UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE CASSILÂNDIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Guilherme Augusto Rodrigues Longo

TRANSFORMADAS INTEGRAIS: FOURIER E LAPLACE

Cassilândia – MS
Outubro de 2015

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE CASSILÂNDIA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Guilherme Augusto Rodrigues Longo

TRANSFORMADAS INTEGRAIS: FOURIER E LAPLACE

Monografia apresentada à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS – Unidade Universitária de Cassilândia com requisito para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marco Aparecido Queiroz Duarte

Cassilândia – MS
Outubro de 2015

L845t Longo, Guilherme Augusto Rodrigues
Transformadas integrais: Fourier e Laplace /Guilherme Augusto Rodrigues Longo. Cassilândia, MS: UEMS, 2015.
43 p.; 30 cm.

Monografia (Graduação) – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul,Licenciatura Plena em Matemática, 2015.
Orientador: Prof. Dr. Marco Aparecido Queiroz Duarte.

1.Transformada integral 2. Fourier 3. Laplace 4. Aplicações.I.Título.

CDD 23.ed. 515.723

TERMO DE APROVAÇÃO

Guilherme Augusto Rodrigues Longo

TRANSFORMADAS INTEGRAIS: FOURIER E LAPLACE

Trabalho de conclusão de curso aprovado como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática, na Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Unidade Universitária de Cassilândia, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Marco Aparecido Queiroz Duarte

Orientador

Prof. Me. Eder Pereira Neves

UEMS/Cassilândia

Prof. Esp. Tatiana Rozalia Guedes

UEMS/Cassilândia

Cassilândia, 28 de outubro de 2015

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço a Deus e a todas as pessoas envolvidas direta ou indiretamente que me levaram a conclusão desse curso.

A todos os professores pela total dedicação, em especial, ao Prof. Dr. Marco Aparecido Queiroz Duarte por ter aceitado e por não medir esforço para orientar-me.

Resumo

Este trabalho trata da importância das transformadas integrais para a matemática e suas aplicações. Para isso, são detalhadas duas importantes transformadas, a de Fourier e a de Laplace. Tais transformadas estão entre as mais usadas quando a matemática é envolvida no dia a dia tecnológico. Assim, são apresentadas aqui as definições de tais transformadas, suas definições e diferentes versões, bem como suas principais propriedades. Com isto, apresenta-se um trabalho que servirá de base para aqueles que desejam iniciar estudos sobre transformadas integrais.

Palavras-chave: Transformada integral, Fourier, Laplace, Aplicações.

Abstract

This work deals with the importance of integral transforms for mathematics and its applications. For this, two important transforms are detailed, the Fourier and Laplace transforms. Such transforms are among the most used when mathematics is involved in the day-to-day technology. Thus, we present here such transforms, their definitions, main proprieties and their different versions, when existing. This work is presented in a way to be the basis for those wishing to start studies on integral transforms.

Keywords: Integral transform, Fourier, Laplace, applications.

Sumário

Introdução 10
Capítulo 1 12
Transformada de Fourier 12
1.1- Integral de Fourier 12
1.2- Integral cosseno de Fourier 12
1.2.1- Integral seno de Fourier 13
1.3- Transformada de Fourier 13
1.4- Transformada cosseno de Fourier e Transformada cosseno de Fourier inversa 14
1.5- Transformada cosseno de Fourier inversa 14
1.6- Transformada seno de Fourier e Transformada seno de Fourier inversa 14
1.7- Função de Heaviside 15
1.8- Espectro, amplitude e fase da transformada de Fourier 15
1.9- Propriedades operatórias da transformada de Fourier 16
P1 - Funções de rápido decrescimento 16
P2 - Comportamento de $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{\alpha})$ quando $\boldsymbol{\alpha} \to \infty$ 17
Teorema 1.1 17
P3 - Linearidade 17
P4 - Simetria (ou dualidade) 17
P5 - Conjugado 18
P6 - Translação (no tempo) 18
P7 - Translação (na frequência) 19
P8 - Similaridade (ou mudança na escala) e inversão de tempo 19
1.10- Convolução 20
1.11- Transformada de Fourier de uma convolução 21
Capítulo 2 23
Aplicações da Transformada de Fourier 23
Exemplo 1 23
Exemplo 2 25
Capítulo 3 27
Transformada de Laplace 27
3.1 Propriedades da transformada de Laplace 28
L1 -Comportamento da transformada de Laplace $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{s})$, quando $\boldsymbol{s} \to \infty$ 28

L2 - Linearidade ... 28
L3 - Primeira propriedade da translação ou deslocamento ... 29
Teorema 3.1 ... 29
L4 - Segunda propriedade da translação ou deslocamento ... 29
Teorema 3.2 ... 29
L5 - Similaridade (ou mudança de escala) ... 30
Teorema 3.3 ... 30
3.2- Transformada de Laplace unilateral de derivadas ... 30
Teorema 3.4 ... 30
Teorema 3.5 ... 31
Teorema 3.6 ... 31
Teorema 3.7 ... 31
Teorema 3.8 ... 32
3.3- Transformada de Laplace unilateral de integrais ... 32
3.4- Derivadas de transformadas de Laplace unilaterais (multiplicação por $\boldsymbol{tn}$) ... 32
Teorema 3.9 ... 32
3.5- Integrais de transformadas de Laplace unilaterais (divisão por t) ... 34
3.6- Convolução e transformada de Laplace ... 35
3.7- Valor final ... 36
3.8- Valor final 2 ... 36
Capítulo 4 ... 38
Aplicações da transformada de Laplace ... 38
Exemplo 1 ... 38
Exemplo 2 ... 39
Exemplo 3 ... 39
Exemplo 4 ... 39
Considerações Finais ... 42
Referências Bibliográficas ... 43

Introdução

Desde o início do século XVIII, com os estudos à cerca da eletricidade feitos por Benjamin Franklin (1706 – 1790), a humanidade passou em ter grande interesse nas formas em que a energia elétrica pode ser usada em benefício do homem, bem como estudar outros eventos naturais tais como as ondas eletromagnéticas como forte influência dos estudos de Nicola Tesla (1865 – 1943), mesmo que seu objetivo fosse transmitir energia sem a utilização de cabos, “acidentalmente” descobriu o que conhecemos por ondas de rádio e, posteriormente, wireless. Com intuito de descrever tais eventos, e outros mais, através de equações diferenciais podemos estudá-los através do que chamamos de transformadas integrais. (MENDONÇA, 2007)

Transformadas integrais são ferramentas importantes para resolução de equações diferenciais, estudaremos a Transformada de Fourier e a Transformada de Laplace, a primeira é usada em funções não contínuas, isto é, em intervalos determinados da reta, é principalmente utilizada quando tratamos da variável tempo, já a segunda é fortemente utilizada em para a solução de equações diferencias lineares. (NÓS, 2011)

A transformada de Fourier tem aplicação na área de processamento de sinais e comunicações, apesar, destas transformadas estarem relacionadas a solução de problemas semelhantes, apresentam algumas diferenças que facilitam a resolução nas áreas em que são destacadas pelos livros que tratam de cálculo avançado, bem como na solução de equações diferenciais ordinárias e parciais (FIGUEIREDO, 1977; FECHINE, 2010)

A colaboração das transformadas de Fourier para o processamento de sinais é relativa ao espectro da amplitude do sinal, fase da transformada de Fourier explorando a ideia de Gauss à cerca do conjunto dos números complexos e o plano gaussiano. Tem grande importância pois, entender o comportamento de ondas eletromagnéticas e descrevê-lo através de equações tem papel fundamental na resolução de problemas, tais como, interferências no sinal as quais causam danos ao receptor.

Já a transformada de Laplace tem maior destaque que envolve o cálculo diferencial e integral, sua principal utilização é para a solução de problemas íntegro-diferenciais (BOYCE e DIPRIMA, 2002).

Este trabalho tem como objetivo apresenta um estudo das transformadas de Fourier e Laplace. Para isso, serão dadas as suas definições e suas principais propriedades. E, por fim, serão apresentadas algumas de suas aplicações.

O restante do trabalho é organizado da seguinte forma: No Capítulo 1 é apresentada a transformada de Fourier e suas principais propriedades, bem como as transformadas de seno e cosseno e integral de convolução; no Capítulo 2 são apresentadas algumas aplicações da transformada de Fourier; a transformada de Laplace e suas propriedades são apresentadas no Capítulo 3; e suas aplicações são apresentadas no Capítulo 4; e, por último, são apresentadas as considerações finais.

Transformada de Fourier

Apresenta-se agora a transformada de Fourier e suas principais propriedades. Para isso, primeiro é preciso conhecer a definição da integral de Fourier. A teoria aqui exposta foi retirada de Figueiredo, 1977, Nós, 2011, Quintino, 2013 e Neves, 2015.

1.1- Integral de Fourier

A integral de Fourier de uma função $f(x)$é definida no intervalo $(-\infty, \infty)$ e é representada por:

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[A(\alpha)\cos(\alpha x) + B(\alpha)sen(\alpha x)]d\alpha \quad (1)$$

sendo

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx$$

e

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)sen(\alpha x)dx.$$

A integral na equação (1), ao contrário de sua série, descreve uma função não continua, como um pulso de força, ou mesmo, uma voltagem em um intervalo finito. É uma ferramenta importante para resolução de problemas para os quais antes não havia solução, consiste basicamente em escrever a função de uma curva através de senos e cossenos.

1.2- Integral cosseno de Fourier

Se uma função $f(x)$ é par no intervalo $(-\infty, \infty)$ então:

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx = 2\int_0^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)sen(\alpha x)dx = 0.$$

Sua integral cosseno de Fourier é dada na equação (2).

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} A(\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha. \tag{2}$$

1.2.1- Integral seno de Fourier

Se uma função $f(x)$ é ímpar no intervalo $(-\infty, \infty)$ então:

$$A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx = 0$$

$$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)sen(\alpha x)dx = 2\int_0^{\infty} f(x)sen(\alpha x)dx,$$

com integral seno de Fourier igual a

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[B(\alpha)sen(\alpha x)]d\alpha. \tag{3}$$

1.3- Transformada de Fourier

Assim como a integral de Fourier a transformada de Fourier também é deduzida a partir da famosa série de Fourier, sendo por sua vez, definida como transformada de Fourier de *f* uma função $F(\alpha)$ ou $\hat{f}$ que associa a cada função absolutamente integrável $f: R \to C$ ou $F(\alpha): R \to C$ ($\widehat{f} : R \to C$) e é definida pela seguinte expressão:

$$\Im\{f(x)\} = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\cos(\alpha x) + isen(\alpha x)dx. \tag{4}$$

A transformada inversa de Fourier é função que associa a cada função $F(\alpha): R \to C$ (ou $\widehat{f} : R \to C$) pertencente ao conjunto imagem $\Im\{f(x)\}$ a função absolutamente integrável $f: R \to C$ e é definida na equação (5),

$$\Im^{-1}\{F(\alpha)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha. \tag{5}$$

Se a função $f(x)$ for par então $\Im\{f(x)\} = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx$, logo teríamos um real puro, já se fosse ímpar então $\Im\{f(x)\} = F(\alpha) = i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{sen}(\alpha x)dx$, isto é um imaginário puro.

1.4- Transformada cosseno de Fourier e Transformada cosseno de Fourier inversa

Considerando a função $f(x)$, par no intervalo $(-\infty,\ \infty)$, sua integral cosseno de Fourier é

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(u)\cos(\alpha u)\,du\right]\cos(\alpha x)\,d\alpha.$$

E sua transformada cosseno de Fourier é

$$\Im_C\{f(x)\} = F_C(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx.$$

1.5- Transformada cosseno de Fourier inversa

A transformada cosseno de Fourier inversa é dada por

$$\Im_c^{-1}\{F_C(\alpha)\} = f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F(\alpha)\cos(\alpha x)d\alpha.$$

1.6- Transformada seno de Fourier e Transformada seno de Fourier inversa

A integral seno de Fourier de uma função é definida por

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(u)sen(\alpha u)\right]sen(\alpha x)d\alpha.$$

Com transformada seno

$$\Im_S\{f(x)\} = F_S(\alpha) = \int_0^{\infty} f(x)\mathrm{sen}(\alpha x)dx,$$

e inversa

$$\Im_S{}^{-1}\{F_S(\alpha)\} = f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F(\alpha)\text{sen}(\alpha x)d\alpha.$$

1.7- Função de Heaviside

A função unitária de Heaviside é definida como:

$H: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Na Figura 1é apresentado o gráfico da função de Heaviside

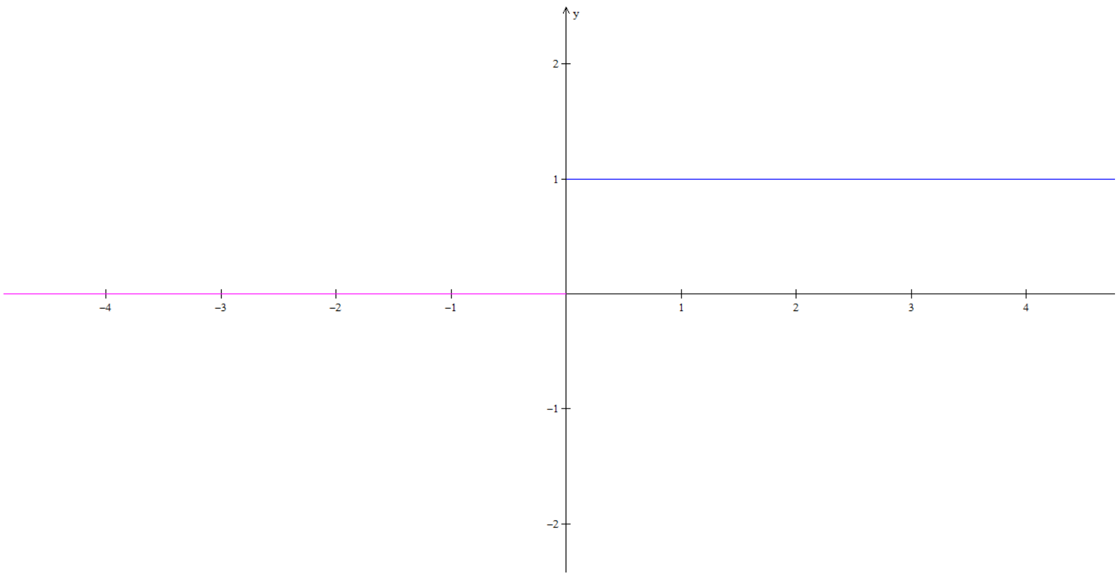


Figura 1 - Gráfico da função de Heaviside

1.8- Espectro, amplitude e fase da transformada de Fourier

Como sabemos o conjunto dos números complexos (C) é dotado das seguintes propriedades:

a) **Igualdade**: $(a, b) = (c, d) \leftrightarrow a = c$ e $b = d$

b) **Adição**: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

c) **Multiplicação**: $(a, b).(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

Sabemos que $f: R \rightarrow C$ ou $F(\alpha): R \rightarrow C$ ($\hat{f}: R \rightarrow C$). Podemos reescrever a transformada de Fourier como:

$$F(\alpha): F_R(\alpha) + iF_I(\alpha) \;\; ou \;\; F(\alpha): |F(\alpha)|e^{i\theta}$$

onde $i = \sqrt{-1}$, $F_R(\alpha)$ é a parte real de $F(\alpha)$ e $F_I(\alpha)$ é sua parte imaginária.

$$|F(\alpha)| = \sqrt{F_R(\alpha)^2 + F_I(\alpha)^2}$$

e

$$\theta = arctg\left(\frac{F_I(\alpha)}{F_R(\alpha)}\right).$$

A forma polar da transformada de Fourier é a amplitude da transformada de Fourier ou o espectro da amplitude do sinal *f(x)*, θ é o ângulo de fase da transformada de Fourier ou do espectro do sinal de *f(x)* e

$$P(\alpha) = F(\alpha)^2 = F_R(\alpha)^2 + F_I(\alpha)^2$$

é o espectro da potência de sinal.

1.9- Propriedades operatórias da transformada de Fourier

As principais propriedades da Transformada de Fourier são apresentadas a seguir.

P1 - Funções de rápido decrescimento

Uma função *f:* $R \rightarrow C$ é de decrescimento rápido se ela for infinitamente diferenciável e se

$$\lim_{x\to\infty} x^m D^n f(x) = 0$$

Ou seja, *f(x)* e suas derivadas decrescem mais rapidamente do que as potências x^m tendem ao infinito quando |x|→ ∞ (Nós, 2011)

P2 - Comportamento de $F(\alpha)$ quando $\alpha \to \infty$

A transformada de Fourier $F(\alpha)$ de uma função f(x) absolutamente integrável quando:

$$\lim_{\alpha \to \pm\infty} F(\alpha) = 0$$

Teorema 1.1

Se $f: R \to C$ é uma função absolutamente integrável, então sua transformada de Fourier $F(\alpha): R \to C$ é uma função contínua e limitada. Se, além disso, $F(\alpha)$ for absolutamente integrável, então f é contínua.

P3 - Linearidade

Se $f, g : R \to C$ são função absolutamente integráveis e a $a, b \in R$, então

$$\Im\{af(x) + bg(x)\} = a\Im\{f(x)\} + b\Im\{g(x)\} = aF(\alpha) + bG(\alpha)$$

Prova:

Pela definição da transformada de Fourier e pela propriedade da linearidade

$$\Im\{af(x) + bg(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} [af(x) + bg(x)] e^{-i\alpha t} dx$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\alpha t} dx + b \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\alpha t} dx$$

P4 - Simetria (ou dualidade)

Se $\Im\{f(x)\} = F(\alpha)$, então $\Im\{F(x)\} = 2\pi f(-\alpha)$

Prova :

$$\Im^{-1}\{F(\alpha)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha = 2\pi f(x)$$

Temos que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{-ix(-\alpha)}d\alpha = 2\pi f(-\alpha)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha = 2\pi f(-\alpha)$$

$$\Im\{F(x)\} = 2\pi f(-\alpha)$$

P5 - Conjugado

Se $f: R \to C$ é uma função absolutamente integrável, então $\Im\{f * (a)\} = F * (-\alpha)$, onde $\Im\{f(x)\} = F(\alpha)$ e * é o conjugado complexo

Prova

$$\Im\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f * (x)\, e^{i\alpha x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f * (x)\, [\cos(\alpha x) + isen(\alpha x)]dx$$

$$= * \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\alpha x}dx = F * (-\alpha)$$

P6 - Translação (no tempo)

Se $f: R \to C$ é uma função absolutamente integrável, então

$\Im\{f(x-a)\} = e^{i\alpha x}F(\alpha)$, onde $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$

Prova: $x - a = u$

$$\Im\{f(x-a)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{i\alpha x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha(u+a)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha a} e^{i\alpha u} du = e^{i\alpha a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{i\alpha u} du = e^{-i\alpha a} F(\alpha)$$

onde $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$

P7 - Translação (na frequência)

Se $f: R \to C$ é uma função absolutamente integrável, então

$\Im\{e^{iax} f(x)\} = F(\alpha + a)$, onde $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$

Prova: $a + \alpha = u$

$$\Im\{e^{iax} f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) e^{i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i(\alpha + a)x} dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iux} dx = F(u) = F(\alpha + a).$$

P8 - Similaridade (ou mudança na escala) e inversão de tempo

Se $f: R \to C$ é uma função absolutamente integrável e $a \neq 0$, então

$\Im\{f(ax)\} = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\alpha}{a}\right)$, onde $F(\alpha) = \Im\{f(x)\}$

Prova:

(1) $a > 0, ax = u, x = \frac{u}{a}, dx = \frac{du}{a}, x \to \infty \Rightarrow u \to \infty, x \to -\infty \Rightarrow u \to -\infty$

$$\Im\{f(ax)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)\, e^{i\alpha x} dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha \frac{u}{a}} du$$

$$\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{iu\frac{\alpha}{a}} du = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\alpha}{a}\right)$$

(2) $a < 0, ax = u, x = \frac{u}{a}, dx = \frac{du}{a}, x \to \infty \Rightarrow u \to \infty, x \to -\infty \Rightarrow u \to -\infty$

$$\Im\{f(ax)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)\, e^{i\alpha x} dx = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha\frac{u}{a}} du$$

$\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{iu\frac{\alpha}{a}} du = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\alpha}{a}\right)$.]

1.10- Convolução

A convolução (ou produto de convolução) de duas funções absolutamente integráveis f e g é definida como sendo a função

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du. \qquad (6)$$

Na integral imprópria que define a convolução na equação (6) para todo x se as funções f e g, além de absolutamente integráveis, também são de quadrado-integráveis, isto é, seus quadrados também são absolutamente integráveis

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^2 du < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du < \infty. \qquad (7)$$

Pela desigualdade de Schwarz prova-se a veracidade da equação (7):

$|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, para todo $a, b \in R$,

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)du\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)du \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-u)|^2 g(u)du +$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}|g(u)|^2du < \infty.$$

1.11- Transformada de Fourier de uma convolução

Se $f, g: R \to C$ são funções absolutamente integráveis com transformadas de Fourier definidas conforme a equação (4), então

$$\Im\{(f * g)(x)\} = F(\alpha)G(\alpha), onde\ F(\alpha) = \Im\{f(x)\} \text{ e } G(\alpha) = \Im\{g(x)\}.$$

Prova:

$$\Im\{f * g\} = \int_{-\infty}^{\infty}(f * g)e^{i\alpha x}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(x-u)du\right\}e^{i\alpha x}dx,$$

sabendo que $e^{i\alpha x} = e^{i\alpha u}e^{i\alpha(x-u)}$:

$$\Im\{f * g\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}f(u)g(x-u)du\right\}e^{i\alpha u}e^{i\alpha(x-u)}dx,$$

mudando a ordem de integração

$$\Im\{f * g\} = \int_{-\infty}^{\infty}f(u)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}g(x-u)e^{i\alpha(x-u)}\,dx\right\}e^{i\alpha u}du.$$

Considerando $x - u = v \Rightarrow x = u + v \Rightarrow dx = dv$:

$$\Im\{f * g\} = \int_{-\infty}^{\infty}f(u)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}g(x-u)e^{i\alpha v}\,dv\right\}e^{i\alpha u}du$$

$$\Im\{f * g\} = \int_{-\infty}^{\infty}f(u)\Im\{g\}e^{i\alpha u}du$$

$$\Im\{f * g\} = \Im\{g\}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{i\alpha u}du$$

$$\Im\{f * g\} = \Im\{g\}\Im\{f\}$$

$$\Im\{f * g\} = F(\alpha)G(\alpha).$$

Para a convolução são válidas as seguintes propriedades:

C1 - comutativa: $(f * g = g * f)$

C2 - associativa: $(f * (g * h) = (f * g) * h)$,

C3 - distributiva: $(f * (g + h) = (f * g) + (f * h))$,

C4 - elemento nulo: $f * 0 = 0$,

C5 - elemento neutro: $(\delta * f) = f$

Aplicações da Transformada de Fourier

Originalmente foi aplicada para resolver problemas de condutividade térmica, mas seu uso se estende a processamento de sinais, criptografia, estatística, entre outras áreas, consistindo, como já citado, reescrever uma função através de senos e cossenos, aproximando-se dessa função. Isto é, o conceito de transformada uma estimativa (com erro próximo de zero) de uma função, para que possamos entender melhor seu comportamento (FIGUEIREDO, 1977; FECHINE, 2010).

Exemplo 1

Equação do Calor (EDP parabólica), o primeiro caso em que foi aplicada a transformada de Fourier, para ser mais exato um problema de condutividade térmica.

Temos o seguinte problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, -\infty < x < \infty, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), -\infty < x < \infty \end{cases} \tag{8}$$

Onde κ é a constante de difusibilidade térmica e $f(x) = \begin{cases} 1, se\ |x| \leq 0 \\ 0, se\ |x| > 0 \end{cases}$

O problema do valor inicial (8) é o *problema de Cauchy*. Em que assumimos que a função $f(x)$ é limitada e absolutamente integrável e que $|u(x\,,t)| < M$ (a solução é limitada para $t \geq 0$). Sabemos que se trata de uma barra homogênea, isolada termicamente e infinita.

Solução: $u(x,t)$

$$\Im\{u(x,t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{i\alpha x}dx = U(\alpha,t)$$

$$\Im\{f(x)\} = \Im\{u(x,0)\} = U(\alpha,0) = \frac{2sen(\alpha)}{\alpha}, \alpha \neq 0. \tag{9}$$

Aplicando a transformada de Fourier em (8) temos que

$$\Im\left\{\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right\} = \Im\left\{\kappa\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right\}$$

$$\frac{dU(\alpha,t)}{dt} = \kappa\alpha^2 U(\alpha,t) \qquad (10)$$

Separando as variáveis em (9), obtemos

$$\frac{1}{U(\alpha,t)}\frac{dU(\alpha,t)}{dt} = -\kappa\alpha^2$$

$$\frac{d}{dt}[\ln|U(\ \alpha,t)|] = -\kappa\alpha^2$$

$$\int\frac{d}{dt}[\ln|U(\ \alpha,t)|]dt = \int -\kappa\alpha^2 dt$$

$$[\ln|U(\ \alpha,t)|] = -\kappa\alpha^2 t + C_1$$

$$U(\alpha,t) = Ce^{-\kappa\alpha^2 t} \qquad (11)$$

Para determinar a constante C em (11), usamos a condição inicial (2) $t = 0$

$$U(\alpha,0) = C = \frac{2sen(\alpha)}{\alpha} \qquad (12)$$

Substituindo (12) em (11), temos

$$U(\alpha,0) = \frac{2sen(\alpha)}{\alpha}e^{-\kappa\alpha^2 t} \qquad (13)$$

Aplicando a transformada inversa de Fourier em (13) encontramos a solução procurada

$$\Im^{-1}\{U(\alpha,t) = \Im^{-1}\left\{\frac{2sen(\alpha)}{\alpha}e^{-\kappa\alpha^2 t}\right\}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2sen(\alpha)}{\alpha}e^{-\kappa\alpha^2 t}e^{-i\alpha x}d\alpha$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sen(\alpha)}{\alpha}e^{-\kappa\alpha^2 t}e^{-i\alpha x}d\alpha$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sen(\alpha)}{\alpha}e^{-\kappa\alpha^2 t}[\cos(\alpha x)+isen(\alpha x)]d\alpha$$

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sen(\alpha)\cos(\alpha x)}{\alpha}e^{-\kappa\alpha^2 t}d\alpha$$

$$u(x,t)=\frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{sen(\alpha)\cos(\alpha x)}{\alpha}e^{-\kappa\alpha^2 t}d\alpha.$$

Exemplo 2

A equação da onda em uma corda infinita, o problema consiste em calcular as vibrações transversais de uma corda infinita, homogênea e com massa desprezível.

$$\begin{cases}\hat{u}_{tt}(\omega,t)=c^2+\omega^2\hat{u}(\omega,t)\\ \hat{u}(\omega,0)=\hat{f}(\omega),\\ \hat{u}_t(\omega,0)=\hat{g}(\omega).\end{cases}$$

A solução geral desta equação é:

$$\hat{u}(\omega,t)=A(\omega)\cos(c\,\omega\,t)+B(\omega)s\,e\,n\,(c\,\omega\,t).$$

Usando as condições iniciais, temos que:

$$\hat{f}(\omega)=\hat{u}(\omega,0)=A(\omega),$$
$$\hat{g}(\omega)=\hat{u}_t(\omega,0)=c\omega B(\omega).$$

Portanto,

$$\hat{u}(\omega,t)=\hat{f}(\omega)\cos(c\omega t)+\frac{\hat{g}(\omega)}{c\omega}=c\omega B(\omega).$$

Aplicando a Transformada de Fourier inversa, chegamos à conclusão do problema

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\hat{f}(\omega) \cos(c\omega t) + \frac{\hat{g}(\omega)}{c\omega} sen(c\omega t) \right] e^{i\omega t}.$$

Transformada de Laplace

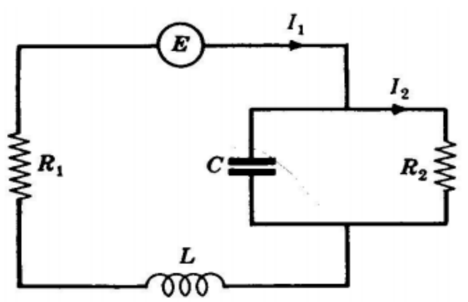
Equações integro-diferenciais do tipo:

$$L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = E(t), \quad (13)$$

bem como, equações diferenciais como, por exemplo,

$$L\frac{d^2}{dt^2}q(t) + Ri\frac{d}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = E(t) \quad (14)$$

Em ambas equações (13) E (14), $i(t)$ é a intensidade da corrente, $q(t)$ é a carga instantânea no capacitor e $E(t)$ é a força eletromotriz em um circuito elétrico em série L-R-C, isto é, indutor – resistor – capacitor, representado abaixo pela ilustração.



Este problema pode ser resolvido usando a transformada de Laplace (Boyce e Diprima, 2002).

A teoria que segue pode ser encontrada em Boyce e Diprima, 2002, Nós, 2011 e Cordona, 2015.

A transformada de Laplace é definida por

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} H(t)f(t)e^{xt}e^{iyt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} H(t)f(t)e^{-st}dt, \quad (15)$$

Sendo que $s = -(x + iy)$ e

$f(t)$ é a função original

F(s) é a função transformada

e^{-st} é o núcleo da transformação

$f: R \to C$

$F: C \to C$

$H(t)$ é a função de Heaviside $u(t-a)$ para $t \geq 0$, definida por

$$u(t-a) = \begin{cases} 0, se\ 0 \leq t < a \\ 1, se\ t \geq a \end{cases}.$$

A integral $\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ échamada de transformada unilateral de Laplace que existe se sua integral imprópria convergir para algum valor de s.

3.1 Propriedades da transformada de Laplace

Algumas das propriedades da transformada de Laplace são apresentadas a seguir.

L1 - Comportamento da transformada de Laplace $F(s)$, quando $s \to \infty$

Se $f(t)$ é uma função seccionalmente contínua para $t \in [0, N]$ e de ordem exponencial para $t > N$, então

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0.$$

L2 - Linearidade

A transformada de Laplace é um operador linear. Assim se a e b são constantes quaisquer, então

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} = aF(s) + bG(s)$$

Prova:

Pela definição da transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{af(t)+bg(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty}[af(t)+bg(t)]e^{-st}\,dt$$
$$= a\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st}dt + b\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}$$
$$= aF(s)+bG(s).$$

L3 - Primeira propriedade da translação ou deslocamento

Teorema 3.1

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$

Prova:

$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{at}f(t)e^{-st} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(s-a)t} = F(s-a).$

L4 - Segunda propriedade da translação ou deslocamento

Teorema 3.2

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ e $g(t) = \begin{cases} f(t-a), t \geq a \\ 0, \quad\quad t < a \end{cases} = f(t-a)u\,(t-a)$, sendo$u(t-a)$ a função degrau unitário, definida por $u(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}$, então $\mathcal{L}\{g(t)\} = e^{-as}F(s)$.

Prova:

$$t-a = u \Rightarrow t = u+a, dt = du, t \to a \Rightarrow u \to 0, t \to \infty \Rightarrow u \to \infty$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-st}dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-s(u+a)}du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-su}e^{-sa}du$$

$$= e^{-sa} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-su} du = e^{-sa} F(s).$$

L5 - Similaridade (ou mudança de escala)

Teorema 3.3

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \ a > 0.$

Prova:

$at = u \Rightarrow t = \frac{u}{a}, dt = \frac{du}{a}, t \to 0 \Rightarrow u \to 0, t \to \infty \Rightarrow u \to \infty$

$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} f(at) e^{-st} dt$$

$$= \int_0^{\infty} f(u) e^{-s\left(\frac{u}{a}\right)} \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(u) e^{-\left(\frac{s}{a}\right)u} du$$

$$= \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right).$$

3.2- Transformada de Laplace unilateral de derivadas

Teorema 3.4

Seja $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0), s > 0$ e f(t) é contínua para $t \in [0, N]$ e de ordem exponencial $t > N$, enquanto $f'(t)$ é seccionalmente contínua para $t \in [0, N]$

Prova:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} dt = \lim_{b \to \infty} \int_0^{b} f'(t) e^{-st} dt$$

Integrando por partes, temos

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \left[e^{-st} f(t)|_0^b + s \int_0^b f(t) e^{-st} dt \right]$$

$$= \left[e^{-sb}f(b) - f(0) + s\int_0^b f(t)e^{-st}dt\right]$$

Observação: $e^{-sb}f(b) \to 0$

$$= sF(s) - f(0).$$

Teorema 3.5

Se no Teorema 1 $f(t)$ deixa de ser contínua em $t = 0$, mas $\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0_+)$, existe, então

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0_+).$$

Teorema 3.6

Se no Teorema 1 $f(t)$ é descontínua em $t = a$, então

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) - e^{-as}[f(a_+) - f(a_-)]$$

Onde $f(a_+) - f(a_-)$ é o salto de descontinuidade $t = a$.

Teorema 3.7

Seja $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Se $f(t)\; e\; f'(t)$ são contínuas para $t \in [0, N]$ e de ordem exponencial $t > N$, enquanto $f''(t)$ é seccionalmente contínua para $t \in [0, N]$.

Prova:

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)$$
$$= s[sF(s) - f(0)] - f'(0)$$
$$= s^2F(s) - sf(0) - f'(0).$$

Teorema 3.8

Seja $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - s^{n-3}f''(0) - \cdots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0)$$

Se $f(t), f'(t), f''(t), \ldots, f^{\,n-1}$são contínuas para $t \in [0, N]$ e de ordem exponencial $t > N$, enquanto $f^n(t)$ é seccionalmente contínua para $t \in [0, N]$.

3.3- Transformada de Laplace unilateral de integrais

Seja $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

Prova:

$$g(t) = \int_0^t f(u)du \Rightarrow g'(t) = f(t)$$

$$g(0) = 0$$

$$\mathcal{L}\{g'(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) = F(s)$$

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{F(s)}{s} \Rightarrow \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

3.4- Derivadas de transformadas de Laplace unilaterais (multiplicação por t^n)

Teorema 3.9

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n F^{(n)}(s).$$

Prova:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$$

Utilizando a regra de Leibniz, temos

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}[f(t)e^{-st}]dt$$

$$= \int_0^\infty -t\,f(t)e^{-st}dt = -\int_0^\infty [t\,f(t)]e^{-st}dt = -\mathcal{L}\{t\,f(t)\},$$

ou seja,

$$\mathcal{L}\{t\,f(t)\} = -\tfrac{d}{ds}F(s) = -F(s).$$

O que demostra o Teorema para $n = 1$, para findar a prova utilizaremos a *indução matemática.*

Agora, suponhamos que o teorema seja verdadeiro para $n = k$, ou seja,

$$\mathcal{L}\{t^k f(t)\} = (-1)^k F^{(k)}(s)$$

Temos que:

$$\frac{d}{ds}\int_0^\infty t^k f(t)dt = (-1)^k F^{(k)}(s)$$

$$\frac{d}{ds}\int_0^\infty t^k f(t)dt = (-1)^k F^{(k+1)}(s)$$

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}t^{k+1} f(t)dt = (-1)^k F^{(k+1)}(s)$$

$$-\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}t^{k+1} f(t)dt = (-1)^k F^{(k+1)}(s)$$

$$\int_0^\infty \tfrac{\partial}{\partial s}t^{k+1} f(t)dt = (-1)^{k+1} F^{(k+1)}(s).$$

Assim, mostramos que o teorema é válido para $n = k + 1$, isto é, fica provado que é verdadeiro para qualquer valor inteiro positivo de n.

3.5- Integrais de transformadas de Laplace unilaterais (divisão por t)

Se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, então

$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)du$, desde que $\lim_{t\to 0_+} \frac{f(t)}{t}$ exista.

Prova:

Seja,

$$g(t) = \frac{f(t)}{t} \Rightarrow f(t) = t\, g(t)$$
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{t\, g(t)\}$$
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = -\frac{d}{ds}G(s)$$
$$F(s) = -\frac{d}{ds}G(s)$$
$$\frac{d}{ds}G(s) = -F(s)$$

Segue que,

$$\int_s^\infty \frac{d}{du}G(u)du = -\int_s^\infty F(u)du$$

$$\lim_{b\to\infty} G(u)\,|_s^b = -\int_s^\infty F(u)du$$

$$\lim_{b\to\infty} [\,G(b) - G(s)] = -\int_s^\infty F(u)du$$

Sabemos que $\lim_{b\to\infty} G(b) = 0$, logo,

$$-G(s) = -\int_s^\infty F(u)du$$
$$G(s) = \int_s^\infty F(u)du$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)du.$$

3.6- Convolução e transformada de Laplace

Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções seccionalmente contínuas em $[0, \infty)$ e em ordem exponencial, com transformadas de Laplace definidas conforme a equação (15), então,

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\}\mathcal{L}\{(g(t)\} = F(s)G(s).$$

Prova:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du = \int_0^t f(t-u)g(u)du\,.$$

Sejam,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau, \;\; G(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty g(\beta)e^{-s\beta}d\beta\,.$$

Temos que:

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau}d\tau\left(\int_0^\infty g(\beta)e^{-s\beta}d\beta\right) =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \big(f(\tau)g(\beta)\big)e^{-s(\tau+\beta)}d\tau d\beta\,.$$

Fixando τ e considerando $t = \tau + \beta \Rightarrow \beta = t - \tau$ e $dt = d\beta$, assim,

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty f(\tau)\left\{\int_0^\infty g(t-\tau)e^{-st}\; dt\right\}d\tau.$$

Por se tratar de funções seccionalmente contínuas podemos inverter a ordem de integração. Logo

$$F(s)G(s) = \int_0^\infty e^{-st}\left\{\int_0^\infty f(t)g(t-\tau)\; d\tau\right\}dt$$

$$= \int_0^\infty (f * g)e^{-st}dt$$
$$= \mathcal{L}\{(f * g)\}.$$

3.7- Valor final

Se os limites a seguir existem, então eles são iguais, ou seja,

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s).$$

Prova:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) \tag{16}$$

Como sabemos $f'(t)$ é seccionalmente contínua e de ordem exponencial $t > N$, então

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{f'(t)\} = 0.$$

Tomando o limite $s \to \infty$ em (16) e supondo que $f(t)$ é contínua em $t = 0$, temos que

$$\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{s\to\infty}[sF(s) - f(0)]$$
$$0 = \lim_{s\to\infty}[sF(s) - f(0)]$$
$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0)$$
$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s).$$

3.8- Valor final 2

Se os limites a seguir existem, então eles são iguais, isto é,

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Prova:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty f'(x)e^{-st}\,dt = \; sF(s) - f(0) \tag{17}$$

O limite do lado esquerdo de (17) quando $s \to 0$ é,

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 0}\int_0^\infty f'(x)e^{-st}\,dt &= \int_0^\infty f'(x)\,dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b f'(x)\,dt \\
&= \lim_{b\to\infty}[f(t)]_0^b = \lim_{b\to\infty}[(f(b) - f(0)] \\
&= \lim_{b\to\infty}[(f(t) - f(0)] \\
&= \lim_{b\to\infty}[(f(t)] - f(0).
\end{aligned}$$

O limite do lado direito de (17) quando $s \to 0$ é

$$\lim_{s\to 0}[\,sF(s) - f(0)] = \lim_{s\to 0}[\,sF(s)] - f(0).$$

Logo,

$$\lim_{b\to\infty}[(f(t)] - f(0) = \lim_{s\to 0}[\,sF(s)] - f(0).$$

Portanto,

$$\lim_{b\to\infty}[(f(t)] = \lim_{s\to 0}[\,sF(s)].$$

Aplicações da transformada de Laplace

As aplicações para a transformadas de Laplace e Fourier são ambivalentes, isto é, elas podem ser aplicadas nas mesmas situações, no entanto, destaca-se o uso da Transformada de Laplace em situações como equações integro-diferenciais (BOYCE e DIPRIMA, 2002; NÓS, 2011; CORDONA, 2015).

Exemplo 1

A equação de Volterra é dada por

$$y(t) = 1 - senh(t) + \int_0^t (\theta + 1) y(t - \theta) d\theta.$$

Solução:

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s)$$

$$y(t) = 1 - senh(t) + (t + 1) * y(t)$$

Aplicando a transformada de Laplace unilateral, obtemos

$$Y(t) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2 - 1} + \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right) Y(s)$$

$$\left(1 - \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}\right) Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2 - 1}$$

$$\frac{s^2 - 1 - s}{s^2} Y(s) = \frac{s^2 - 1 - s}{s(s^2 - 1)}$$

$$Y(s) = \frac{s^2 - 1 - s}{s(s^2 - 1)} \frac{s^2}{s^2 - 1 - s} = \frac{s}{s^2 - 1}$$

Como $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ temos que

$$y(t) = \cosh(t).$$

Exemplo 2

Seja $f(t) = 1, \ \ t \geq 0$. A transformada de Laplace de f é:

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st} dt = \frac{1}{s}, \qquad s \geq 0.$$

Exemplo 3

Seja $f(t) = e^{\alpha t}, \ \ t \geq 0$, pode-se determinar sua transformada de Laplace como:

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{\alpha t} dt = \int_0^\infty e^{-(s-\alpha)t} dt = \frac{1}{s-\alpha}, \qquad s > \alpha.$$

Exemplo 4

Usando a transformada de Laplace, vamos resolver o seguinte problema de valor inicial (PVI), (BOYCE e DIPRIMA, 2002),

$$y" - y' - 2y = 0, \ \ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

Trata-se de um problema simples, resolvido com facilidade, pelo método apropriado de resolução de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. A equação característica é

$$m^2 - m - 2 = (m - 2)(m + 1) = 0,$$

e então a solução geral da EDO de segunda ordem dada no problema é

$$y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}.$$

Para que as condições iniciais sejam satisfeitas, devemos ter $c_1 + c_2 = 1$ e $-c_1 + 2c_2 = 0$; logo, $c_1 = 2/3$ e $c_2 = 1/3$. E assim, a solução para o PVI neste exemplo é

$$y = \phi(t) = \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}.$$

Para resolver o PVI dado usando a transformada de Laplace, precisamos admitir que o problema tenha uma solução $y = \phi(t)$, que com a suas duas primeiras derivadas obedece o Teorema 4.5. Assim, tomando a transformada de Laplace da EDO de segunda ordem dada no problema, temos

$$\mathcal{L}\{y"\} - \mathcal{L}\{y'\} - 2\mathcal{L}\{y\} = 0.$$

A propriedade da linearidade (L2) é usada para escrever a transformada de uma soma como a soma das transformadas das parcelas. Pelo Teorema 4.8 podemos exprimir $\mathcal{L}\{y"\}$ e $\mathcal{L}\{y'\}$ em termos de y e a equação anterior assume a forma

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - [s\mathcal{L}\{y\} - y(0)] - 2\mathcal{L}\{y\} = 0$$

ou

$$(s^2 - s - 2)Y(s) + (1 - s)y(0) - y'(0) = 0,$$

sendo que $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}$. Substituindo $y(0)$ e $y'(0)$, na última equação, pelas condições iniciais, e depois resolvendo em $Y(s)$, obteremos

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)}.$$

A última expressão é a transformada de Laplace $Y(s)$, da solução $y = \phi(t)$ do PVI proposto. Para determinar a função $\phi(t)$ temos que encontrar a função cuja transformada de Laplace seja a $Y(s)$ obtida anteriormente.

Isto pode ser feito facilmente, desenvolvendo o segundo membro de $Y(s)$ em frações parciais. Ou seja,

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{a}{s-2} + \frac{b}{s+1} = \frac{a(s+1) + b(s-2)}{(s-2)(s+1)}.$$

Igualando os numeradores das frações, obtemos $a = 1/3$ e $b = 2/3$. Com tais valores de a e b temos

$$Y(s) = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1}.$$

Finalmente, com o resultado do exemplo 3, fazendo primeiro $\alpha = 2$ e depois $\alpha = -1$, teremos que $\frac{1}{3}e^{2t}$ tem transformada de Laplace igual a $\frac{1}{3}(s-2)^{-1}$ e $\frac{2}{3}e^{-t}$ tem transformada de Laplace igual a $\frac{2}{3}(s+1)^{-1}$. Portanto, pela linearidade da transformada de Laplace,

$$y = \phi(t) = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$$

Tem transformada de Laplace igual à última expressão de $Y(s)$.

O Exemplo 4 é um caso simples de aplicação da transformada de Laplace. Como visto, ele pode ser resolvido de forma bem mais simples por um método apropriado para resolução de EDOs. Porém, para EDOs de ordem superiores a 2, o uso da transformada de Laplace, por vezes, é bem mais apropriado.

Considerações Finais

Neste trabalho de conclusão de curso foram estudadas duas das principais transformadas integrais, a de Fourier e a de Laplace. Tais transformadas estão presentes em várias aplicações da matemática. Algumas delas apresentadas no corpo do texto.

Pode-se perceber algumas similaridades entre a Transformada de Laplace e a Transformada de Fourier que, inclusive, podem ser aplicadas em diversas áreas. Mas pelas aplicações percebemos que o uso de cada um tende a lados diferentes, apesar de poderem ser utilizadas em ambos os casos. Porém, percebe-se que há facilidade em resolver um determinado problema em cada exemplo usando a ferramenta que melhor se adapta a situação.

A Transformada de Fourier destaca-se nos casos onde há ondas, sejam de uma vibração ou em uma transmissão de onda eletromagnética, pela sua característica de ser transformada (como o próprio nome sugere) em uma equação de senos e cossenos, isto é, muito mais simplificada do que a inicial.

A Transformada de Laplace salienta-se em situações envolvendo EDOs, tais como, os circuitos elétricos L-R-C e outras situações, pois por ser transforma em algo muito próximo ao que temos nas equações que descrevem a potência, resistência e intensidade de corrente.

Vale ressaltar a importância dessas duas ferramentas para a solução de problemas que por outros métodos seriam extenuantes ou até mesmo impossíveis e suas incontáveis possibilidades de utilização para resolver problemas.

O estudo das transformadas integrais propicia uma visão matemática do ponto de vista de aplicações, tendo em vista, que tais transformadas são altamente aplicáveis. Isto serve como respostas dos “porquês” estudar Matemática.

Referências Bibliográficas

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**, 7 ed., Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., Rio de Janeiro, 2002.

CORDONA, A. V. 2015. **Aplicações da Transformada de Laplace às Equações Diferenciais**. http://www.pucrs.br/famat/augusto/calculo_avancado_Q/aplictrlap.pdf (Acesso em 11/04/2015).

FECHINE, M. J. 2010. **Ciclo de Seminários Técnicos – a Transformada de Fourier e suas Aplicações**. Disponível em: http://www.dsc.ufcg.edu.br/~pet/ciclo_seminarios/tecnicos/2010/TransformadaDeFourier.pdf (Acesso em 15/01/2015)

FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**, 4 ed, Rio de Janeiro, IMPA, 1977.

NEVES, A. G. M. 2015. **Transformada de Fourier**. Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/~aneves/ensino/edb/chapter8.pdf (Acesso em 20/02/2015)

NÓS, L. R. 2011. **Séries Transformadas – notas de aula**. Disponível em: http://paginapessoal.utfpr.edu.br/rudimarnos/calculo-4/calculo-4/series_transformadas.pdf (Acesso em 08/03/2015).

QUINTINO O. L. 2013. **Séries de Fourier e Aplicações em Equações Diferenciais Parciais**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Alfenas. Disponível em: http://www.unifal-mg.edu.br/fisica/files/file/TCCs/QuintinoLO.pdf (Acesso em 07/02/2105).

MENDONÇA M. C. N. F. 2007. **A História da Electricidade no Século XVIII e Ensino da física.** Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade de Coimbra. Disponível em: https://estudogeral.sib.uc.pt/bitstream/.../MCarmoNFMendonca_MSc.pdf (Acesso em 15/06/2014).