



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE CASSILÂNDIA

Dantiely Macedo de Assis

Sequência de Fibonacci e Zeros de Polinômios com Coeficientes de Fibonacci

CASSILÂNDIA- MS
2015

Dantiely Macedo de Assis

Sequência de Fibonacci e Zeros de Polinômios com Coeficientes de Fibonacci

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Unidade Universitária de Cassilândia, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática, sob a orientação da Profa. Dra. Regina Litz Lamblém.

CASSILÂNDIA- MS
2015

A865s Assis, Dantiely Macedo de
Sequência de Fibonacci e zeros de polinômios com
coeficientes de Fibonacci/Dantiely Macedo de Assis.
Cassilândia, MS: UEMS, 2015.
41p. ; 30cm.

Monografia, (Graduação) – Matemática – Universidade
Estadual de Mato Grosso do Sul, 2015.

Orientadora: Profa. Dra. Regina Litz Lamblém.

1. Sequência de Fibonacci 2. Zeros de polinômios 3.
Polinômios com coeficientes Fibonacci. I. Título.

CDD 23.ed. 515.55

Dantiely Macedo de Assis

Sequência de Fibonacci e Zeros de Polinômios com Coeficientes de Fibonacci

Trabalho apresentado como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Data da aprovação: 28 de outubro de 2015

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Regina Litz Lamblém
UEMS - CASSILÂNDIA
Orientadora

Prof. Dr. Marco Aparecido Queiroz Duarte
UEMS - CASSILÂNDIA

Prof. Dr. Ailton Ribeiro de Oliveira
UEMS - CASSILÂNDIA

Cassilândia

2015

Agradecimentos

Primeiramente a Deus que permitiu que tudo isso acontecesse, por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

A esta Universidade, seu corpo docente, direção e técnicos administrativos que oportunizam a janela que hoje vislumbro um horizonte superior.

Agradeço a todos os professores por me proporcionar o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional, assim como a minha orientadora Profa. Dra. Regina Litz Lamblém, pela orientação deste trabalho, dedicação, paciência, amizade, companheirismo e confiança.

Enfim a todos que direta e indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigada.

A persistência é o menor caminho para êxito.

Charles Chaplin

Resumo

Este trabalho aborda resultados sobre sequência de Fibonacci e polinômios cujos coeficientes são elementos da sequência de Fibonacci. Foram estudados propriedades e algumas aplicações da sequência de Fibonacci e resultados sobre a localização de zeros de polinômios com coeficientes reais. Assim, apresentaremos resultados interessantes sobre a localização dos zeros dos polinômios com coeficientes de Fibonacci.

Sumário

INTRODUÇÃO	8
1 NOÇÕES PRELIMINARES	10
1.1 Números Complexos.	10
1.2 Outros Resultados Preliminares.	12
2 SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI	13
2.1 A Sequência de Fibonacci.	13
2.2 Algumas Propriedades.	14
2.3 O Problema dos Coelhos.	15
2.4 Algumas Configurações Biológicas em que Aparecem a Sequência de Fibonacci.	16
2.4.1 O Retângulo Áureo e sua Espiral.	16
2.4.2 Árvore Genealógica das Abelhas.	17
2.5 Aplicações da Sequência de Fibonacci.	18
2.5.1 Na Arte.	18
2.5.2 Na Música.	19
2.6 Números de Fibonacci e o Triângulo de Pascal.	19
3 ZEROS DE POLINÔMIOS REAIS	21
3.1 Polinômios Algébricos.	21
3.2 Resultados Clássicos sobre Zeros de Polinômios.	23
4 POLINÔMIOS COM COEFICIENTES DE FIBONACCI	36
4.1 Sequências de Polinômios com Coeficientes de Fibonacci.	36
4.2 Localizações dos Zeros.	36
CONSIDERAÇÕES FINAIS	40
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	

Introdução

A sequência de Fibonacci é definida recursivamente pela fórmula $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$, $n \geq 2$. Essa sequência tem o nome do matemático do século XIII, Leonardo de Pisa, conhecido como Leonardo Fibonacci, e os termos da sequência são chamados números de Fibonacci.

Segundo Boyer (1999), Leonardo de Pisa (que viveu no período de 1180 – 1250), mais conhecido como Fibonacci ou filho de Bonaccio, foi comerciante e governante da cidade italiana de Pisa e escritor do livro *Liber abaci* (ou livro do ábaco). O *Liber abaci* não se trata de um livro sobre o ábaco, mas de um tratado exaustivo sobre problemas e métodos algébricos em que o emprego de numerais indo-arábicos é fortemente recomendado.

O problema no *Liber abaci* que mais inspirou os pensadores futuros foi, sem dúvida, o que segue: Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês? (Boyer, 1999). Esse é o célebre problema que dá origem à sequência de Fibonacci.

A sequência de Fibonacci tem aplicações na análise de mercados financeiros, na ciência da computação e na teoria dos jogos. Também aparece em configurações biológicas, como, por exemplo, na disposição dos galhos das árvores, no arranjo do cone da alcachofra, do abacaxi, ou no desenrolar da samambaia, e, também nos alvéolos de cera destinados a serem receptáculos de mel, ver, por exemplo, Garbi (2009), Goodwin (1996), Huntley (1985) e Livio (2002).

A sequência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ definida por $P_0(x) = 1$ e $P_n(x) = xP_{n-1}(x) + F_{n+1}$ para $n \geq 1$, ou seja, $P_n(x) = \sum_{k=0}^n F_{k+1}x^{n-k}$, é chamada de sequência de polinômios com coeficientes de Fibonacci, ver, Garth, Mills e Mitchell (2007).

Segundo Mansour e Shattuck (2012) esses polinômios foram introduzidos por Garth, Mills e Mitchell em 2007.

O Objetivo, neste trabalho, é apresentar um estudo sobre a sequência de Fibonacci e sobre a localização dos zeros dos polinômios com coeficientes de Fibonacci.

Para realização deste trabalho fizemos pesquisas bibliográficas e organizamos o mesmo da seguinte forma:

No Capítulo 1, apresentamos alguns pré-requisitos necessários para o desenvolvimento dos capítulos posteriores.

No Capítulo 2, apresentamos o que é a sequência de Fibonacci, propriedades e algumas aplicações dessas sequências.

No Capítulo 3, apresentamos alguns resultados sobre localização dos zeros de polinômios reais.

No Capítulo 4, apresentamos resultados sobre a localização dos zeros dos polinômios com coeficientes de Fibonacci e encerramos o trabalho com algumas considerações finais.

Capítulo 1

NOÇÕES PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos preliminares necessários para a compreensão dos estudos abordados nos capítulos posteriores. As principais referências bibliográficas utilizadas neste capítulo foram Guidorizzi (2001) e Iezzi (2005).

1.1 Números Complexos

Seja \mathbb{R} o conjunto dos números reais. Consideremos o produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, assim, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) / x, y \in \mathbb{R}\}$, isto é, \mathbb{R}^2 é o conjunto dos pares ordenados (x, y) em que x e y são números reais.

Vamos tomar os elementos (a, b) e (c, d) de \mathbb{R}^2 para dar as três importantes definições:

- a) Igualdade: $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.
- b) Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
- c) Multiplicação: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Definição 1.1. Denomina-se conjunto dos números complexos, e representa-se por \mathbb{C} , o conjunto dos pares ordenados de números reais para os quais estão definidas a igualdade, a adição e a multiplicação, conforme algebrizadas anteriormente.

Definição 1.2. Denomina-se unidade imaginária e indica-se por i o número complexo $(0, 1)$.

Observe que dado um número complexo qualquer $z = (x, y)$, temos

$$\begin{aligned} z &= (x, y) \\ &= (x, 0) + (0, y) \\ &= (x, 0) + (y \cdot 0 - 0 \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot 0) \\ &= (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1), \end{aligned}$$

isto é,

$$z = (x, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1),$$

que pode ser reescrito sob a forma $z = x + yi$. Observe que estamos considerando $x = (x, 0)$ e $y = (y, 0)$.

Assim, todo número complexo $z = (x, y)$ pode ser escrito sob a forma $z = x + yi$, chamada forma algébrica. O número real x é denominado de parte real de z e o número real y é denominado de parte imaginária de z . Em símbolos, indica-se por $x = \text{Re}(z)$ e $y = \text{Im}(z)$.

Definição 1.3. Denomina-se módulo de um número complexo $z = x + yi$ ao número real não negativo $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Definição 1.4. Denomina-se argumento de um número complexo $z = x + yi$, não nulo, ao ângulo θ tal que $\cos(\theta) = \frac{x}{\rho}$ e $\sin(\theta) = \frac{y}{\rho}$ em que $\rho = |z|$.

Teorema 1.1. Se z_1 e z_2 são dois números complexos quaisquer, então

- a) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$;
- b) $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ($z_2 \neq 0$);
- c) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Lezzi (2005, p. 18).

A desigualdade

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

é conhecida como desigualdade triangular.

Agora, observe que

$$|z_1| = |(z_1 + z_2) - z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2|,$$

ou seja,

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|.$$

Portanto,

$$|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

Definição 1.5. O plano de Argand-Gauss é a representação gráfica de todos os números complexos $z = x + yi$ pelos pontos do plano cartesiano $x0y$, com a convenção de marcarmos sobre os eixos $0x$ e $0y$, respectivamente, a parte real e a parte imaginária de z .

Esses conceitos sobre números complexos serão utilizados no Capítulo 3.

1.2 Outros Resultados Preliminares

Teorema 1.2. (Teorema da Conservação de Sinal). Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em um intervalo I com $f(c) \neq 0$ para algum $c \in I$. Então existe uma vizinhança V de c tal que $f(x)$ tem o sinal de $f(c)$ para todo $x \in V \cap I$.

Demonstração. Tomemos $\varepsilon = \frac{|f(c)|}{2}$. Como f é contínua em c , temos que existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in B \cap (c - \delta, c + \delta) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(c)| < \frac{|f(c)|}{2},$$

ou seja,

$$f(c) - \frac{|f(c)|}{2} < f(x) < f(c) + \frac{|f(c)|}{2},$$

com,

$$f(x) > \frac{|f(c)|}{2}, \quad \text{se } f(c) > 0,$$

$$f(x) < \frac{|f(c)|}{2}, \quad \text{se } f(c) < 0.$$

Portanto, $f(x)$ tem o sinal de $f(c)$ se $x \in B \cap (c - \delta, c + \delta)$.

A **série geométrica** é a série que se obtém quando se soma os infinitos termos de uma progressão geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

Esta série é convergente se e somente se $|r| < 1$ e, neste caso, a soma vale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1 - r}.$$

Capítulo 2

SEQUÊNCIAS DE FIBONACCI

Neste capítulo, apresenta-se estudos sobre sequência de Fibonacci, propriedades e algumas aplicações dessas sequências. As principais referências bibliográficas utilizadas foram Garbi (2009), Huntley (1985), Livio (2002) e Domingues (1991).

2.1. A Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci está relacionada com os estudos de crescimento populacionais de várias espécies da natureza, como por exemplo, crescimento populacional de abelhas, crescimento de galhos de plantas, etc.

A sequência de Fibonacci é uma sequência de números naturais, na qual os primeiros dois termos são 1, e cada termo seguinte corresponde à soma dos dois termos anteriores.

Esses números correspondem a seguinte sequência de números inteiros

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots,$$

e podem ser gerados recursivamente pela fórmula

$$F_1 = 1, F_2 = 1 \text{ e } F_{n+1} = F_{n-1} + F_n, n \geq 2.$$

Podemos notar que os números de Fibonacci se tornam grandes rapidamente, pois para se formar um número, somam-se dois números anteriores.

É importante observarmos que $1/1 = 1$; $2/1 = 2$; $3/2 = 1,5$; $5/3 = 1,666\dots$; $8/5 = 1,6$; $13/5 = 1,625$, ou seja, a sequência formada pela divisão de dois números consecutivos da sequência de Fibonacci converge para o número de ouro $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180339887 \dots$. O número de ouro também é chamado de proporção áurea, divina proporção e seção áurea.

2.2. Algumas Propriedades

A sequência de Fibonacci satisfaz propriedades interessantes, a seguir veremos algumas dessas propriedades.

Teorema 2.1. A soma S_n , $n > 1$, dos n primeiros números da sequência de Fibonacci é dada por $S_n = F_{n+2} - 1$.

Demonstração. Temos $F_1 = F_3 - F_2$, $F_2 = F_4 - F_3, \dots, F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ e $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$. Somando todos os membros obtemos

$F_1 + F_2 + \dots + F_{n-1} + F_n = F_3 - F_2 + F_4 - F_3 + F_5 - F_4 + \dots + F_{n+1} - F_n + F_{n+2} - F_{n+1}$, ou seja, $S_n = F_{n+2} - 1$.

Teorema 2.2. A soma S_n , $n > 1$, dos n primeiros números da sequência de Fibonacci de ordem ímpar é dada por $S_n = F_{2n}$.

Demonstração. Como $F_1 = F_2$, $F_3 = F_4 - F_2$, $F_5 = F_6 - F_4, \dots, F_{2n-1} = F_{2n} - F_{2n-2}$, então $S_n = F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$.

Teorema 2.3. A soma S_n , $n > 1$, dos n primeiros números da sequência de Fibonacci de ordem par é dada por $S_n = F_{2n+1} - 1$.

Demonstração. Como a soma de todos os números de Fibonacci até a ordem $2n$ é $F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + \dots + F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+2} - 1$ e a soma dos números de Fibonacci de índice ímpar até $2n - 1$ é $F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$, então, subtraindo membro a membro as duas igualdades temos, $F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + \dots + F_{2n} = F_{2n+2} - F_{2n} - 1$. Daí, como $F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n}$, ou seja, $F_{2n+1} = F_{2n+2} - F_{2n}$, obtemos,

$$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1.$$

Teorema 2.4. A soma S_n , $n > 1$ dos quadrados dos números de Fibonacci é dada por $S_n = F_n F_{n+1}$.

Demonstração. Para definir a soma dos quadrados dos números de Fibonacci, observe que para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$F_k F_{k+1} - F_k F_{k-1} = F_k (F_{k+1} - F_{k-1}) = F_k F_k = (F_k)^2.$$

Daí, $F_1^2 = F_1 F_2$, $F_2^2 = F_2 F_3 - F_1 F_2$, $F_3^2 = F_3 F_4 - F_2 F_3$, $F_4^2 = F_4 F_5 - F_3 F_4$, $F_5^2 = F_5 F_6 - F_4 F_5, \dots, F_n^2 = F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n$. Assim, $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + \dots + F_n^2 = F_2 + F_2 F_3 - F_1 F_2 + F_3 F_4 - F_2 F_3 + F_4 F_5 - F_3 F_4 + \dots + F_n F_{n+1} - F_{n-1} F_n$, ou seja, $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.

2.3. O Problema dos Coelhoos

De acordo com Boyer (1999), o problema que deu origem a sequência de Fibonacci é o seguinte: Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se cada mês cada par produzir um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?

Suponhamos que o primeiro casal de coelhos nasceu no dia 1 de janeiro, dessa forma, no 2º mês esse casal ainda não será fértil. Porém, no terceiro mês já terão descendentes, e neste mês teremos um total de dois casais de coelhos. No início do 4º mês, existirão dois pares adultos (sendo que cada um já produziu um novo par), e um par novo que completou o 1º mês, logo teremos 3 pares: 2 pares adultos e 1 par com 1 mês. No início do 5º mês, existirão três pares adultos (sendo que cada produz um novo par) e dois pares novos que completaram 1 mês de vida, assim teremos 5 pares: 3 pares adultos e 2 pares (1 mês). No início do 6º mês, existirão cinco pares adultos (sendo que cada produz um novo par) e três pares novos que completaram 1 mês, assim existirão 8 pares: 5 pares adultos e 3 pares com 1 mês. Tal processo continua através dos diversos meses até completar um ano. No término de um ano, isto é, no dia 1 de janeiro do próximo ano, tem-se 144 casais de coelhos.

Segue na Figura 2.1 o diagrama que representa a reprodução dos coelhos até o 5º mês.

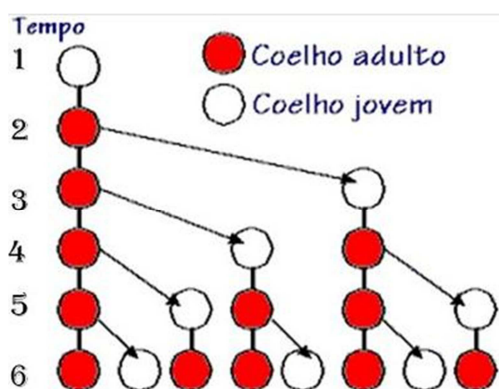


Figura 2.1. Diagrama de reprodução dos coelhos.

Fonte: <https://sites.google.com/site/leonardofibonacci7/o-problema-dos-coelhos>

O problema proposto por Fibonacci com relação aos coelhos não diz respeito ao comportamento reprodutivo dos coelhos no sentido biológico, mas no numérico. Neste problema considera-se que não há mortes e nem

problemas genéticos. Deve-se considerar que, normalmente, a cada prole real de coelhos, não ocorrem nascimentos aos pares, um macho e uma fêmea, exatamente. Além disso, o cruzamento entre irmãos e irmãs leva a problemas genéticos.

2.4 Algumas Configurações Biológicas em que Aparecem a Sequência de Fibonacci

2.4.1 O Retângulo Áureo e sua Espiral

Os números de Fibonacci aparecem consideravelmente na natureza e são bastante usados na arte e na arquitetura. Para elucidar essa afirmação, é oportuno o conhecimento do retângulo áureo. Vamos construir um conjunto de retângulos usando os números de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, e 34 que nos levam a algumas formas encontradas na natureza.

Anexando dois quadrados de lados iguais a uma unidade, obteremos um retângulo 2×1 . Se anexarmos em seguida outro quadrado de lado igual a duas unidades vamos obter um retângulo 3×2 . Assim, quadrados sucessivos são formados com bordas que são os lados dos dois quadrados imediatamente anteriores. Continuando, encontraremos um retângulo como o da Figura 2.2.

Com um compasso imaginário, tracemos quartos de circunferências nos quadrados de lados $L = 13$, $L = 8$, $L = 5$, $L = 3$, $L = 2$, $L = 1$ e $L = 1$. Considerando as concordâncias dessas curvas, obteremos uma espiral como a que aparece na Figura 2.3.

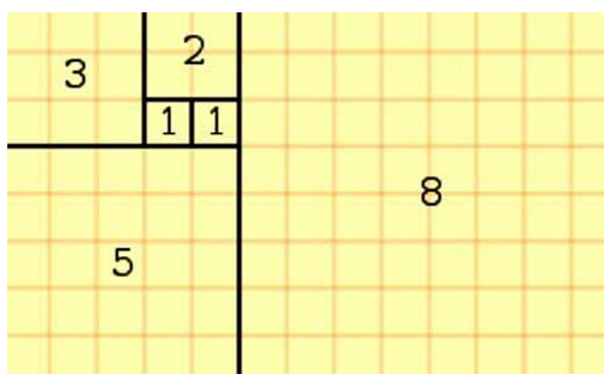


Figura 2.2:

partir dos lados do Retângulo Áureo.

Quadrados a

Fonte: www.infoescola.com/matematica/sequencia-de-fibonacci/

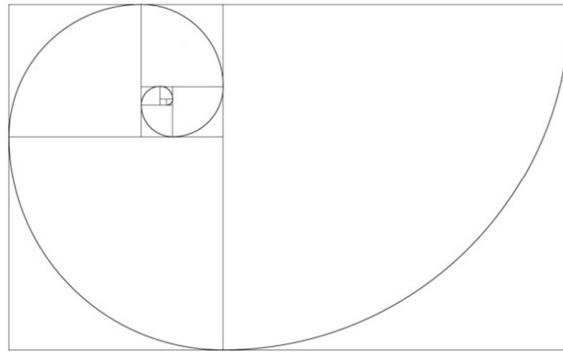


Figura 2.3: Espiral.

Fonte: www.infoescola.com/matematica/sequencia-de-fibonacci

A espiral assim formada se aproxima muito do cefalópode Nautilus (Figura 2.4) e outros moluscos marinhos. No caso que apresentamos na Figura 2.4, referente ao Nautilus, tendo em conta a construção de sucessivos retângulos, as razões sucessivas entre os comprimentos e as larguras se aproximam do número de ouro.

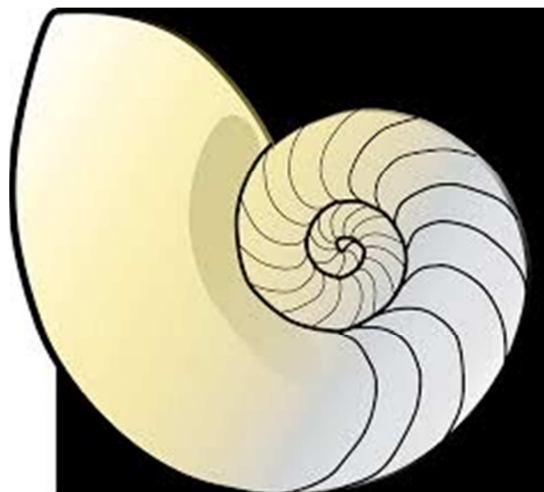


Figura 2.4: Concha do Nautilus.

Fonte: www.blog.mcientifica.com.br/o-nautilus

2.4.2 Árvore Genealógica das Abelhas

Os ovos de abelhas operárias, quando não fertilizados, se desenvolvem em zangões por um processo conhecido como partenogênese. Assim, cada zangão não tem pai, mas uma mãe (e um avô por parte materna). Uma abelha fêmea, no entanto, possui pai e mãe. Um zangão, assim, tem uma mãe, dois avós (os pais da mãe), três bisavós (os pais da sua avó e um do seu avô), cinco tataravós (dois para cada tataravô e um para seu bisavô), e assim por

diante, como pode ser observado na Figura 2.5. Os números dessa árvore genealógica, 1, 1, 2, 3, 5..., formam desta maneira, a série de Fibonacci.

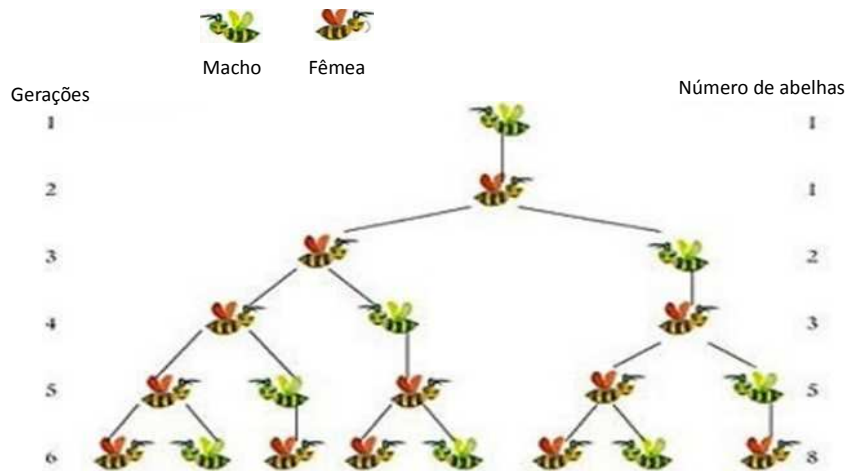


Figura 2.5. Problema das abelhas.

Fonte: <http://pt.slideshare.net/enibertolini/o-nmero-fi>

2.5. Aplicações da Sequência de Fibonacci

2.5.1 Na Arte

Muitos artistas usaram a proporção Áurea em seus trabalhos. Leonardo da Vinci a chamava de Divina Proporção e a usou em muitos de seus trabalhos. Um exemplo pode ser visto no quadro Monalisa. Pode-se observar a proporção Áurea em várias situações no quadro Monalisa. Por exemplo, se construirmos um retângulo em torno de seu rosto, veremos que este possui a proporção do Retângulo Áureo. Podemos também subdividir este retângulo usando a linha dos olhos para traçar uma reta horizontal e temos novamente a Proporção Áurea, ver Figura 2.6.

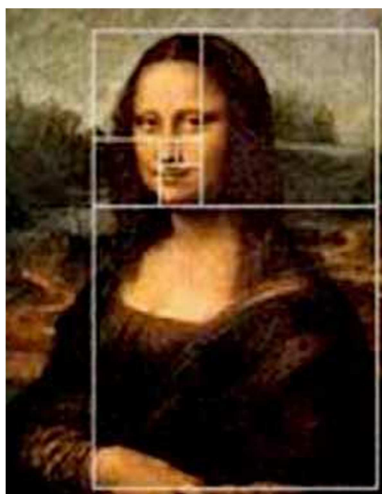


Figura 2.6: Monalisa.

Fonte: pegasus.portal.nom.br/proporcao-aurea-e-sequencia-de-fibonacci

Como no exemplo do quadro de Monalisa, há vários outros exemplos do uso da Proporção Áurea na arte, e, muitos livros e artigos dizem que Proporção Áurea é a forma mais agradável aos olhos, apontando, como essa proporção é empregada nas formas de edifícios famosos, na estrutura de composições musicais e no projeto de trabalhos famosos de arte.

2.5.2 Na Música

A sequência de Fibonacci está presente nos intervalos musicais, ou seja, na relação entre duas notas, formando as escalas que são a base para as melodias e para os acordes. Esses intervalos procedem em graus a partir da primeira nota, ou tônica. A escala básica e simples é formada por intervalos de terça, quinta e oitava a partir da tônica, ou seja, a sequência de Fibonacci: 3,5,8. Essa sequência na escala natural, de tonalidade dó maior (ou C, em notação cifrada), apresenta – se, então, as notas mi, sol e só a partir da tônica dó, E, G e C. Observe a Figura 2.7.



Figura 2.7. Intervalos Musicais
Fonte: whiplash.net/materias/biografias/203304.html

2.6 Números de Fibonacci e o Triângulo de Pascal

Os números de Fibonacci podem ser encontrados também no Triângulo de Pascal. O Triângulo Aritmético, também conhecido como Triângulo de Tartaglia em alguns países, teve algumas das suas propriedades estudadas pelos matemáticos Yang Hui na China e por Omar Khayyam na Pérsia. A propriedade mais importante do triângulo é a aplicação do binômio de Newton, onde cada linha do triângulo representa os coeficientes da expansão binomial.

A partir do Triângulo de Pascal podem ser obtidos os números de Fibonacci, como mostra a figura 2.8.

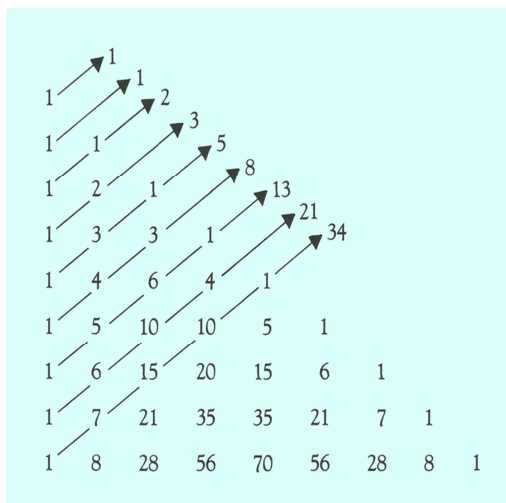


Figura 2.8. Triângulo de Pascal.

Fonte: [dicasetoriaisdematematica.blogspot.com.br/.../propriedades-do-triangulo de Pascal](http://dicasetoriaisdematematica.blogspot.com.br/.../propriedades-do-triangulo-de-Pascal).

Capítulo 3

ZEROS DE POLINÔMIOS REAIS

Neste capítulo, apresenta-se alguns resultados sobre zeros de polinômios reais, que serão usados no próximo capítulo. As principais referências bibliográficas utilizadas, neste capítulo, foram Botta (2003), Obrechhoff (2003), Singh e Shah (2011).

3.1 Polinômios Algébricos

Um polinômio da forma

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

com coeficientes a_i , $i = 0, 1, \dots, n$, reais ou complexos e $a_n \neq 0$, é denominado de polinômio algébrico de grau n .

Dizemos que o polinômio é nulo se, e somente se, todos os coeficientes de P forem nulos. Em símbolos, sendo $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, temos

$$P(x) \equiv 0 \Leftrightarrow a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

A equação

$$a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0,$$

com o primeiro membro sendo um polinômio $P(x)$ de grau n e ($a_n \neq 0$), é chamada de equação polinomial ou equação algébrica de grau n .

Definição 3.1. Seja $\alpha \in \mathbb{C}$, α é denominado raiz da equação $P(x) = 0$ ou raiz do polinômio P se, e somente se, $P(\alpha) = 0$.

Teorema 3.1. (Teorema Fundamental da Álgebra) Todo polinômio P de grau $n \geq 1$ admite n zeros.

Demonstração. Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em Garbi (2009, p. 117, 118, 119).

Se o número complexo $a + bi$ é raiz de um polinômio com coeficientes reais, então o seu complexo conjugado $a - bi$ também é raiz desse polinômio. A partir desse resultado e do Teorema Fundamental da Álgebra, podemos concluir que todo polinômio com coeficientes reais e de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real.

Proposição 3.1. Um número r é raiz de $P(x)$ se, e somente se, existe $q(x)$ tal que $P(x) = (x - r)q(x)$.

Demonstração. Note que se $P(x) = (x - r)q(x)$, então temos trivialmente

$$P(r) = (r - r)q(r) = 0.$$

Para mostrar a recíproca, suponhamos que $P(x) = \sum_{j=0}^n c_j x^j$ e $P(r) = 0$, então

$$\begin{aligned} P(x) &= P(x) - P(r) \\ &= \sum_{j=0}^n c_j x^j - \sum_{j=0}^n c_j r^j = \sum_{j=0}^n c_j (x^j - r^j) \\ &= \sum_{j=0}^n c_j (x - r) \sum_{i=0}^{j-1} x^i r^{j-1-i} \\ &= \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{j-1} c_j (x - r) x^i r^{j-1-i} \\ &= (x - r) \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{j-1} c_j x^i r^{j-1-i}. \end{aligned}$$

Logo, sendo $q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^n c_j x^i r^{j-1-i}$, segue o resultado.

Corolário 3.1. Se $P(x)$ tem grau n e r é raiz de $P(x)$, então

$$P(x) = (x - r)q(x),$$

com $q(x)$ um polinômio real de grau $n - 1$.

Definição 3.2. Dizemos que r é raiz de multiplicidade m ($m \geq 1$) da equação $P(x) = 0$ se, e somente se, $P(x) = (x - r)^m Q(x)$ e $Q(r) \neq 0$, isto é, r é a raiz de multiplicidade m de $P(x) = 0$ quando o polinômio P é divisível por $(x - r)^m$ e não é divisível por $(x - r)^{m+1}$, ou seja, a decomposição de P apresenta exatamente m fatores $x - r$.

Teorema 3.2. Se r é raiz de multiplicidade m da equação $P(x)=0$, então r é raiz de multiplicidade $m-1$ da equação $P'(x)=0$, com P' a derivada primeira de P .

Demonstração. Se r é raiz de multiplicidade m da equação $P(x)=0$, então

$$P(x) = (x-r)^m Q(x), \text{ com } Q(r) \neq 0$$

e daí

$$P'(x) = m(x-r)^{m-1}Q(x) + (x-r)^m Q'(x),$$

ou seja,

$$P'(x) = (x-r)^{m-1} [mQ(x) + (x-r)Q'(x)].$$

Assim, como $mQ(r) + (r-r)Q'(r) = mQ(r) \neq 0$, temos que r é raiz de multiplicidade $m-1$ de $P'(x)=0$.

Corolário 3.2. Se r é raiz de multiplicidade m do polinômio P , então

$$P'(r) = P''(r) = \dots = P^{(m-1)}(r) = 0 \text{ e } P^m(r) \neq 0.$$

Corolário 3.3. Se

$$P'(r) = P''(r) = \dots = P^{(m-1)}(r) = 0 \text{ e } P^m(r) \neq 0,$$

então r é uma raiz de multiplicidade m do polinômio P .

3.2 Resultados Clássicos sobre Zeros de Polinômios

Notação: Seja a_0, a_1, \dots, a_n uma sequência de número reais. Por $S^-(a_0, a_1, \dots, a_n)$ denotaremos o número das mudanças fortes de sinal na sequência a_0, a_1, \dots, a_n . Em outras palavras, este é o número de pares da forma $(+, -)$ ou $(-, +)$ na sequência obtida por a_0, a_1, \dots, a_n substituindo-se todo número positivo a_i por $+$, todo número negativo por $-$ e descartando-se os zeros da sequência.

Exemplo 3.1. A sequência $-5, -7, 3, 5, 0, 1, -3, 2$ apresenta a seguinte mudança de sinal.

$$- \quad - \quad + \quad + \quad + \quad - \quad +$$

Logo, $S^-(-5, -7, 3, 5, 0, 1, -3, 2) = 3$.

Por $S^+(a_0, a_1, \dots, a_n)$ denotaremos o número das mudanças fracas de sinal na sequência a_0, a_1, \dots, a_n . Este é o número máximo de mudanças, obtidas substituindo-se os zeros da sequência a_0, a_1, \dots, a_n por $+1$ ou -1 .

Exemplo 3.2. A sequência $-4, 0, -3, 4$ apresenta as seguintes mudanças de sinal.

- a) $S^+(-4, 0, -3, 4) = 3$, substituindo o zero da sequência por $+1$.
 b) $S^+(-4, 0, -3, 4) = 1$, substituindo o zero da sequência por -1 .

Propriedade 3.1. Se f é uma função contínua e $f(c) = 0$, então $f(c - \epsilon)$ e $f'(c - \epsilon)$ tem sinais opostos e $f(c + \epsilon)$ e $f'(c + \epsilon)$ tem o mesmo sinal para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Demonstração. Pela fórmula de Taylor temos

$$f(c + h) = f(c) + \frac{f'(c + \theta h)}{1!} h$$

para todo h suficientemente pequeno e θ algum número do intervalo $[0, 1]$.

Por hipótese $f(c) = 0$, daí

$$f(c + h) = \frac{f'(c + \theta h)}{1!} h$$

Como $f'(c) \neq 0$ e f' é uma função contínua, pelo Teorema da Conservação de Sinal, existe uma vizinhança U de c tal que $f'(t) \neq 0$ para todo $t \in U$. Além disso,

$$\text{Sinal}[f'(t)] = \text{ sinal}[f'(c)], \forall t \in U,$$

ou seja,

$$\text{ sinal}[f'(c + \theta h)] = \text{ sinal}[f'(c + h)].$$

Conseqüentemente,

$$\text{ sinal} \left[\frac{f(c + h)}{f'(c + h)} \right] = \text{ sinal}[h].$$

Assim, para $h = \epsilon$ e $h = -\epsilon$ obtemos que $f(c - \epsilon)$ e $f'(c - \epsilon)$ tem sinais opostos e que $f(c + \epsilon)$ e $f'(c + \epsilon)$ têm o mesmo sinal.

Seja P um polinômio algébrico arbitrário de grau exatamente n , isto é,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0.$$

Aplicando o algoritmo de Euclides para achar o maior fator comum entre P e P' , obtemos

$$P(x) = P'(x)Q_0(x) - R_1(x)$$

$$P'(x) = R_1(x)Q_1(x) - R_2(x)$$

$$R_1(x) = R_2(x)Q_2(x) - R_3(x)$$

.....

$$R_{i-1}(x) = R_i(x)Q_i(x) - R_{i+1}(x)$$

.....

$$R_{i-2}(x) = R_{i-1}(x)Q_{i-1}(x) - R_i(x).$$

Neste processo, tomamos os restos da divisão com sinal negativo. Podemos observar que o grau dos polinômios $R_i(x), i = 1, 2, \dots, k$ decrescem estritamente. A divisão é repetida até obtermos um resto R_k de grau zero, isto é, uma constante.

Se $R_k = 0$, então R_{k-1} é o fator comum entre P e P' , e R_{k-1} é diferente de uma constante.

Se R_k é igual a uma constante diferente de zero, então P e P' , não tem fator comum diferente de uma constante.

Exemplo 3.3. Considere o polinômio $P(x) = x^3 + x^2 - x + 1$. Daí, $P'(x) = 3x^2 + 2x - 1$.

Aplicando o algoritmo de Euclides, obtemos

$$x^3 + x^2 - x + 1 = (3x^2 + 2x - 1) \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9} \right) - \left(\frac{8}{9}x - \frac{10}{9} \right)$$

$$3x^2 + 2x - 1 = \left(\frac{8}{9}x - \frac{10}{9} \right) \left(\frac{27}{8}x + \frac{207}{32} \right) - \left(\frac{-99}{16} \right)$$

Assim, P e P' não tem fator comum diferente de zero.

Exemplo 3.4. Considere o polinômio $P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$. Daí, $P'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2$. Aplicando o algoritmo de Euclides, obtemos

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = (4x^3 + 6x^2 - 2) \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{8} \right) - \left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \right)$$

$$4x^3 + 6x^2 - 2 = \left(\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \right) \left(\frac{16}{3}x - \frac{8}{3} \right) - 0.$$

Portanto, o fator comum entre P e P' é $\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$.

Se $P(x)$ não tem zeros múltiplos então P e P' não têm fator comum diferente de constante e, conseqüentemente, o algoritmo de Euclides produz a seqüência $P(x), P'(x), R_1(x), \dots, R_k(x)$, sendo $R_k(x)$ uma constante diferente de zero.

Seja $[a, b]$ um intervalo dado. Vamos supor que $R_k(x)$ é o fator comum entre P e P' e que $R_k(x) \neq 0$ em $[a, b]$. Obviamente $R_k(x) \neq 0$ em $[a, b]$ se, e somente se, P não tem zeros múltiplos em $[a, b]$. De fato, se P tivesse um zero ξ com multiplicidade p em $[a, b]$, então ξ seria um zero com multiplicidade $(p - 1)$ de P' e, conseqüentemente P e P' teriam um fator comum $(x - \xi)^{p-1}$, onde $\xi \in [a, b]$. Reciprocamente, se P não tem raízes múltiplas em $[a, b]$, então o fator comum entre P e P' não têm raízes em $[a, b]$.

Vamos mostrar algumas propriedades da seqüência

$$P(x), P'(x), R_1(x), \dots, R_k(x),$$

quando $P(x)$ não têm raízes múltiplas em $[a, b]$.

Assim, temos a seguinte propriedade.

Propriedade 3.2. Se P não tem zeros múltiplos em $[a, b]$ e $R_k(x)$ é o fator comum entre P e P' , então $R_k(x) \neq 0$ em $[a, b]$.

Propriedade 3.3. Se P não tem zeros múltiplos em $[a, b]$ e $R_i(c) = 0$ para algum $i, i = 0, 1, 2, \dots, k - 1$, então $R_{i-1}(c) \neq 0, R_{i+1}(c) \neq 0$ e $R_{i-1}(c)$ e $R_{i+1}(c)$ têm sinais opostos, onde

$$R_{-1}(x) = P(x) \text{ e } R_0(x) = P'(x).$$

Demonstração. Essa afirmação é conseqüência imediata da relação $R_{i-1}(x) = R_i(x) \cdot Q_i(x) - R_{i+1}(x)$. De fato, fazendo $x = c$ na relação anterior, obtemos $R_{i-1}(c) = -R_{i+1}(c)$. Suponhamos que $R_{i-1}(c)$ ou $R_{i+1}(c)$ seja zero, então pela relação de recorrência, obtemos

$$R_{i-1}(c) = R_{i-2}(c) = \dots = R_i(c) = P'(c) = P(c) = 0.$$

Assim, c seria raiz múltipla de P , o que é uma contradição.

A seqüência $P(x), P'(x), R_1(x), \dots, R_k(x)$ é denominada de seqüência de Sturm.

Vamos denotar por $S^-(x)$ o número de mudanças fortes de sinal na sequência de Sturm, isto é, $S^-(x) = S^-(P(x), P'(x), R_1(x), \dots, R_k(x))$.

Teorema 3.3. (Sturm). Seja $P(x)$ um polinômio algébrico de grau n , com coeficientes reais e que não tem raízes múltiplas em $[a, b]$. Então, o número de zeros de P em $[a, b]$ é igual a $S^-(a) - S^-(b)$.

Demonstração. Vamos acompanhar a variação do número $S^-(x)$ de mudanças de sinal na sequência de Sturm, quando x varia de a até b . Note que todas as funções desta sequência são polinômios algébricos e, portanto, são funções contínuas, então a mudança do número $S^-(x)$ pode ocorrer somente quando x passa por uma raiz de uma das funções $P(x), P'(x), R_1(x), \dots, R_{k-1}(x)$.

Suponhamos que $c \in [a, b]$ e $P(c) = 0$. Assim, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $P(c - \epsilon)$ e $P'(c - \epsilon)$ têm sinais opostos, $P(c + \epsilon)$ e $P'(c + \epsilon)$ têm o mesmo sinal. Consequentemente, entre $P(x)$ e $P'(x)$ existe uma mudança de sinal antes de c e esta mudança desaparece depois de c . Em outras palavras, o número $S^-(x)$ diminui de um, quando x passa pela raiz de P .

Vamos observar o que acontece quando x passa por uma raiz de $R_i(x)$ para algum $i = 0, 1, \dots, k - 1$. Seja, $R_i(c) = 0$. Então neste caso, pela Propriedade 3.2 da sequência de Sturm, $R_{i-1}(c) \neq 0$, $R_{i+1}(c) \neq 0$ e $R_{i-1}(c)R_{i+1}(c) < 0$. Isto significa que $R_{i-1}(x)R_{i+1}(x) < 0$ para todo x em uma vizinhança suficientemente pequena de c , mostrando que quando x passa por um zero de uma função intermediária da sequência de Sturm o número de mudanças $S^-(x)$ não muda. Assim, mostramos que $S^-(x)$ diminui de um somente quando x passa por um zero de $P(x)$. Consequentemente, o número de mudanças de sinal que se perde quando x percorre o intervalo $[a, b]$ é exatamente igual ao número de raízes de P em $[a, b]$.

Observe que a demonstração do Teorema de Sturm é baseada somente nas Propriedades 3.1, 3.2 e 3.3 da sequência

$$(3.1) \quad P(x), R_0(x), R_1(x), \dots, R_k(x).$$

Assim, teremos o mesmo resultado sobre o número de zeros de P se considerarmos uma outra sequência

$$P(x), P_0(x), P_1(x), \dots, P_k(x).$$

que satisfaz as Propriedades 3.1, 3.2 e 3.3. Essa sequência também será uma sequência de Sturm. Então, como (3.1) é uma sequência de Sturm e $P(x)$ não tem zeros múltiplos em $[a, b]$, o número de zeros de P em $[a, b]$ é exatamente igual a $S^-(a) - S^-(b)$.

Assim, veremos que qualquer polinômio $P(x)$ independente de ter ou não zeros múltiplos em $[a, b]$, o número $S^-(a) - S^-(b)$ é exatamente igual ao número de pontos distintos de $[a, b]$, onde $P(x)$ se anula. De fato, se $P(x)$ não tem zeros múltiplos, esta é a afirmação do Teorema de Sturm. Seja P com zeros múltiplos em $[a, b]$. Então, P e P' tem um fator comum $R_k(x)$, que não é uma constante e também é fator de $R_1(x), R_2(x), \dots, R_k(x)$. Por isso, as funções

$$(3.2) \quad \frac{P(x)}{R_k(x)}, \frac{P'(x)}{R_k(x)}, \dots, \frac{R_{k-1}(x)}{R_k(x)}, \frac{R_k(x)}{R_k(x)},$$

são definidas em $[a, b]$ e satisfazem as Propriedades 3.1, 3.2 e 3.3. Assim, é uma sequência de Sturm para $f_1(x) = \frac{P(x)}{R_k(x)}$ e, pelo Teorema de Sturm,

$$S = S^-\left(\frac{P(a)}{R_k(a)}, \dots, 1\right) - S^-\left(\frac{P(b)}{R_k(b)}, \dots, 1\right)$$

é o número de raízes simples de $\frac{P(x)}{R_k(x)}$ em $[a, b]$, isto é, o número de raízes de $f_1(x)$ em $[a, b]$. Note que o número de mudanças de sinal em (3.1) é igual ao número de mudanças de sinal na sequência $P(x), P'(x), R_1(x), \dots, R_k(x)$, $S = S^-(a) - S^-(b)$. Consequentemente, o Teorema de Sturm, aplicado a qualquer polinômio P fornece o número de raízes de P em $[a, b]$ sem contar suas multiplicidades.

Exemplo 3.5. Seja um polinômio $P(x) = x^3 + 3x^2 - 1$. Pela divisão de Euclides, temos a sequência de Sturm

$$P(x) = x^3 + 3x^2 - 1, P'(x) = 3x^2 + 6x, R_1(x) = 2x + 1 \text{ e } R_2(x) = \frac{9}{4}.$$

Vamos analisar a variação de sinal da sequência de Sturm em $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2$,

$$S^-(P(-4), P'(-4), R_1(-4), R_2(-4)) = S^-(-, +, -, +) = 3$$

$$S^-(P(-3), P'(-3), R_1(-3), R_2(-3)) = S^-(-, +, -, +) = 3$$

$$\begin{aligned}
S^-(P(-2), P'(-2), R_1(-2), R_2(-2)) &= S^-(+, 0, -, +) = 2 \\
S^-(P(-1), P'(-1), R_1(-1), R_2(-1)) &= S^-(+, -, -, +) = 2 \\
S^-(P(-0), P'(-0), R_1(-0), R_2(-0)) &= S^-(-, 0, +, +) = 1 \\
S^-(P(-1), P'(-1), R_1(-1), R_2(-1)) &= S^-(+, +, +, +) = 0 \\
S^-(P(-2), P'(-2), R_1(-2), R_2(-2)) &= S^-(+, +, +, +) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, P possui raízes nos intervalos $[-3, -2]$, $[-1, 0]$ e $[0, 1]$. Como P é um polinômio de grau 3, temos que todas as raízes de P são reais e estão no intervalo $[-3, 1]$.

Notação: Por $Z(P; (a, b))$ denotaremos o número de zeros de P em (a, b) , contando as multiplicidades.

Teorema 3.4. (Budan-Fourier). Seja $P(x)$ um polinômio algébrico de grau exatamente n com coeficientes reais. Então

$$\begin{aligned}
Z(P; (a, b)) &= S^-(P(a), P'(a), P''(a), \dots, P^{(n)}(a)) + \\
&\quad - S^+(P(b), P'(b), P''(b), \dots, P^{(n)}(b)) - k,
\end{aligned}$$

onde k é zero ou um número par.

Demonstração. Veremos o que acontece com o número de mudanças de sinal na sequência $V(x) = S^-(P(x), P'(x), P''(x), P'''(x), \dots, P^{(n)}(x))$ quando x varia de a até b . É claro que uma mudança em $V(x)$ pode ocorrer somente quando x passa por uma raiz de um dos polinômios $P(x), P'(x), \dots, P^{(n-1)}(x)$, sendo $P^{(n)}(x)$ uma constante. Seja c uma raiz com multiplicidade k de $P(c)$, ou seja,

$$P(c) = P'(c) = P''(c) = \dots = P^{(k-1)}(c) = 0, P^{(k)}(c) \neq 0.$$

Suponhamos que $P^{(k)}(c) > 0$, então, pelo Teorema 1.2, $P^{(k)}(t) > 0$ para todo t em uma vizinhança U de c . Assim, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$P^{(k-1)}(c - \epsilon) > 0 \text{ e } P^{(k-1)}(c + \epsilon) > 0.$$

Analogamente,

$$P^{(k-2)}(c - \epsilon) > 0 \text{ e } P^{(k-2)}(c + \epsilon) > 0, \dots$$

Dessa forma,

$$S^-(P(c - \epsilon), P'(c - \epsilon), \dots, P^{(k)}(c - \epsilon)) = k$$

e

$$S^-(P(c + \epsilon), P'(c + \epsilon), \dots, P^{(k)}(c + \epsilon)) = 0.$$

Assim, se x passar por uma raiz de P , o número $V(x)$ diminuirá exatamente da multiplicidade desta raiz. Suponhamos, agora, que c seja uma raiz de multiplicidade k da derivada de alguma ordem, mas não seja um zero de P .

Daí, se

$$P^{(i-1)}(c) \neq 0, P^i(c) = P^{(i+1)}(c) = P^{(i+2)}(c) = \dots = P^{(i+k-1)}(c) = 0, \\ P^{(i+k)}(c) \neq 0$$

para algum $1 < i \leq n - k$. Pela Propriedade 3.1 para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$R_1 = S^-(P^{(i-1)}(c - \epsilon), P^{(i)}(c - \epsilon), \dots, P^{(i+k)}(c - \epsilon)) \\ = S^-(P^{(i-1)}(c - \epsilon), P^{(i)}(c - \epsilon)) + S^-(P^{(i+1)}(c - \epsilon), \dots, P^{(i+k)}(c - \epsilon)) \\ = S^-(P^{(i-1)}(c - \epsilon), P^{(i)}(c - \epsilon)) + k$$

e

$$R_2 = S^-(P^{(i-1)}(c + \epsilon), P^{(i)}(c + \epsilon), \dots, P^{(i+k)}(c + \epsilon)) \\ = S^-(P^{(i-1)}(c + \epsilon), P^{(i)}(c + \epsilon)) + S^-(P^{(i+1)}(c + \epsilon), \dots, P^{(i+k)}(c + \epsilon)) \\ = S^-(P^{(i-1)}(c + \epsilon), P^{(i+k)}(c + \epsilon))$$

Como $P^{(i-1)}(c + \epsilon)$ e $P^{(i+k)}(c + \epsilon)$ sendo funções contínuas, $P^{(i-1)}$ e $P^{(i+k)}$ não se anulam em uma vizinhança U de c . Logo,

$$S^-(P^{(i-1)}(t), P^{(i+k)}(t)) = \delta,$$

para todo t de U , sendo $\delta = 1$ ou $\delta = 0$, isto é, entre estas derivadas pode haver ou não mudanças de sinal.

Analisaremos quatro casos dependendo do valor de δ e da paridade de k .

Sejam $\delta = 1$ e k um número par. Daí,

$$R_1 = k, R_2 = 1 \text{ e } V(c - \epsilon) - V(c + \epsilon) = k \text{ (par)}.$$

Quando $\delta = 1$ e k um número ímpar, temos

$$R_1 = k + 1, R_2 = 1 \text{ e } V(c - \epsilon) - V(c + \epsilon) = k - 1 \text{ (par)}.$$

Quando $\delta = 0$ e k um número par, temos

$$R_1 = k, R_2 = 0 \text{ e } V(c - \epsilon) - V(c + \epsilon) = k \text{ (par)}.$$

Quando $\delta = 0$ e k um número ímpar

$$R_1 = k + 1, R_2 = 0 \text{ e } V(c - \epsilon) - V(c + \epsilon) = k + 1 \text{ (par)}.$$

Portanto, quando x passa por um zero de $P^{(i)}$, $V(x)$ sempre diminui de um número par. Então, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno,

$$Z(P; (a + \epsilon, b - \epsilon)) = V(a + \epsilon) - V(b - \epsilon)$$

ou menor que esse valor por um número par. Mas

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} V(a + \epsilon) = S^-(P(a), P'(a), P''(a), \dots, P^{(n)}(a))$$

e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} V(a - \epsilon) = S^+(P(b), P'(b), P''(b), \dots, P^{(n)}(b)),$$

o que conclui a demonstração do teorema.

Como

$$S^-(P(x), P'(x), P''(x), \dots, P^{(n)}(x)) \leq S^+(P(x), P'(x), P''(x), \dots, P^{(n)}(x)),$$

temos

$$Z(P; (a + \epsilon, b - \epsilon)) \leq S^-(P(a), P'(a), P''(a), \dots, P^{(n)}(a)) - S^-(P(b), P'(b), P''(b), \dots, P^{(n)}(b)),$$

que é a forma mais comum do Teorema de Budan-Fourier.

A regra de Descartes é uma consequência do teorema de Budan-Fourier. Essa regra fornece o número de raízes reais positivas de um polinômio com coeficientes reais.

Teorema 3.5. (Regra de Descartes). Seja

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n, \text{ com } a_0 \neq 0 \text{ e } a_n \neq 0.$$

Então $Z(P; (0, \infty)) = S^-(a_0, a_1, \dots, a_n) - k$, com k zero ou um número par. Isto é, o número de raízes positivas de P é igual ao número de mudanças fortes de sinal da sequência de seus coeficientes ou menor que este número por um número par.

Demonstração. Suponha que P é um polinômio algébrico de grau n , então P' , P'' , \dots , $P^{(n-1)}$ têm um número finito de raízes positivas. Por isso, podemos escolher um número $M > 0$, tal que nenhum polinômio P' , P'' , \dots , P^{n-1} se anula para $x \geq M$. Portanto,

$$(3.3) \quad Z(P; (0, \infty)) = Z(P; (0, M)).$$

Pelo Teorema de Budan-Fourier,

$$(3.4) \quad Z(P; (0, M)) \leq S^-(P(0), P'(0), \dots, P^{(n)}(0)) - S^-(P(M), P'(M), \dots, P^{(n)}(M)).$$

Note que $P(x) \neq 0$ para $M \leq x \leq \infty$,

$$\text{signal}[P(M)] = \text{signal}\left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} P(x)\right)\right] = \text{signal}[a_n]$$

A última igualdade é consequência do fato de que o sinal de P , para x muito grande, é o mesmo sinal de $a_n x^n$. Analogamente, temos

$$\text{signal}[P^{(k)}(M)] = \text{signal}\left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(k)}\right)\right] = \text{signal}[a_n]$$

isto é,

$$\text{signal}[P^{(k)}(M)] = \text{signal}[n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}] = \text{signal}[a_n],$$

para todo $k = 1, 2, \dots, n-1$. Para $k = n$, $\text{signal}[P^{(n)}(x)] = \text{signal}[n! a_n] = \text{signal}[a_n]$.

Logo, todos os números da sequência $P(M), P'(M), P''(M), \dots, P^{(n)}(M)$, têm o mesmo sinal do coeficiente a_n . Então,

$$(3.5) \quad S^-(P(M), P'(M), P''(M), \dots, P^{(n)}(M)) = 0.$$

Considerando que $P^{(k)}(0) = a^{n-k} k!$ para $k = 0, 1, \dots, n$, obtemos

$$(3.6) \quad S^-(P(0), P'(0), \dots, P^{(n)}(0)) = S^-(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0) = S^-(a_0, \dots, a_n).$$

Então, (3.3), (3.4), (3.5) e (3.6) implicam na desigualdade

$$Z(P; (0, \infty)) \leq S^-(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0).$$

Pelo Teorema de Budan-Fourier, e pela desigualdade anterior, a diferença entre os dois lados de (3.4), $S^-(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0) - Z(P; (0, \infty))$, é um número par, conforme queríamos demonstrar.

A Regra de Descartes pode ser usada também para encontrar a quantidade de raízes negativas de um polinômio, bastando para isso substituir x por $-x$ e, elevando $-x$ às diferentes potências, obter um novo polinômio $q(x) = P(-x)$, cujas raízes positivas são as raízes negativas de P .

Exemplo 3.5. Considere o polinômio

$$P(x) = 3x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 2x + 3.$$

Os sinais dos coeficientes de P são

$$+ \quad - \quad - \quad + \quad +$$

Pela Regra de Descartes, segue que P tem duas ou nenhuma raiz positiva.

Analogamente, concluímos que P apresenta uma ou três raízes negativas.

Note que se P tem duas raízes positivas, as outras três raízes de P serão negativas ou uma delas negativa e as outras duas serão complexas. Caso P não tenha nenhuma raiz positiva, então terá quatro raízes complexas e uma negativa ou duas complexas e as outras três negativas.

Teorema 3.6. (Eneström-Kakeya). Seja $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, um polinômio cujos coeficientes reais a_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$, satisfazem $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n > 0$. Então, todos os zeros de P estão fora do disco unitário aberto.

Demonstração. Seja $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ um polinômio com coeficientes reais.

Multiplicando ambos os membros de P por $(1 - z)$ temos

$$(1 - z)P(z) = a_0 - a_0z + a_1z - a_1z^2 + a_2z^2 - a_2z^3 + \dots + a_nz^n - a_nz^{n+1}$$

ou seja,

$$(1 - z)P(z) = a_0 - [(a_0 - a_1)z + (a_1 - a_2)z^2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)z^n + a_nz^{n+1}].$$

Agora, aplicando o módulo em ambos os lados da equação anterior, temos

$$|(1 - z)P(z)| \geq |a_0| - [|a_0 - a_1||z| + |a_1 - a_2||z|^2 + \dots + |a_{n-1} - a_n||z|^n + |a_n||z|^{n+1}].$$

Como os coeficientes $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n > 0$, então

$$|(1 - z)P(z)| \geq a_0 - [(a_0 - a_1)|z| + (a_1 - a_2)|z|^2 + \dots + (a_{n-1} - a_n)|z|^n + a_n|z|^{n+1}].$$

Assim, para $|z| < 1$, temos

$$|(1 - z)P(z)| > a_0 - (a_0 - a_1) - (a_1 - a_2) - \dots - (a_{n-1} - a_n) - a_n = 0$$

Portanto, se $|z| < 1$, então $|(1 - z)P(z)| > 0$, ou seja, $P(z) \neq 0$, daí os zeros de P só podem ser tais que $|z| \geq 1$.

O próximo teorema mostra um círculo centrado na origem que contém todos os zeros de um determinado polinômio.

Teorema 3.7. (Teorema do Disco contendo todos os Zeros). Seja $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ um polinômio real de grau n e

$M = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|\}$. Então cada zero de $P_n(x)$ pertence ao círculo centrado na origem e raio $R = 1 + \frac{M}{|a_n|}$.

Demonstração. Considere $|z| > 1$. Deste modo, se $M = \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{n-1}|\}$, temos

$$\begin{aligned}
 |P(z)| &= |a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n| \\
 &= |a_nz^n - (-a_{n-1}z^{n-1} - a_{n-2}z^{n-2} - \dots - a_1z - a_0)| \\
 &\geq |a_nz^n| - |-a_{n-1}z^{n-1} - a_{n-2}z^{n-2} - \dots - a_1z - a_0| \\
 &= |a_nz^n| - |a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \dots + a_1z + a_0| \\
 &\geq |a_n||z^n| - (|a_{n-1}||z^{n-1}| + |a_{n-2}||z^{n-2}| + \dots + |a_1||z| + |a_0|) \\
 &\geq |a_n||z|^n - M(|z^{n-1}| + |z^{n-2}| + \dots + |z| + 1) \\
 &= |a_n||z|^n \left(1 - \frac{M}{|a_n|} \sum_{k=1}^n |z|^{-k}\right) \\
 &> |a_n||z|^n \left(1 - \frac{M}{|a_n|} \sum_{k=1}^{\infty} |z|^{-k}\right).
 \end{aligned}$$

Note que a série acima é bastante parecida com a série geométrica, diferenciando-se apenas no índice inicial, onde k varia de 0 até ∞ ; e ainda como $\frac{1}{|z|} < 1$, tem-se que a série geométrica converge, ou seja,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{|z|}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{|z|}} = \frac{|z|}{|z| - 1}.$$

Assim, tem-se

$$\begin{aligned}
 |P(z)| &> |a_n||z|^n \left[1 - \frac{M}{|a_n|} \left(\frac{|z|}{|z| - 1} - 1\right)\right] \\
 &= |a_n||z|^n \left[1 - \frac{M}{|a_n|} \left(\frac{1}{|z| - 1}\right)\right] \\
 &= |a_n||z|^n \left[\frac{|z| - \left(1 + \frac{M}{|a_n|}\right)}{|z| - 1}\right].
 \end{aligned}$$

Agora observe que se $|z| \geq 1 + \frac{M}{|a_n|}$ segue que $P(z) > 0$, isto é, $P(z) \neq 0$ e portanto, os zeros de $P(z)$ estão em $|z| < 1 + \frac{M}{|a_n|}$.

O teorema a seguir é um caso mais geral do Teorema de Eneström-Kakeya, que exibe uma região anelar contendo todos os zeros de um determinado polinômio. Esse resultado encontra-se em Anderson, Saff e Varga (1979).

Teorema 3.8. Sejam $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} \dots + a_1 z + a_0$, um polinômio com coeficientes reais positivos,

$$\alpha = \min_{0 \leq k < n} \frac{a_k}{a_{k+1}} \quad \text{e} \quad \beta = \max_{0 \leq k < n} \frac{a_k}{a_{k+1}}.$$

Então os zeros de $P(z)$ satisfazem

$$\alpha \leq |z| \leq \beta.$$

Demonstração. Temos que

$$P(\alpha z) = a_n \alpha^n z^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 \alpha z + a_0.$$

Observe que,

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} \geq \alpha \Leftrightarrow a_k \alpha^k \geq a_{k+1} \alpha^{k+1}.$$

Daí, obtemos que os coeficientes de $P(\alpha z)$ satisfazem o Teorema de Eneström-Kakeya e, portanto os zeros de $P(\alpha z)$ são tais que $|z| \geq 1$. Se z_0 é zero de $P(z)$ então z_0/α é zero de $P(\alpha z)$, daí, $|z_0/\alpha| \geq 1$ e, portanto $|z_0| \geq \alpha$. Logo, os zeros de $P(z)$ são tais que $|z| \geq \alpha$.

Por outro lado,

$$P(\beta z) = a_n \beta^n z^n + a_{n-1} \beta^{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 \beta z + a_0$$

e

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} \leq \beta \Leftrightarrow a_k \beta^k \leq a_{k+1} \beta^{k+1}.$$

Analogamente, temos que os coeficientes de $P(\beta z)$ satisfazem a proposição anterior e, portanto os zeros de $P(z)$ são tais que $|z| \leq \beta$.

Capítulo 4

POLINÔMIOS COM COEFICIENTES DE FIBONACCI

Neste capítulo, apresenta-se alguns resultados sobre a localização dos zeros de polinômios cujos coeficientes são elementos da sequência de Fibonacci. Para isso, usamos os resultados sobre localização de zeros de polinômios algébricos apresentados no capítulo anterior.

4.1. Sequência de Polinômios com Coeficientes de Fibonacci

A sequência de polinômios $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ definida por

$$P_0(x) = 1 \text{ e } P_n(x) = xP_{n-1}(x) + F_{n+1}, \text{ para } n \geq 1,$$

e $F_i, i = 1, \dots, n + 1$ os números de Fibonacci, é chamada de sequência de polinômios com coeficientes de Fibonacci, ver, Garth, Mills e Mitchell (2007).

Observe que o polinômio $P_n(x)$ é dado por $P_n(x) = \sum_{k=0}^n F_{k+1} x^{n-k}$.

Dessa forma os seis primeiros polinômios com coeficientes de Fibonacci são:

$$P_0(x) = F_1 x^0 = F_1 = 1$$

$$P_1(x) = F_1 x + F_2 = x + 1$$

$$P_2(x) = F_1 x^2 + F_2 x + F_3 = x^2 + x + 2$$

$$P_3(x) = F_1 x^3 + F_2 x^2 + F_3 x + F_4 = x^3 + x^2 + 2x + 3$$

$$P_4(x) = F_1 x^4 + F_2 x^3 + F_3 x^2 + F_4 x + F_5 = x^4 + x^3 + 2x^2 + 3x + 5$$

$$\begin{aligned} P_5(x) &= F_1 x^5 + F_2 x^4 + F_3 x^3 + F_4 x^2 + F_5 x + F_6 \\ &= x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x + 8 \end{aligned}$$

4.2. Localização dos zeros

O problema de determinar uma região limitada que contém os zeros de um polinômio é bastante importante, pois ao utilizar métodos numéricos dentro dessas regiões, pode-se reduzir consideravelmente o tempo que um algoritmo numérico leva para encontrar uma aproximação para esses zeros.

Nesta seção, apresentamos um estudo sobre a localização dos zeros dos polinômios com coeficientes de Fibonacci.

Como os sinais dos coeficientes de $P_n(x) = \sum_{k=0}^n F_{k+1}x^{n-k}$ são todos positivos, pelo Teorema de Descartes, $P_n(x)$ não tem nenhuma raiz positiva. Além disso, como os coeficientes F_i , $i = 1, \dots, n+1$ de $P_n(x)$, satisfazem

$$F_{n+1} > F_n > F_{n-1} > \dots > F_2 > F_1 > 0,$$

Pelo Teorema de Eneström–Kakeya todos os zeros de $P_n(x)$ estão fora do disco unitário aberto.

Seja

$$A = \max\{F_{n+1}, F_n, \dots, F_2\} = F_{n+1},$$

então, pelo Teorema 3.7, os zeros de $P_n(x) = \sum_{k=0}^n F_{k+1}x^{n-k}$ pertencem ao círculo

centrado na origem e raio

$$R = 1 + F_{n+1}.$$

Exemplo 4.1. Seja $P_5(x) = F_1x^5 + F_2x^4 + F_3x^3 + F_4x^2 + F_5x + F_6$. Pelo Teorema de Eneström-Kakeya e o Teorema 3.7, segue que os zeros de $P_5(x)$ estão na região $B = \{z \in \mathbb{C}: 1 < |z| < 9\}$. Ilustramos a localização dos zeros do polinômio $P_5(x) = F_1x^5 + F_2x^4 + F_3x^3 + F_4x^2 + F_5x + F_6$ na Figura 4.1.

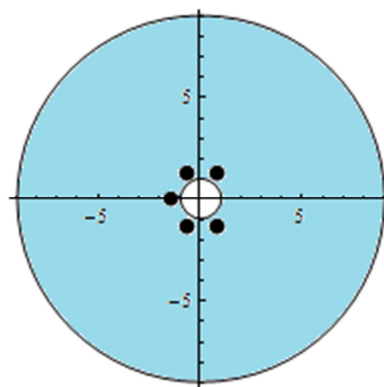


Figura 4.1: Localização dos zeros do Polinômio

$$P_5(x) = F_1x^5 + F_2x^4 + F_3x^3 + F_4x^2 + F_5x + F_6.$$

Fonte: Elaborada pela autora.

Agora, sejam

$$\begin{aligned}\alpha &= \min_{0 \leq k < n} \frac{F_{k+1}}{F_k} = \min \left\{ \frac{F_{n+1}}{F_n}, \frac{F_n}{F_{n-1}}, \dots, \frac{F_3}{F_2}, \frac{F_2}{F_1} \right\} \\ &= \min \left\{ \frac{F_{n+1}}{F_n}, \frac{F_n}{F_{n-1}}, \dots, \frac{2}{1}, \frac{1}{1} \right\} = 1\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\beta &= \max_{0 \leq k < n} \frac{F_{k+1}}{F_k} = \max \left\{ \frac{F_{n+1}}{F_n}, \frac{F_n}{F_{n-1}}, \dots, \frac{F_3}{F_2}, \frac{F_2}{F_1} \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{F_{n+1}}{F_n}, \frac{F_n}{F_{n-1}}, \dots, 2, 1 \right\} = 2,\end{aligned}$$

então, pelo Teorema 3.8, os zeros de $P_n(x) = \sum_{k=0}^n F_{k+1}x^{n-k}$ pertencem à região

anelar $\alpha \leq |z| \leq \beta$, isto é, os zeros de $P_n(x) = \sum_{k=0}^n F_{k+1}x^{n-k}$ estão na região anelar

$1 \leq |z| \leq 2$.

Exemplo 4.2. Seja $P_5(x) = F_1x^5 + F_2x^4 + F_3x^3 + F_4x^2 + F_5x + F_6$, o polinômio apresentado no Exemplo 4.1. De acordo com o Teorema 3.8, os zeros de $P_5(x)$ estão na região anelar $1 \leq |z| \leq 2$, como podemos ver na Figura 4.2.

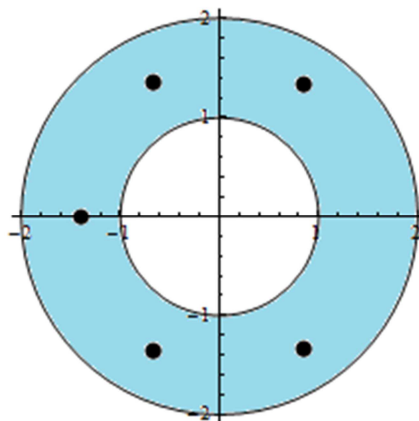


Figura 4.2: Região anelar $1 \leq |z| \leq 2$, que possui a localização dos zeros de $P_5(x) = F_1x^5 + F_2x^4 + F_3x^3 + F_4x^2 + F_5x + F_6$.

Fonte: Elaborada pela autora.

Exemplo 4.3. Seja $P_{12}(x) = \sum_{k=0}^{12} F_{k+1} x^{n-k}$. De acordo com o Teorema 3.8, os zeros de $P_{12}(x)$ estão na região anelar $1 \leq |z| \leq 2$. Ilustramos a localização dos zeros do polinômio $P_{12}(x) = \sum_{k=0}^{12} F_{k+1} x^{n-k}$ na Figura 4.3.

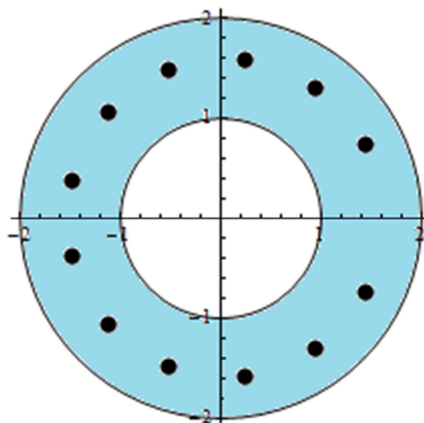


Figura 4.3: Região anelar $1 \leq |z| \leq 2$, que possui a localização dos zeros do

$$\text{polinômio } P_{12}(x) = \sum_{k=0}^{12} F_{k+1} x^{n-k}.$$

Fonte: Elaborada pela autora.

Note que a região anelar do Teorema 3.8 que contém os zeros dos polinômios com coeficientes de Fibonacci é fixa independente do grau do polinômio, já a região dada pelo Teorema 3.7 que contém os zeros dos polinômios com coeficientes de Fibonacci depende do grau do polinômio.

Além disso, utilizando o Teorema 3.8 é possível obter uma região mais refinada do que a região obtida pelo Teorema 3.7 para a localização dos zeros de $P_n(x)$.

Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos alguns resultados interessantes sobre a sequência de Fibonacci, como, por exemplo, algumas configurações biológicas em que aparecem a sequência de Fibonacci e algumas de suas aplicações.

Além disso, fizemos um estudo sobre zeros de polinômios reais, mais precisamente estudamos alguns resultados clássicos sobre zeros de polinômios reais, para depois aplicá-los aos polinômios com coeficientes de Fibonacci.

Dentre os resultados clássicos estudados sobre zeros de polinômios reais, estão a regra de Descartes que permite obter o número de raízes reais positivas de um polinômio, apenas utilizando os sinais dos coeficientes do polinômio; o Teorema de Eneström-Kakeya que trata da localização de zeros complexos de polinômios reais e o Teorema do Disco contendo todos os zeros.

Assim, neste trabalho, utilizando resultados clássicos sobre localização de zeros de polinômios reais, determinamos uma região limitada que contém todos os zeros dos polinômios com coeficientes de Fibonacci, e, conforme já mencionamos no Capítulo 4 deste trabalho, o fato de determinamos uma região limitada que contém todos os zeros de um polinômio é bastante importante, pois ao utilizar métodos numéricos dentro dessas regiões, pode-se reduzir consideravelmente o tempo que um algoritmo numérico leva para encontrar uma aproximação para esses zeros.

Referências Bibliográficas

ANDERSON, N; SAFF, E. B. VARGA, R.S. **On the Enestron-Kekeya theorem and its sharpness.** Linear Algebra App.,v.28,p.5-16,1979.

ÁVILA, G. **Variáveis Complexas e Aplicações.** Rio de Janeiro: LTC, 1990.

BOTTA, V. A. **Polinômios algébricos e trigonométricos com zeros reais.** Dissertação de Mestrado. São José do Rio Preto: IBILCE/UNESP, 2003.

BOYER, C. B. **História da Matemática.** Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1999.

DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética.** Editora Atual, São Paulo, 1991.

GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas:** 3ª edição. São Paulo: Livraria Física, 2009.

GARTH, D.; MILLS, D.; MITCHELL, P. **Polynomials Generated by the Fibonacci Sequence.** Journal of Integer Sequences. Vol. 10, 2007.

GOODWIN, B. **How The Leopards Changed its Spots: The Evolution of Complexity.** New York: Touchstone, 1996.

GUIDORIZZI, A. L. **Um Curso de Cálculo.** Vol. 1, 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

HUNTLEY, H. E. **A Divina Proporção.** Brasília: Ed. UnB, 1985.

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar.** Vol. 6, 7ª edição. São Paulo: Atual, 2005.

LIVIO, M. **The Golden Ratio.** New York: Broadway Books, 2002.

MANSOUR, T.; SHATTUCK, M. **Polynomials whose coefficients are k-Fibonacci numbers.** Annales Mathematicae et Informaticae 40, p. 57-76, 2012.

OBRECHKOFF, N. **Zeros of Polynomials.** Bulgarian Academic Monographs, 2003.

RUGGIERO, M. A. G. e LOPES, V. L. R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais.** 2ª edição. São Paulo: Makron Books, 2003.

SINGH, G.; SHAH, W. M. **On the location of zeros of polynomials.** American Journal of Computational Mathematics, v.1, p. 1-10, 2011.