Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Unidade Universitária de Nova Andradina

Curso de Matemática, Licenciatura

# Equações Diferenciais

**Adenilson de Souza Gomes**

Orientador: **Prof. Dr. Oyran Silva Rayzaro**

Nova Andradina- MS

2016

# Equações Diferenciais

**Adenilson de Souza Gomes**

Trabalho de Conclusão de curso, do curso de Matemática/Licenciatura, turno noturno, da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, orientado pelo Prof. Dr.Oyran Silva Rayzaro.

Nova Andradina- MS
2016

# Equações Diferenciais.

**Adenilson de Souza Gomes**

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Corpo Docente da Unidade Universitária de Nova Andradina da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul- UEMS-MS, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Oyran Silva Rayzaro - UEMS ....................................................
(Orientador)

Prof. Me. Luiz Oreste Cauz - UEMS ..................................................

Prof. Dr. Fábio Rodrigues Lucas - UEMS ....................................................

Nova Andradina

2016

# Dedicatória

À Deus e a meus pais que me ajudaram a chegar até o final, a todos os professores da uems que me ajudaram por todos esses anos em que estive estudando.

# Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço à Deus aos meus familiares, especialmente aos meus pais e meu irmão pelo incentivo e apoio. Aos meus amigos, pelas horas que passamos juntos nestes quatro anos de estudo. E por fim, agradeço a todos os meus professores e ao meu orientador, pela sua paciência e dedicação.

*"Se cheguei até aqui foi porque me apoiei no ombro dos gigantes."*

*Isaac Newton*

# Resumo

Este trabalho é um estudo sobre Equações Diferenciais de primeira e segunda ordem, onde apresento suas principais propriedade, e alguns exemplos com valores iniciais, e com seus respectivos gráficos das soluções. E por fim apresento a transformada de Laplace, uma ferramenta útil para resolução das equações diferenciais com valores iniciais.

Palavras-chave: Equações Lineares de primeira ordem , Equações Lineares de segunda ordem e Transformada de Laplace.

# Abstract

This work is a study of first and second order differential equations, where present its main property, and some examples with initial values, and with their graphics solutions. Finally introduce the Laplace transform, a useful tool for solving differential equations with initial values.

Keywords: Linear Equations of the first order, second order linear equations and Laplace transform.

# Sumário

# Lista de Figuras

# Introdução

Neste trabalho estarei desenvolvendo um estudo sobre Equações Diferenciais. Onde no primeiro capítulo apresento as equações diferenciais de primeira ordem, onde introduziremos os conceitos básicos das equações diferenciais, tais como, classificação, ordem, linearidade, etc. Por sua vez está dividida em equações lineares, separáveis e exatas, determinando assim a equação geral para solução das equações diferenciais. Apresentando a teoria e o método para a resolução de problemas de valores iniciais, e seus respectivos gráficos.

No segundo capítulo apresentaremos equações diferenciais de segunda ordem, onde as raízes destas equações são reais e distintas, reais e iguais e raízes complexas, podendo então encontrar a solução geral da equação diferencial dada. Apresentando a resolução de problemas de valores iniciais, e seus respectivos gráficos.

No último capítulo estudaremos sobre Transformada de Laplace, onde transformamos uma Equação Diferencial em uma Equação Algébrica, de modo a obter uma solução geral da Equação Diferencial. Apresentamos a solução de transformadas elemetares, em seguida a solução de problemas de valores iniciais, e seus respectivos gráficos.

# Capítulo 1

# Equações Lineares de Primeira Ordem

## 1.1 Introdução

Uma equação algébrica é uma equação em que as incógnitas são números, enquanto uma equação diferencial é uma equação em que as incógnitas são funções e envolve derivadas destas funções. Numa equação diferencial em que a incógnita é uma função da forma $y(t)$, $t$ é a variável independente e $y$ é a variável dependente.

As equações são classificadas quanto ao tipo, a ordem e a linearidade. Quanto ao tipo uma equação diferencial pode ser ordinária ou parcial. Ela é ordinária se as funções incógnitas forem funções de somente uma variável. Caso contrário ela é parcial. Portanto uma equação diferencial é ordinária se as derivadas que aparecem na equação são derivadas ordinárias. Por exemplo, as equações que podem ser escritas na forma.

$$F(t, y, y', y'', ...) = 0$$

em que $y$ é função apenas de $t$.

Quanto à ordem, uma equação diferencial pode ser de 1ª, de 2ª, ..., de n-´esima ordem dependendo da derivada de maior ordem presente na equação. Uma equação diferencial ordinária de ordem $n$ é uma equação que pode ser escrita na forma

$$F(t, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0.$$

Quanto a linearidade uma equação diferencial pode ser linear ou não linear. Ela é linear se as incógnitas e suas derivadas aparecem de forma linear na equação, isto é, as incógnitas e suas derivadas aparecem em uma soma em que cada parcela é um produto de alguma derivada das incógnitas com uma função que não depende das incógnitas. Por exemplo, uma equação diferencial ordinária linear de ordem $n$ é uma equação que pode ser escrita como:

$$a_0(t)y + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_2(t)\frac{d_2y}{dt_2} + ... + a_n(t)\frac{d_ny}{dt_n} = f(t).$$

As equações diferenciais ordinárias que não podem ser colocadas nessa forma são não lineares.

As equações diferenciais são usadas para construir modelos matemáticos de fenômenos físicos, tais como na dinâmica de fluídos e em mecânica celeste. Deste modo, o estudo de equações diferenciais é um campo extenso na matemática pura e na matemática aplicada.

As equações diferenciais têm inúmeras aplicações práticas em medicina, engenharia, química, biologia e outras diversas áreas do conhecimento. As soluções destas equações são usadas, por exemplo, para projetar pontes, automóveis, aviões e circuitos elétricos.

Descreveremos varios métodos, aplicavéis a determinada subclasse de equações de primeira ordem. As mais importantes delas são as equações lineares, as equações separáveis e as equações exatas.

### 1.1.1 Equações em que $p(t) = 0$

Dada a equação $\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t)$. Se a função $p(t) = 0$ a equação torna- se:

$$\frac{dy}{dt} = q(t) \tag{1.1}$$

Integrando os dois lados obtemos a solução geral desta equação, ou seja:

$$y(t) = \int q(t)dt + c$$

**Exemplo 1.1.** *Encontre a solução geral da equação diferencial, que satisfaça o valor inicial* $y(0) = -\frac{1}{2}$*:*

$$\frac{dy}{dt} = sen(2t).$$

*Como* $q(t) = sen(2t)$*, então a solução geral desta equação é:*

$$y(t) = \int sen(2t)dt + c$$

$$y(t) = -\frac{cos(2t)}{2} + c. \tag{1.2}$$

*Para usar a condição inicial* $y(0) = -\frac{1}{2}$*, então.*

$$-\frac{1}{2} = -\frac{cos(2(0))}{2} + c$$

$$c = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

*Na figura (1.1) está representado o gráfico da solução da equação (1.2) , onde a constante assume valor* $c = 0$*.*

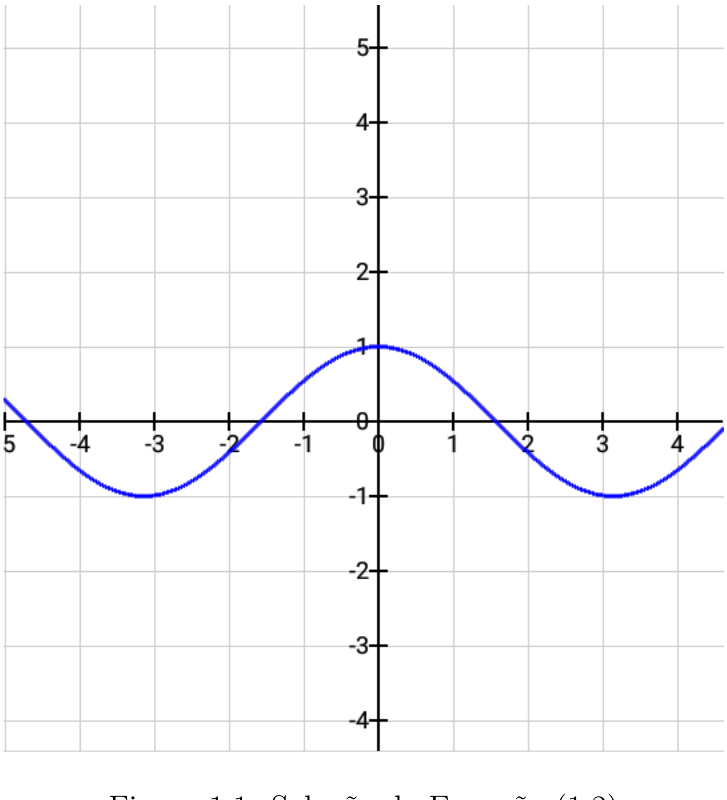


Figura 1.1: Solução da Equação (1.2)

## 1.2 Equações Lineares - Caso Geral

Vamos considerar a equação geral na forma:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = q(t), \tag{1.3}$$

onde p e q são funções dadas da variável independente t. Vamos definir uma função auxiliar, $\mu(t)$, de forma que ao multiplicarmos a equação (1.3) por esta função, a equação obtida é uma equação linear com $p(t) = 0$. Uma função com esta propriedade é chamada fator integrante da equação linear.

Vamos mostrar agora que $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$, é um fator integrante da equação (1.3) .

De fato, note que:

$$\frac{d\mu}{dt} = e^{\int p(t)dt} \frac{d}{dt}\left(\int p(t)dt\right) = e^{\int p(t)dt} p(t) = \mu(t)p(t). \tag{1.4}$$

Agora, multiplicando a equação (1.3) por $\mu(t)$, obtemos:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \mu(t)p(t)y = \mu(t)q(t). \tag{1.5}$$

A equação (1.5) pode ser reescrita como:

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + \frac{d\mu}{dt}y = \mu(t)q(t).$$

Mas o lado esquerdo dessa equação é a derivada de um produto, o que faz com que ela possa ser reescrita na forma:

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)y(t)) = \mu(t)q(t). \tag{1.6}$$

A equação (1.6) é uma equação do tipo;

$$\frac{dY}{dt} = f(t),$$

onde $Y(t) = \mu(t)y(t)$ e $f(t) = \mu(t)q(t)$. Assim, a solução geral da equação (1.6) é dada por:

$$\mu(t)y(t) = \int \mu(t)q(t)dt + c.$$

Como $\mu(t) \neq 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$, dividindo-se a equação anterior por $\mu(t)$ obtemos que a solução geral da equação (1.3) é dada por:

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left( \int \mu(t)q(t)dt + c) \right).$$

O fator integrante da equação (1.3) pode ser obtido da seguinte forma:

Primeiramente, precisamos que $\mu(t)$ satisfaça a equação diferencial

$$\frac{d\mu}{dt} = p(t)\mu(t).$$

Esta é também uma equação linear, mas com $q(t) = 0$, e supondo-se $\mu(t) \neq 0$, vamos multiplicar esta equação por $\frac{1}{\mu(t)}$. Obtemos:

$$\frac{1}{\mu(t)} \frac{d\mu}{dt} = p(t),$$

como $\frac{1}{\mu(t)} = \frac{d}{d\mu}(ln|\mu(t)|)$, a equação anterior pode ser reescrita como:

$$\frac{d}{d\mu}(ln|\mu(t)|)\frac{d\mu}{dt} = p(t).$$

Assim, pela regra da cadeia esta equação é equivalente a:

$$\frac{d}{dt}(ln|\mu(t)|) = p(t).$$

Esta equação é do tipo da equação (1.1) que pode ser resolvida integrando-se ambos os membros em relação à $t$, obtendo:

$$\ln|\mu(t)| = \int p(t)dt + c.$$

Aplicando-se a exponencial a ambos os membros e eliminando-se o valor absoluto obtemos:

$$\mu(t) = \pm e^{c} e^{\int p(t)dt} = c e^{\int p(t)dt}.$$

Como queremos apenas um fator integrante podemos tomar $c = 1$ e obtemos:

$$\mu(t) = e^{\int p(t)dt}.$$

Como a solução geral obtida é igual a:

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left( \int \mu(t)q(t)dt + c \right),$$

substituindo $\mu(t)$ por $e^{\int p(t)dt}$ temos a equação geral:

$$y(t) = e^{-\int p(t)dt} \left( \int e^{\int p(t)dt} q(t)dt + c \right). \tag{1.7}$$

**Exemplo 1.2.** *Encontre o fator integrante da equação linear a seguir:*

$$y' - y = e^{2t}.$$

*Note que* $p(t) = -1$ *e* $q(t) = e^{2t}$*, usando a equação geral (1.7) e substituindo os valores obtidos da equação temos:*

$$y(t) = e^{-\int -1dt} \left[ \int e^{\int -1dt} e^{2t} dt + c \right].$$

*Resolvendo as integrais temos:*

$$y(t) = e^{\int dt} \left[ \int e^{2t} e^{-t} dt + c \right]$$

$$y(t) = e^{t} \left[ \int e^{t} dt + c \right]$$

$$y(t) = e^{t}[e^{t} + c]. \tag{1.8}$$

*Na figura (1.2) está representado o gráfico da solução da equação (1.8) , onde a constante assume valor* $c = 0$.

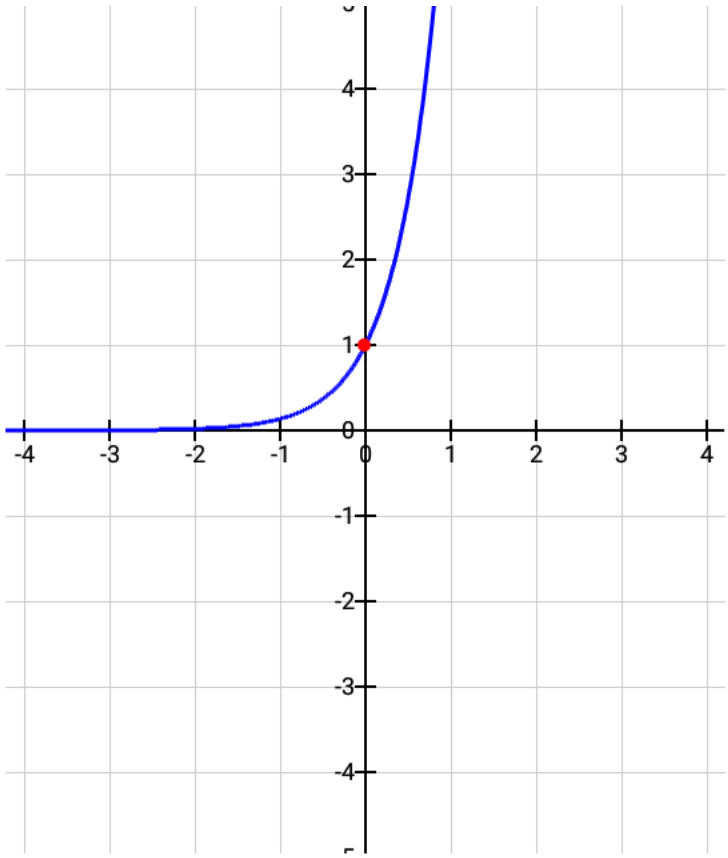


Figura 1.2: Solução da Equação (1.8)

**Exemplo 1.3.** *Encontre a solução geral da seguinte equação linear:*

$$y' - 2xy - x = 0.$$

*Note que* $y' - 2xy = x$. *Assim* $p(x) = -2x$ *e* $q(x) = x$ *sendo o caso geral e substituindo estes valores na equação geral (1.7), obtemos:*

$$y(t) = e^{-\int -2xdx}\left[\int e^{\int -2xq(x)dx}dx + c\right]$$

$$y(t) = e^{2\int xdx}\left[\int xe^{-2\int xdx}dx + c\right]$$

$$y(t) = e^{\dfrac{2x^2}{2}}\left[\int xe^{\dfrac{-2x^2}{2}}dx + c\right]$$

$$y(t) = e^{x^2}\left[\int xe^{-x^2}dx + c\right].$$

*Para resolver essa integral usamos o método de substituição:*

*substituindo* $u = -x^2$ *e* $du = -2xdx$ *e* $\dfrac{du}{-2} = xdx$. *Assim:*

$$\int e^u \frac{du}{-2} = -\frac{1}{2}\int e^u du = -\frac{1}{2}e^u + c = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

*então temos:*

$$y(t) = e^{x^2}\left[\int xe^{-x^2}dx + c\right]$$

$$y(t) = e^{x^2}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2} + c\right]$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{x^2-x^2} + ce^{x^2}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{0} + ce^{x^2}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} + ce^{x^2}. \tag{1.9}$$

*Na figura (1.3) está representado o gráfico da solução da equação (1.9) , onde a constante assume valor* $c = 1$.

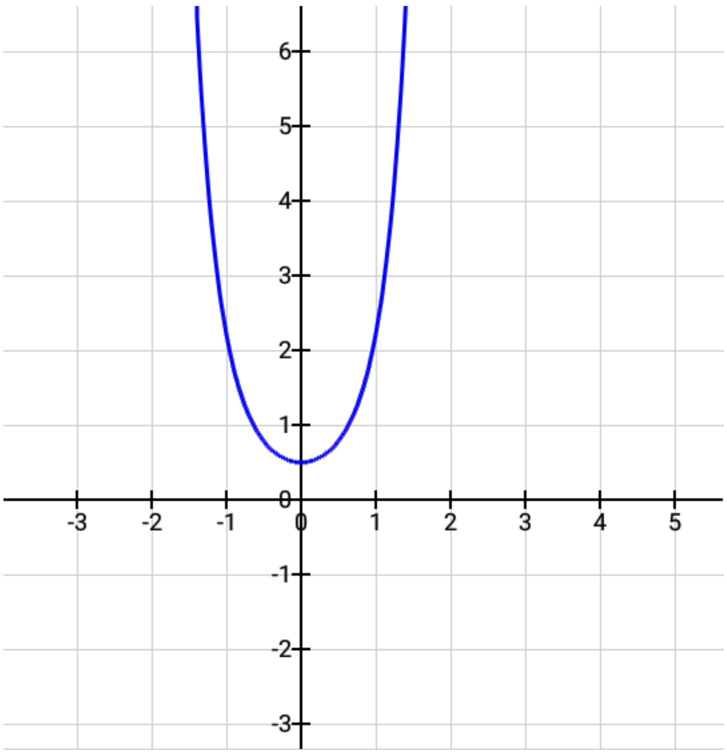


Figura 1.3: Solução da Equação (1.9)

## 1.3 Equações separáveis

Uma equação diferencial ordinária separável é aquela em que você consegue separar todos os termos que tem a variavél $y$ de um lado da equação e todos os termos que tem a variavél $x$ para o outro lado, ou seja, você separa $x$ de $y$. E são equações que podem ser escritas na forma:

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{1.10}$$

Considere $h(y) = \int g(y)dy$, então

$$\frac{dh}{dy} = g(y).$$

Substituindo-se $g(y)$ por $\frac{dh}{dy}$ na equação (1.10) obtemos:

$$\frac{dh}{dy}\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{1.11}$$

Assim, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}h(y(x)) = \frac{dh}{dy}\frac{dy}{dx},$$

o que implica que a equação (1.11) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dx}h(y(x)) = f(x). \tag{1.12}$$

Ou seja, a equação (1.12) é do tipo (1.1), é da forma

$$\frac{dY}{dx} = f(x),$$

em que $Y(x) = h(y(x))$. Assim,integrando-se (1.12) dos dois lados obtemos que a solução geral (1.10) é dada implicitamente por;

$$h(y(x)) = \int f(x)dx + c.$$

Podemos obter a solução da seguinte forma. Integrando-se em relação à $x$ ambos os membros da equação (1.10), obtemos

$$\int g(y)\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx + c,$$

que pode ser reescrita como

$$\int g(y)y'dx = \int f(x)dx + c.$$

Fazendo a substituição $y'dx = dy$, obtemos

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c.$$

**Exemplo 1.4.** *Dado a equação $y'(x)(x+1) = y(x)$ encontre a solução da equação separável:*

*Podemos escrever $\frac{dy}{dx}$ em vez de $y'(x)$, assim:*

$$\frac{dy}{dx}(x+1) = y.$$

*Isolando o termo $\frac{dy}{dx}$ em um lado da equação obteremos:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1}. \tag{1.13}$$

*Como não existe divisão por zero então, $x+1 \neq 0$ , então,$x \neq -1$. Podemos escrever (1.13) por*

$$(x+1)dy = ydx.$$

*Agora vamos separar as incógnitas $x$ e $y$, ou seja,*

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1}.$$

*Integrando ambos os lados de forma independente, obtemos*

$\int \frac{dy}{y} = ln|y| + c_1$ *e* $\int \frac{dx}{x+1} = ln|x+1| + c_2$

*Igualando as duas equação obtidas, e fazendo $c_2 - c_1 = c$, teremos:*

$$ln|y| = ln|x + 1| + c.$$

**Exemplo 1.5.** *Encontre a solução da equação separável* $y'(x) - x = 0$.

*Primeiro passo vamos substituir* $y'(x) = \frac{dy}{dx}$. *Temos então:*

$$\frac{dy}{dx} - x = 0.$$

*Isolando o termo* $\frac{dy}{dx}$ *obteremos:*

$$\frac{dy}{dx} = x. \tag{1.14}$$

*Podemos escrever a equação (1.14) por* $dy = xdx$. *Integrando ambos os lados:*

$$\int dy = \int xdx.$$

*Sendo assim:*

$$y = \frac{x^2}{2}.$$

*Ou seja,*

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + c. \tag{1.15}$$

*Na figura (1.4) está representado o gráfico da solução da equação (3.3) , onde a constante assume valor* $c = 0$.

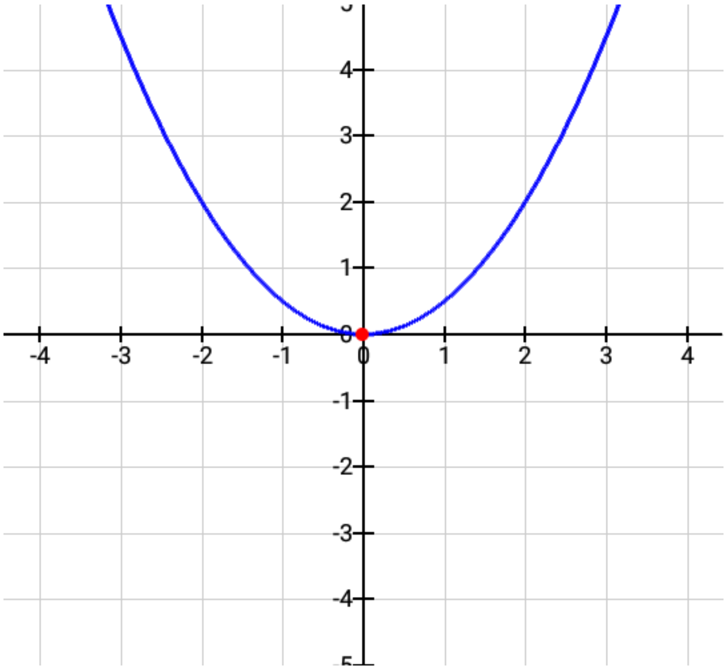

Figura 1.4: Solução da Equação (3.3)

## 1.4 Equações exatas e fator integrante

Existem vários métodos de integração aplicáveis a diversas classe de problemas para resolver equações de primeira ordem e os mais importante são equações lineares e separáveis, já discutido anteriormente. Vamos considerar, as equações conhecidas como equações exatas, para as quais existe, também, um método bem definido de solução.

### 1.4.1 Equação exata

Uma equação diferencial exata, é uma equação da forma

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

onde $P$ e $Q$ são funções continuas, satisfazendo

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Agora supomos que $P(x, y)$ é a derivada de alguma função $f(x, y)$ em relação a $x$, ou seja:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P(x, y).$$

Agora podemos encontrar $f$ facilmente integrando $P(x, y)$ com relação $x$,mantendo $y$ constante.

$$f(x, y) = \int P(x, y)dx + g(y).$$

Tomando $g(y)$ como a constante de integração, sabemos também que:

$$\left[\frac{\partial f}{\partial y} = Q(x, y)\right],$$

Logo;

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx + g(y) = Q(x, y)\right].$$

Dessa maneira segue que;

$$g'(y) = Q(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx.$$

Integrando com relação a $y$ e substituindo o resultado na equação $[\frac{\partial}{\partial y}\int P(x, y)dx + g(y) = Q(x, y)]$ teremos $f(x; y) = c$, onde $f$ é a nossa função solução.

**Exemplo 1.6.** *Encontre a função solução da equação diferencial exata $y^2dx + 2xydy$;*

*Tomando $P(x, y) = y^2$ e $Q(x, y) = 2xy$, conforme temos acima;*

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}y^2 = \frac{\partial}{\partial x}(2xy)\right],$$

$$2y = 2y.$$

*Sendo assim, a equação é uma Equação Diferencial Exata e existe uma função solução tal que sua derivada em relação a $x$ seja igual a $P(x, y)$, ou seja, existe uma função $\psi$, tal que*

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial x} = y^2\right].$$

*Portanto*

$$\psi(x,y) = \int (y^2)dx$$

$$\psi(x,y) = y^2x + g(y).$$

*Pela equação, nesse momento, a função já é solução da nossa Equação Diferencial Exata, porém precisamos achar* $g(y)$*. Sabemos que;*

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial y} = Q(x,y)\right].$$

*logo*

$$\left[\frac{\partial}{\partial y}(y^2x + g(y)) = 2xy\right]$$

$$2yx + g'(y) = 2xy.$$

*Removendo o* $2yx$ *dos dois lados da equação acima, obtemos:*

$$g'(y) = 0,$$

$$g(y) = \int 0dy,$$

$$g(y) = C.$$

*Onde* $C$ *é uma constante, substituindo* $g(y)$ *na equação* $\psi(x,y) = y^2x + g(y)$*, obtemos*

$$\psi(x,y) = y^2x + C,$$

*onde a função é a função solução da nossa Equação Diferencial Exata.*

**Exemplo 1.7.** *Determine a solução geral da equação diferencial*

$$2xy^2 + cosx + (2x^2y + \frac{1}{y})\frac{dx}{dy} = 0.$$

*Note que,* $P = 2xy^2 + cosx \quad e \quad Q = 2x^2y + \frac{1}{y}$*, então;*

$\frac{\partial P}{\partial y} = 4xy \ \ e \ \ \frac{\partial Q}{\partial x} = 4xy$*, ou seja,*

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \forall(x,y) \in R^2.$$

*A equação é exata, assim*

$$\psi(x,y) = \int P dx = x^2y^2 + senx + g(y).$$

$$Q = 2x^2 + \frac{1}{y} = 2x^2y + g'(y).$$

$$g(y) = ln|y|.$$

$$\psi(x,y) = x^2y^2 + senx + ln|y| = c.$$

**Exemplo 1.8.** *Determine a equação diferencial:*

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0.$$

*Note que* $P = 3xy + y^2 \quad e \quad Q = x^2 + xy$.

*Calculando a integral de* $P$ *em relação a* $y$ *e a integral de* $Q$ *em relação a* $x$*, temos:*

$\int 3xy + y^2 dy = 3x + 2y \quad e \quad \int x^2 + xy = 2x + y.$

*Como* $P_y \neq Q_x$*,a equação diferencial dada não é exata. Para ver que ela não pode ser resolvida pelo método descrito anteriormente, vamos procurar uma função* $\psi$ *tal que:*

$$\psi_x(x,y) = 3xy + y^2$$

*e*

$$\psi_y(x,y) = x^2 + xy.$$

*Integrando a primeira das equações em relação a* $x$*, temos:*

$$\psi_x(x,y) = \frac{3}{2}x^2y + xy^2 + g(y)$$

*Onde* $g$ *é uma função arbitrária dependendo apenas de* $y$*. Para tentar satisfazer a segunda equação, vamos calcular* $\psi_y$ *da segunda equação e igualá-la a* $Q$*,obtendo;*

$$\int x^2 + xydy = \frac{3}{2}x^2 + 2xy + g'(y).$$

*Sendo assim temos:*

$$\frac{3}{2}x^2 + 2xy + g'(y) = x^2 + xy$$

*ou seja,*

$$g'(y) = -\frac{1}{2}x^2 - xy.$$

*Como a expressão à direita do sinal de igualdade na equação depende tanto de* $x$ *quanto de* $y$*, é impossível resolver a equação para* $g(y)$*. Portanto, não existe* $\psi(x,y)$ *satisfazendo as equações.*

### 1.4.2 Fatores Integrantes

Em alguns caso é possível transformar uma equação que não é exata em uma exata multiplicando-se a equação por um fator integrante apropriado. O objetivo é multiplicar a equação;

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{1.16}$$

que não é exata por uma função $\mu(x,y)$ de forma que a nova equação seja exata. Chamamos a função $\mu(x,y)$ de fator integrante para equação exata.

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0$$

**Teorema 1.1.** *Suponha que as funções $P$,$Q$,$P_y$ e $Q_x$, onde os índice denotam derivadas parciais, são contínuas a região retangular $R : \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta$. Então, a equação.*

$$P(x,y) + Q(x,y)y' = 0$$

*é uma equação diferencial exata em $R$ se, e somente se,*

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y) \tag{1.17}$$

*em cada ponto de $R$. Isto é, existe um função $\psi$ satisfazendo as equações.*

$$\psi_x(x,y) = P(x,y) \qquad \psi_y(x,y) = Q(x,y)$$

*se,e somente se,$P$ e $Q$ satisfazem a equação (1.17).*

Então podemos dizer que pelo teorema (1.1) que a equação é exata se, $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$.

Assim, para que $(\mu P_y)$ seja igual a $(\mu Q_x)$,é necessário que:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{P_y - Q_x}{Q}\mu.$$

Se $(P_y - Q_x)/Q$ depende apenas de $x$ o fator integrante $\mu$ também depende só de $x$, que é ao mesmo tempo linear e separável.

Por exemplo, considere a seguinte equação diferencial:

$$2y^2 + \frac{2y}{x} + (2xy + 2 + \frac{y}{x})y' = 0 \tag{1.18}$$

Note que a equação diferencial (1.18) não é exata, pois e que $\mu(x) = x$ é um fator integrante da mesma.

Note que $P = 2y^2 + \dfrac{2y}{x}$ e $Q = 2xy + 2 + \dfrac{y}{x}$,

derivando ambos as equações temos;

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4y + \frac{2}{x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y - \frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

A equação não é exata. Por outro, $\mu(x) = x$, é um fator integrante para a equação (1.18), pois multiplicando a equação $P$ e $Q$ por $\mu(x) = x$ obtemos,

$$2xy^2 + 2y + (2x^2y + 2x + y)y' = 0.$$

Logo $\tilde{P} = xP = 2xy^2 + 2y$, $\quad \tilde{Q} = xQ = 2x^2y + 2x + y$, ou seja,

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = 4xy + 2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} = 4xy + 2$$

Portanto;

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}$$

Logo a nova equação é exata. A solução geral para esta equação é dada pela função:

$$\psi(x, y) = \int 2xy^2 + 2ydx = x^2y^2 + 2xy + g(y),$$

e como, $\tilde{Q} = 2x^2y + 2x + y = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = 2x^2y + 2x + g'(y)$, então $g'(y) = y$ implica $g(y) = y^2/2 + c_1$.

A solução geral da equação é dada implicitamente por:

$$x^2y^2 + 2xy + y^2/2 = C. \tag{1.19}$$

Uma solução particular para $x = 1$ e $y = 1$, ou seja, $y(1) = 1$ é

$$1 + 2 + 1/2 = C,$$

ou seja, $c = \dfrac{7}{2}$. Logo a solução do problema de valor inicial $y(1) = 1$, é dada implicitamente por:

$$x^2y^2 + 2xy + y^2/2 = 7/2$$

Na figura (1.5) está representado o gráfico da solução da equação (1.19) , onde a constante assume valor $c = 7/2$.

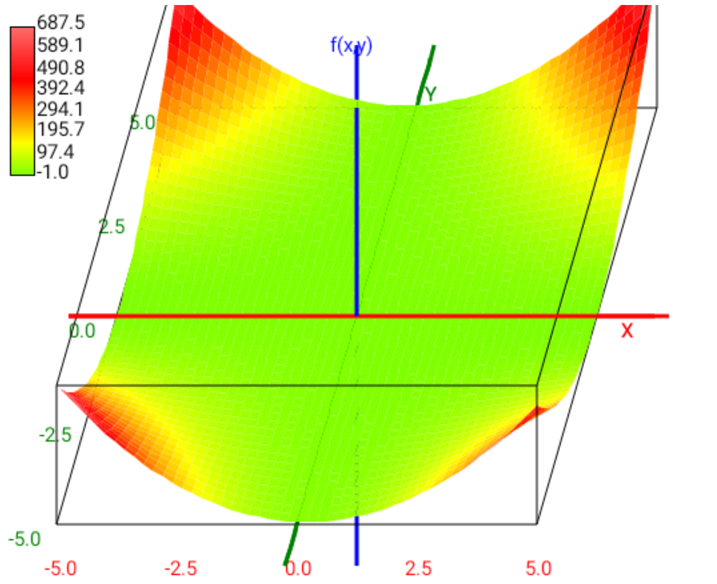


Figura 1.5: Solução da Equação (1.19)

# Capítulo 2

# Equações Lineares de Segunda Ordem

## 2.1 Introdução

Muitas ideias na área da matemática nasceram dos estudos dessas equações lineares de segunda ordem, pois estas equação têm aplicações em muitos problemas de Engenharia, Física, Química e até mesmo da Biologia. Recebem grande destaque na Mecânica de Vibrações e na Teoria dos Circuitos Elétricos.

Podemos representar estas equações da seguinte forma:

$$y'' + f(t)y' + g(t)y = h(t), \tag{2.1}$$

onde as funções $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ poderão estar em função de $t$ ou são apenas constantes. Para obter a solução destas equações, devo determinar a função incógnita $y = y(t)$, que satisfaça a equação (2.1).

Vale destacar também que se $h(t)$ for igual a zero chamaremos as equações acima de homogêneas e se $h(t)$ for diferente de zero teremos, portanto equações não homogêneas.

Vamos considerar primeiramente a equação homogênea, com $f(t) = a$ e $g(t) = b$ com $a$ e $b$ constantes, ou seja,

$$y'' + ay' + by = 0. \tag{2.2}$$

O objetivo é encontrar a solução $y(t)$ para esta equação. A função exponencial $e^{rt}$, possui a propriedade de que suas derivadas são constantes multiplicadas por elas mesma. Assim $y(t) = e^{rt}$, com $r$ escolhido de maneira que satisfaça a solução da equação homogênea acima citada. De fato, derivando $y(t)$, obtemos $y' = re^{rt}$ e $y'' = r^2e^{rt}$.

Substituindo na equação diferencial (2.2) obtemos;

$$r^2e^{rt} + are^{rt} + be^{rt} = 0$$

ou seja,

$$e^{rt}(r^2 + ar + b) = 0$$

Note que $e^{rt}$ nunca é nulo portanto;

$$r^2 + ar + b = 0. \tag{2.3}$$

A equação (2.3) é conhecida como equação característica da equação diferencial. Por ser uma equação do segundo grau, ela possui exatamente duas raízes no conjunto dos numeros complexos. Detalhando um pouco mais, observamos que quando os valores de $a$,$b$ e $c$ são reais, existem três possibilidades para a obtenção das raízes.

## 2.2 Raízes reais e distintas

A equação é representada da seguinte forma;

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{2.4}$$

onde denotaremos as raízes da equação (2.4) por $r_1$ e $r_2$, onde $r_1 \neq r_2$. Então procuramos uma função com a propriedade de que a derivada segunda dessa mesma função seja igual a ela mesma. Sabemos que uma bem conhecida do calculo é a $y_1(t) = e^t$ do mesmo modo $y_2(t) = e^{-t}$, e se revelarmos um múltiplos constante como $c_1e^t$ e $c_2e^{-t}$, da mesma forma $c_1y_1(t) = c_1e^t$ e $c_2y_2(t) = c_2e^{-t}$ tambem o satisfaz. Portanto

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}. \tag{2.5}$$

pode ser calculado, verificando a derivada segunda $y''$, obtemos

$$y' = c_1 e^t - c_2 e^{-t} \quad \text{e} \quad y'' = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$

Logo $y''$ é igual a $y$ e é satisfeita. Suponhamos, que $y(t) = e^{rt}$, onde $r$ é um parâmetro a ser determinado. Segue que $y' = re^{rt}$ e $y'' = r^2 e^{rt}$. Substituindo $y$, $y'$ e $y''$ na equação (2.4) por essa expressão obtemos;

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0$$

como $e^{rt} \neq 0$

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{2.6}$$

A equação (2.6) é chamada de equação característica da equação (2.4). Sendo as raízes reais e ditintas. Então, $y_1(t) = e^{r_1 t}$ e $y_2(t) = e^{r_2 t}$. Segue pela equação (2.17) que

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

com $c_1$ e $c_2$ constantes é a solução geral.

**Exemplo 2.1.** *Determine a solução geral da equação diferencial:*

$$y'' + 2y' - 3y = 0,$$

*Supondo que $y = e^{rt}$, então $r$ tem que ser raizes da equação característica:*

$$r^2 + 2r - 3 = 0.$$

*Resolvendo a equação do segundo grau, temos que as raízes são $r_1 = 1$ e $r_2 = -3$, portanto a solução geral é:*

$$y(t) = c_1e^t + c_2e^{-3t}. \tag{2.7}$$

*Na figura (2.1) está representado o gráfico da solução da equação (2.7) , onde as constante* $c_1 = c_2 = 1$ *e* $t = 0$

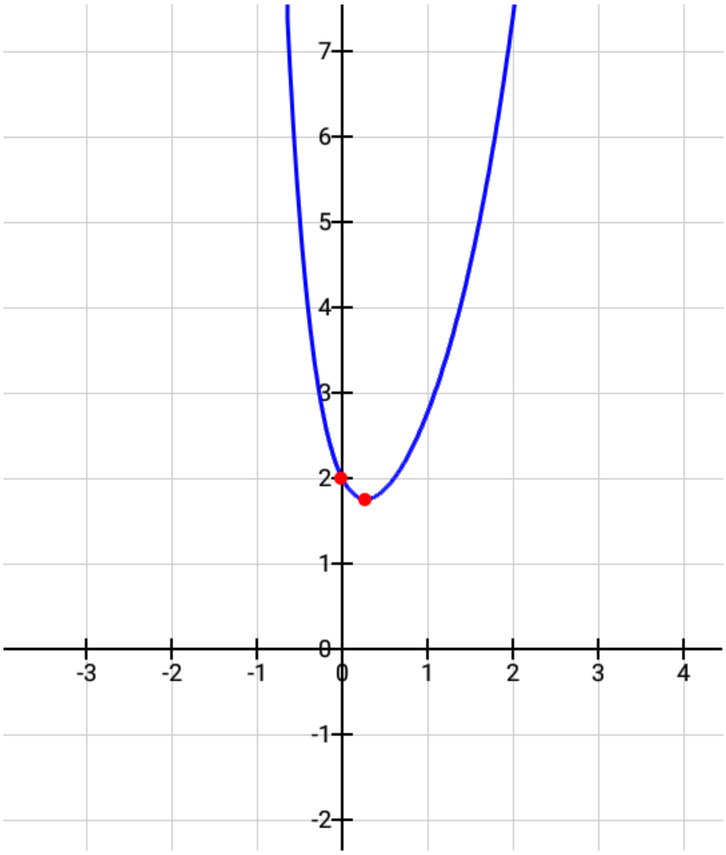


Figura 2.1: Solução da Equação (2.7)

**Exemplo 2.2.** *Encontre a solução do problema de valor inicial dado*

$$y'' + 4y' + 3y = 0,$$

*com* $y(0) = 2$ *e* $y'(0) = 3$ *Supondo que* $y = e^{rt}$, *então,* $r$ *é raiz da equação característica*

$$r^2 + 4r + 3 = 0 \tag{2.8}$$

*Assim, os valores possíveis de* $r$ *são* $r_1 = -1$ *e* $r_2 = -3$, *e a solução geral da equação (2.8) é*

$$y = c_1e^{-t} + c_2e^{-3t} \tag{2.9}$$

*Para saitisfazer a primeira condição inicial, fazemos* $t = 0$ *e* $y = 2$*, na equação (2.9) assim,* $c_1$ *e* $c_2$ *têm que satifazer*

$$c_1 + c_2 = 2 \tag{2.10}$$

*Para usar a segunda condição inicial, precisamos primeiro derivar a equação (2.9). Isso nos dá:*

$$y' = -c_1 e^{-t} - 3c_2 e^{-3t}$$

*Fazendo,* $t = 0$ *e* $y' = 3$*, obtemos*

$$-c_1 - 3c_2 = 3 \tag{2.11}$$

*Resolvendo as equações (2.10) e (2.11), vemos que* $c_1 = 5/2$ *e* $c_2 = -1/2$*. Substituindo esses valores na equação (2.9), obtemos a solução de valor inicial*

$$y = \frac{5}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t} \tag{2.12}$$

*Na figura (2.2) está representado o gráfico da solução da equação (2.12).*

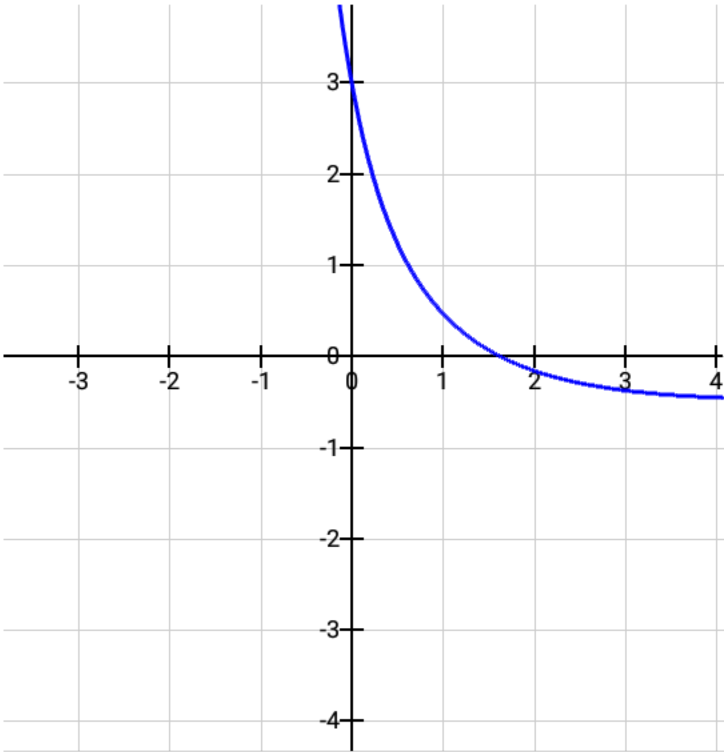


Figura 2.2: Solução da Equação (2.12)

## 2.3 Raízes reais e iguais

Agora vamos considerar quando as raízes são reais e iguais, o discriminante de $b^2 - 4ac$ da equação é zero. Assim,

$$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a},$$

Logo ambas raízes geram a mesma solução:

$$y_1(t) = e^{\frac{-b}{2a}t}.$$

**Exemplo 2.3.** *Determine a solução geral da equação diferencial:*

$$y'' - 6y' + 9y = 0. \tag{2.13}$$

*A equação característica é*

$$r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0,$$

*de modo que*

$$r_1 = r_2 = 3.$$

*Sendo assim a solução geral da equação (2.13) igual;*

$$y_1(t) = e^{3t}.$$

*Para encontrar a solução geral da equação (2.13), precisamos de uma segunda solução que seja múltiplo de $y_1(t)$, essa pode ser encontrada de várias maneiras. Como $y_1(t)$ é uma solução da equação;*

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{2.14}$$

*$c_1 y(t)$, tambem o é para qualquer constante c. A ideia básica é generalizar essa observação substituindo-se $c_1$ por uma função $\upsilon(t)$, e depois determinar $\upsilon(t)$ de modo que o produto $\upsilon(t)y_1(t)$ seja solução da equação (2.14).*

*Substituindo a $y = \upsilon(t)y_1(t)$, na equação (2.14) e usar a equação resultante para encontrar $\upsilon(t)$, obtemos;*

$$y = \upsilon(t)y_1(t) = \upsilon(t)e^{3t}. \tag{2.15}$$

*Derivando esta expressão obtemos;*

$$y' = \upsilon'(t)e^{3t} + 3\upsilon(t)e^{3t}. \tag{2.16}$$

*E derivando novamente temos:*

$$y'' = \upsilon''(t)e^{3t} + 6\upsilon'(t)e^{3t} + 9\upsilon(t)e^{3t}. \tag{2.17}$$

*Substituindo as equações (2.15), (2.16) e (2.17) na equação (2.13);*

$$[\upsilon''(t)e^{3t} + 6\upsilon'(t)e^{3t} + 9\upsilon(t)e^{3t}] - 6[\upsilon'(t)e^{3t} + 3\upsilon(t)e^{3t}] + 9[\upsilon(t)e^{3t} = 0.$$

*Temos então:*

$$[\upsilon''(t) + 6\upsilon'(t) + 9\upsilon(t) - 6\upsilon'(t) - 18\upsilon(t) + 9\upsilon(t)]e^{3t} = 0,$$

*ou seja,*

$$\upsilon''(t) = 0.$$

*Portanto*

$$\upsilon'(t) = c_1,$$

*e*

$$\upsilon(t) = c_1 + c_2 t,$$

*onde* $c_1$ *e* $c_2$ *são constante arbitrária. Substituindo* $\upsilon(t)$ *na equação (3.2), obtemos a solução geral da equação:*

$$y(t) = (c_1 + c_2 t)e^{3t} = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}.$$

*Onde as raízes são iguais.*

O procedimento usado no exemplo 2.3 pode ser estendido a uma equação geral cuja a equação característica tenha raízes repetidas, satisfazendo $b^2 - 4ac = 0$, portanto

$$y_1(t) = e^{\frac{-bt}{2a}},$$

é uma solução. Depois, supomos que

$$y = \upsilon(t)y_1(t) = \upsilon(t)e^{\frac{-bt}{2a}}, \tag{2.18}$$

e substituindo na equação (2.14) para determinar $\upsilon(t)$. Obtemos

$$y' = v'(t)e^{\frac{-bt}{2a}} - \frac{b}{2a}v(t)e^{\frac{-bt}{2a}}$$

e

$$y'' = v''(t)e^{\frac{-bt}{2a}} - \frac{b}{a}v'(t)e^{\frac{-bt}{2a}} + \frac{b^2}{4a^2}v(t)e^{\frac{-bt}{2a}}.$$

Então, substituindo na equação (2.14), obtemos

$$\{a\left[v''(t) - \frac{b}{a}v'(t) + \frac{b^2}{4a^2}v(t)\right] + b\left[v'(t) - \frac{b}{2a}v(t)\right]$$

$$+cv(t)\}e^{-\frac{bt}{2a}} = 0.$$

Cancelando o fator $e^{-\frac{bt}{2a}}$, que não se anula, e rearrumando os termos restantes, encontramos

$$av''(t) + (-b+b)v'(t) + \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c\right)v(t) = 0. \qquad (2.19)$$

A parcela envolvendo $v'(t)$ é obviamente nula. Além disso, o coeficiente de $v(t)$ é $c - \frac{b^2}{4a}$, que também é zero, pois $b^2 - 4ac = 0$ no problema em consideração. Assim, como no exemplo 2.3, equação (2.19) se reduz a

$$v''(t) = 0$$

logo,

$$v(t) = c_1 t + c_2.$$

Portanto da equação (2.18), temos

$$y(t) = c_1 t e^{\frac{-bt}{2a}} + c_2 e^{\frac{-bt}{2a}}.$$

Então $y$ é combinação linear de duas soluções

$$y_1(t) = e^{\frac{-bt}{2a}}.$$

e

$$y_2(t) = te^{\frac{-bt}{2a}}.$$

**Exemplo 2.4.** *Encontre a solução geral da equação diferencial:*

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

*Temos então a equação característica:*

$$r^2 + 4r + 4 = 0$$

*Portanto temos que:*

$$r_1 = r_2 = -2$$

*substituindo agora na solução geral da equação diferencial de raízes iguais temos:*

$$y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2te^{r_2t}$$

$$y(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}$$

*Portanto essa é a solução geral da equação diferencial* $y'' + 4y' + 4y = 0$*.*

## 2.4 Raízes complexas

Se temos uma equação diferencial;

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Onde $a$, $b$ e $c$ são números reais. Vimos que a solução é da forma $y(t) = e^{rt}$, onde $r$

é as raízes da equação característica:

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Sendo $r_1$ e $r_2$ reais e distintos e $b^2 - 4ac > 0$ então a solução geral é:

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

Mas se $b^2 - 4ac < 0$ então as raízes são números complexos conjugados. Vamos denotar as raízes complexas por:

$r_1 = \lambda + i\mu \quad$ e $\quad r_2 = \lambda - i\mu.$

Neste caso temos como solução geral:

$$y = c_1 e^{\lambda + i\mu t} + c_2 e^{\lambda - i\mu t},$$

com $c_1$ e $c_2$ constantes, como $e^{\lambda + i\mu t} = e^{\lambda t} e^{i\mu t}$, pela fórmula de Euler temos:

$$e^{i\mu t} = cos\mu t + isen\mu t,$$

substituindo na equação acima temos:

$$e^{\lambda + i\mu t} = e^{\lambda t}(cos\mu t + isen\mu t)$$

e

$$e^{\lambda - i\mu t} = e^{\lambda t}(cos\mu t - isen\mu t)$$

Substituindo então na solução geral temos:

$$y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

$$y = c_1 e^{(\lambda + i\mu)t} + c_2 e^{(\lambda - i\mu)t}$$

$$y = c_1 e^{\lambda t}(cos\mu t + isen\mu t) + c_2 e^{\lambda t}(cos\mu t - isen\mu t)$$

$$y = (c_1 + c_2)e^{\lambda t}cos\mu t + i(c_1 - c_2)e^{\lambda t}sen\mu t.$$

Como $c_1$ e $c_2$ são constantes temos então:

$$y = c_1e^{\lambda t}cos\mu t + c_2e^{\lambda t}sen\mu t$$

ou ainda

$$y = e^{\lambda t}(c_1cos\mu t + c_2sen\mu t)$$

Portanto chegamos na equação geral de duas raízes complexas.

**Exemplo 2.5.** *Encontre a solução geral da equação diferencial:*

$$y'' + 6y' + 13y = 0.$$

*Supondo que $y = e^{rt}$, então $r$ tem que ser raizes da equação característica:*

$$r^2 + 6r + 13 = 0.$$

*Resolvendo a equação do segundo grau temos que:*

$$r = -3 \pm i2.$$

*Como,$\lambda = -3$ e $\mu = 2$, temos que a solução geral da equação é dada por:*

$$y = c_1e^{\lambda t}cos\mu t + c_2e^{\lambda t}sen\mu t$$

$$y = c_1e^{-3t}cos2t + c_2e^{-3t}sen2t \tag{2.20}$$

*Na figura (2.3) está representado o gráfico da solução da equação (3.7) , onde as constante $c_1 = c_2 = 1$*

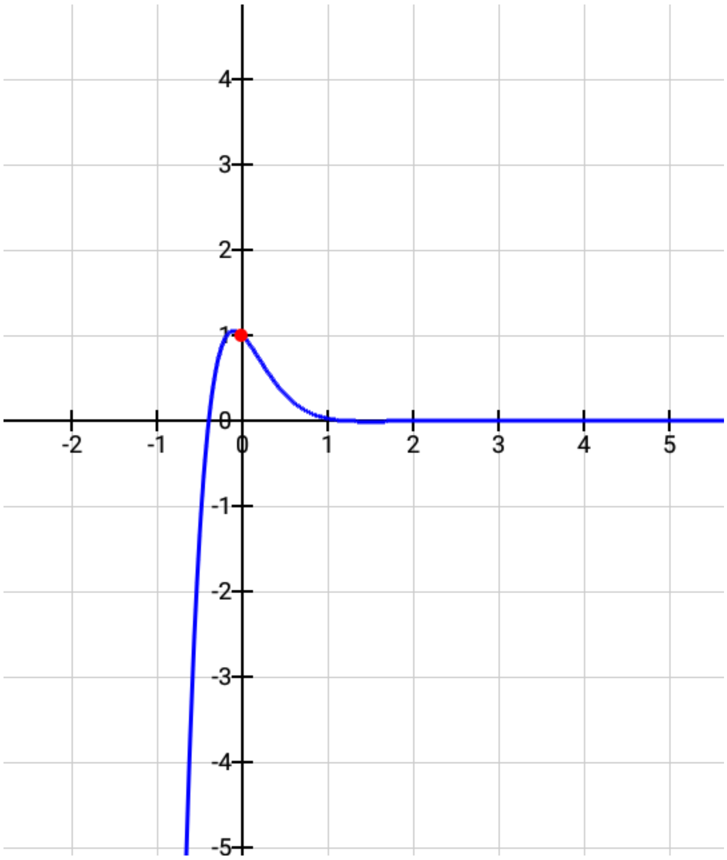


Figura 2.3: Solução da Equação (3.7)

**Exemplo 2.6.** *Encontre a solução do problema de valor inicial dado*

$$y'' + 4y' + 5y = 0,$$

*onde* $y(0) = 1$ *e* $y'(0) = 0$. *Portanto a equação característica é* $r^2 + 4r + 5 = 0$, *e suas raízes são* $r = -2 \pm i$. *Assim a solução geral da equação diferencial é*

$$y = c_1 e^{-2t} cost + c_2 e^{-2t} sent. \tag{2.21}$$

*Para usar a primeira condição inicial, fazemos* $t = 0$ *na equação (2.21) isso nos dá*

$$y(0) = c_1 = 1.$$

*Para a segunda condição inicial, precisamos derivar a equação (2.21) e depois fazer* $t = 0$. *Desse modo, encontramos*

$$y'(0) = -2c_1 + c_2 = 0,$$

*onde* $c_2 = 2$. *Usando os valores encontrados de* $c_1$ *e* $c_2$ *na equação (2.21), obtemos;*

$$y = e^{-2t} cost + 2e^{-2t} sent, \tag{2.22}$$

*como solução do problema de valor inicial.*

*Na figura (2.4) está representado o gráfico da solução da equação (2.22) , onde as constante* $c_1 = 1$ *e* $c_2 = 2$

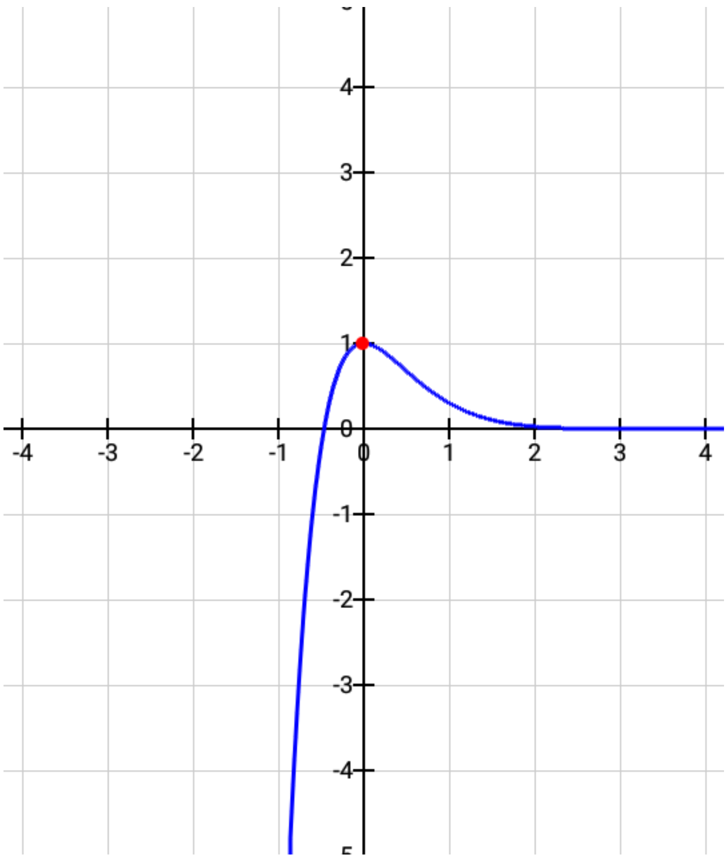


Figura 2.4: Solução da Equação (2.22)

# Capítulo 3

# A Transformada de Laplace

A transformada de Laplace é um método simples que serve para transformar uma Equação Diferencial com condições iniciais (PVI: Problema com Valores Iniciais) em uma equação algébrica, de modo a obter uma solução deste PVI de uma forma indireta sem o cálculo da solução geral da Equação Diferencial. Como isto é útil em Matemática, Computação Engenharia, Física e outras ciências aplicadas, o método passa a representar algo importante neste contexto. A transformada de Laplace é muito usada em diversas situações, porém aqui trataremos de suas aplicações na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares.

## 3.1 Definição da Transformada de Laplace

Suponhamos que temos um problema de valor inicial na variável $t$, o que fazemos é transformar em outro problema, em que ele vira uma equação algébrica de solução mais fácil, e essa equação é na variável $s$,ai resolvemos e voltamos para variável $t$.

Dado uma função que é $f : [0, \infty] \to I\!R$. O resultado da transformada de Laplace, é dada pela integral:

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

onde o $e^{-st}$ é chamado de núcleo da transformada, e os limites de integração é dado, podendo ir de $-\infty$ a $+\infty$. E só terá transformada de Laplace se essa equação convergir. É resultado da integral é uma função na variável $s$. Portanto tem parte real maior que 0,

$$L\{f(t)\} = F(s),$$

e na maior parte das aplicações esse $s$ é considerado um número real. A transformada de Laplace das funções por letra minúscula $f(t)$, $g(t)$ e $h(t)$ serão representada por letras maiúscula por $F(s)$, $G(s)$ e $H(s)$.

A transformada de Laplace é definida por uma integral de zero a infinito, sendo assim. Em primeiro lugar, uma integral definida em um intervalo ilimitado é chamada de integral imprópria e é definida como um limite de integrais definidas em intervalos finitos:

$$\int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{A \to +\infty} \int_a^{A} f(t)dt,$$

onde $A$ é um número real positivo. Se a integral de $a$ existir para todo $A > a$ e se o limite quando $A \to \infty$ existir, então dizemos que a integral imprópria converge para aquele valor limite. Caso contrário, a integral diverge ou não existe.

**Exemplo 3.1.** *Encontre a transformada de Laplace da função $f : [0, \infty] \to I\!R$ definida por $f(t) = 1$ é dada por:*

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} 1e^{-st}dt$$

$$F(s) = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_0^{\infty} =$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{e^{-sT}}{-s} - \frac{e^{-s0}}{-s} = 0 - \frac{e^{-s0}}{-s} = \frac{1}{s}$$

*para $s > 0$.*

**Exemplo 3.2.** *Encontre a transformada de Laplace da função $f : [0, \infty] \to I\!R$ definida por $f(t) = e^{at}$ é dada por:*

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}dt$$

$$F(s) = \left.\frac{e^{-(s-a)t}}{a-s}\right|_0^{\infty} =$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{e^{-(s-a)T}}{a-s} - \frac{e^{-(s-a)0}}{a-s} = 0 - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a},$$

*para $s > a$.*

**Exemplo 3.3.** *Encontre a transformada de Laplace da função $f(t) = senat$, $t \geq 0$ é dada por:*

$$L\{sen\ at\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} sen\ at\ dt,$$

$s > 0$. *Como*

$$F(s) = \lim_{A\to\infty} \int_0^{A} e^{-st} sen\ at\ dt,$$

*integrando por partes, obtemos*

$$F(s) = \lim_{A\to\infty} \left[ -\left.\frac{e^{-st\cos\ at}}{a}\right|_0^{A} - \frac{s}{a}\int_0^{A} e^{-st}\cos\ at\ dt \right]$$

$$= \frac{1}{a} - \frac{s}{a}\int_0^{\infty} e^{-st}\cos\ at\ dt.$$

*Uma segunda integração por partes fornece*

$$F(s) = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}\int_0^{\infty} e^{-st} sen\ at\ dt$$

$$\frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}F(s).$$

*Portanto, resolvendo para $F(s)$, temos*

$$F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2},$$

*para $s > 0$.*

## 3.2 Solução de Problemas de Valores Iniciais

A transformada de Laplace pode ser usada para se resolver problemas de valor inicial para equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, no fato de que a transformada de

$f'$ está relacionado da maneira simples à transformada de $f$. Que está explicitada no teorema.

**Teorema 3.1.** *Suponha que $f$ seja contínua em $t \geq 0$ e que $f'$ seja seccionalmente contínua, ou seja, uma função que pode ter um número finito de pontos de descontinuidade, em qualquer intervalo $0 \leq t \leq A$. Suponha, além disso, que existam constantes $K$,$a$ e $M$ tais que $|f(t)| \leq Ke^{at}$ para $t \geq M$. Então $L\{f'(t)\}$ existe para $s > a$ e, além disso,*

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0).$$

Para provar esse teorema, vamos considerar a integral

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt.$$

Se $f'$ tem pontos de descontinuidade no intervalo $0 \leq t \leq A$, vamos denotá-los por $t_1, t_2, ..., t_n$. Podemos, então, escrever essa integral como

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt = \int_0^{t_1} e^{-st} f'(t) + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f'(t)dt + ... + \int_{t_n}^A e^{-st} f'(t)dt.$$

Integrando cada parcela à direita do sinal de igualdade, obtemos

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt = e^{-st} f(t)|_0^{t_1} + e^{-st} f(t)|_{t_1}^{t_2} + ... + e^{-st} f(t)|_{t_n}^{A}$$
$$+s\left[\int_0^{t_1} e^{-st} f(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} e^{-st} f(t)dt + ... + \int_{t_n}^A e^{-st} f(t)dt\right].$$

Como $f$ é contínua, as contribuições nos extremo $t_1, t_2, ..., t_n$ se cancelam. Combinando as integrais, obtemos

$$\int_0^A e^{-st} f'(t)dt = e^{-sA} f(A) - f(0) + s\int_0^A e^{-st} f(t)dt.$$

Quando $A \to \infty, e^{-sA} f(A) \to 0$ sempre que $s > a$. Logo, para $s > a$,

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0),$$

o que prova o teorema.

Se $f'$ e $f''$ satisfazem as mesmas condições impostas em $f$ e$f'$, no teorema (3.1), então a transformada de Laplace de $f''$ tambem exite para $s > a$ e é dada por

$$L\{f''(t)\} = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0).$$

De fato, desde que a função $f$ satisfaça as condições adequadas, e podemos obter uma expressão para a n-ésima derivada $f^{(n)}$. O resultado é dado no corolário a seguir

**Corolário 3.1.** *Suponha que as funções* $f$,$f'$,...,$f^{(n-1)}$ *sejam contínuas e que* $f^{(n)}$ *seja seccionalmente contínua em qualquer intervalo* $0 \leq t \leq A$. *Suponha, além disso, que existam constantes* $K$, $a$ *e* $M$ *tais que* $|f(t)| \leq Ke^{at}, |f'(t)| \leq Ke^{at}, ..., |f^{(n-1)}(t)| \leq Ke^{at}$ *para* $t \geq M$. *Então,* $L\{f^{(n)}(t)\}$ *existe para* $s > a$ *e é dado por*

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - ... - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

**Exemplo 3.4.** *Determine a transformada de Laplace para resolver o problema de valor inicial dado*

$$y'' - y' - 6y = 0 \tag{3.1}$$

*com condições iniciais,* $y(0) = 1$, *e* $y'(0) = -1$. *Suponha que a solução* $y = \phi(t)$ *satisfaça as condições do corolário (3.1), para* $n = 2$. *A transformada de Laplace da equação diferencial (3.1) é*

$$L\{y''\} - L\{y'\} - 6L\{y\} = 0 \tag{3.2}$$

*Usando o corolário (3.1) para expressar* $L\{y''\}$ *e* $L\{y'\}$ *em função de* $L\{y\}$, *a equação (3.2) fica*

$$s^2 L\{y\} - sy(0) - y'(0) - [sL\{y\} - y(0)] - 6L\{y\} = 0$$

*ou*

$$(s^2 - s - 6)Y(s) + (1 - s)y(0) - y'(0) = 0$$

*onde $Y(s) = L\{y\}$. Substituindo os valores de $y(0)$ e $y'(0)$ dados pelas condições iniciais, e depois resolvendo para $Y(s)$, obtemos*

$$Y(s) = \frac{(s-1)-1}{s^2-s-6} = \frac{s-2}{(s-3)(s+2)}$$

*Obtemos uma expressão para a transformada de Laplace $Y(s)$ da solução $y = \phi(t)$ do problema de valor inicial dado. Expandindo-se a expressão do lado direito do sinal de igual em frações parciais. Escrevemos, então*

$$Y(s) = \frac{s-2}{(s-3)(s+2)} = \frac{a}{s-3} + \frac{b}{s+2} = \frac{a(s+2)+b(s-3)}{(s-3)(s+2)}$$

*onde os coeficientes a e b têm de ser determinados. Igualando os numeradores da segunda com a quarta expressão, obtemos*

$$s - 2 = a(s+2) + b(s-3)$$

*uma equação que tem de ser satisfeita para todos valores de $s$. Em particular, fazendo $s = 3$, temos que $a = \frac{1}{5}$. Analogamente,se $s = -2$, então $b = \frac{4}{5}$. Substituindo esses valores para a e b, temos*

$$Y(s) = \frac{1/5}{s-3} + \frac{4/5}{s+2}$$

*Portanto temos que $(1/5)e^{3t}$ tem transformada $(1/5)(s-3)^{-1}$, e a transformada $(4/5)e^{-2t}$ é $(4/5)(s+2)^{-1}$. Então pela linearidade da transformada de Laplace,*

$$y = \phi(t) = \frac{1}{5}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t}$$

$$y = \phi(t) = \frac{1}{5}(e^{3t} + 4e^{-2t}). \tag{3.3}$$

*Na figura (3.1) está representado o gráfico da solução da equação (3.3).*

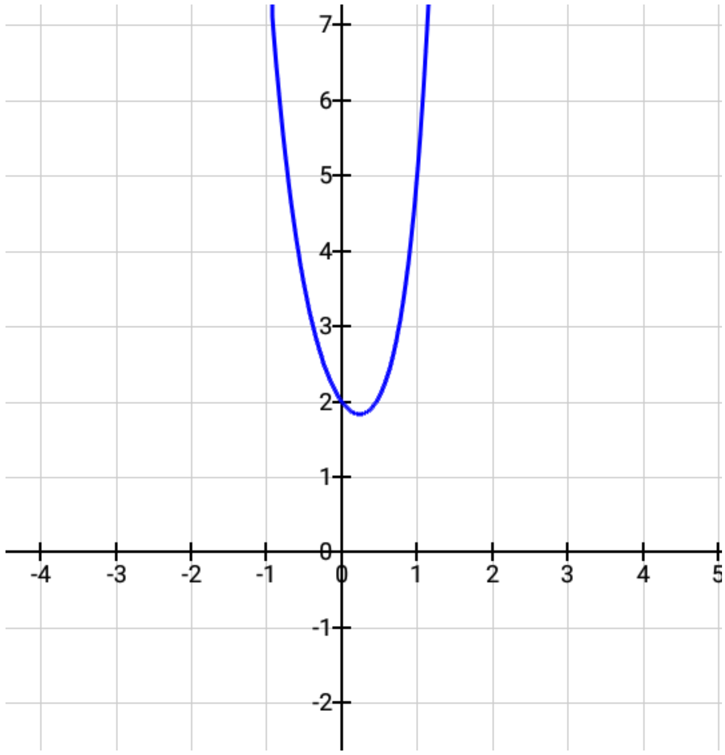


Figura 3.1: Solução da Equação (3.3)

Existe uma bijeção entre as funções e suas transformadas de Laplace. Com esse fato sugere a compilação de uma tabela,como a tabela (3.1) que fornece as transformadas das funções com mais frequência. As funções na segunda coluna da tabela (3.1) são as transformadas das funções na primeira coluna. Assim, por exemplo, se a transformada da solução de uma equação diferencial é conhecida, a solução pode ser encontrada, muitas vezes, olhando-se, simplesmente, na tabela (3.1). Com frequência uma transformada de Laplace $F(s)$ pode ser expressa como a soma de diversas parcelas,

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + ... + F_n(s).$$

Suponha que $f_1(t) = L^{-1}\{F_1(s)\}, ..., f_n(t) = L^{-1}\{F_n(s)\}$.Então,a função

$$f(t) = f_1(t) + ... + f_n(t),$$

tem transformada de Laplace $F(s)$. Pela unicidade enunciada anteriormente, não existe outra função contínua $f$ tendo a mesma transformada. Assim,

$$L^{-1}\{F_1(s)\} = L^{-1}\{F_1(s)\} + ... + L^{-1}\{F_n(s)\},$$

isto é, a transformada de Laplace inversa também é um operador linear.

Transformada de Laplace Elementares

| $f(t) = L^{-1}\{F(s)\}$ | $F(s) = L\{f(t)\}$ |
|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s},\ s > 0$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a},\ s > a$ |
| $t^n, n \in \mathbb{Z}_+$ | $\frac{n!}{s^{n+1}},\ s > 0$ |
| sen $at$ | $\frac{a}{s^2+a^2},\ s > 0$ |
| cos $at$ | $\frac{s}{s^2-a^2},\ s > 0$ |
| senh $at$ | $\frac{a}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$ |
| cosh $at$ | $\frac{s}{s^2-a^2},\ s > \|a\|$ |
| $e^{at}$ sen $bt$ | $\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$ |
| $e^{at}$ cos $bt$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2},\ s > a$ |
| $t^n\ e^{at}, n \in \mathbb{Z}_+$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ s > a$ |
| $u_c(t)$ | $\frac{e^{-cs}}{s},\ s > 0$ |
| $u_c(t)f(t-c)$ | $e^{-cs}F(s)$ |
| $e^{ct}f(t)$ | $F(s-c)$ |
| $f(ct)$ | $\frac{1}{c}F\left(\frac{s}{c}\right),\ c > 0$ |
| $(-t)^n\ f(t)$ | $F^{(n)}(s)$ |

Tabela 3.1: Tabela de Laplace

**Exemplo 3.5.** *Encontre a solução da equação diferencial*

$$y'' + y = t \tag{3.4}$$

*que satisfaz as condições iniciais* $y(0) = 1$ *e* $y'(0) = -2$ *Suponha que a solução* $y = \phi(t)$ *satisfaça as condições do corolário (3.1), para* $n = 2$*. A transformada de Laplace da equação diferencial (3.4) é*

$$L\{y''\} - L\{y'\} = L\{y\}. \tag{3.5}$$

*Usando o corolário (3.1) para expressar* $L\{y''\}$ *e* $L\{y'\}$ *em função de* $L\{y\}$*, a equação (3.5) fica*

$$s^2L\{y\} - sy(0) - y'(0) + L\{y\} = \frac{1}{s^2}$$

*ou*

$$(s^2+1)Y(s) = s - 2 + \frac{1}{s^2}$$

*onde* $Y(s) = L\{y\}$. *Substituindo os valores de* $y(0)$ *e* $y'(0)$ *dados pelas condições iniciais, e depois resolvendo para* $Y(s)$, *obtemos*

$$Y(s) = \frac{(s^3 - 2s^2 + 1)}{(s^2+1)s^2}$$

*Obtemos uma expressão para a transformada de Laplace* $Y(s)$ *da solução* $y = \phi(t)$ *do problema de valor inicial dado. Expandindo-se a expressão do lado direito do sinal de igual em frações parciais. Escrevemos, então*

$$Y(s) = \frac{(s^3 - 2s^2 + 1)}{(s^2+1)s^2}$$

$$Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{s^2} + \frac{cs+d}{s^2+1} \tag{3.6}$$

$$Y(s) = \frac{(s^3 - 2s^2 + 1)}{(s^2+1)s^2} = \frac{as(s^2+1) + b(s^2+1) + (cs+d)s^2}{(s^2+1)s^2}$$

*onde os coeficientes a,b,c e d têm de ser determinados. Igualando os numeradores da segunda com o numerador da quarta expressão, obtemos*

$$s^3 - 2s^2 + 1 = as(s^2+1) + b(s^2+1) + (cs+d)s^2$$

*uma equação que tem de ser satisfeita para todos valores de s. Em particular, fazendo* $s = 0$, *temos que* $b = 1$. *Analogamente,se* $s = 1$, *então* $2a + c + d = -2$,*fazendo* $s = -1$, *temos que* $-2a - c + d = -4$,*se* $s = 2$, *então* $5a + 4c + 2d = -2$,*resolvendo o sistema encontrado temos,* $a = 0$,$b = 1$,$c = 1$ *e* $d = -3$. *Substituindo esses valores na equação (3.6) para a, b,c e d, temos*

$$Y(s) = \frac{0}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1s-3}{s^2+1}$$

$$Y(s) = \frac{0}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{1s}{s^2+1} - 3\frac{1}{s^2+1}.$$

*Pela tabela (3.1) temos, a solução do problema de valor inicial dado é*

$$Y(s) = y = \phi(t) = t + cost - 3sent. \tag{3.7}$$

*Na figura (3.2) está representado o gráfico da solução da equação (3.7).*

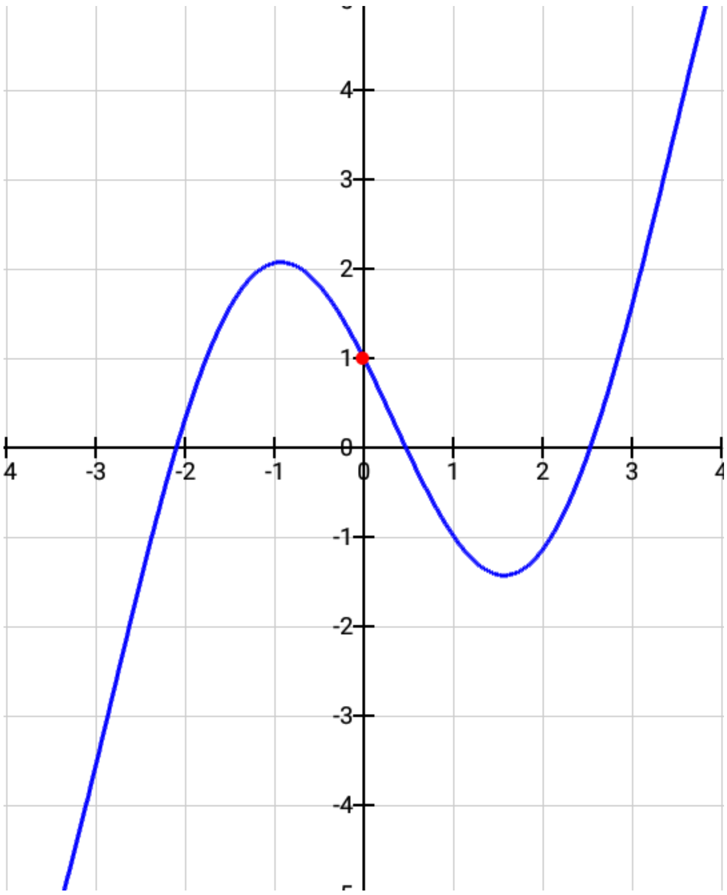


Figura 3.2: Solução da Equação (3.7)

# Considerações finais

O desenvolvimento deste Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) consistiu no estudo das Equacões Lineares de primeira e segunda ordem e a Transformada de Laplace . Através deste estudo, foi possível obter o conhecimento de diversos tipos de equações e como encontrar a solução para cada uma delas. A elaboração deste trabalho foi de grande valor, uma vez que propiciou o aprendizado de muitos conceitos, e muitos conteúdos de cálculo precisaram ser recordados. Houve certamente,um grande aprimoramento por parte da escrita, obrigando nos a desenvolver um pensamento mais formal e detalhista. Temos a consciência de que apresentamos aqui, apenas uma pequena parte do complexo e importante assunto, tendo assim, uma motivação para continuar os estudos sobre esse tópico. Por fim, esperamos que este trabalho possa ser útil a outras pessoas como um material de auxílio e consulta.

# Referências Bibliográficas


[1] BOYCE, Willian E; DIPRIMA, Richard C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. Terceira Edição, Editora Guanabara Koogan S.A, Rio de Janeiro, RJ, 1990.

[2] FIGEIREDO, Djairo Guedes de , 934. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. Instituto de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, RJ, 1977.

[3] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de Cálculo**.Vol. 3. Rio de Janeiro. LTC, 2001.

[4] MATOS, Marivaldo P. **Séries e Equações Diferenciais**. São Paulo; Prentice Hall, 2001.