A área de polígonos trapezoidal secante, é igual à soma das áreas dos 8(oito) trapézios, vale, portanto,

$$\frac{1}{8}[(1 + 0,8) + (0,8 + 0,666) + (0,666 + 0,571) + (0,571 + 0,5) + (0,5 + 0,444) + (0,444 + 0,4) + (0,4 + 0,363) + (0,363 + 0,333)].$$

Esta expressão pode ser simplificada:

$$\frac{1}{4}[0,5 + 0,8 + 0,666 + 0,571 + 0,5 + 0,444 + 0,4 + 0,363 + 0,166] = \frac{4,410}{4} = 1,1025.$$

Se comparado este resultado com a aproximação inferior, é possível escrever:

$$1,0198 < \text{Área}(H_1^3) < 1,1025.$$

De modo análogo, é possível considerar, sobre cada intervalo $[c, d]$, dois lados verticais (cujos comprimentos são, como é possível ver adiante, irrelevantes) e cujo lado inclinado é a tangente à hipérbole tirada pelo ponto de abscissa $(c+d)/2$, que será chamada de tangente pelo ponto médio. Esse trapézio será chamado o trapézio tangente à hipérbole no intervalo $[c, d]$, ficando subentendido que essa tangente será sempre traçada pelo ponto médio do arco cd da hipérbole.

A área do trapézio tangente é

$$2 \frac{d-c}{d+c},$$

pois $2/(d+c)$ é sua base média e $d-c$ é sua altura.

A reunião dos trapézios tangentes (relativos a uma decomposição dada do intervalo $[a, b]$) é o que será chamada de polígono trapezoidal tangente à faixa H_a^b . Sua área é uma aproximação por falta da área de H_a^b .

Será demonstrado a seguir que a aproximação dada pelos trapézios tangentes é melhor do que a dada pelos trapézios secantes.

Com efeito, em cada intervalo $[c, d]$ da decomposição, ao se aproximar a área da faixa de hipérbole H_a^b pela área do trapézio tangente, o erro cometido é menor do que quando se aproxima a mesma área do trapézio secante:

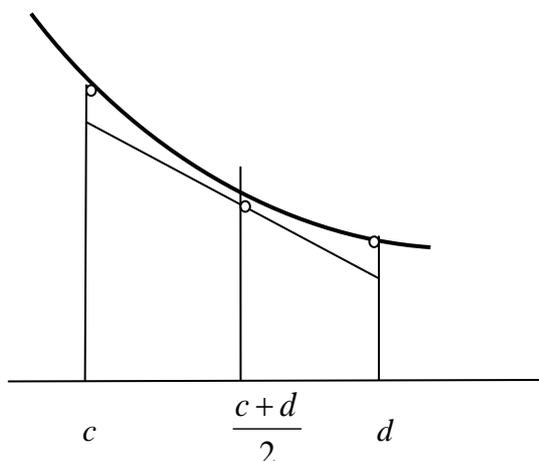


Figura 1.e

Para se convencer disso, considere a parte da figura acima compreendida entre a tangente e a secante. Trace duas secantes auxiliares, AB e BC .

A soma das áreas dos triângulos hachurados é igual

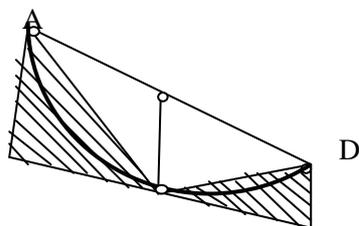


Figura 1.f

A soma das áreas dos triângulos não hachurados [igual ao segmento vertical médio vezes $(d-c)/2$]. Logo a parte do trapézio secante que excede H_c^d tem área maior do que falta ao trapézio tangente para igualar H_c^d .

Observação: usando trapézios tangentes, a decomposição de $[1,3]$ em 8(oito) subintervalos de comprimento $1/4$ e fornece a aproximação por falta

$$\frac{2}{9} + \frac{2}{11} + \dots + \frac{2}{23} = 1,0963,$$

para a área de H_1^3 . É possível notar que o valor dessa área com quatro algarismos decimais exatos é 1,0986.

O fato mais importante a respeito das áreas das faixas de hipérbole é expresso pelo teorema abaixo:

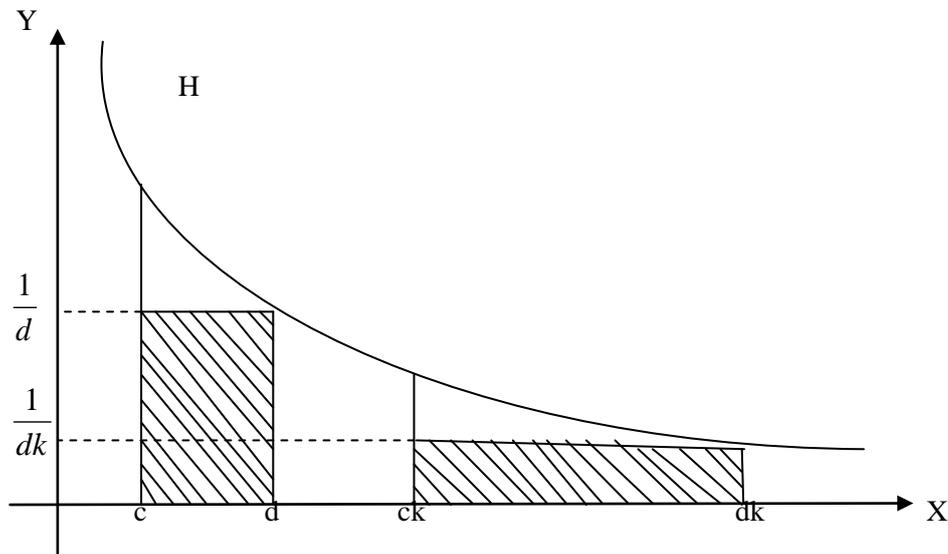
Teorema. Seja qual for o número real, $k > 0$, as faixas H_a^b e H_{ak}^{bk} tem a mesma área.

Demonstração: É necessário, primeiramente, atentar-se para o seguinte fato: dado um retângulo inscrito em H , cuja base é o segmento $[c, d]$ do eixo das abcissas, o retângulo inscrito em H e com base no segmento $[ck, dk]$ tem a mesma área que o anterior. Com efeito, a área do primeiro é igual a

$$(d-c) \times \frac{1}{d} = 1 - \frac{c}{d},$$

enquanto a área do segundo será dada por

$$(dk - ck) \times \frac{1}{dk} = 1 - \frac{c}{d}.$$



Considera-se agora um polígono retangular P , inscrito em H_a^b . Se multiplicados por k , cada uma das abscissas dos pontos de subdivisão de $[a, b]$, determinada por P , obter-se-á uma subdivisão do intervalo $[ak, bk]$ e, portanto, um polígono retangular P' , inscrito na faixa H_{ak}^{bk}

Cada um dos retângulos que compõem P' tem a mesma área que o retângulo correspondente em P . Logo, a área de P' é igual à de P .

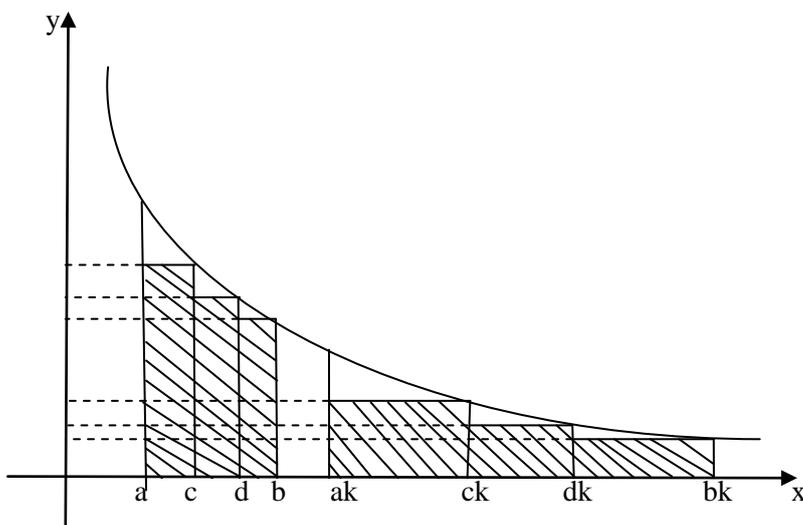


Figura 1.h

Conclui-se assim que, para cada polígono retangular inscrito em H_a^b , existe um inscrito em H_{ak}^{bk} com a mesma área. Analogamente (dividindo abcissas por k) seria possível ver que, para cada polígono retangular Q^t inscrito em H_{ak}^{bk} , existe outro Q, de mesma área, inscrito em H_a^b . Isto significa que as áreas destas duas faixas são números que possuem exatamente as mesmas aproximações inferiores, e portanto são iguais.

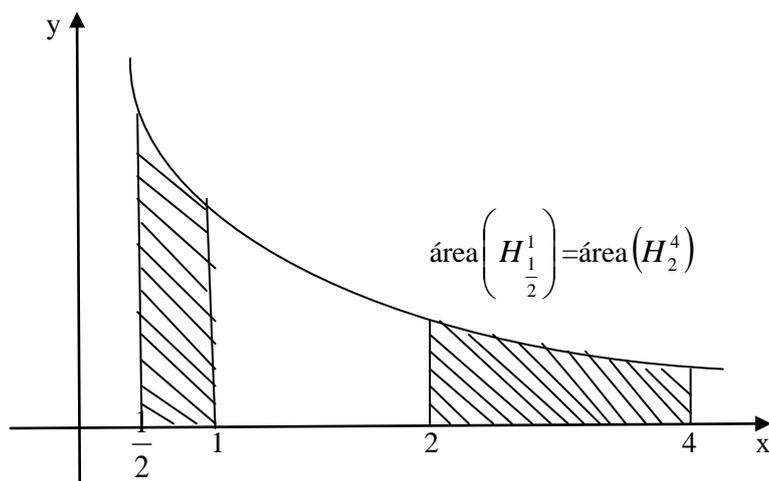


Figura 1.i

Uma consequência deste teorema é que é possível restringir tal consideração às áreas das faixas da forma H_1^c , pois

$$\text{Área}(H_a^b) = \text{Área}(H_1^{b/a}) = \text{Área}(H_1^c), \quad c = b/a.$$

Quando $a < b < c$, o leitor verificará, sem dificuldade que

$$\text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^c) = \text{Área}(H_a^c) \quad (*)$$

A fim de manter a validade da igualdade acima para quaisquer a, b, c reais, será convencionado que

$$\text{Área}(H_a^a) = 0 \quad e \quad \text{Área}(H_a^b) = -\text{Área}(H_b^a)$$

Esta última convenção implica em considerar áreas negativas, assim, $\text{Área}(H_2^1) = -\text{Área}(H_1^2) < 0$. Isto contraria a tradição, mas em compensação, a igualdade (*) acima se torna válida sem restrições. Provém-se então esta afirmação.

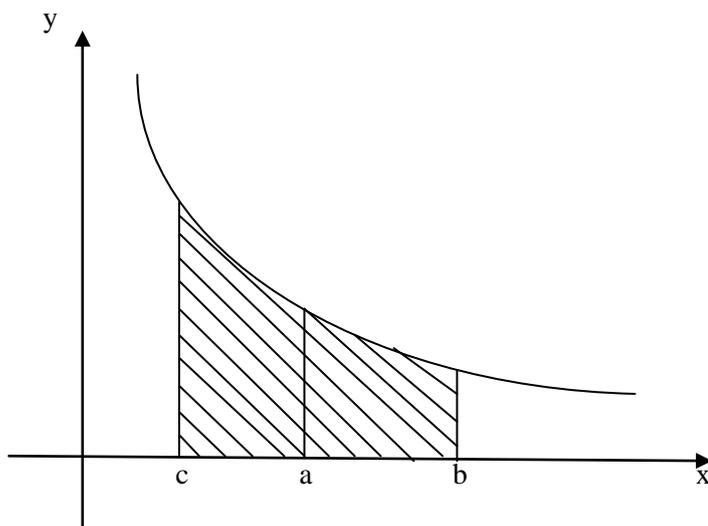


Figura 1.j

Por exemplo, se $c < a < b$, temos

$$\text{Área}(H_c^b) = \text{Área}(H_c^a) + \text{Área}(H_a^b).$$

Daí segue:

$$\text{Área}(H_a^b) - \text{Área}(H_c^b) + \text{Área}(H_c^a),$$

Ou seja,

$$\text{Área}(H_c^b) + \text{Área}(H_b^c) = \text{Área}(H_a^c). \quad (*)$$

O leitor poderá demonstrar, do mesmo modo, a validade da igualdade (*) nos 4(quatro) casos, que são:

$$a < c < b, \quad b < a < c, \quad b < c < a, \quad c < b < a.$$

Mesmo que se tenha $a = c$, $a = b$, $b = c$, ou $a = b = c$, a desigualdade (*) ainda se mantém verdadeira. Isto é trivial, pois $a = c$, por exemplo, faz com que a igualdade se torne

$$\text{Área}(H_a^b) + \text{Área}(H_b^a) = 0,$$

O que é evidente. O leitor pode examinar os 3(três) demais casos.

Observação: O teorema que afirma serem as áreas de (H_a^b) e (H_{ak}^{bk}) iguais continua válido mesmo com esta convenção de sinais. De fato, ainda que tenha $b < a$, será também $bk < ak$, pois $k > 0$. Portanto, se for $b < a$ teremos

$$\text{Área}(H_a^b) = -\text{Área}(H_b^a) = -\text{Área}(H_{bk}^{ak}) = \text{Área}(H_{ak}^{bk}).$$

Com as proposições e teoremas anteriormente apresentados, a definição de logaritmos naturais dada por Lima (1991) segue da seguinte maneira.

Sendo x um número real positivo, será definido o logaritmo natural de x como a área da faixa H_1^x . Assim, por definição, quando $x > 0$, escrevendo $\ln x$, logaritmo natural de x , obtém-se:

$$\ln x = \text{Área}(H_1^x).$$

É possível lembrar que a convenção de tomar $\text{Área}(H_1^x) < 0$, na qual

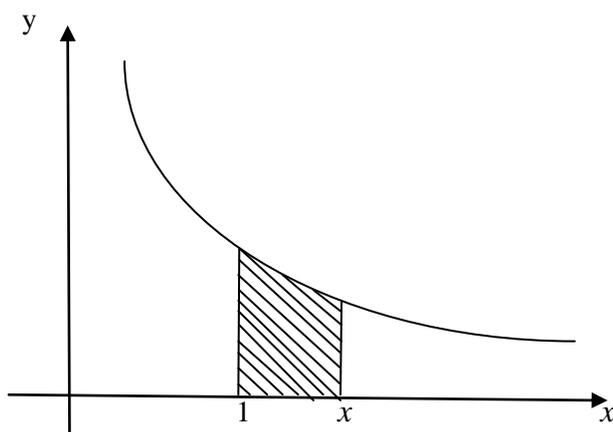


Figura 1.l: A área hachurada é igual a $\ln x$.

$0 < x < 1$ será sempre adotado.

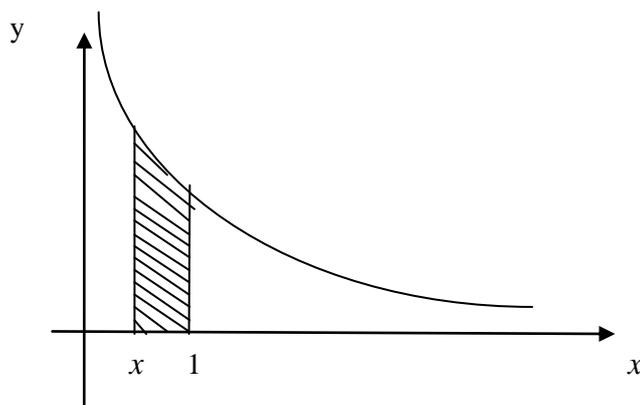


Figura 1.m: Quando $0 < x < 1$, $\ln x$ é a área da faixa hachurada, com o sinal menos.

Em particular, quando $x = 1$, H_1 reduz-se a um segmento de reta, portanto tem a área igual a zero. É possível, então, escrever

$$\ln 1 = 0;$$

$$\ln x > 0 \quad \text{se } x > 1;$$

$$\ln x < 0 \quad \text{se } 0 < x < 1.$$

Não está definido $\ln x$ quando $x < 0$.

O logaritmo que está sendo definido é, por alguns autores, chamado de logaritmo neperiano, embora seja preferível chamá-lo de logaritmo natural, mesmo porque o logaritmo definido por Napier tinha valores diferentes deste. Mais adiante, serão introduzidos outros logaritmos, menos os decimais.

Uma aproximação inferior para $\ln 2$ será fornecida pela área do polígono retangular escrito na faixa H_1^2 , formado por 10(dez) retângulos, cujas bases medem 0,1 e são os dez últimos valores de $1/x$ na lista acima. A área desse polígono retangular será portanto igual 0,6685. Obtemos assim 0.6685 como um valor aproximado (por falta) de $\ln 2$.

Para se ter uma aproximação por excesso do valor $\ln 2$, serão considerados os 10(dez) trapézios circunscritos à faixa H_1^2 , determinados pela mesma subdivisão. A soma das dez áreas desses trapézios será igual 0,6935, como o leitor facilmente constatará.

Desse modo, torna-se possível afirmar que $\ln 2$ é um número compreendido entre 0,6685 e 0,6935. Entre outros termos:

$$0.6685 < \ln 2 < 0.6935.$$

Comprovado que as aproximações trapezoidais são melhores do que as retangulares, fica claro que o valor de $\ln 2$, com 4(quatro) algarismos decimais exatos é 0,6931.

Em virtude dos teoremas e proposições anteriores, o número e será definido partindo da ideia de que existe um único número real positivo, cujo logaritmo natural é igual a um tal número representado pela letra e . Este número é a base do sistema de logaritmos naturais.

Portanto, as afirmações " $\log x = 1$ " e " $x = e$ " são equivalentes. Em símbolos, tem-se:

$$\ln x = 1 \Leftrightarrow x = e.$$

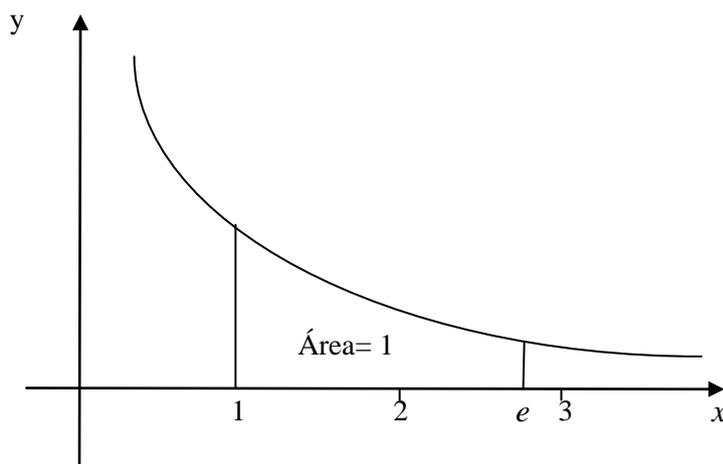


Figura 1.n

Vê-se imediatamente que $e > 1$, pois os números reais positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos. Lembrando o significado geométrico dos logaritmos naturais, é possível observar que a faixa H_1^e tem área 1.

Dessa forma, a faixa H_1^2 tem área menor do que 1, enquanto que H_1^3 tem área maior do que 1. Em outras palavras: $\log 2 < 1 < \log 3$. Conclui-se então que $2 < e < 3$, ou seja, que o número e está compreendido entre 2 e 3.

Pode-se demonstrar que o número e é irracional. Portanto, seu desenvolvimento decimal não termina nem é periódico. Um valor aproximado de e , com 12 (doze) algarismos decimais exatos, é:

$$e = 2,718281828459.$$

Uma das principais características para o desenvolvimento da matemática foi sem dúvida a utilização dos logaritmos naturais \ln , ou seja, logaritmos na base e .

Decorrem da definição de logaritmo as seguintes propriedades:

1. $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$;

O logaritmo de 1 em qualquer base a é igual a 0,

2. $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$;

O logaritmo da base, qualquer que seja ela, é igual a 1,

3. $a^{\log_a b} = b$, pois o logaritmo de b na base a é justamente o expoente que se deve dar a base a para que a potência fique igual $a b$;

A potência de base a e expoente $\log_a b$ é igual $a b$.

Propriedade 1(Logaritmo Natural (ln) do Produto):

O ln do produto de dois números reais e positivos é a soma dos ln dos números, ou seja: se $0 < e \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\ln(b \cdot c) = \ln b + \ln c,$$

Demonstração: Fazendo $\ln b = x$, $\ln c = y$ e $\ln(b \cdot c) = z$, vem:

$$\left. \begin{array}{l} \ln b = x \Rightarrow e^x = b \\ \ln c = y \Rightarrow e^y = c \\ \ln(b \cdot c) = z \Rightarrow e^z = b \cdot c \end{array} \right\} \Rightarrow e^z = e^x \cdot e^y = e^{x+y} \Rightarrow z = x + y$$

Essa propriedade também é válida para o (ln) de três ou mais números reais e positivos, ou seja: se $0 < e \neq 1$ e $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, então:

$$\ln(b_1 \cdot b_2 \cdot \dots \cdot b_n) = \ln b_1 + \ln b_2 + \dots + \ln b_n.$$

$$b_1 > 0, b_2 > 0, b_n > 0$$

Propriedade 2(Logaritmo natural (ln) do Quociente):

O ln do quociente de dois números reais e positivos é a diferença dos ln dos números, ou seja: se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, então:

$$\ln_a \frac{b}{c} = \ln_a b - \ln_a c \quad (1.d)$$

Demonstração: Fazendo $\ln b = x$, $\ln c = y$ e $\ln(b/c) = z$, vem:

$$\left. \begin{array}{l} \ln b = x \Rightarrow e^x = b \\ \ln c = y \Rightarrow e^y = c \\ \ln(b/c) = z \Rightarrow e^z = b/c \end{array} \right\} \Rightarrow e^z = \frac{e^x}{e^y} = e^x e^{-y} = e^{x-y} \Rightarrow z = x - y$$

Propriedade 3: Logaritmo (ln) da Potência:

O logaritmo de uma potência de base real positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.

$$\text{Seja } 0 < e \neq 1, b > 0 \text{ então } \ln b^r = r \cdot \ln b \text{ para todo } r \in \mathbb{R} \quad (1.e)$$

Demonstração: Fazendo $\ln b = x$, $\ln b^r = y$, vem:

$$\left. \begin{array}{l} \ln b = x \Rightarrow e^x = b \\ \ln b^r = y \Rightarrow e^y = b^r \end{array} \right\} \Rightarrow e^y = (e^x)^r \Rightarrow y = xr \text{ o que completa a demonstração.}$$

Estas três propriedades são válidas para $0 < e \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, o que permite obter o \ln de um produto de um quociente ou de uma potência, sendo conhecidos apenas os \ln dos termos do produto, ou termos do quociente, ou da base da potência.

Expressões que envolvem apenas operações de multiplicação, divisão e potenciação são chamadas expressões logarítmicas, pois podem ser calculadas utilizando logaritmos na base e .

Há situações em que surgiu um logaritmo em certa base e tornou-se necessário convertê-lo a outra base. Assim, destaca-se a 4ª propriedade:

Propriedade 4 (Mudança de Base)

$$\text{Seja } 0 < e \neq 1, 0 < a \neq 1, b > 0 \text{ então } \log_b a = \frac{\ln a}{\ln b} \quad (1.f)$$

Demonstração: Se $\log_b a = x \Leftrightarrow a = b^x$ logo

$$\frac{\ln a}{\ln b} = x \Leftrightarrow \ln a = \ln b \cdot x$$

$$\ln a = \ln b \cdot x \Leftrightarrow a = e^{\ln b \cdot x}$$

Aplicando a propriedade 3(três) tem-se $a = e^{(\ln b)^x}$ pela definição 3(três) e obtém-se $e^{(\ln b)^x} = b^x$

Portanto, $a = e^{(\ln b)^x} \Leftrightarrow a = b^x$ que completa a demonstração.

CAPÍTULO II

UMA VISÃO PANORÂMICA DO NÚMERO DE EULER: ABORDAGEM TEÓRICA E PRÁTICA

Segundo Maor (2008), o número de Euler, e , já aparecia em problemas antigos de maneira implícita, mas não era evidente uma posição teórica sobre as características irracionais desse número.

Neste capítulo, serão apresentados aspectos teóricos da composição do número e , assim como as aplicações que decorrem desta abordagem teórica.

2.1 Sequências Numéricas a Determinação do Número e

Segundo Ávila (2006), um importante exemplo de sequência monótona é a sequência que vamos considerar a seguir, e que define o número e , base dos logaritmos naturais.

Foi visto anteriormente que esse número surgiu na matemática pela primeira vez no início do século XVIII, na consideração de um problema de juros compostos instantaneamente. Nesse contexto, ele é definido mediante o limite cuja representação é

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (2.a)$$

Trata-se de uma forma indeterminada do tipo 1^∞ , pois, enquanto o expoente tende a infinito, a base $1 + 1/n$ tende decrescentemente a 1.

O objetivo aqui será provar que a sequência que define e é crescente e limitada, portanto, tem limite. Pela fórmula do binômio de Newton

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b^1 + \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} \cdot a^1 \cdot b^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot a^0 \cdot b^n, \quad (2.b)$$

onde $a = 1$ e $b = 1/n$. Considerando a_n o resultado da sequência temos:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} \frac{1}{n^r} = 1 + \sum_{r=1}^n \frac{n(n-1)\dots(n-[r-1])}{r!} \cdot \frac{1}{n^r} \quad (2.c)$$

Segue que:

$$a_n = 1 + \sum_{r=1}^n \frac{1}{r!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right). \quad (2.d)$$

Para uma melhor compreensão vamos desenvolver o termo binomial $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \binom{n}{0} \cdot 1^n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \binom{n}{2} \cdot 1^{n-2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \binom{n}{3} \cdot 1^{n-3} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \binom{n}{n} \cdot 1^0 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + n \cdot \left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3!} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{n^3} + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \frac{(n-1)}{n} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right) \cdot \left(\frac{n-2}{n}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

Desta forma, pode-se considerar que

$$a_n < \sum_{r=1}^n \frac{1}{r!} = 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3. \quad (2.e)$$

Numa linguagem matemática mais voltada ao cálculo, quando n tende a infinito, $1/n$ tende a zero. Assim, pode-se escrever

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot (1-0) \cdot (1-0) + \dots = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 2,718281828\dots$$

$$\text{Portanto, } e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281828\dots \quad (2.g)$$

A famosa identidade de Euler ($e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$) que liga a trigonometria à função exponencial, pode ser demonstrada também através de séries, de seno, cosseno e da exponencial. Para Eves (2004) ela já aparecia antes sob forma logarítmica apresentada por matemáticos no início do século dezoito.

$$\text{Série de seno: } \operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad (2.h)$$

$$\text{Série do cosseno: } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad (2.i)$$

$$\text{Série da exponencial: } e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots \quad (2.j)$$

Combinando (2.i) e (2.j), obtém-se

$$\cos x + i\operatorname{sen} x = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \dots \quad (2.l)$$

Portanto, $\cos x + i\operatorname{sen} x = e^{ix}$, onde $x \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$ é o número imaginário de Euler.

Se considerarmos $x = 180^\circ = \pi \text{ rad}$ em (2.l), tem-se:

$$\cos \pi + i\operatorname{sen} \pi = e^{i\pi} \Rightarrow -1 + i \cdot 0 = e^{i\pi}$$

Portanto,

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad (2.m)$$

Da identidade $\cos x + i\operatorname{sen} x = e^{ix}$ são desenvolvidas duas relações importantes:

$$\begin{cases} e^{ix} = \cos x + i\operatorname{sen} x & (2.n) \\ e^{-ix} = \cos x - i\operatorname{sen} x & (2.o) \end{cases}$$

- Adicionando (2.n) com (2.o) temos

$$\bullet \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (2.p)$$

- Subtraindo (2.n) com (2.o) temos

$$\bullet \operatorname{sen} x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (2.q)$$

2.2 Funções Exponenciais e Logarítmicas de Base e

A função logaritmo natural $f(x) = \ln(x)$ em consequência de uma função exponencial de base e dada por $f(x) = e^x$. Suas principais características serão abordadas através de uma análise gráfica como se pode verificar abaixo:

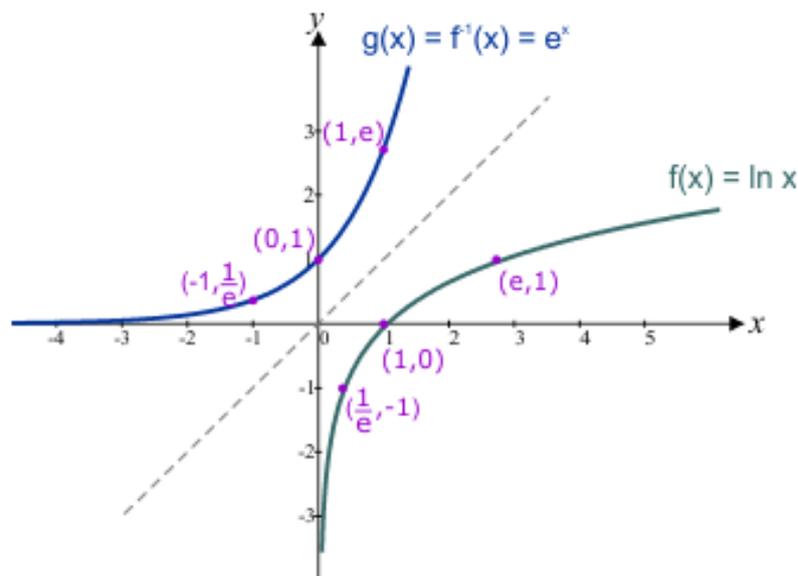


Figura (2.1.a): Gráfico de $f(x) = \ln(x)$ e $f^{-1}(x) = e^x$

Algumas análises a partir da análise gráfica podemos destacar:

A função logaritmo natural, $f(x) = \ln(x)$, é definida por $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Podemos observar pontos importantes como $P(e, 1)$, ou seja, $f(e) = \ln(e) = 1$, $P(1/e, -1)$, ou seja, $f(1/e) = \ln(1/e) = -1$ e $P(1, 0)$, ou seja, $f(1) = \ln(1) = 0$.

Quanto a função exponencial de base e dada por $f(x) = e^x$ é definida por $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$. Destacam-se pontos importantes como $P(1, e)$ ou seja $f(1) = e^1 = e$, $P(-1, 1/e)$, ou seja $f(-1) = e^{-1} = 1/e$ e $P(0, 1)$, ou seja, $f(0) = e^0 = 1$.

Destacamos também que:

A função $f(x) = \ln(x)$ por ser definida $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função injetora pois $f(x_1) = \ln(x_1) \neq f(x_2) = \ln(x_2)$ e sobrejetora pois sua imagem é igual a seu contradomínio $CD_f = \mathbb{R} = IM_f$ logo bijetora, portanto admite inversa.

Já a função $f(x) = e^x$ por ser definida $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função injetora, pois $f(x_1) = e^{x_1} \neq f(x_2) = e^{x_2}$ e sobrejetora, pois sua imagem é igual ao seu contradomínio $CD_f = \mathbb{R}^+ = IM_f$ logo bijetora, portanto admite inversa.

É possível observar que as funções $f(x) = \ln(x)$ e $f^{-1}(x) = e^x$ são inversas uma da outra, pois o domínio da função logaritmo natural é igual à imagem da função exponencial de base e .

Através das definições anteriores podemos demonstrar que $[e^x]^{-1} = \ln(x)$, ou seja, as funções $f(x) = \ln(x)$ e $f(x) = e^x$ são inversas.

Por definição temos $e^{f(x)} = x$ aplicando \ln em ambos os lados temos $\ln e^{f(x)} = \ln x$ utilizando a propriedade **1.e** temos que

$$\ln e^{f(x)} = \ln x \rightarrow f(x) \cdot \ln e = \ln x \quad \text{como } \ln e = 1 \quad \text{portanto } f(x) = \ln x.$$

Uma das extensões dos estudos sobre número e estão relacionadas às funções hiperbólicas. Segundo Flemming (1992), as expressões exponenciais $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$ e $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, ocorrem frequentemente na Matemática aplicada, definidas abaixo.

O comportamento dessas funções nos conduz a fazer uma analogia com as funções trigonométricas, pois tais funções são definidas no ciclo trigonométrico e as funções hiperbólicas são definidas na hipérbole equilátera.

A função seno hiperbólico, denotada por \sinh , e a função cosseno hiperbólico, denotada por \cosh , são definidas, respectivamente, por:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (2.1.a)$$

e

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (2.1.b)$$

O domínio e imagem das funções \sinh e \cosh são:

$$D(\sinh) = (-\infty, +\infty),$$

$$D(\cosh) = (-\infty, +\infty),$$

$$\text{Im}(\sinh) = (-\infty, +\infty)$$

$$\text{Im}(\cosh) = (-\infty, +\infty).$$

O gráfico da função \sinh é dado na figura 2.1.b. e pode ser obtido pelo método chamado de adição de ordenadas. Para usar essa técnica, serão esboçados os gráficos das funções $\frac{1}{2}e^x$ e $-\frac{1}{2}e^{-x}$ e somados as respectivas ordenadas.

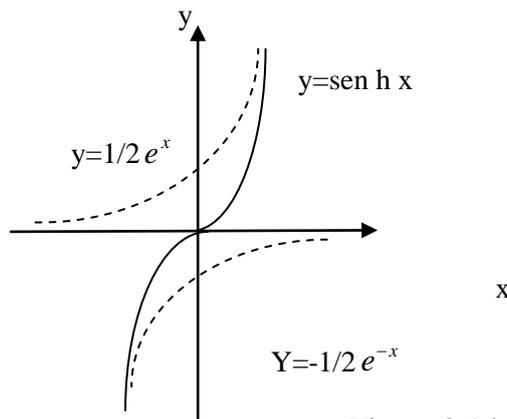


Figura 2.1.b

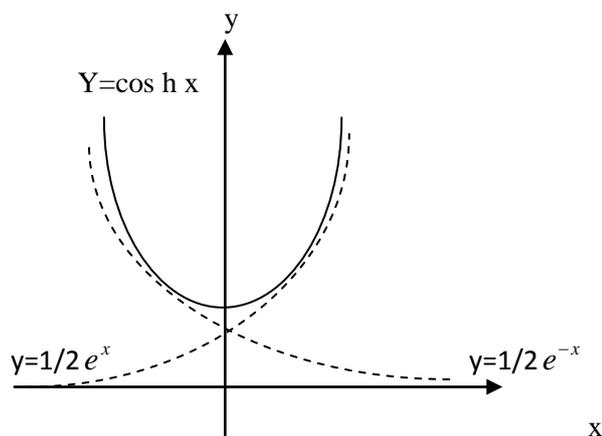


Figura 2.1.c

A função cosseno hiperbólico pode ser usada para descrever a forma de um cabo ou corrente flexível, uniforme, cujas extremidades estão fixas a uma mesma altura.

Na figura 2.1.d foi desenhado um fio de telefone ou de luz. Observa-se que a curva representada pelo fio aparenta a forma de uma parábola, no entanto, é possível mostrar que a equação correspondente é:

$$y = \cosh(x/a), \quad a \in R. \quad (2.1.c)$$

Esta curva recebe a denominação catenária vista na figura 2.1.d.

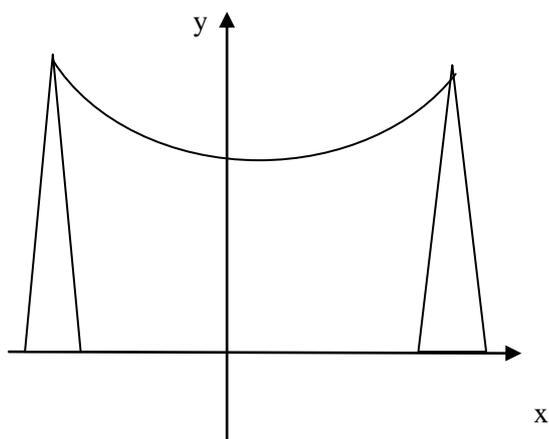


Figura 2.1.d: Representação de um fio esticado entre dois postes

As quatro funções hiperbólicas restantes podem ser definidas em termos de \sinh e \cosh .

As funções tangente, cotangente, secante e cossecante hiperbólicas, denotadas respectivamente por tgh , cotgh , sech e cosech são definidas por:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senhx}}{\operatorname{cosh} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (2.1.d)$$

$$\operatorname{cotgh} x = \frac{\operatorname{cosh} x}{\operatorname{senhx}} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (2.1.e)$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{cosh} x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad (2.1.f)$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{senhx}} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}. \quad (2.1.g)$$

Os gráficos dessas funções podem ser vistos na figura (2.1.e.,2.1.f,2.1.g,2.1.h)

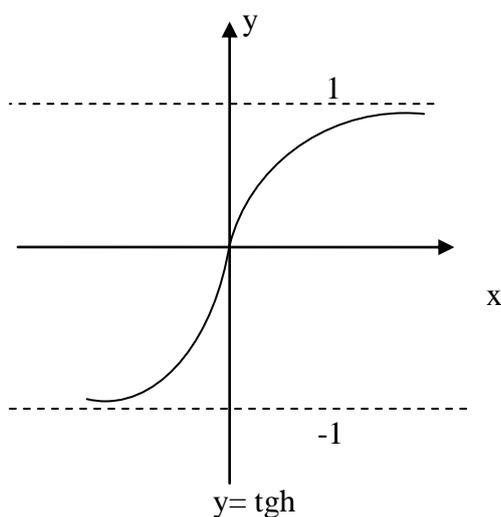


Figura 2.1.e

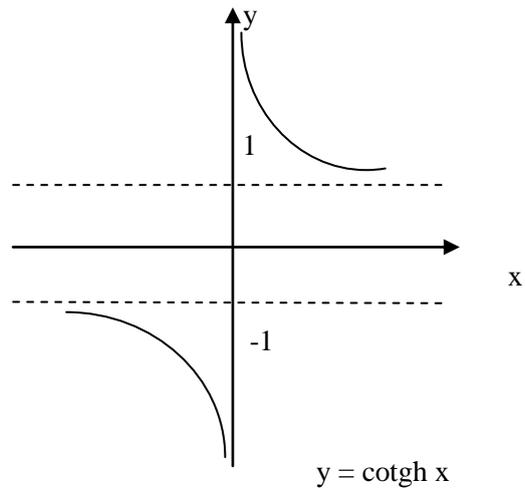


Figura 2.1.f

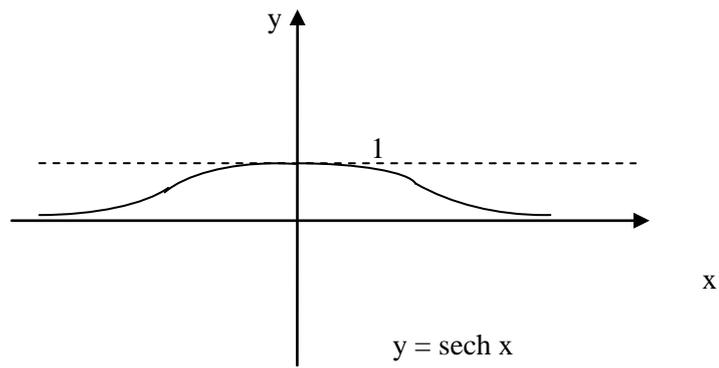


Figura: 2.1.g

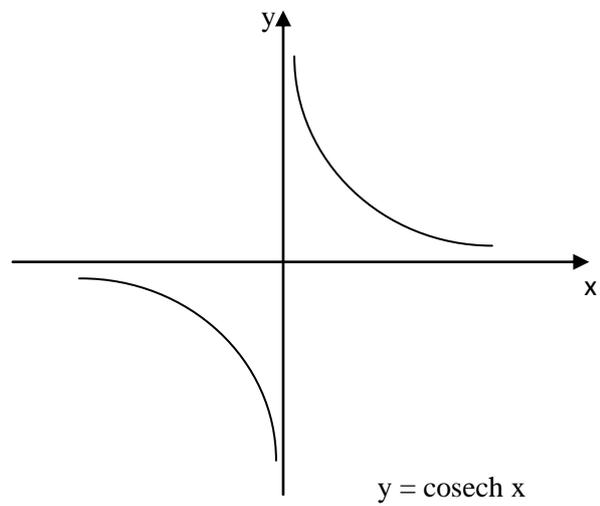


Figura 2.1.h

Muitas identidades análogas às conhecidas para funções trigonométricas são válidas para as funções hiperbólicas. Por exemplo, pode-se verificar que

$$\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1 \quad (2.1.h)$$

Esta identidade é análoga à identidade trigonométrica $\cos^2 u - \sin^2 u = 1$ e pode ser usada para justificar o adjetivo “hiperbólico” nas definições.

De fato, a identidade $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ mostra que o ponto P de coordenadas $(\cosh t, \sinh t)$ está sobre a hipérbole unitária $x^2 - y^2 = 1$ (2.1.i).

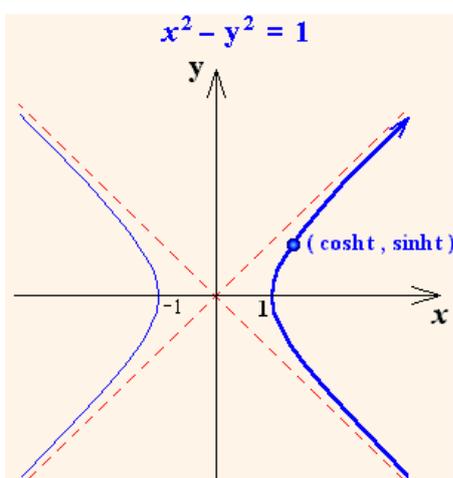


Figura 2.1.i

$$\begin{cases} x = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} & (2.1.h) \\ y = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} & (2.1.j) \end{cases}$$

Demonstração: Partimos de $x^2 - y^2 = 1$. Substituindo (2.1.h) e (3.1.j) temos

$$\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2e^x \cdot e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x \cdot e^{-x} - e^{-2x}}{4} = \frac{4e^x \cdot e^{-x}}{4} = 1.$$

Portanto $x^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow \cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

Aspectos teóricos relevantes ao número e são desenvolvidos através dos conceitos de limites no infinito que gera $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 + 1/x)^x = e$, na qual servirá de base para demonstrações de diversos teoremas.

Proposição 1: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}$ (2.1.1)

Demonstração: Chamando $u = \frac{1}{x}$, tem-se $x = \frac{1}{u}$. Quando $x \rightarrow \infty$ concluímos $u \rightarrow 0$,

Seja $L = \lim_{u \rightarrow 0} \left(1 - \frac{1}{u}\right)^u$. Aplicando \ln em ambos os lados da expressão, tem-se

$$\ln L = \lim_{u \rightarrow 0} \ln \left(1 - \frac{1}{u}\right)^u$$

Aplicando a propriedade de \ln (1.e) no lado direito da expressão, tem-se

$$\ln L = \lim_{u \rightarrow 0} u \ln \left(1 - \frac{1}{u}\right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(u - 1/u)}{1/u}$$

Aplicando o limite nesta última expressão, é possível verificar que há uma indeterminação $0/0$ na qual pode-se aplicar a regra de L'Hospital.

Logo, para $\ln L = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(u - 1/u)}{1/u}$ se $\begin{cases} f(u) = \ln(u - 1/u) = f'(u) = 1/u^2 \\ g(u) = 1/u = f'(u) = -1/u^2 \end{cases}$ assim

$$\ln L = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{u^2}}{-\frac{1}{u^2}} \Leftrightarrow \ln L = \lim_{u \rightarrow 0} (-1)$$

Pela propriedade de limite $\lim_{u \rightarrow 0} -1 = -1$ então tem-se

$\ln L = -1 \Leftrightarrow e^{-1} = L$. Logo $L = \frac{1}{e}$, portanto

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \frac{1}{e}.$$

Proposição 2: $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$ (2.1.m)

Demonstração: Chamando $u = \frac{1}{x}$ tem-se $x = \frac{1}{u}$. Quando $x \rightarrow 0$ concluímos $u \rightarrow \infty$. Assim,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u = e. \text{ Portanto, } \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

$$\text{Proposição 3: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (2.1.n)$$

Demonstração: Fazendo $t = a^x - 1$, temos

$$a^x = t + 1. \quad (*)$$

Aplicando o \ln em ambos os lados na igualdade (*), obtém-se

$$\ln a^x = \ln(t + 1)$$

Aplicando a propriedade (1.e) do \ln da potência em $\ln a^x = x \ln a$ tem-se

$$x \ln a = \ln(t + 1)$$

$$x = \frac{\ln(t + 1)}{\ln a}$$

Quando $x \rightarrow 0$, $x \neq 0$ obtém $t \rightarrow 0$, $t \neq 0$ e então, pode-se escrever

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\frac{\ln(t + 1)}{\ln(a)}}$$

Segue que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(t + 1)}$$

Aplicar e L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \cdot \frac{\lim_{t \rightarrow 0} 1}{\lim_{t \rightarrow 0} \ln(t + 1)}$$

Portanto $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, onde completa a demonstração.

Decorrente da proposição $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, pode também, utilizá-la para obtenção da derivada de uma função exponencial.

$$\text{Se } f(x) = a^x, (a > 0 \text{ e } a \neq 1) \text{ então } f'(x) = a^x \ln a (a > 0 \text{ e } a \neq 1) \quad (2.1.o)$$

De fato,

Demonstração: seja $f(x) = a^x$ ($a > 0$ e $a \neq 1$). Aplicando a definição de derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.1.p)$$

tem-se

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x(a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Aplicando (2.1.q) segue $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$ e, assim, $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^x$.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a. \text{ Portanto } f'(x) = a^x \ln a.$$

Um caso particular é a derivada da função $f(x) = e^x$.

Seja $f(x) = e^x$. Então $f'(x) = e^x \cdot \ln e$, como $\ln e = 1$, portanto $f'(x) = e^x$.

Cabe destacar que $f(x) = e^x$ é uma função, cuja derivada é a própria função $f'(x) = e^x$.

CAPÍTULO III

APLICAÇÃO DO CONCEITO DO NÚMERO DE EULER

3.1 O Número e nos Modelos Probabilísticos

Neste tópico, será apresentado o número e nos modelos de probabilidade, e será observada que sua importância transpõe procedimentos teóricos de outras áreas do conhecimento matemático.

Para Fonseca e Martins (1994), a probabilidade em linhas gerais se desenvolveu sob dois modelos probabilísticos: modelo de distribuição discreta de probabilidade e o modelo de distribuição contínua de probabilidade, ambos trazem uma aplicação do número e que será tratada a seguir.

3.1.1 Distribuição Discreta de Probabilidade: Modelo de Poisson

Siméon Denis **Poisson** nasceu em Pithiviers, França, em 21 de Junho de 1781, em 1798 entrou na École Polytechnique em Paris e como primeiro colocado de sua turma, atraindo imediatamente a atenção dos professores da escola, que o deixaram livre para escolher o que estudar. Teve como professores Laplace (1749 – 1827), Lagrange (1736 – 1813) e Fourier (1768 – 1830), tornando-se muito amigo deles.



Fonte: Eves-2004

Os modelos de probabilidade baseiam-se no experimento probabilístico ligado à ideia do acaso. A probabilidade surgiu como uma teoria voltada aos jogos de azar e se propagou para diversos seguimentos da ciência, tornando-se importantíssima para análises experimentais.

O modelo de Poisson difere dos demais modelos discretos de probabilidade por aparecer a condição de intervalo, seja de tempo, espaço, período de execução entre outros.

Ainda para Fonseca e Martins (1994), a distribuição de Poisson, em muitos casos, mesmo conhecendo o número de sucessos, porém, torna-se difícil e, às vezes, até sem sentido, determinar o número de fracassos ou o número total de provas. Por exemplo, considerando os automóveis que passam em uma esquina, mesmo sendo possível, em um determinado intervalo de tempo anotar o número de carros que passaram, o número de carros que deixaram de passar nessa esquina, não poderá ser determinado. Da mesma forma, em um rolo de fita colante, pode-se determinar quantas emendas existem, porém, não é possível contar quantas emendas não ocorreram.

Analisando os exemplos acima, verifica-se que há uma variável t e quando $t \rightarrow \infty$ a probabilidade tende a aumentar.

Para encontrar a expressão que dá a probabilidade de x sucessos em intervalo t , algumas hipóteses precisam ser admitidas:

- $P(X = 1, \Delta t) = \lambda \Delta t$
- $P(X > 1, \Delta t) = 0$
- $P(X = 0, \Delta t) = 1 - \lambda \Delta t$
- As ocorrências e sucessos em intervalos são independentes.

Tem-se que: $\Delta t = \frac{1}{n}$, logo: $P(X = 1, \Delta t) = \lambda \frac{t}{n}$

Para encontrar a expressão que dá $P(X, t)$, ou seja, a probabilidade de X sucessos no intervalo t , pode-se calcular o limite de uma distributiva Binominal² com parâmetros n e $\frac{\lambda t}{n}$. Assim: t

$$P(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \binom{n}{x} \left(\frac{\lambda t}{n} \right)^x \left(1 - \frac{\lambda t}{n} \right)^{n-x} \quad (3.1.1.a)$$

$$P(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-x+1)}{n \cdot n \cdot n \dots n} \frac{(\lambda t)^x}{x!} \cdot \left(1 - \frac{\lambda t}{n} \right)^n \left(1 - \frac{\lambda t}{n} \right)^{-x}$$

² $P(x = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$. onde p sucesso e $1-p$ fracasso e $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$P(x,t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{x+1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{-x} \right] \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n \cdot \frac{(\lambda t)^x}{x!} \quad (3.1.1.b)$$

Aplicando na expressão (3.1.1.b) a propriedade do produto de limites, dos limites infinitos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, o limite fundamental $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$ e limite de uma constante $\lim_{n \rightarrow \infty} k = k$ temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{x+1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^{-x} \right] = 1 \quad (3.1.1.c)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda t}{n}\right)^n = \frac{1}{e^{\lambda t}} = e^{-\lambda t} \quad (3.1.1.d)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\lambda t)^x}{x!} = \frac{(\lambda t)^x}{x!} \quad (3.1.1.e)$$

Substituindo (3.1.1.c), (3.1.1.d) e em (3.1.1.e) na equação (3.1.1.f), obtém-se:

$$P(x,t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} \cdot e^{-\lambda t}, \quad (3.1.1.f)$$

que é a fórmula para o cálculo de variáveis com distribuição de Poisson onde λ é o coeficiente de proporcionalidade obtida pela média $\mu_{(x)} = \lambda t$.

Vejamos uma aplicação do modelo de Poisson para modelos discretos de probabilidade.

Problema: Em média há 2(duas) chamadas por hora num certo telefone. Calcular a probabilidade de se receber no máximo 3(três) chamada em 2(duas) horas e a probabilidade de nenhuma chamada em 90 minutos.

- Resolução para a probabilidade de 3(três) chamadas em 2(duas) horas.

Precisamos calcular no máximo 3 chamadas, ou seja, os valores de x variando de 0(zero) até 3(três) chamadas durante as 2(duas) horas, para isso, tem-se:

$$P(X \leq 3, 2) = P(X = 0, 2) + P(X = 1, 2) + P(X = 3, 2) =$$

Aplicando (3.1.1.f) em cada soma e encontrando o coeficiente de proporcionalidade pela média $\mu_{(x)} = \lambda t$ obtém-se.

$$\mu = \lambda t : 2 = \lambda t \text{ portanto } \mu = 2.$$

$$P(X \leq 3, 2) = \frac{(4)^0 e^{-4}}{0!} + \frac{(4)^1 e^{-4}}{1!} + \frac{(4)^2 e^{-4}}{2!} + \frac{(4)^3 e^{-4}}{3!}$$

$$P(X \leq 3, 2) \cong 0,0183 + 0,0732 + 0,1464 + 0,1952 \cong 43,31\% .$$

- Resolução para a probabilidade de nenhuma chamada em 90 minutos

Como 2(duas) horas tem 60 minutos encontramos o coeficiente de proporcionalidade da seguinte maneira.

$$\mu = \lambda.t : 2 = \lambda.60 \text{ portanto } \lambda = \frac{2}{60} = \frac{d1}{30}$$

Para $P(X = 0, 90)$ aplicando (3.1.1.f)

$$P(X = 0, 90) = \frac{\left(\frac{90}{30}\right)^0 e^{-\left(\frac{90}{30}\right)}}{0!} = e^{-3} \cong 0,0498 \cong 4,98\%$$

3.1.2 Distribuição Contínua de Probabilidade: Modelo de Poisson

A distribuição contínua de probabilidade fornece resultados dentro de um intervalo diferentemente do modelo discreto de probabilidade, este modelo é apresentado levando em consideração uma distribuição exponencial.

Segundo Fonseca e Martins (1994), sugere-se que a distribuição de probabilidade do intervalo t , entre dois sucessos consecutivos de uma lei do modelo de Poisson, é dada seguindo uma distribuição exponencial.

Sua função densidade é dada por:

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{para } t > 0 \\ f(t) = \lambda e^{-\lambda t} & \text{para } t \geq 0, \lambda > 0 \end{cases} \quad (3.1.2.a)$$

O gráfico de $f(t)$ é dada por:

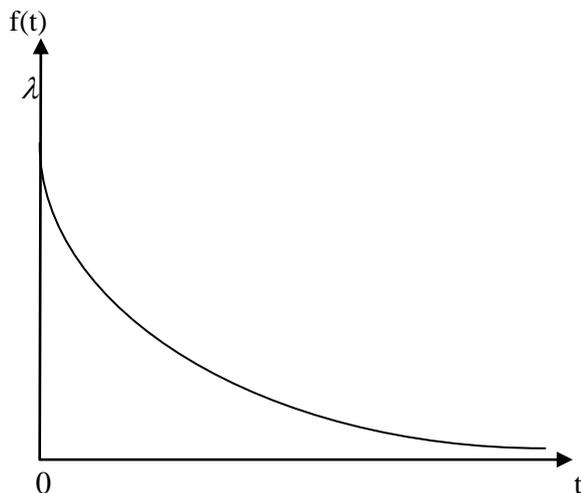


Figura 3.1.2.a

Função Repartição

para $t < 0$; $F(t) = 0$

para $t \geq 0$; $F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda t}$.

Gráfico de $F(t)$

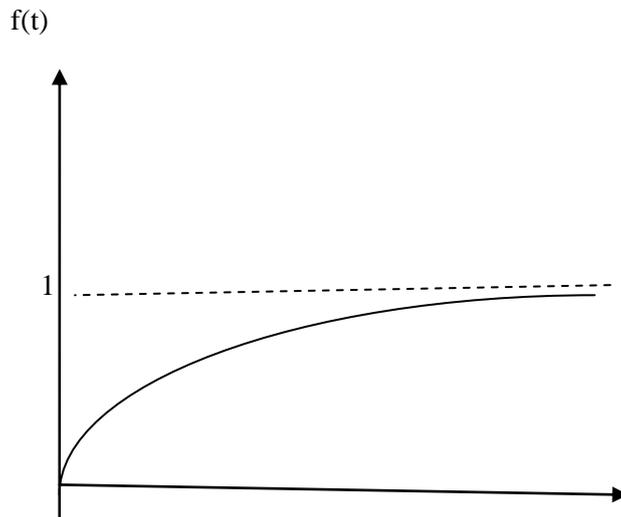


Figura 3.1.2.b

Conhecida a função repartição de t , pode ser facilmente determinar:

$$P(t \geq t_0) = 1 - F(t_0) = 1 - [1 - e^{-\lambda t_0}] = e^{-\lambda t_0}.$$

Veja o gráfico:

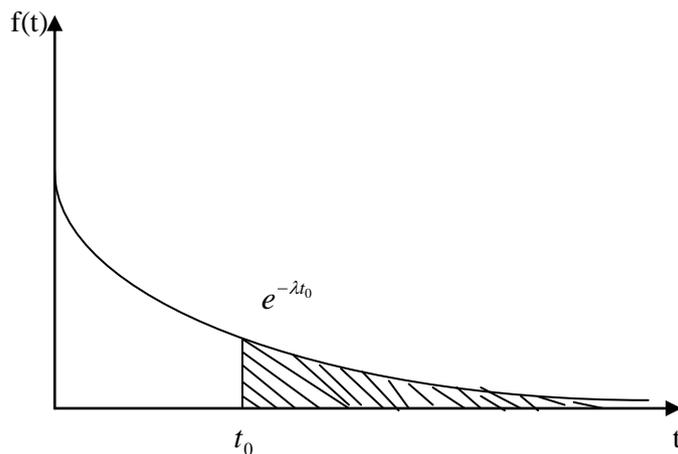


Figura 3.1.2.c

Quanto à média: $\mu_{(t)} = \frac{1}{\lambda}$.

Quanto à variância: $\sigma_{(t)}^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Decorrente a este modelo de distribuição contínua de probabilidade, é possível verificar uma aplicação envolvendo o modelo de Poisson.

Problema: Os defeitos de um tecido seguem a distribuição de Poisson com média de um defeito a cada 400 m. Qual a probabilidade de que o intervalo entre dois defeitos consecutivos seja:

- a) No mínimo de 1.000 m;
- b) Entre 800 e 1.000 m.

Solução:

Sabe-se que na distribuição de Poisson,

$$\mu = \lambda t$$

Logo, $1 = \lambda 400$, isto é $\lambda = \frac{1}{400}$

$$\text{a) } P(t \geq 1.000) = e^{-\lambda t_0} = e^{-\frac{1.000}{400}} = e^{-2,5} \cong 0,0821 \cong 8,21\% .$$

$$\text{b) } P(800 \leq t \leq 1.000) = P(t \geq 800) - P(t \geq 1.000) .$$

$$P(800 \leq t \leq 1000) = e^{-\frac{800}{400}} - e^{-\frac{1.000}{400}} = e^{-2} - e^{-2,5} \cong 0,0532 \cong 5,32\% .$$

3.2 O Número de Euler nas Soluções de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO)

Neste tópico, será apresentado o número e como base de funções exponenciais que auxiliam no cálculo das Equações Diferenciais Ordinárias, EDO, e em suas aplicações.

Para Zill (2001), uma equação diferencial linear n é definida da seguinte forma geral:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \quad (3.2.a)$$

É importante lembrar que linearidade significa que todos os coeficientes são funções de x somente e que y e todas as suas derivadas são elevadas à primeira potência. Agora, quando $n = 1$, obtém-se a equação linear de primeira ordem.

Definição (Equação linear): Uma equação diferencial da forma

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (3.2.b)$$

é chamada de equação linear.

Dividindo pelo coeficiente $a_1(x)$, obtemos uma forma mais útil de uma equação linear:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \quad (3.2.c)$$

É possível procurar uma solução para (3.2.a) em um intervalo I , no qual as funções $P(x)$ e $f(x)$ são contínuas. Na discussão a seguir, supõe-se tacitamente que (3.2.a) possui uma solução.

3.2.1 Fator de Integração

Boulos e Abud (2000) definem equações diferenciais exatas sendo: Seja F uma função diferenciável em um aberto D de \mathbb{R}^2 , e f uma função diferenciável tendo um intervalo aberto I por domínio, tal que $(x, f(x))$ está em D , para todo x de I . Então claramente são equivalentes as afirmações:

- Existe uma constante C tal que, x e $F(x, f(x)) = C$, para todo x de I .
- $\frac{d}{dx}(x, F(x)) = 0$, para todo x de I .
- $\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \cdot f'(x) = 0$, para todo x de I .
- f é solução da EDO $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \cdot y' = 0$, esta EDO tendo

D como domínio.

Uma EDO que pode ser colocada na forma $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \cdot y' = 0$ é referida como **equação diferencial exata**. F é chamada uma **função potencial** da equação.

Pelo resultado acima, temos as soluções da equação $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \cdot y' = 0$, sendo que F é diferenciável no domínio da equação, são dadas implicitamente por $F(x, y) = C$.

Com o uso de diferenciais é possível escrever a equação (3.2.a) como

$$dy + [P(x)y - f(x)]dx = 0 \quad (3.2.d)$$

Equações lineares possuem a agradável propriedade através da qual pode-se sempre encontrar uma função $\mu(x)$ em que:

$$\mu(x)dy + \mu(x)[P(x)y - f(x)]dx = 0 \quad (3.2.e)$$

é uma equação diferencial exata. Pelo fato que o lado esquerdo da equação (3) é uma diferencial exata se

$$\frac{\partial}{\partial x} \mu(x) = \frac{\partial}{\partial y} \mu(x)[P(x)y - f(x)] \quad (3.2.f)$$

ou
$$\frac{d\mu}{dx} = \mu P(x),$$

e esta é uma equação separável em que se pode determinar $\mu(x)$. Tem-se

$$\frac{d\mu}{dx} = P(x)dx,$$

$$\ln|\mu| = \int P(x)dx, \quad (3.2.g)$$

Assim temos,
$$\mu(x) = \int_e P(x)dx, \quad (3.2.h)$$

A função $\mu(x)$ definida em (3.2.h) é um fator de integração para a equação linear. Note que não é preciso usar uma constante de integração em (3.2.g), pois (3.2.e) não se altera se a multiplicarmos por uma constante. Ainda, $\mu(x) \neq 0$ para todo x em I , e é contínua e diferenciável.

É interessante observar que a equação (3.2.e) é ainda uma equação diferencial exata mesmo quando $f(x) = 0$. Na verdade, $f(x)$ não desempenha papel algum na determinação de $\mu(x)$, pois vemos de (3.2.f) que $(\partial/\partial y)\mu(x)f(x) = 0$. Logo, ambas

$$\int_e^{P(x)dx} dy + \int_e^{P(x)dx} [P(x)y - f(x)]dx \quad \text{e} \quad \int_e^{P(x)dx} dy + \int_e^{P(x)dx} P(x)ydx$$
 são equações

diferenciais exatas. Agora, escrevendo (3) na forma

$$\int_e^{P(x)dx} dy + \int_e^{P(x)dx} P(x)y dx = \int_e^{P(x)dx} f(x)dx$$

e verificamos que podemos escrevê-la como

$$\int_{d|e}^{P(x)dx} y = \int_e^{P(x)dx} f(x)dx.$$

Integrando a última equação, temos

$$\int_e^{P(x)dx} y = \int_e^{P(x)dx} f(x)dx + c$$

ou
$$y = \int_{e^-}^{P(x)dx} \int_e^{P(x)dx} f(x)dx + \int_{ce^-}^{P(x)dx}. \quad (3.2.i)$$

Em outras palavras, se (3.2.a) tiver uma solução, ela deverá ser de forma (3.2.i). Reciprocamente, é imediato que (3.2.i) constitui uma família a um parâmetro de soluções para a equação (3.2.a).

3.2.2 Resumo de Método e Algumas Aplicações

Resolvendo uma equação Linear de Primeira ordem:

I. Para resolver uma equação linear de primeira ordem, primeiro, deve-se colocá-la na forma (3.2.a);

II. Identifique $P(x)$ e encontre o fator de integração

III. Multiplique a equação obtida em (I) pelo fator de integração:

$$\int_e P(x) dx \frac{dy}{dx} + P(x) \int_e^{P(x)dx} y = \int_e^{P(x)dx} f(x).$$

IV. O lado esquerdo da equação em (III) é a derivada do produto do fator de integração e a variável dependente y , isto é

$$\frac{d}{dx} \left[\int_e^{P(x)dx} y \right] = \int_e^{P(x)dx} f(x)$$

V. Integre ambos os lados da equação encontrada em (IV).

Para melhor compreensão, deve-se verificar que o procedimento do cálculo da EDO, utilizando o fator de integração, pode ser exemplificada da seguinte maneira.

a) Seja a EDO $x \frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} y = x^6 e^x$. (3.2.l)

Solução: A equação (3.2.l) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} y = x^5 e^x$$
 (3.2.m)

Dividindo (3.2.m) por x . Como $P(x) = -4/x$, o fator de integração é

$$e^{-4 \int dx/x} = e^{-4 \ln|x|} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}.$$

Aqui, utiliza-se a identidade básica $b^{\log_b N} = N$, $N > 0$. Agora, multiplique ((3.2.l)) por este termo

$$x^{-4} \frac{dy}{dx} - 4x^{-5} y = x e^x$$
 (3.2.n)

e obtém-se
$$\frac{dy}{dx}[-4x^{-5}y] = xe^x \quad (3.2.o)$$

Segue-se da integração por partes que:

$$x^{-4}y = xe^x - e^x + c$$

Ou
$$y = x^5e^x - x^4e^x + cx^4.$$

Matos (2001) destaca algumas aplicações cuja solução é um resultado de uma EDO. São elas:

3.2.3 Variação de Temperatura

A lei de variação de temperatura de Newton estabelece que a taxa de variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente.

Denotando por T a temperatura do corpo e por τ a temperatura do meio ambiente, a lei de Newton é formulada matematicamente pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - \tau), k > 0 \quad (3.2.p)$$

ou: $T' + kT = k\tau.$ (3.2.q)

O sinal negativo em (1) indica um processo de resfriamento. Nesse caso,

$T > \tau$ e, portanto, $\frac{dT}{dt} < 0.$

3.2.4 Problema de Mistura

Seja V_0 a quantidade inicial de salmoura dentro de um tanque que contém Q_0 libras de sal. Despejamos no tanque outra solução de salmoura, com Q_1 libras de sal por galão, à razão de v galões por minuto. A mistura é mantida uniforme por meio de um agitador, enquanto ela escoar à razão de w galões por minuto. Denotemos por $Q(t)$ a quantidade de sal presente na mistura, no instante

t , e por $V(t)$ a quantidade de salmoura no mesmo instante. Temos que $\frac{Q(t)}{V(t)}$ representa a concentração de sal na mistura no instante t e a formulação matemática para esta situação é:

$$\frac{dQ}{dt} = Q_1 v - \frac{Q(t)}{V(t)} w, Q(0) = Q_0.$$

Notando que $V(t) = V_0 + tv - tw$, obtemos de (3.2.a) o seguinte modelo matemático para esse problema de mistura:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{w}{V_0 + (v-w)t} Q = Q_1 v, Q(0) = Q_0.$$

3.2.5 Queda dos Corpos

Considerando um corpo de massa m em queda vertical, influenciada pela gravidade g e pela resistência do ar, então de acordo com a Segunda Lei de Newton teremos,

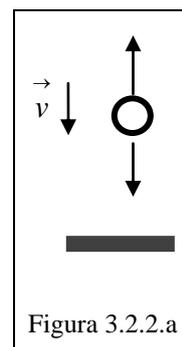
$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Sendo que, \vec{v} representa a velocidade e \vec{F} a resultante das forças que atuam no corpo, e são de duas naturezas: o peso $F_1 = mg$ e a resistência do ar

$$F_2 = -k\vec{v}, k > 0.$$

Então,

$$mg - kv = m \frac{dv}{dt}$$



E denotando por v a derivada de v com relação ao tempo t , tem-se:

$$v + \frac{k}{m} v = g,$$

que é a equação do movimento. Em todo o texto, a derivada de uma função com relação à variável t será indicada por um ponto sobre a função, como foi feita na equação (3.2.a).

Cada modelo apresentado anteriormente foi descrito matematicamente por uma EDO que pode ser enquadrada no seguinte modelo geral:

$$y' + a(x)y = b(x) \quad (3.2.r)$$

Torna-se importante ressaltar que a EDO (3.2.r) é apresentada analogamente em (3.2.s) proposta por Zill (2001).

Com relação a EDO (3.2.r) as funções $a(x)$ e $b(x)$ são supostas contínuas. Essa EDO pode ser classificada como linear de primeira ordem, é linear porque é do primeiro grau nas variáveis y e y' e é de primeira ordem, porque esta é a ordem da derivada que aparece na equação.

Para resolver a EDO (3.2.r), Matos (2001) apresenta uma solução análoga e bastante interessante concomitante a de Zill (2001), primeiro multiplica-se ambos os lados da equação pelo fator integrante $I(x) = \exp\left(\int a(x)dx\right) = e^{\int a(x)dx}$, transformado-a em uma derivada total, e em seguida integramos formalmente o resultado. Assim,

$$\begin{aligned} y'I(x) + a(x)yI(x) &= b(x)I(x) \Leftrightarrow \\ y' \exp\left(\int a(x)dx\right) + a(x)y \exp\left(\int a(x)dx\right) &= b(x)\exp\left(\int a(x)dx\right) \Leftrightarrow \\ \frac{d}{dx} \left[y \exp\left(\int a(x)dx\right) \right] &= b(x)\exp\left(\int a(x)dx\right) \end{aligned}$$

E integrando esta última igualdade com respeito à variável x , obtém-se:

$$y = e^{-\int a(x)dx} \left[C + \int b(x)e^{\int a(x)dx} dx \right], \quad (3.2.s)$$

no qual C é uma constante arbitrária que será determinada quando for imposta à EDO uma condição lateral. A expressão (3.2.s) engloba todas as soluções (3.2.r), e por esta razão, ela recebe o nome de solução geral da EDO (3.2.r).

Deve-se apresentar um exemplo de Matos (2001) para a solução da EDO que utiliza o procedimento do fator de integração.

Usando a fórmula (3.2.s), vamos encontrar a solução geral da

$$(\text{sen } x) \frac{dy}{dx} + (\cos x)y = \cos 2x, 0 < x < \pi.$$

Notamos inicialmente que a EDO pode ser posta na forma:

$$y' + \cot gx = \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}x},$$

E comparando com (3.2.r) tem-se $a(x) = \cot gx$ e $b(x) = \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}x}$. Assim a solução da

EDO será:

$$y(x) = \exp\left(-\int \cot g \, x dx\right) \left[C + \int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}x} \exp\left(\int \cot gx\right) dx \right]$$

e usando $\ln \operatorname{sen}x$ como uma primitiva de $\cot g \, x$, obtém-se:

$$y(x) = \exp(-\ln \operatorname{sen}x) \left[C + \int \frac{\cos 2x}{\operatorname{sen}x} \exp(\ln \operatorname{sen}x) dx \right]$$

ou seja:

$$y(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}x} \left(C + \frac{1}{2} \operatorname{sen}2x \right) \quad (3.2.t)$$

Por exemplo, em (3.2.t) se $y(\pi/2) = 2$ então $C = 2$ substituindo em (3.2.t)

$$\text{temos : } y(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}x} \left(2 + \frac{1}{2} \operatorname{sen}2x \right)$$

É muito comum a utilização de EDOs para resolver problemas de natureza financeira, nos quais é possível destacar um problema de juros compostos para se efetuar uma aplicação do conceito abordado neste trabalho.

Problema: Seja A_0 a quantidade de dinheiro aplicada a uma taxa anual de $k\%$, computados continuamente. Se $A(t)$ representa a quantidade de dinheiro ao final de t anos, qual seria a expressão que represente $A(t)$?

Obtém-se a seguinte formulação para o problema:

$$\frac{DA}{dt} = \frac{k}{100} A, A(0) = A_0. \quad (3.2.u)$$

A solução do problema de valor inicial (3.2.u) é obtida por integração com respeito à variável t e vem dada por:

$$A(t) = A_0 \exp\left(\frac{k}{100} t\right) \text{ ou } A(t) = A_0 e^{\left(\frac{k}{100} t\right)}.$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a pesquisa e elaboração deste trabalho, foi possível perceber a real importância do número de Euler (e), não somente como significado numérico, mas sim como demonstrações que o caracterizam como número irracional e suas aplicações estão presentes em diversas áreas científicas.

A pesquisa realizada nos livros da biblioteca da UCC pôde explorar conceitos e significações das diversas abordagens do número e . No levantamento bibliográfico realizado verificou-se que a representação do número e está presente em diversos ramos da Matemática.

Também, pôde-se observar que nos conceitos de logaritmos naturais (\ln), o número de Euler é apresentado com maior frequência devido a suas propriedades operatórias serem bases para demonstrações em diversos teoremas, o que ficou evidenciado nos teoremas ligados às funções exponenciais e logarítmicas, nas funções hiperbólicas, nos limites fundamentais e no cálculo diferencial integral.

No livro de análise matemática pesquisado, foi possível observar uma rigorosa demonstração da caracterização do número e como sendo um número irracional e isso foi verificado através dos conceitos de convergência de séries infinitas através dos binômios de Newton.

Um das aplicações formidáveis do número e , levantadas nesta pesquisa, foi sua presença nos modelos discretos e contínuos de probabilidade. Pôde-se perceber que nestes modelos a representação do número e está ligada a termos binomiais, nos quais desencadeia uma série infinita convergente.

Já nas equações diferenciais ordinárias, foi possível compreender que o número e está presente como base de uma função exponencial, cuja técnica denominada fator de integração, auxilia no cálculo do valor inicial de uma EDO verificada também em algumas aplicações.

Foi ainda possível concluir, através da abordagem apresentada pela pesquisa juntamente com as análises que foram destacadas, que a representação do número e é carregada de significados e que sua característica irracional pode desencadear situações de aprendizagens que favoreçam uma melhor compreensão do conjunto universo dos irracionais.

Tendo em vista a importância e a necessidade deste conceito, tanto para o ensino básico quanto para o superior, espera-se que este trabalho sirva de subsídios para professores e alunos que pretendam estudar o assunto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza, *Análise Matemática para Licenciatura*; 3º Ed. rev. e ampl, São Paulo: Bucher, 2006.

BOULOS, Paulo e ABUD, Zara Issa; *Cálculo Diferencial e Integral*; volume 2; São Paulo-SP; Editora Makron Books; 2000.

BOYER, Carl Benjamin, 1906; *História da matemática*; Tradução Elza F. Gomide; São Paulo-SP; Editora da Universidade de São Paulo; 1974.

EVES, Howard, *Introdução à história da Matemática* ; Campinas,SP: Editora da Unicamp, 2004.

FLEMMING, Diva Marília, *Cálculo A*;5ª ed, São Paulo-SP: Makron, 1992.

FONSECA, Jairo Simon e MARTINS, Gilberto de Andrade, *Curso de Estatística*; 5º Ed. São Paulo-SP: Atlas, 1994.

GARBI, Gilberto Geraldo, *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da matemática*, São Paulo-SP: Editora da Física, 2006.

IEZZI, Gelson, *Matemática: volume único: Manual do professor*; São Paulo-SP: Atual, 1997.

LIMA, Elon Lages, *Logaritmos*, coleção do professor de matemática, Rio de Janeiro-RJ: Editora do IMPA, 1991.

MACHADO, N. J. *Matemática e Língua Materna*. São Paulo: Editora Cortez, 1990.

MAOR, ELI, e : *A História de um número*, 4 ed, Rio de Janeiro: Record, 2008.

MATOS, Marivaldo P., *Séries e Equações Diferenciais*; São Paulo-SP: Prentice Hall, 2001.

MONTEIRO, Martha Salermo, *O Desafio de Ensinar sobre o número e*, São Paulo-SP, IME-USP, janeiro/2007. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~martha/numeroE.pdf>, Acesso em: 10/07/2015.

POMMER, Wagner. M, *O número de Euler: Possíveis Abordagens no Ensino Básico*; São Paulo-SP, SEMA-FEUSP, agosto/2010. Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/sema20100831.pdf>, Acesso em: 21/06/2015.

ZILL, Dennis G e CULLEN. Michael. R; *Equações Diferenciais*, volume 1; São Paulo-SP, ED. Makron Books, 2001.