UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
CURSO DE MATEMÁTICA, LICENCIATURA
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE NOVA ANDRADINA

ADRIANA COZIM DE OLIVEIRA LIMA

A GEOMETRIA ESPACIAL E A CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE PLATÃO ATRAVÉS DO ORIGAMI.

Nova Andradina
2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
CURSO DE MATEMÁTICA, LICENCIATURA
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE NOVA ANDRADINA

ADRIANA COZIM DE OLIVEIRA LIMA

A GEOMETRIA ESPACIAL E A CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE PLATÃO ATRAVÉS DO ORIGAMI.

O trabalho de conclusão do curso apresentado à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Unidade de Nova Andradina, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Me. Luciana Kemie Nakayama

Nova Andradina
2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
CURSO DE MATEMÁTICA, LICENCIATURA
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE NOVA ANDRADINA

A GEOMETRIA ESPACIAL E A CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE PLATÃO ATRAVÉS DO ORIGAMI.

O trabalho apresentado à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Unidade de Nova Andradina, como parte dos requisitos para obtenção do título de licenciado em Matemática.

EXAMINADORES

____

Profª.Me. Luciana Kemie Nakayama UNESPAR/ Apucarana

____

Prof. Dr. Sonner Arfux de Figueiredo UEMS- Nova Andradina

____

Profª. Me Lucineide Keime Nakayama de Andrade- UNESPAR/ Apucarana

DEDICATÓRIA

Dedico o meu TCC para todos aqueles que fizeram do meu sonho real, me proporcionando forças para que eu não desistisse de ir atrás do que eu buscava para minha vida. Muitos obstáculos foram impostos para mim durante esses últimos anos, mas graças a vocês eu não fraquejei. Obrigado por tudo família, professores, amigos e colegas.

AGRADECIMENTOS

Meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que de alguma forma doaram um pouco de si para que a conclusão deste trabalho se tornasse possível.

A Deus, por acreditar que nossa existência pressupõe outra infinitamente superior.

A minha professora orientadora, Me. Luciana Kemie Nakayama, pelo auxílio, disponibilidade de tempo e material, sempre com uma simpatia contagiante e pelo fornecimento de material para pesquisa do tema e pela paciência na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão desta monografia.

Ao meu marido, por acrescentar razão e beleza aos meus dias.

A toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

A todos os professores do curso, que foram tão importantes na minha vida acadêmica e no desenvolvimento desta monografia. Aos amigos e colegas, pelo incentivo e pelo apoio constante.

EPÍGRAFE

"É preciso força pra sonhar e perceber que a estrada vai além do que se vê". (Los Hermanos)

RESUMO

O presente trabalho de conclusão de curso traz um breve histórico da geometria espacial visando o estudo dos poliedros de Platão. Foi utilizado o estudo da teoria de Van Hiele na intenção de realizar um levantamento do nível de conhecimento geométrico espacial no que se refere aos poliedros de Platão de uma turma de primeiro ano do curso de Matemática, Licenciatura ficando como sugestão o uso do origami para ajudar no ensino deste conteúdo de maneira prática e visual, para que os alunos possam avançar pelos cinco níveis da teoria dos Van Hiele.

Palavras-chave: Geometria Espacial; Poliedros de Platão; Origami.

ABSTRACT

This course conclusion work brings a brief history of spatial geometry in order to Platão's polyhedra study. It was used Van Hiele's theory because of the intention to carry out a survey of spatial geometric knowledge level due to Platão's polyhedral of a first-year classroom of the mathematics course, so it has as a suggestion the use of origami to help in teaching of this content in a practical and visual way, so that students could advance the Van Hiele's theory levels.

Keywords: spatial geometry ; Platão's Polyhedra; Origami.

Lista de Figura

Lista de Quadro

Lista de Tabela

Sumário

INTRODUÇÃO

Este trabalho faz um resgate histórico da geometria espacial com o objetivo de situar historicamente os estudos com os poliedros de Platão além desse resgate realizamos o estudo da teoria de Van Hiele que teve início nas teses de doutorado de Dina Van Hiele-Geldof e de seu marido, Pierre Van Hiele, na Universidade de Utrecht, Holanda, em 1957, os Van Hiele propuseram um teoria teórico para a construção do pensamento geométrico, segundo eles o ensino da geometria leva o aluno a adquirir uma rede de relações que propicia enunciar o seu pensamento, de uma forma lógica e dedutiva. O pensamento geométrico contribui para a construção de uma rede de representações relacionais, que é formada pouco a pouco, essa construção se dá segundo um grau de dificuldades crescentes em diferentes níveis: visualização, análise, dedução informal, dedução e rigor. Este pensamento geométrico propõe um meio de identificar o nível de maturidade geométrica dos alunos e indicam caminhos para ajudá-los a avançar de um nível para outro, tendo por base as dificuldades apresentadas por alunos do curso secundário na Holanda.

Como será possível observar a teoria de Van Hiele diz respeito à geometria plana, porém o pesquisador Angel Gutiérrez Rodríguez utiliza-se da teoría de Van Hiele aplicando ao estudo da geometria espacial e utilizando-se deste estudo propomos um questionário para identificar o nível de pensamento de estudantes do curso de Matemática para fins diagnósticos.

O trabalho será subdividido em três capítulos sendo que no primeiro veremos um pouco da História das Grandes Civilizações Antigas que ajudaram o desenvolvimento da Matemática e da Geometria, enfatizando a Geometria Espacial e os poliedros de Platão, onde Platão descreve os poliedros platônicos em seu livro *Timeu*. Posteriormente falaremos um pouco da história do origami, que inicialmente era focado nas tradições religiosas e hoje utilizada na aplicação de Artes e na Matemática. Esses tópicos da História da Geometria espacial e do origami, podem ser utilizados como recurso metodológico em sala de aula.

Em seguida veremos as propriedades e definições dos Poliedros, Ângulos de um poliedro, os Poliedros Platão e como Euler demonstrou que existem apenas cinco poliedros regulares e finalizaremos este capítulo com a construção dos poliedros Platão através do origami que poderá ser usado em sala de aula para o ensino da geometria espacial com uma sequência de atividades bem elaboradas e com objetivos claros.

Apesar dos conceitos relacionados à Geometria Espacial estarem mais elencados nas séries do Ensino Médio, no segundo capítulo veremos a Teoria de Van Hiele que afirma que a aprendizagem dos conceitos geométricos deve-se mais à boa elaboração de uma sequência de atividades por parte do professor, do que à faixa etária do aluno (CROWLEY, 1994).

Nas considerações finais do desenvolvimento do trabalho, teceremos uma breve analise das discussões apresentadas no trabalho de conclusão de curso e uma análise dos resultados da aplicação da atividade na turma do 1º ano de Matemática, Licenciatura da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, de acordo com os cinco níveis da Teoria de Van Hiele.

CAPÍTULO 1

Um Breve histórico da geometria espacial e do origami.

1.1 - A Geometria Espacial

Quando paramos para observar o mundo a nossa volta, nos deparamos com várias construções e invenções, feita pelo homem ao longo do tempo.

Na maioria dessas construções e invenções foram e ainda são usadas a geometria espacial, que será um dos pontos a serem estudados neste trabalho, em particular os poliedros de Platão.

Geometria Espacial é o estudo da geometria no espaço, onde estudamos as figuras que possuem mais de duas dimensões, essas figuras recebem o nome de sólidos geométricos ou figuras geométricas espaciais, são conhecidas como: prisma (cubo, paralelepípedo), pirâmides, cone, cilindro e esfera.

A definição de geometria espacial é o estudo do espaço tridimensional (três dimensões (altura, profundidade e largura)).

Para entendermos melhor como surgiu à geometria espacial vamos nos reportar para a história das antigas civilizações, onde as primeiras considerações que o homem fez a respeito da geometria parecem ter se originado das simples observações provenientes da capacidade humana de reconhecer configurações físicas e comparar formas e tamanhos, que pode ser chamada de *geometria subconsciente* (EVES, 2011, p. 693).

No período Paleolítico podemos observar algumas pinturas encontradas em cavernas datadas 1.400 a.C., nos mostrando que os homens primitivos da idade da pedra já utilizavam conhecimentos geométricos para fazerem armadilhas.

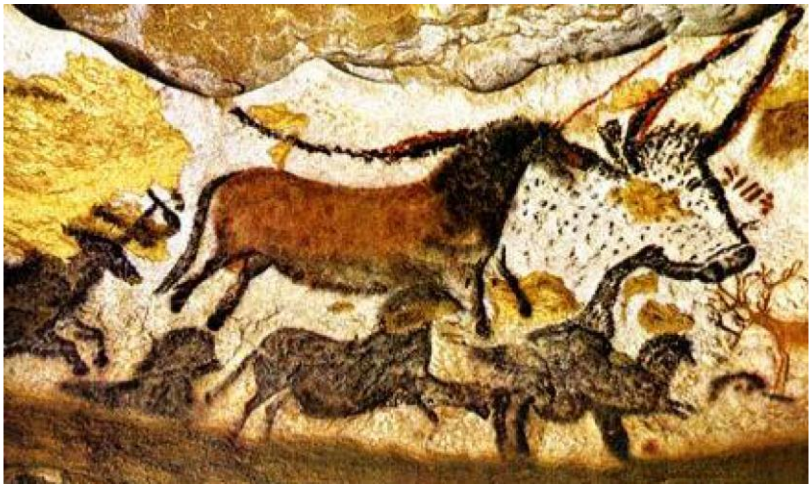


Figura 1 - Pinturas encontradas na caverna de Lascaux na França
Fonte: http://fmanha.com.br/blogs/imaginar/2010/10no-neolitico/

A pintura mostra que na época já havia uma noção do espaço tridimensional, pois ao construir essas armadilhas para capturar animais para o seu sustento, o homem neolítico utiliza a geometria espacial, mesmo sua projeção sendo no plano (na pedra).

Com o passar do tempo e de acordo com EVES, (2011, p. 693), *depois* veio a *geometria científica* ou *experimental*, característica de uma fase em que a inteligência humana tornara-se capaz de, a partir de um conjunto de relações geométricas concretas, extrair relações abstratas gerais (leis geométricas) que incluíam as anteriores como casos particulares, ou seja, com as necessidades de descrever a natureza ao seu redor, o homem desenvolveu o estímulo e domínio de dimensões físicas como áreas, volumes e distância.

Assim com a modificação do clima e do tempo, a humanidade sofreu algumas transições como o fim do período paleolítico e o início do período Neolítico. No início do período neolítico o homem passa de caçador para agricultor, aprende a assegurar a sua alimentação pelo próprio trabalho e torna-se sedentário formando aldeias.

Surge a produção de cerâmica, a fiação e a tecelagem, assim como métodos básicos da construção arquitetural em madeira, tijolo e pedra. Apesar do homem neolítico construir uma sociedade, continua a não ter muito lazer, porém seus desenhos e figuras sugerem preocupações com as relações espaciais que são registradas por meio de potes, tecidos e cestas mostram exemplos de congruências e simetrias, que em sua essência são partes da geometria elementar (Boyer, 1999, p.05).

Não se sabe ao certo a origem exata da geometria, mas segundo Boyer (1999, p. 05), há duas grandes teorias sobre o assunto a partir de documentos de Heródoto[1] e Aristóteles[2] , historiadores do século V a.C, acreditavam que a geometria surgiu antes da civilização egípcia, mas também não se arriscaram em datar sua origem, porém discordavam do local de seu surgimento**.**

Para Heródoto a geometria teve origem às margens do rio Nilo através da necessidade de medir terras.

Para Gonçalves Junior:

> Segundo Heródoto, um rei dividira o território do Egito entre todo o povo, dando a cada egípcio um lote quadrado e de mesmo tamanho. Essa divisão veio acompanhada da imposição de pagamento de tributo anual. Entretanto, qualquer homem que o rio Nilo despojasse de uma parte da sua terra poderia dirigir-se ao rei e expor-lhe o fato. O rei mandava então que seus funcionários medissem a extensão do decréscimo do lote, para que fosse concedida a seu detentor uma redução no tributo proporcional à perda. Gonçalves Junior (1995, p. 07)

Já para Aristóteles a geometria surgiu do lazer da classe sacerdotal. Segundo Boyer (1999) podemos considerar as ideias de Heródoto e Aristóteles como representação duas teorias opostas quanto à origem da matemática, um acreditando que a origem fosse da necessidade prática, outro que a origem estivesse no lazer sacerdotal e ritual.

Embora houvesse discordância entre os grandes filósofos e historiadores da época, são notáveis os conhecimentos geométricos do Egito para a construção de obras, controlar enchentes, remarcar os limites das propriedades agrícolas, construção de pirâmides e outras.

Entre os feitos mais notáveis do conhecimento da geometria espacial no Egito, destaca-se as três pirâmides de Gizé foram construídas no Egito que serviram de tumbas para os faraós

[1] Geógrafo e historiador grego do séc V a.C. que escreveu sobre a invasão da Pérsia na Grécia.
[2] Filósofo grego, aluno de Platão e professor de Alexandre, o Grande. Um dos fundadores da filosofia ocidental.

Quéops, Quéfren e Miquerinos, a maior dela, media 146,7 metros de alturas e 230 metros nas arestas de base.

Figura 2- Pirâmides de Gizé
Fonte:https://www.epochtimes.com.br/piramides-de-gize-uma-das-sete-maravilhas-mundo-antigo/#.VNUETS6-Vlk

Além das pirâmides, outro destaque dentre os vários feitos egípcios são o "papiro de Rhind" e "papiro de Moscou".

O papiro Rhind e uma fonte primária rica sobre a matemática egípcia antiga; datado por volta de 1.650 a.C., o papiro de Rhind com 0,30 metros de altura e 5 metros de comprimento, escrito por um escriba de nome Ahmes[3] detalha a solução de 80 problemas de aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica e geometria.

[3]Ahmes foi um escriba do Antigo Egito que viveu durante o Segundo Período Intermediário e início da XVIII dinastia egípcia (a primeira dinastia do Império Novo). Escreveu o papiro de Rhind, uma obra da matemática egípcia antiga datada de aproximadamente 1650 a.C.; é o mais antigo contribuidor da matemática cujo nome é conhecido

Figura 3– Papiro de Rhind
Fonte:http://jv-egiptologia.blogspot.com.br/2015/05/a-matematica-no-egito-antigo-fernando.html

De acordo com Eves:

> 26 dos 110 problemas dos papiros Moscou e Rhind são geométricos. Muitos deles decorrem de fórmulas de mensuração necessárias para o cálculo de áreas de terras e volumes de grãos. Assume-se que a área de um círculo é igual a de um quadrado de lado igual a 8/9 do diâmetro e que o volume de um cilindro reto e o produto da área da base pelo comprimento da altura. Investigações recentes parecem mostrar que os egípcios sabiam que a área de um triângulo qualquer e o semiproduto da base pela altura. Alguns dos problemas parecem envolver a cotangente do ângulo diedro entre a base e uma face da pirâmide, e outros mostram algum conhecimento da teoria das proporções.(EVES, 2011, p. 75)

Já o papiro de moscou foi datado aproximadamente 1.850 a.C., com 0,08 metros de altura e 5,5 metros de comprimento, escrito por um escriba desconhecido detalha 25 problemas matemáticos, da vida prática não diferindo muito dos Rhind, mas o papiro de Moscou continha a fórmula correta para o cálculo do volume de um tronco de pirâmide, que indica noções de geometria espacial.

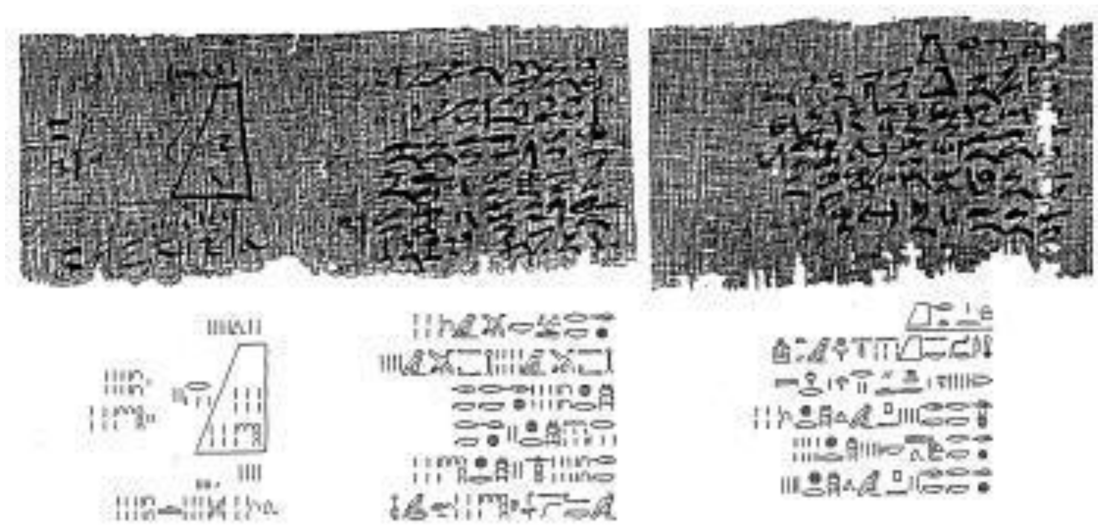


Figura 4– Papiro de Moscou
Fonte:https://pt.wikiversity.o

Apesar de tantas realizações notáveis no Egito, somente graças aos gregos é que a Geometria, especialmente a espacial, se libertou de sua ênfase à mensuração e de seus vínculos aritméticos.

Tales[4] de Mileto foi um dos primeiros matemáticos gregos e teria levado a Geometria do Egito para a Grécia no século V a.C.. A geometria egípcia baseava-se em experiências e regras o que na Grécia era inaceitável. Para os gregos era necessário provar resultados obtidos por meio do método dedutivo, da razão. Quando falamos do estudo da matemática na Grécia podemos destacar alguns filósofos e geômetras, como Euclides, Pitágoras, Platão e Arquimedes.

Em sua obra os Elementos, que foi descrita em 13 livros, Euclides[5], sistematizou toda a Matemática até então conhecida. Segundo Eves (2011, p. 167) logo que o trabalho de Euclides apareceu, ganhou o mais alto respeito e dos sucessores de Euclides até os tempos modernos, a mera citação do número de um livro e o de uma proposição de sua obra-prima é suficiente para identificar um teorema ou construção particular.

Euclides abordou a geometria espacial, nos três últimos livros dos Elementos. Segundo Boyer (1999, p. 81), o material no livro XI, que tem trinta e nove proposições sobre geometria

[4] Supostamente um dos sete sábios da Antiga Grécia, Tales instituiu a Escola Jônica e estabeleceu sólidos conhecimentos sobre a verdade, a totalidade, a ética e a política, temas ainda atuais em nossos dias
[5] Euclides, fundador da famosa Escola de Matemática de Alexandria, nasceu na Síria (c. 330 a. C. - 260 a. C.) e estudou em Atenas. Foi um dos primeiros geômetras e é reconhecido como um dos matemáticos mais importantes da Grécia Clássica e de todos os tempos.

em três dimensões. No livro XII são dezoito proposições referente a medida de figuras, usando o método de exaustão, calculando volumes de pirâmides, cones e esferas. E o último livro contém o tratamento dos poliedros regulares e os sólidos de Platão.

No entanto há evidência de que os Povos Neolíticos que viveram na Escócia tinham esculpidos alguns destes sólidos 1000 anos antes de Platão os descreve-los, como mostra a figura 5. Alguns destes sólidos encontram-se no Museu Ashmolean em Oxford, Reino Unido

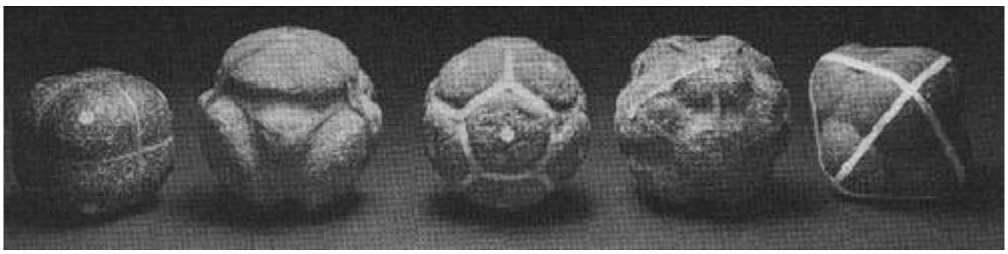


Figura 5- Modelos Neolíticos dos Sólidos Platónicos
Fonte:http://www.notapositiva.com/pt/trbestbs/matematica/10_solidos_platonicos_d.htm

Porém Eves (2011, p.114) afirma que foram assim chamados erradamente, pois segundo ele "[...] três deles, o tetraedro, o cubo e o dodecaedro se devem aos pitagóricos, ao passo que o octaedro e o icosaedro se devem a Teeteto[6]".

Percebe-se que Platão não demonstrou a existência de nenhum dos poliedros regulares, mas como afirma Boyer (1999, p. 58): "Embora o próprio Platão não tenha dado nenhuma contribuição específica digna de nota a resultados matemáticos técnicos, ele era o centro da atividade matemática da época e guiava e inspirava seu desenvolvimento".

Platão[7] descreve os sólidos que eram considerados perfeitos por ele, pelo fato de serem esteticamente harmônicos. Em um diálogo chamado de Timeu 350 a.C ou Timaeus, apresentou uma descrição dos cinco poliedros regulares e mostrou como construir modelos desses sólidos, juntando triângulos, quadrados e pentágonos para formar suas faces.

[6] Teeteto de Atenas foi um dos melhores matemáticos do século IV a.C. Foi o fundador da Geometria sólida, sendo o melhor da Academia e discípulo de Plantão
[7] Platão foi um dos principais filósofos gregos da Antiguidade. Ele nasceu em Atenas, por volta de 428/27 a. C. e viveu até 348/47 a. C.

Descreve ainda a construção do universo a partir dos elementos terra, ar, fogo e água, correspondendo a cada um desses um poliedro regular, respectivamente, o hexaedro (cubo), o octaedro, o tetraedro e o icosaedro, elementos que juntos formam o Universo, por sua vez representado pelo dodecaedro, conforme figura abaixo.

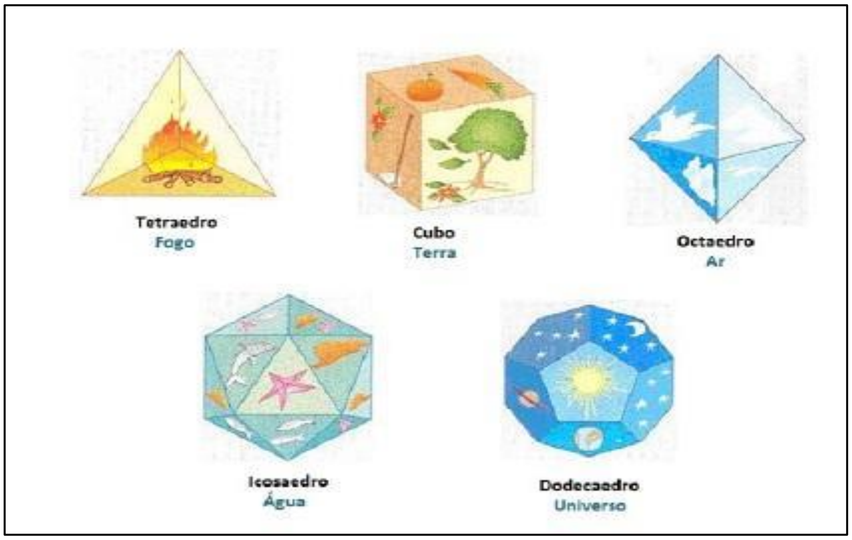


Figura 6- Os Elementos de Platão
Fonte: http://www.notapositiva.com

No entanto, observando em Eves a indicação destes elementos:

> Johann Kepler (1571-1630), mestre da astronomia, matemático e numerologista, deu uma explicação engenhosa para as associações de Timeu. Intuitivamente ele assumiu que, desses sólidos, o tetraedro abarca o menor volume para sua superfície, ao passo que o icosaedro o maior. Agora, essa relação volume - superfície são qualidades de secura e umidade, respectivamente, e como o fogo e o mais seco dos quatro "elementos" e a água o mais úmido, o tetraedro deve representar o fogo e o icosaedro a água. Associa-se o cubo com a terra porque o cubo, assentando quadradamente sobre uma de suas faces, tem a maior estabilidade. O octaedro, seguro frouxamente por dois de seus vértices opostos, entre o indicador e o polegar, facilmente rodopia, tendo a instabilidade do ar. Finalmente, associa-se o dodecaedro com o Universo porque o dodecaedro tem 12 faces e o zodíaco tem doze seções. (EVES, 2011, p.114 e 115).

Outro grande cientista da antiguidade foi Arquimedes[8] que também deu sua contribuição para a geometria. Dois dos trabalhos remanescentes de Arquimedes dizem respeito à Geometria Espacial: *Sobre a esfera e o cilindro*, que é constituído de dois livros e mostra, entre outras relações, que o volume da esfera é exatamente dois terços de um cilindro circular reto circunscrito a ela. Em *Sobre os cones e os esferóides* se encontra, por exemplo, o problema de seccionar uma esfera com um plano de maneira a obter dois segmentos esféricos cujos volumes estejam numa razão dada, problema este que nos leva a uma equação cúbica (EVES, 2011, p.194).

Grandes estudiosos das Ciências Exatas conceberam e formalizaram os estudos relacionados à Geometria Espacial. Além dos já citados temos Leonardo Fibonacci, Joannes Kepler, entre outros.

1.2 - Origami

Ao pesquisarmos em artigos e trabalhos ou até mesmo em site na internet, encontraremos a origem da palavra “origami” advém do japonês e é composta por dois caracteres: o primeiro “Ori” deriva do desenho de uma mão e significa dobrar. O segundo, “Kami”, deriva do desenho da seda, significa papel de Deus, indicando a importância do papel para os japoneses.

Apesar do Japão ser considerado o berço do origami, diz - se também que ele pode ter surgido na China, onde a história do papel é bem mais antiga.

A invenção do papel foi creditada ao chinês Tsai Lun, funcionário da corte real, por volta de 105 d.C, na tentativa de substituir a sofisticada seda que era usada para escrever, começou a misturar casca de amoreira, pedaços de bambu, rami, redes de pescar, roupas usadas e cal, dessa mistura surgiu o papel.

O império chinês manteve segredo sobre as técnicas de fabricação do papel durante séculos, pois exportava este material a preços altos e de cunho religioso, a técnica do origami (dobradura) não foi amplamente difundida.

---

[8] Arquimedes (287 a. C. – 212 a.C.) foi um matemático, físico, engenheiro, inventor, e astrônomo grego.

Por volta dos séculos V e VI, a técnica da fabricação de papel foi difundida a monges na Coréia e em seguida no Japão. Contudo os japoneses desenvolveram sua própria tecnologia para a fabricação de papel, usando fibras vegetais extraídas de plantas nativas: "o *kozo"* para papel resistente, "o *gampi"* para os nobres e "*mitsumata"*, para os mais delicados.

O papel tipicamente japonês ficou conhecido como **washi** e sobre ele podia-se escrever ou usá-lo para outras finalidades, inclusive para o origami. Um século depois os árabes obtiveram o segredo desse processo que contribuir na propagação da arte de se dobrar papel.

No período compreendido entre os séculos XVII e XIX que o origami se tornou realmente popular, e com a publicação: "Hidem Sembazuru Orikata" por Akisato Rito (1797) e "Kayaragusa" por Adachi Kazuyuki (1845), que contém orientações para a execução do origami.

Foi graças a essas obras que o origami passou a ser uma matéria regular nas escolas japonesas a partir do ano de 1876.

De acordo com Barreto (2013, p. 18), não foi apenas no Japão que se dobrava papel. Os mouros, de origem muçulmana, que já conheciam a produção de papel eram exímios dobradores e influenciaram fortemente a cultura espanhola.

Os muçulmanos, por motivos religiosos, não utilizavam o origami para construir desenhos, mas como tinham um espírito matemático muito forte e enraizado na sua cultura usavam as técnicas de dobradura para realizar demonstrações matemáticas.

Acredita-se que no Brasil, a arte do origami foi introduzida de duas maneiras: uma através de nosso país vizinho, a Argentina que possui muita influência da cultura espanhola e outra, através dos imigrantes japoneses[9], que aqui vieram, a partir de 1908.

Os japoneses que emigraram para o Brasil procuraram preservar diversos costumes de sua terra natal, entre eles a prática do origami. No que se refere ao ensino oficial do *origami* no Brasil, Barreto (2013, p.19) afirma que o origami foi inserido oficialmente pela Aliança Cultural Brasil-Japão e, com o apoio do Consulado Geral do Japão em São Paulo pela Professora Yachiyo Koda.

[9] O Kasatu Maru foi o primeiro navio a chegar ao Brasil (Santos) em 18 de Junho de 1908. A Comunidade japonesa hoje, é composta por 1,5 milhões de nikkeis (japoneses e seus descendentes).

Figura 7- Aula de origami
Fonte: http://www.kamiarte.com.br/breve_historico2.htm

O uso do origami no âmbito escolar permitiu o desenvolvimento de atividades voltadas para a construção de figuras planas e espaciais. Com a construção do origami o aluno, ao manipular (dobrar) o papel, estará trabalhando com ângulos, segmentos de reta, paralelismo, perpendicularíssimo, aresta, face, vértice, entre outros.

São ricas as possibilidades de construções de formas, pois a manipulação de objetos permite a construção dos modelos mentais dos diversos elementos geométricos, é possível para o professor incluir um importante recurso metodológico que é o origami e de baixo custo.

Neste trabalho iremos construir os sólidos de Platão, através do origami e assim, será possível utilizá-los como recurso na sala de aula se for realizado um bom planejamento e com o auxílio da teoria de Van Hiele, analisaremos os diferentes níveis de pensamento geométrico em que o acadêmico do curso de Matemática do 1º ano da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, se encontra.

Para isso veremos no próximo capítulo a teoria de Van Hiele e como Gutiérrez adaptou está teoria para geometria espacial.

1.3- Definição Sólidos dos de Platão e sua construção através do origami

Primeiramente antes de definirmos os poliedros de Platão, é necessário definir ângulo poliédrico para as próximas demonstrações.

1.4 - Poliedros

Poliedro é toda figura geométrica de três dimensões, cuja superfície é formada por um número finito de faces que são as superfícies planas que constituem um sólido, pelos vértices que são os pontos de encontro das (arestas) formados por três ou mais pontos e as arestas são os segmentos de reta que são a intersecção de duas faces (eixo dos "X", "Y", "Z",...) em que cada uma poliedros das faces é um polígono.

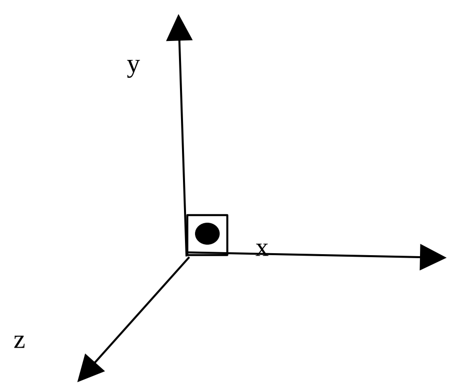


Figura 8 - eixo dos "X", "Y", "Z"
Fonte: A autora

Os seus elementos mais importantes são as faces, as arestas e os vértices.

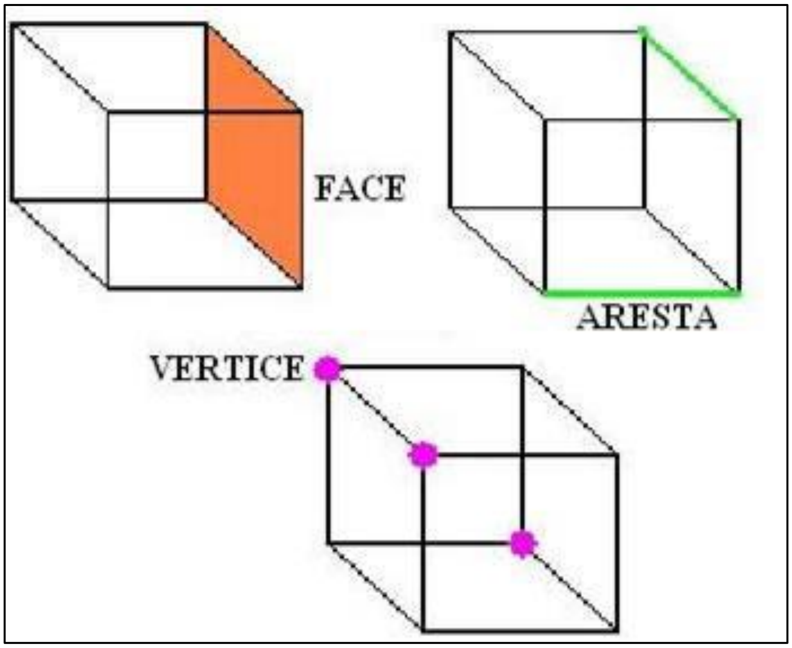


Figura 9 - Ilustração do vértice, aresta e face
Fonte:http://brasilescola.uol.com.br/matematica/poliedros.htm

1.5 - Ângulo poliédricos

Definição:

Dado um número finito n (com $n \geq 3$) de semirretas Va_1, Va_2, Va_3, $\cdots$, Va_n de mesma origem V, tais que o plano de duas semirretas consecutivas (Va_1 e Va_2, Va_2 e Va_3,$\cdots$, Va_n e Va_1) deixa as demais num mesmo espaço; considere n semiespaços E_1, E_2, E_3,$\cdots$, E_n, cada um deles com origem no plano de duas semirretas consecutivas e contendo as restantes.

Chama-se **ângulo poliédrico convexo** (DOLCE, 1993) determinado por Va_1, Va_2, Va_3, $\cdots$, Va_n a interseção dos semiespaços E_1, E_2, E_3, $\cdots$, E_n, ou seja,

$$V(a_1, a_2, \cdots, a_n) = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n.$$

A figura abaixo representa um ângulo poliédrico de vértice V, de semirretas $Va_1, Va_2, Va_3, \cdots, Va_n$ e n faces (ângulos, $\widehat{a_1a_2}, \widehat{a_2a_3}, \cdots, \widehat{a_na_1}$).

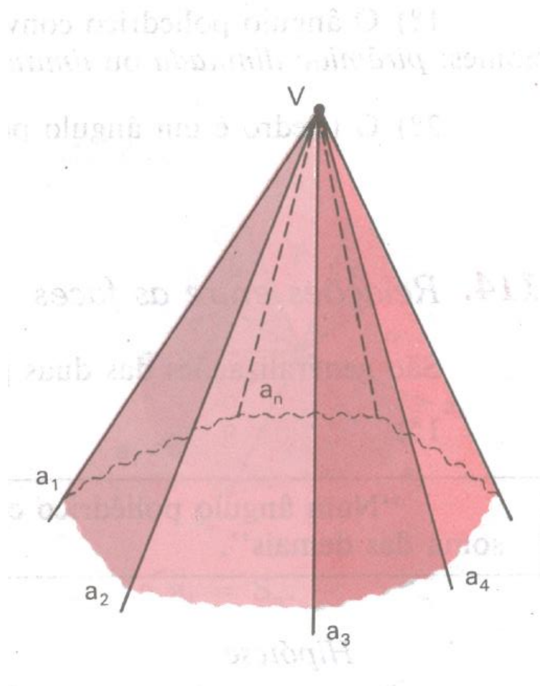


Figura 10- Um ângulo poliédrico.
Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar p.119

Assim um Ângulo poliédrico convexo é regular, se somente se, as faces são todas congruentes entre si. De cada vértice parte o mesmo número de arestas.

1.6 - Teorema de Euler[10]:

Para todo poliedro convexo, vale a seguinte relação:

V = número de vértices
A = número de arestas
F = número de faces

[10] Leonhard Euler (1707-1783) foi o matemático suíço de maior expressão em todos os tempos e o teorema que recebe seu nome é aplicável a todos os poliedros convexos, que são chamados de poliedros eulerianos.

Se V e o número de vértices de uma superfície poliédrica convexo, A o número de arestas e F o número de faces.

Demonstração:

Num polígono plano simples, em particular os convexos, que é uma superfície poliédrica, o número de vértices é igual ao número de A arestas e como $F = 1$, vem

$$V - A + F = 1.$$

Suponhamos agora que a relação seja verdadeira para uma superfície poliédrica de $K - 1$ faces, (F= $K - 1$) com um só contorno de **m** aresta e **m** vértices.

Acrescentamos a esta superfície uma nova face de **n** vértices e **n** arestas e suponhamos que **h** arestas desta face coincidam com **h** arestas das **m** do contorno.

Teremos uma nova superfície poliédrica, com **k** faces.

Designemos os números de faces, arestas e vértices da superfície por F', A', V'.

O número V de vértices da primeira superfície poliédrica aumenta de $n - (h + 1) = n - h - 1$, pois coincidem h arestas, o número de vértices coincidentes é $h + 1$.

Daí temos:

$$V' = V + n - h - 1.$$

O número A de arestas aumenta de n – h, pois h coincidem.

Daí temos:

$$A' = A + n - h.$$

É claro que

$$V' = F + 1.$$

Calculemos então:

$$V' - A' + F'$$

Assim,

$$V' - A' + F' = V + n - h - 1(A + n - h) + F + 1 = V - A + F,$$

que é igual a 1, pela hipótese de indução.

Assim por hipótese, $V' - A' + F' = 1$ o que prova a relação preliminar.

Agora considerando agora uma superfície poliédrica fechada e suprimindo-se uma das faces, teremos uma superfície poliédrica aberta, para a qual vale

$$V - A + F = 1.$$

Então recolocando a face, V e A não se alteram, mas F aumenta uma unidade

Temos:

$V' - A' + F' = 1$, como

$V' = V \quad , \; A' = A$

$F' = F + 1$, vem que

$V - A + (F - 1) = 1$, ou seja,

$$\boxed{V - A + F = 2}$$

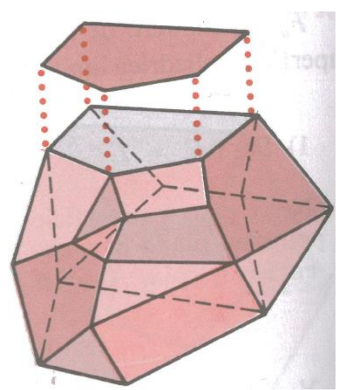


Figura 11 - Figura poliédrica aberta .
Fonte: Fundamentos de Matemática Elementar p.122.

1.7 - Poliedros de Platão

Definição:

Chama-se **poliedro de Platão** todo poliedro que satisfaz as seguintes condições:

a) Todas suas faces têm o mesmo número (n) de arestas,

b) Todos os ângulos poliédricos possuem o mesmo número (m) de arestas,

c) satisfaz a Fórmula de Euler (V **– A + F = 2)** em que **V** é o número de

vértices, **A** é o número de arestas e **F**, o número de faces.

O teorema de Euler afirma que, o número total de vértices, de qualquer poliedro convexo, somado ao número total de faces, será igual ao número total de arestas, somado de duas unidades.

No entanto observa-se, como exemplo, que uma pirâmide pentagonal satisfaz a Fórmula de Euler (pois é um poliedro convexo), porém não pode ser considerada um poliedro de Platão pois não satisfaz as condições a) e b) da definição.

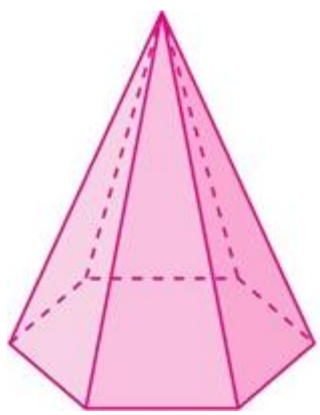


Figura 12 - Pirâmide Pentagonal
Fonte:http://www.notapositiva.com/pt/trbestbs/educvisual/imagens/08_planificacao_solidos_geom_revol_01_d.jpg

Demonstração:

Usando as condições que devem ser verificadas por um poliedro de Platão temos: Considere então um sólido platônico cujas faces são polígonos regulares de *n* lados.

a) Admitindo que cada uma das F faces do poliedro possui n arestas ($n \geq 3$) e, pelo fato de cada aresta ser concomitante a duas faces. Desta maneira:

$$n.F = 2A \quad \rightarrow \quad F = \frac{2A}{n} \qquad (1)$$

b) Cada um dos vértices V dos ângulos poliédricos possuem m arestas ($m \geq 3$). Como cada aresta contém dois vértices:

$$V(a_1, a_2, \cdots, a_n) = E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n.$$

A figura abaixo representa um ângulo poliédrico de vértice V, de semirretas

$$m.V = 2A \quad \rightarrow \quad V = \frac{2A}{m} \qquad (2)$$

c) Para o poliedro ser classificado como Poliedro de Platão deve satisfazer também a Fórmula de Euler. Logo, substituindo a equação (1) e (2) na Fórmula de Euler:

$$V = A + F = 2 \qquad (3)$$

tem-se:

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2 \rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}$$

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2 \rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \qquad (4)$$

O número de lados de cada polígono n e o número de arestas de um ângulo poliédrico m a princípio se n, m ≥ 3 satisfazem a equação (1) e (2). No entanto, se m ≥ 3 e n ≥ 3 fossem maior que 3, não satisfaz (4).

De fato:

$$\left.\begin{array}{r} m > 3 \rightarrow m \geq 4 \rightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{4} \\ n > 3 \rightarrow n \geq 4 \rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{4} \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq 0$$

o que contraria a igualdade (4), pois o número A de arestas deve ser um valor inteiro positivo.

Desta forma, existem duas situações a serem consideradas: m $= 3$ (e o poliedro de Platão possui apenas triedros) ou n $= 3$ (as faces do poliedro de Platão são triangulares). Assim,

1º). Supondo que o poliedro de Platão seja apenas triedros ($m = 3$), de substituindo na equação (4) temos:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A} \rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{A} \rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \rightarrow n < 6.$$

Logo, tem-se que $3 \leq n < 6$, sendo n o número de lados dos polígonos que compõe o poliedro de Platão. Em outras palavras, caso o poliedro de Platão possua apenas triedros ele deverá apresentar faces triangulares, quadrangulares ou pentagonais.

2º) Supondo que o poliedro de Platão tenha faces triangulares ($n = 3$), substituindo na equação (4) temos:

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} = \frac{1}{A} \rightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \rightarrow m < 6.$$

Logo se for m = 3 ou m < 6, sendo m o número de arestas de um ângulo poliédrico que compõem o poliedro de Platão, e que possuam faces triangulares então seus ângulos serão triedros, tetraédricos ou pentaédricos.

Com as informações obtidas pode-se classificar os poliedros de Platão através do par {m, n} determinando as características pertinentes a cada classe.

Consequentemente para saber essas características do poliedro de Platão basta substituir na equação (4) o valor de m, n encontrados e depois trabalhar com a equação (1) e (2).

Por exemplo {3,5} apresenta todas suas faces pentagonais e triedros como sendo seus ângulos poliédricos. Substituindo em (4):

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{A} \rightarrow \frac{1}{30} = \frac{1}{A} \rightarrow A = 30$$

Em (2):

$$V = \frac{2\,.30}{3} \rightarrow V = 20$$

Em (1):

$$F = \frac{2\,.30}{5} \rightarrow F = 12$$

Fazendo os mesmos cálculos para os demais poliedros de Platão obtermos às seguintes classes, denominadas de acordo com o número de faces:

NOME	TIPO DE FACE	Nº DE FACES	Nº DE ARESTAS	Nº DE VÉRTICES
Tetraedro	Triângulo	4	6	4
Hexaedro	Quadrilátero	6	12	8
Octaedro	Triângulo	8	12	6
Dodecaedro	Pentágono	12	30	20
Icosaedro	Triângulo	20	30	12

Tabela 1- tabela para os poliedros de Platão
Fonte:http://www.colegioweb.com.br/poliedros-de-platao-e-regulares.html

1.8 - Poliedros de Platão de Origami

Nesta seção faremos a construção dos módulos para posterirormente montar os poliedros de Platão

1.8.1 Construção módulo do hexaedro

1º passo: Partindo de um quadrado de dimensão 15 x 15, dobre ao meio de modo que os lados *AB* e *CD* coincidam (note que a dobra que se determina é a mediatriz do lado *AD*).

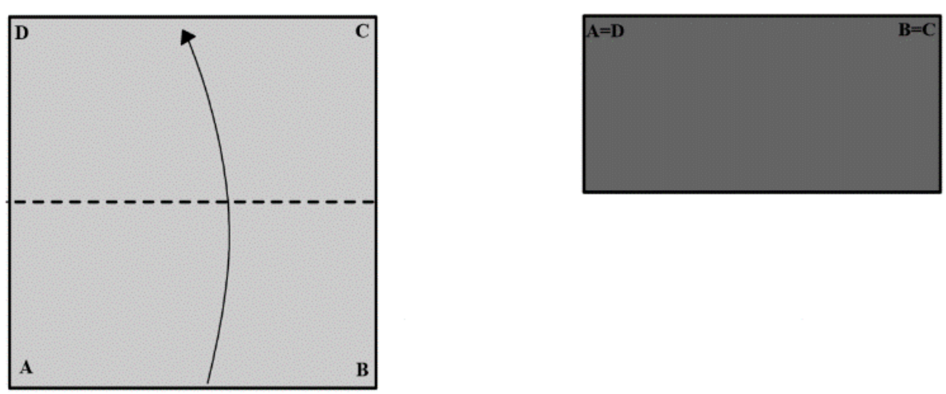


Figura 13 - 1º passo construção hexaedro
Fonte: : http://perfectorigami.blogspot.com.br/2012/01/cubo.html

2º passo: Desfaça o primeiro passo, ou seja, a dobra anterior. Agora faça uma dobra, levando os lados *AB* e *CD* até a mediatriz. Note que as dobras representam retas paralelas à dobra inicial;

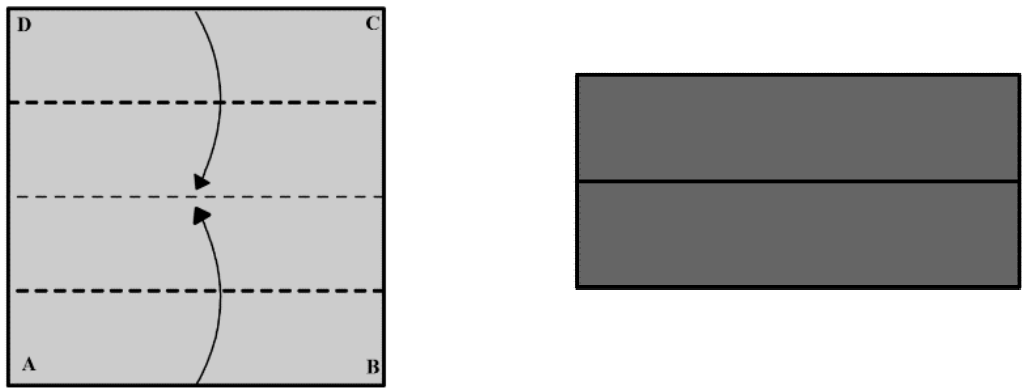


Figura 14 - 2º passo construção hexaedro
Fonte: http://perfectorigami.blogspot.com.br/2012/01/cubo.html

3º passo: em seguida mantendo um dos vértices fixo, dobre de modo a formar um triângulo retângulo, conforme a figura

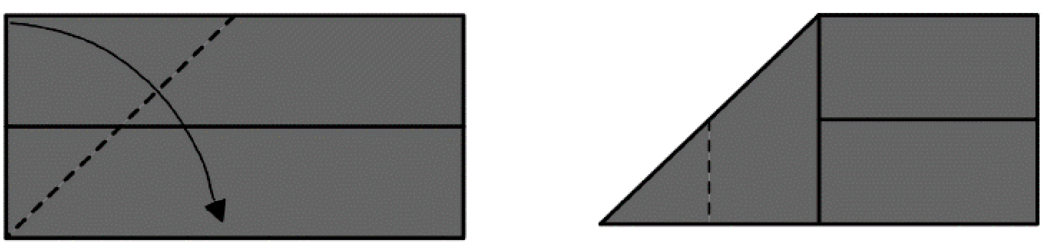


Figura 15 - 3º passo construção hexaedro
Fonte: http://perfectorigami.blogspot.com.br/2012/01/cubo.html

4º passo: Faça o mesmo passo anterior com o vértice oposto obtendo um paralelogramo cuja base é a metade do lado do quadrado inicial.

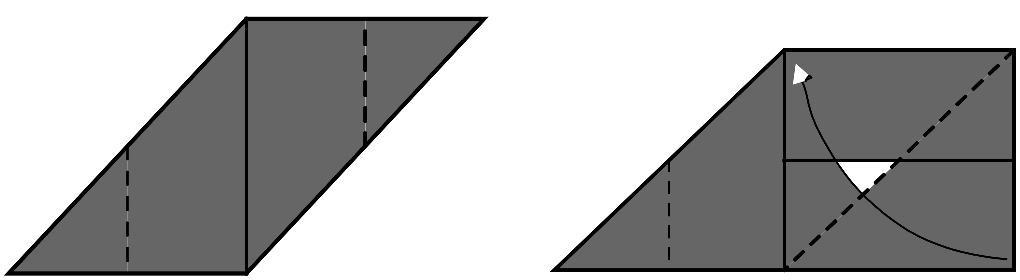


Figura 16 - 4º passo construção hexaedro
Fonte: http://perfectorigami.blogspot.com.br/2012/01/cubo.html

5º passo: Desdobre. Observe que as extremidades dos vincos, formam dois triângulos retângulo (cinza) .

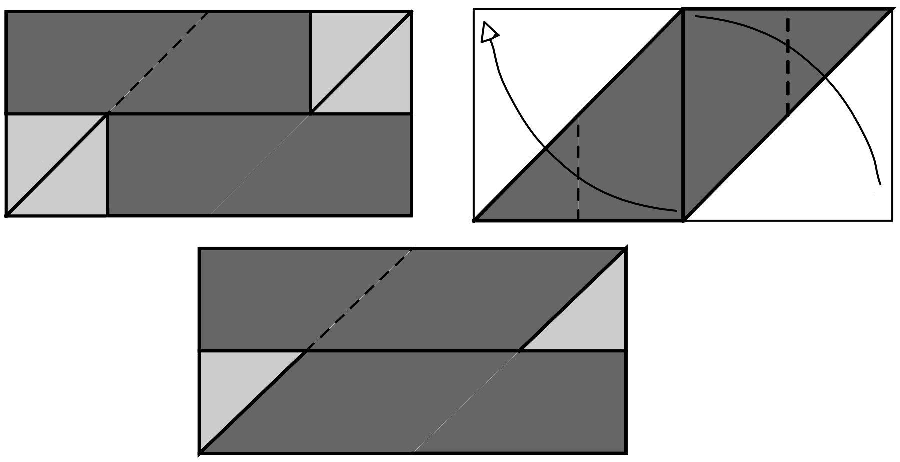


Figura 17-- 5º passo construção hexaedro
Fonte: http://perfectorigami.blogspot.com.br/2012/01/cubo.html

6º passo: Coloque um vértice do retângulo por dentro da fenda obtida até que o vértice toque a dobra interna; repita o procedimento com o outro vértice (não adjacente) do lado oposto.

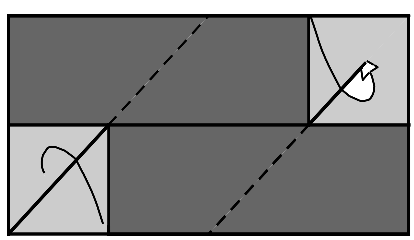


Figura 18- 6º passo construção hexaedro
Fonte: http://perfectorigami.blogspot.com.br/2012/01/cubo.html

7º Passo: Agora faça o passo 3 e 4, mas de forma a colocar o vértice do triângulo dentro da parte superior da peça, formando um paralelograma.

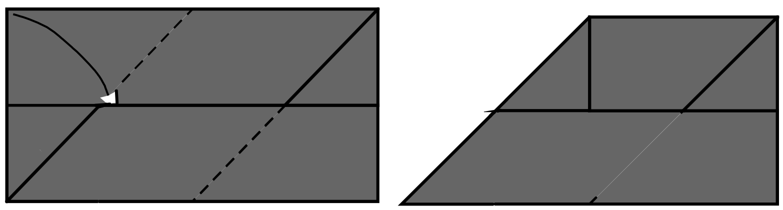


Figura 19 - 7º passo construção hexaedro
Fonte: http://perfectorigami.blogspot.com.br/2012/01/cubo.html

8º passo: Vire o módulo. Dobra o modulo de modo que coincida os dois vértices da base do paralelogramo. Faça o mesmo com o com os vértices superiores.

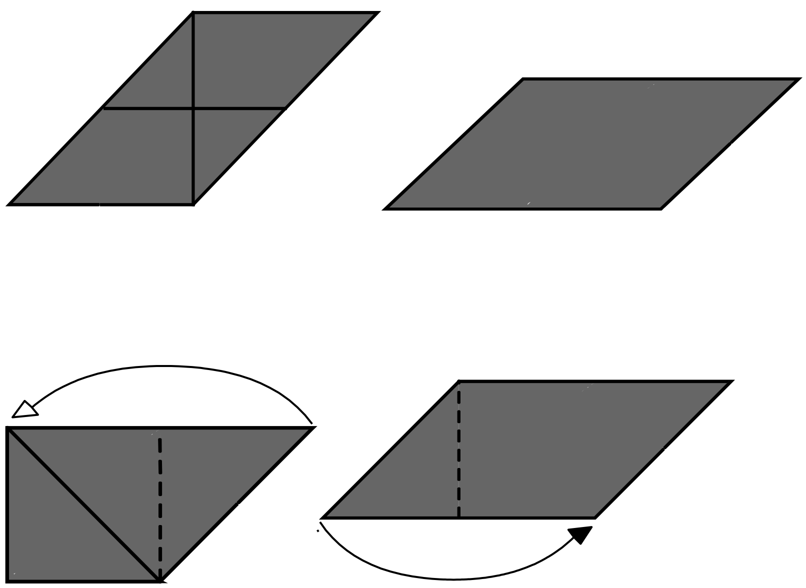


Figura 20 - 8º passo construção hexaedro
Fonte: http://perfectorigami.blogspot.com.br/2012/01/cubo.html

9º passo: No último procedimento obtivemos uma figura com o formato de um quadrado. Desfaça o último passo.

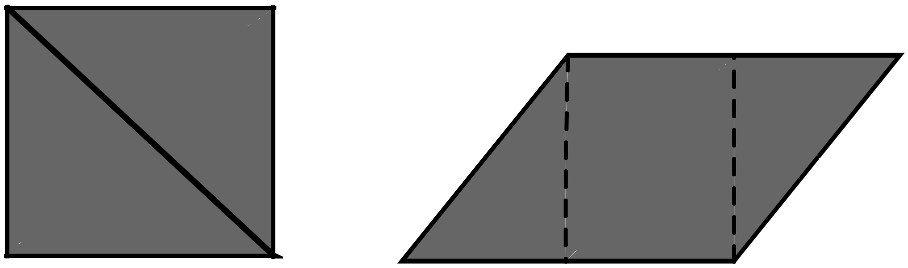


Figura 21 -9º passo construção hexaedro
Fonte: http://perfectorigami.blogspot.com.br/2012/01/cubo.html

Após desfazer o último passo o aluno perceberá que o quadrado formado pelas dobras possui dois bolsos que servirão para o encaixe das abas dos módulos.

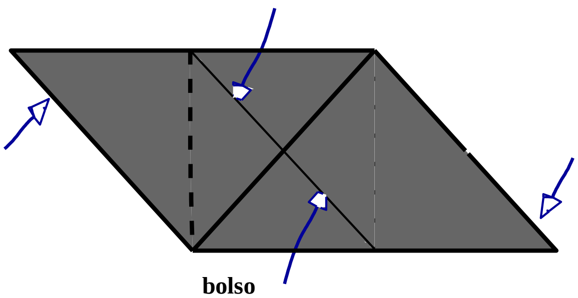
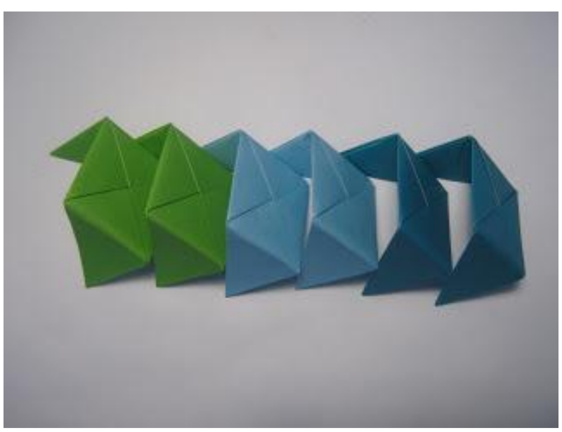
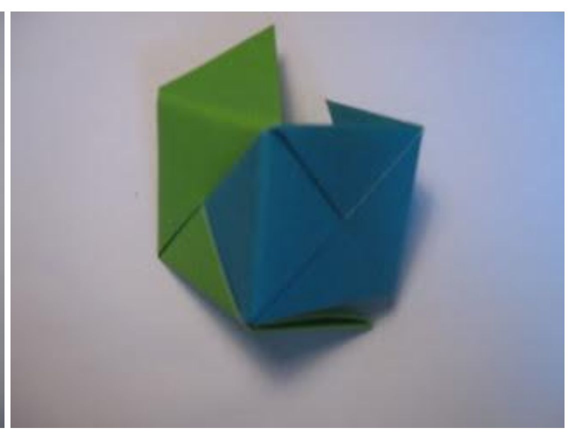


Figura 22 - Modulo pronto hexaedro
Fonte: http://perfectorigami.blogspot.com.br/2012/01/cubo.html

Para a construção do cubo é necessário seis módulos.

Montagem do cubo:





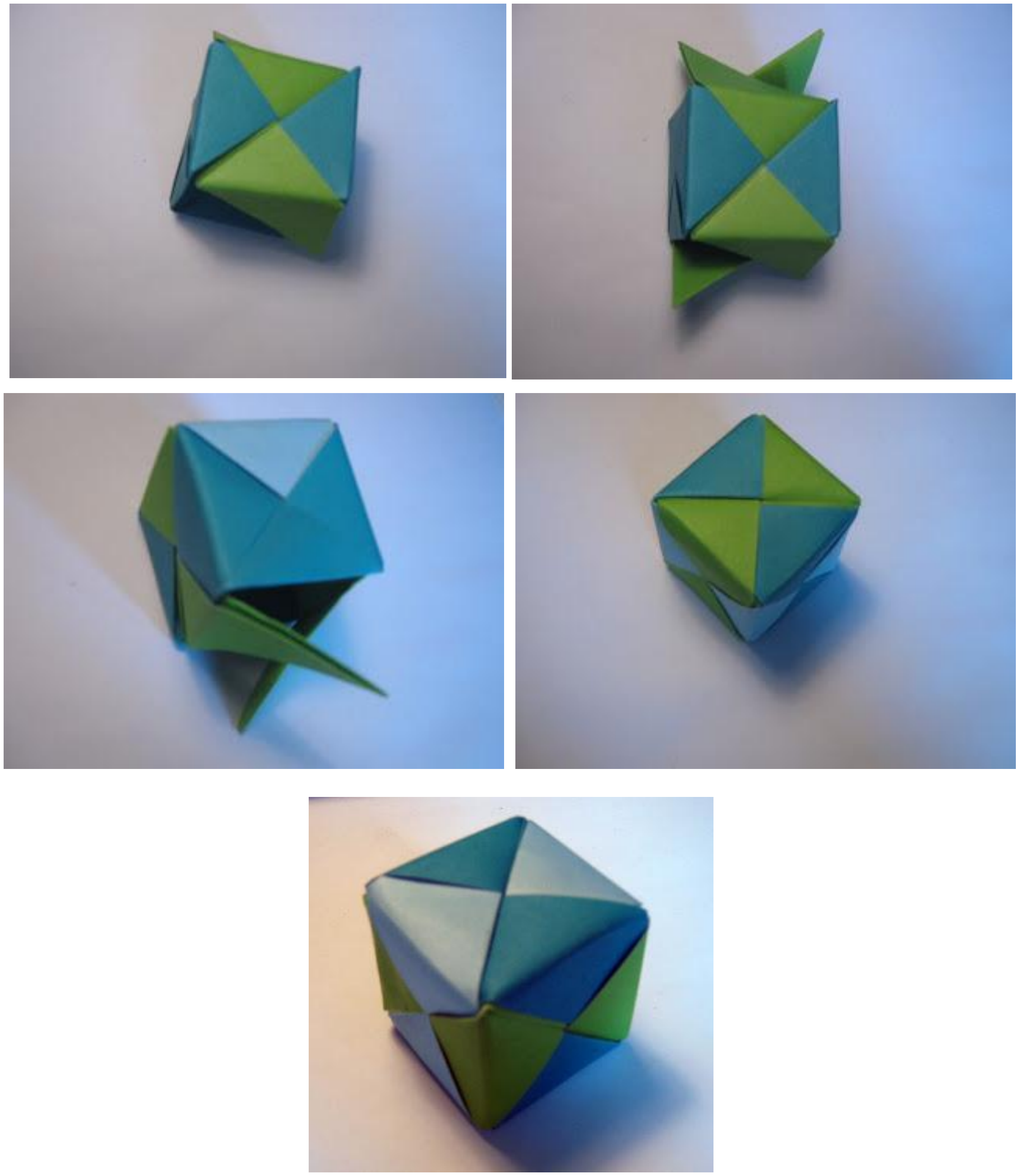


Figura 23 - Montagem do hexaedro
Fonte: http://perfectorigami.blogspot.com.br/2012/01/cubo.html

1.8.2 - Construção módulo do dodecaedro

1º passo: Numa folha tamanho 15x15, dobre em três partes iguais e nos dois retângulos que ficam nas pontas do papel marque as diagonais e dobre como mostra a figura abaixo:

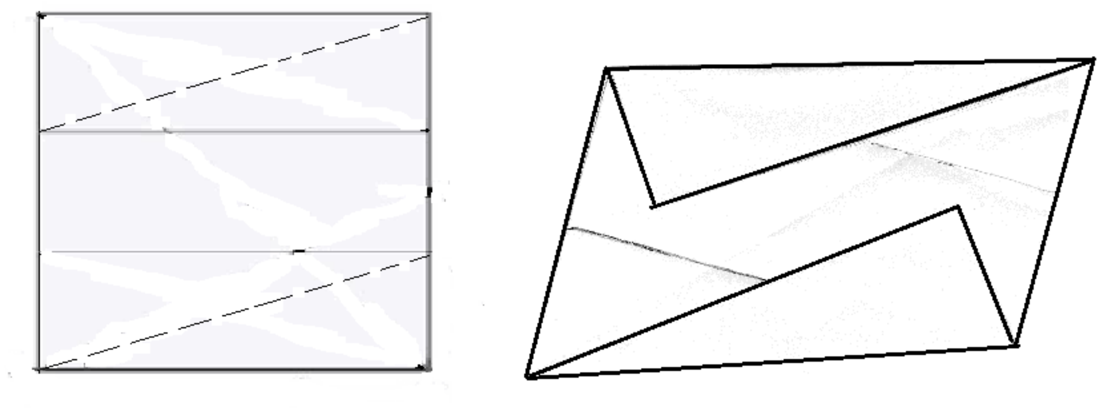


Figura 24 - 1º passo construção dodecaedro
Fonte: A autora

.

2º passo: Dobre na diagonal menor do paralelogramo.Use o auxílio de uma régua.

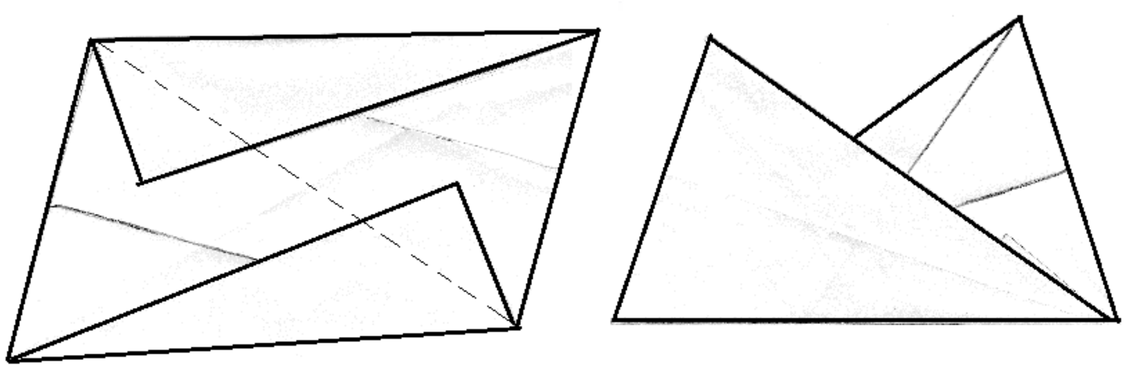


Figura 25 - 2º passo construção dodecaedro
Fonte: A autora

3º passo: Dobre cada triângulo indicado para baixo, um será dobrado do lado oposto do outro.

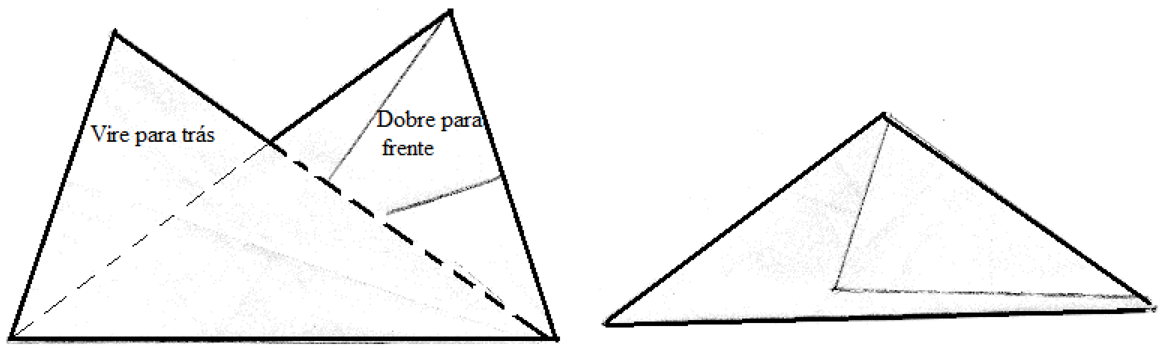


Figura 26 - 3º passo construção dodecaedro
Fonte: A autora

4º passo: Abra e esconda cada triângulo dobrado para dentro de maneira a que um se sobreponha ao outro e forme um triângulo perfeito na figura como segue na figura abaixo:

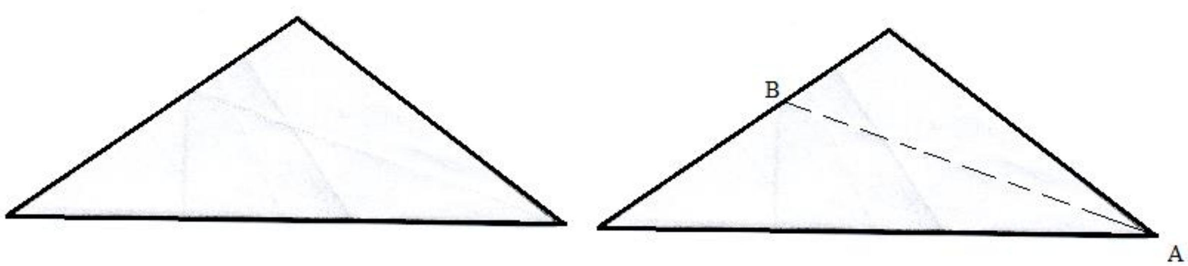


Figura 27 - 4º passo construção dodecaedro
Fonte: A autora

Observe que ficará naturalmente pelas dobras já realizadas o segmento AB.

5º passo: Unir o ponto A com o ponto B. Em seguida una o ponto C ao D e estará dobrado seu módulo do dodecaedro.

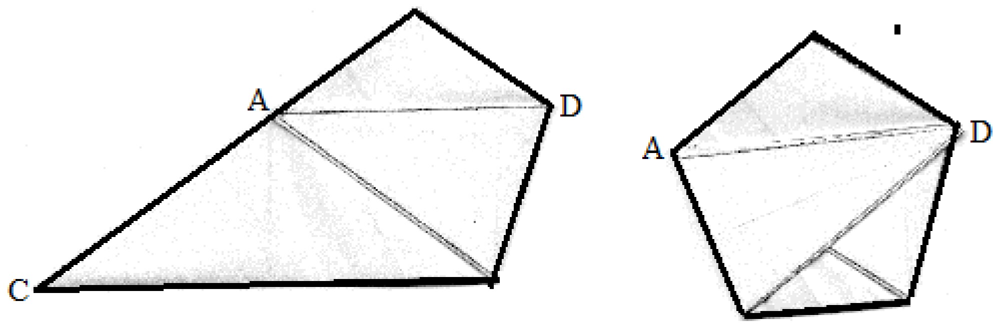
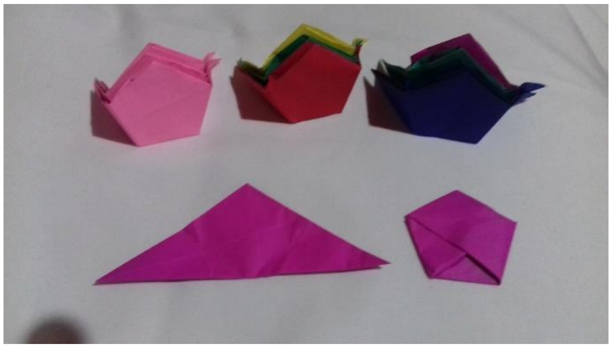
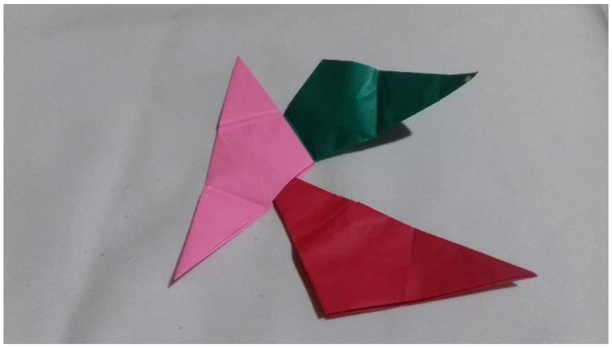


Figura 28 - 5º passo construção dodecaedro
Fonte: A autora

Para a construção do dodecaedro é necessário doze módulos.

Montagem dodecaedro:





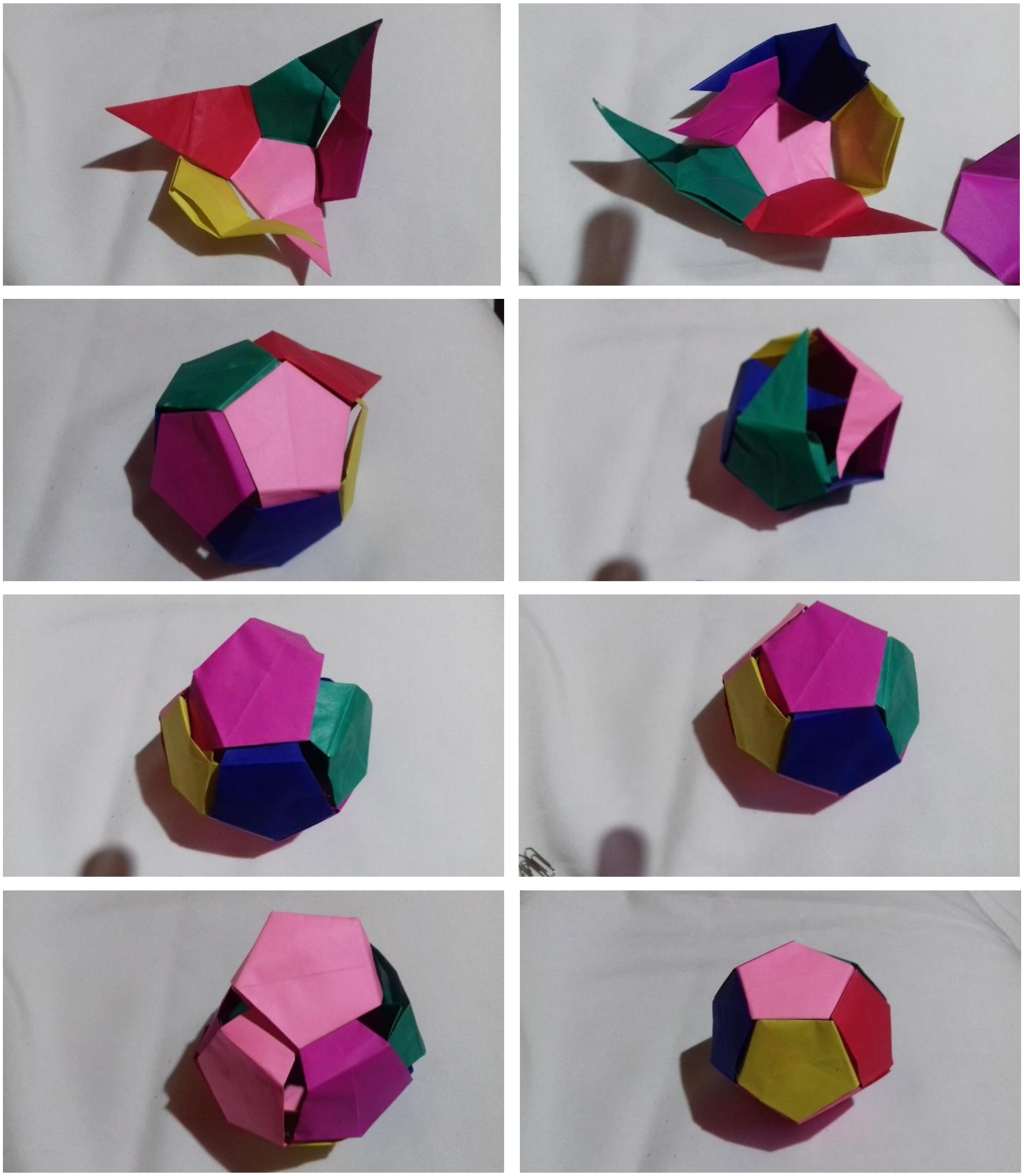



Figura 29 - Montagem dodecaedro
Fonte: A autora

1.8.3 - Construção do Icosaedro

1º passo: Partindo de um quadrado de dimensão 15 x 15, faça vincos de forma a dividir o quadrado em 4 partes iguais e também a metade do quadrado como mostra a figura. Em seguida leve o ponto C no segmento de reta AB de forma que um dos pontos do triângulo seja o ponto D. Observe a figura abaixo:

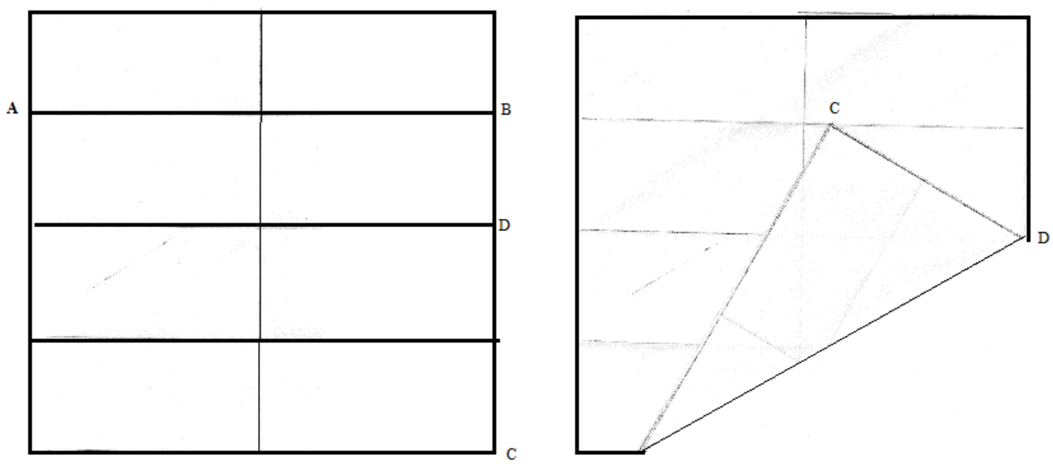


Figura 30 - 1º passo construção icosaedro
Fonte: A autora

2º passo: Dobre o ponto E sobre o segmento de reta GH de forma que o ponto F seja um dos pontos do triângulo a ser formado. Observe:

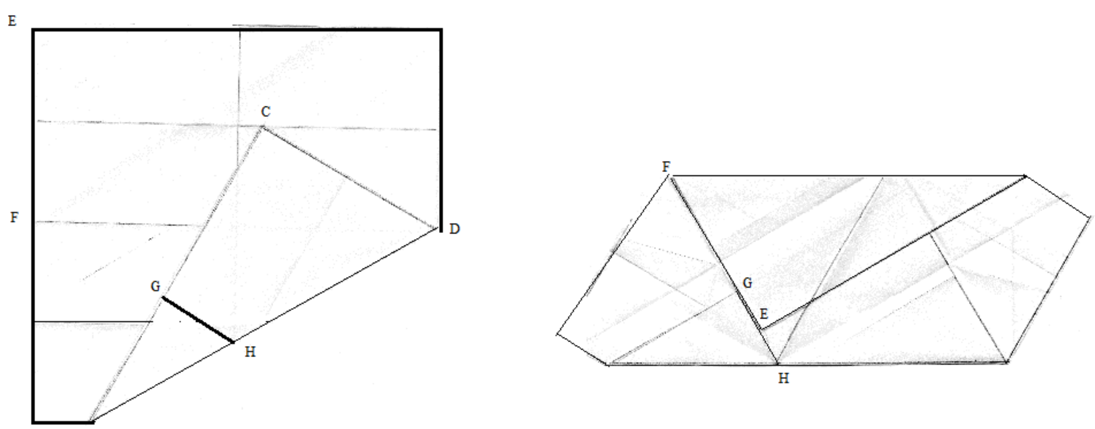


Figura 31 -2º passo construção icosaedro
Fonte: A autor

3º passo: Vire o papel, naturalmente pelas dobras realizadas haverá um vinco no meio do papel dobre nesta marca.

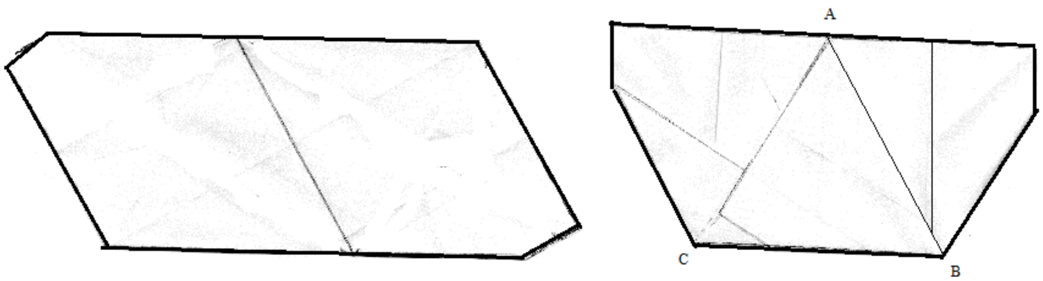


Figura 32 - 3º passo construção icosaedro
Fonte: A autora

4º passo: Dobre o lado o segmento AB sobre o lado BC como mostra a figura abaixo.

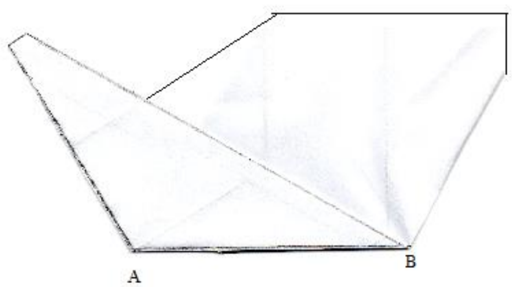


Figura 33 - 4º passo construção icosaedro
Fonte: A autora

5º passo: Vire a folha e repita o passo 4 para o outro lado. A figura abaixo mostra como ficará a peça.

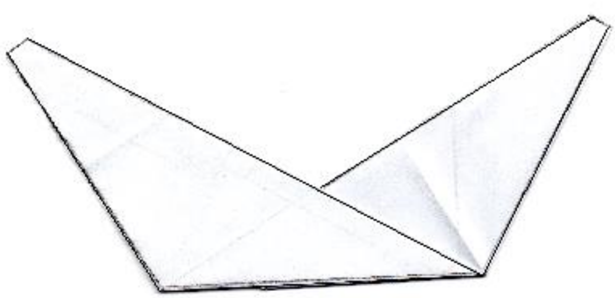


Figura 34 - 5º passo construção icosaedro
Fonte: A autora

6º passo: Dobre o segmento BD sobre o segmento AB para formar um vinco de 90º.

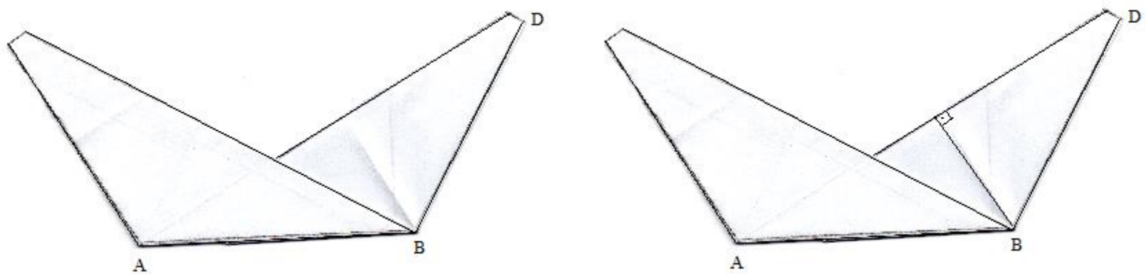


Figura 35 - 6º passo construção icosaedro
Fonte: A autora

7º passo: Dobre o segmento BD sobre o segmento perpendicular criado.Vire a peça e repita o processo 6º e 7º.

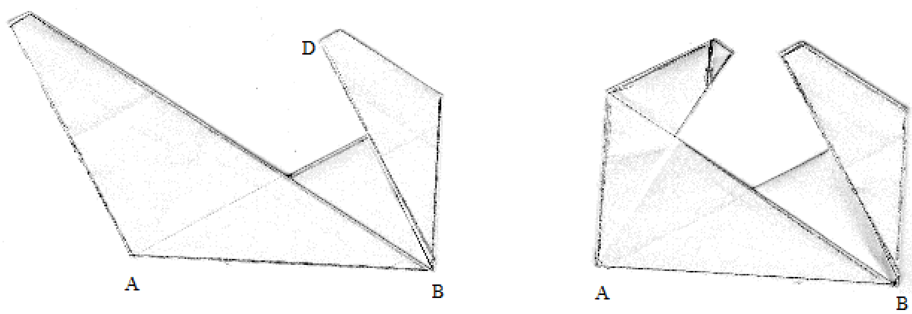


Figura 36 - 7º passo construção icosaedro
Fonte: A autora

8º Passo : Distorcer a peça e estará pronto o módulo do icosaedro.

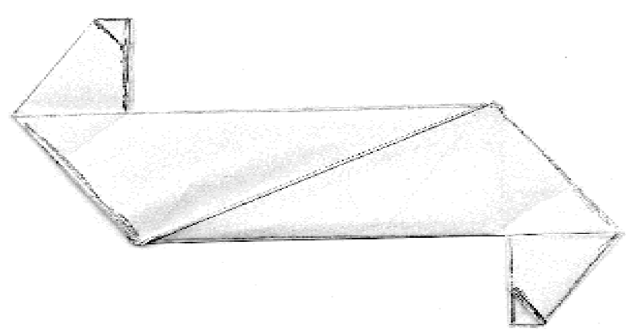


Figura 37 - Modulo icosaedro
Fonte: A autora

Para a construção do icosaedro são necessários trinta módulos.

Montagem icosaedro:

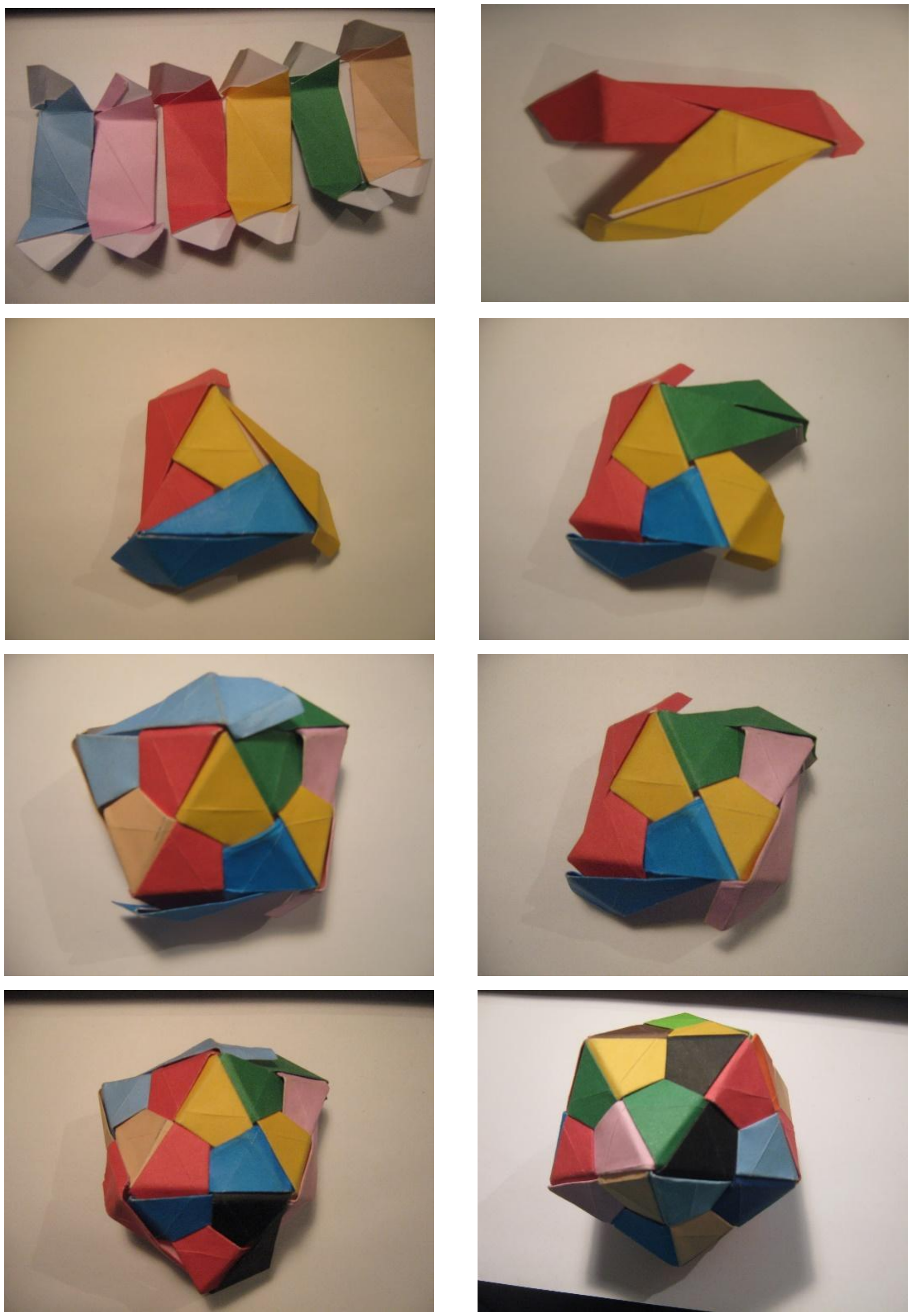


Figura 38 - Montagem Icosedro
Fonte: http://perfectorigami.blogspot.com.br/2012/01/

1.8.4 - Construção do módulo tetraedro e octaedro.

1º passo: Com um quadrado de 15cm de lado divida a folha em quatro partes iguais e dobre para baixo o retângulo A e para cima o retângulo B.

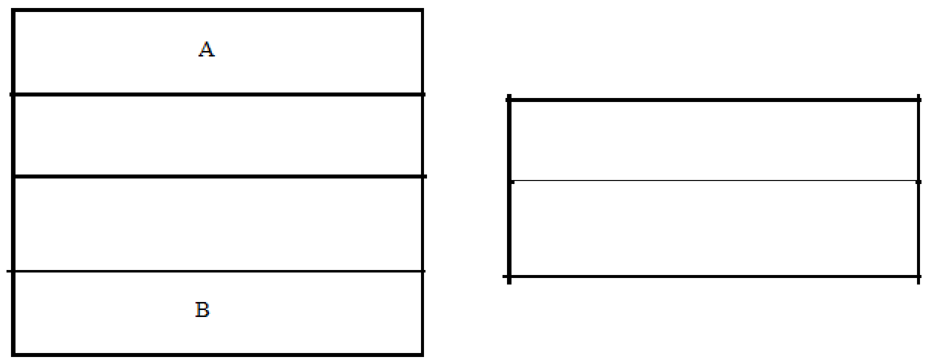


Figura 39 - 1º passo construção Tetraedro e Octaedro
Fonte: A autora

2º passo: Dobre ao meio e desdobre ou seja faça o vinco do meio. E faça o lado AD e o lado BC coincidirem com a dobra do meio assim teremos três vincos na vertical como mostra a figura abaixo.

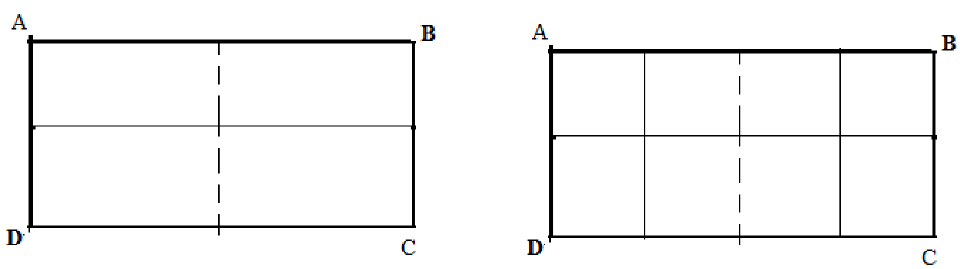


Figura 40 - 2º passo construção Tetraedro e Octaedro
Fonte: A autora

3º passo: Dobre o triângulo FCG levando o ponto C na reta r. Observe a figura:

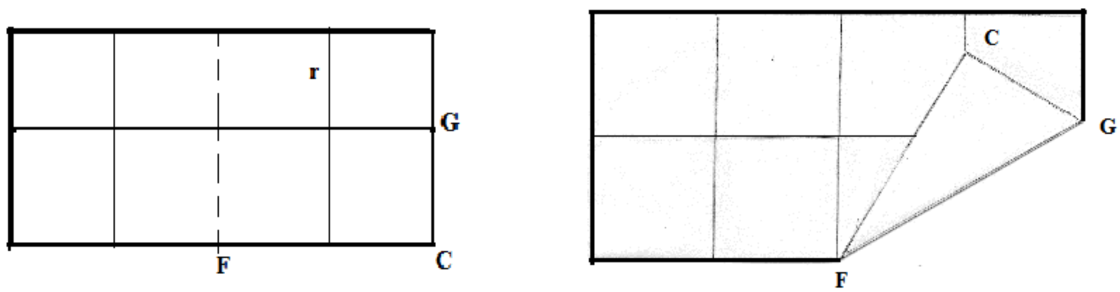


Figura 41 - 3º passo construção Tetraedro e Octaedro
Fonte: A autora

4º passo: Repita o passo 3 para os quatro vértices do retângulo. Observe como ficaram os vincos da figura.

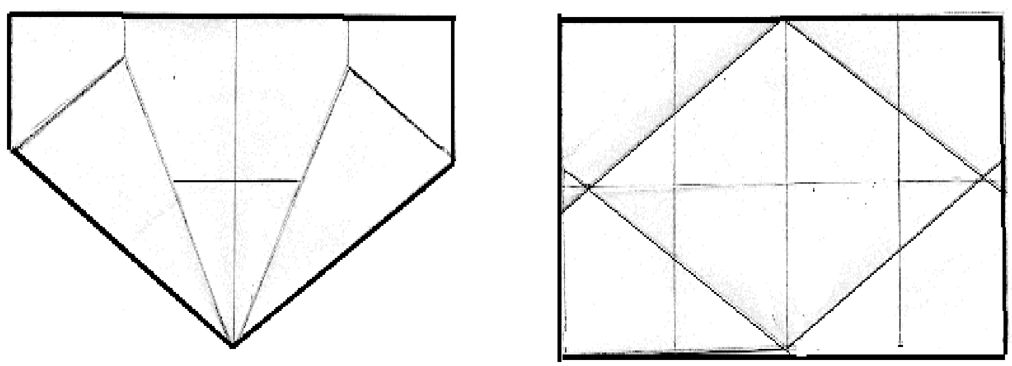


Figura 42 - 4º passo construção Tetraedro e Octaedro
Fonte: A autora

5º passo: Desdobre todo o papel e vire a folha, observe os triângulos pequenos que se formam acima e abaixo no papel. Dobre a base do triângulo de cima para baixo e o debaixo para cima conforme a figura.

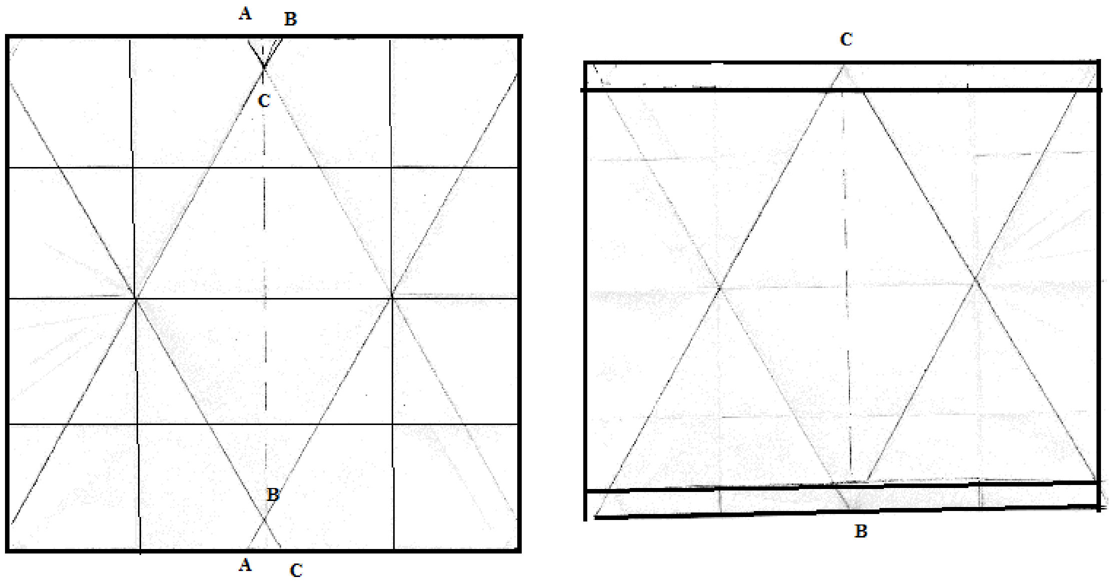


Figura 43 - 5º passo construção Tetraedro e Octaedro
Fonte: A autora

6º passo: Dobre o segmento EC sobre o segmento de reta HC. Formaremos o triangulo ICE.

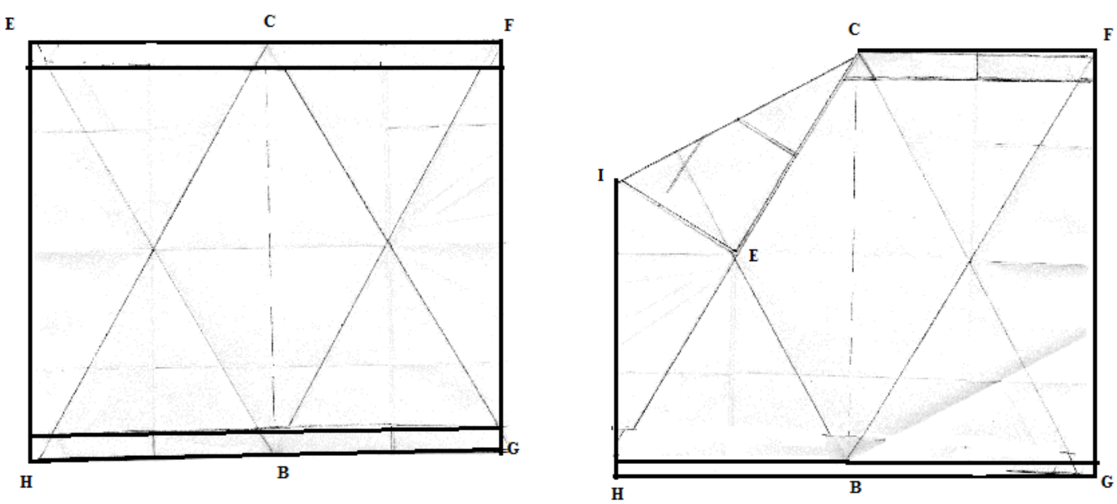


Figura 44 - 6º passo construção Tetraedro e Octaedro
Fonte: A autora

7º passo: Dobre o segmento IC sobre o segmento CB. Repita a operação com o segmento BG dobrando sobre o segmento BF e a base do triângulo que se formar dobre sobre o segmento CB observe como ficará a dobradura.

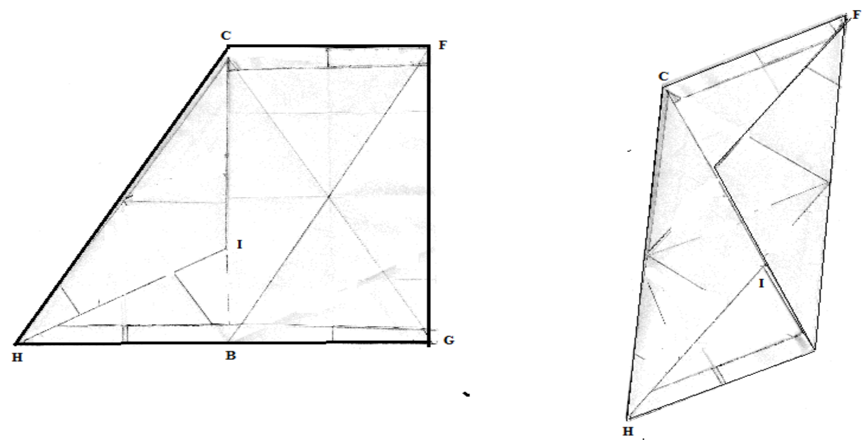


Figura 45 -74º passo construção Tetraedro e Octaedro
Fonte: A autora

8º Passo: Podemos observar 4 triângulos equiláteros nos vincos realizados como mostra a figura abaixo, dobre um triângulo sobre o outro até formar um único triângulo. E estará pronto seu módulo para o tetraedro e para o octaedro.

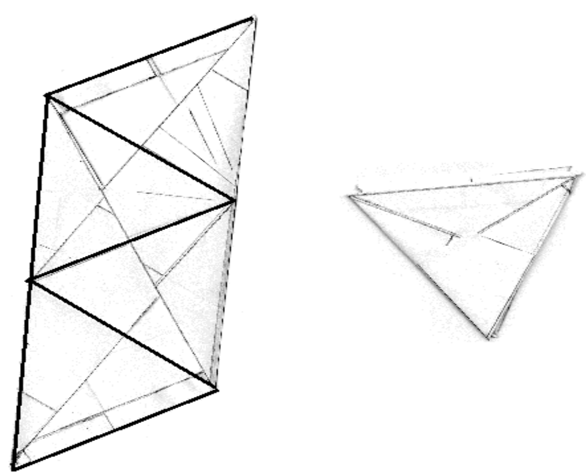


Figura 46 - Modulo Tetraedro e Octaedro
Fonte: A autora

Para a construção do tetraedro são necessários dois módulos e para o octaedro são necessários quatro módulos.

Montagem do octaedro:

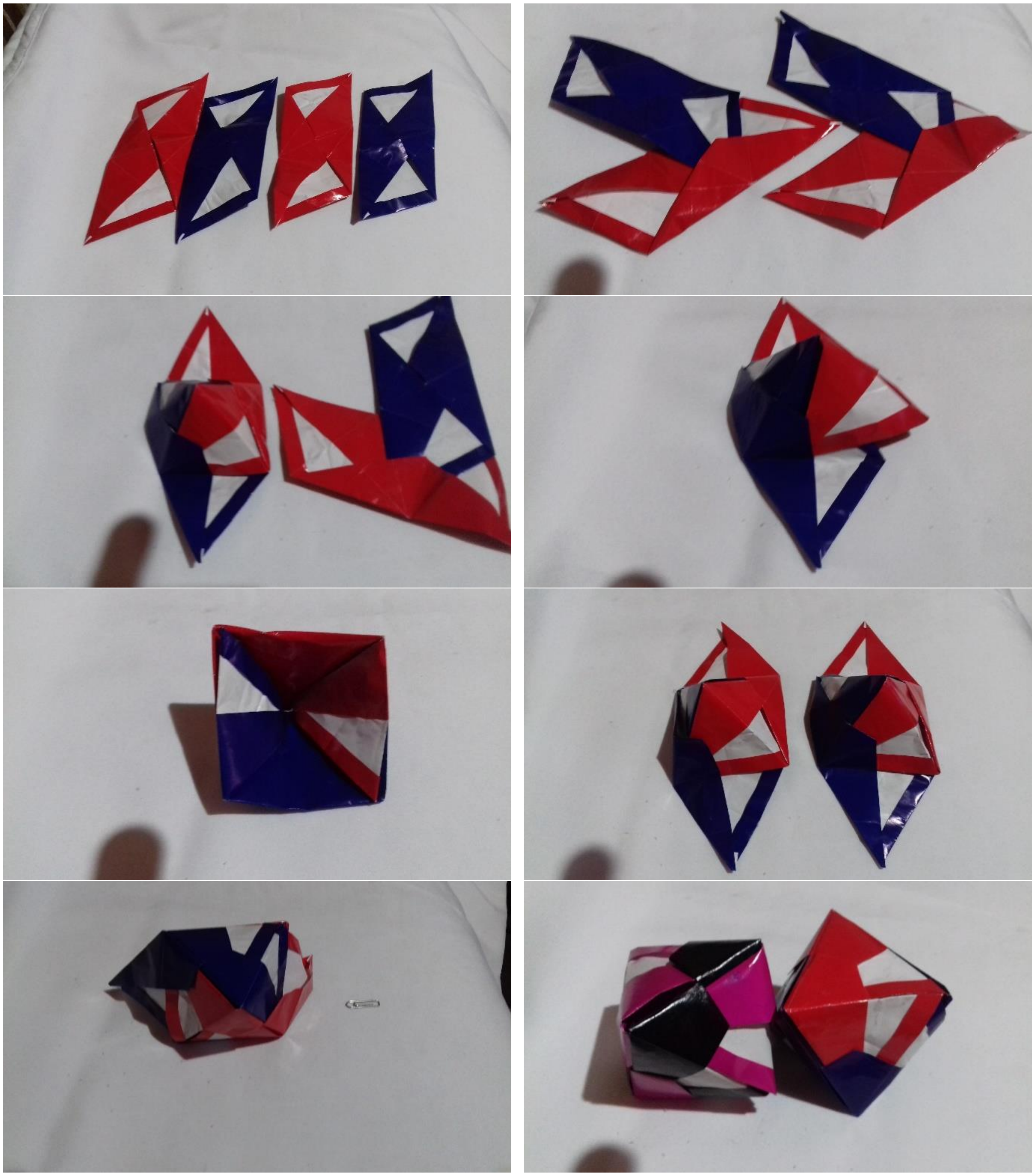


Figura 47 - Montagem Octaedro
Fonte: A autora

Montagem do tetraedro:

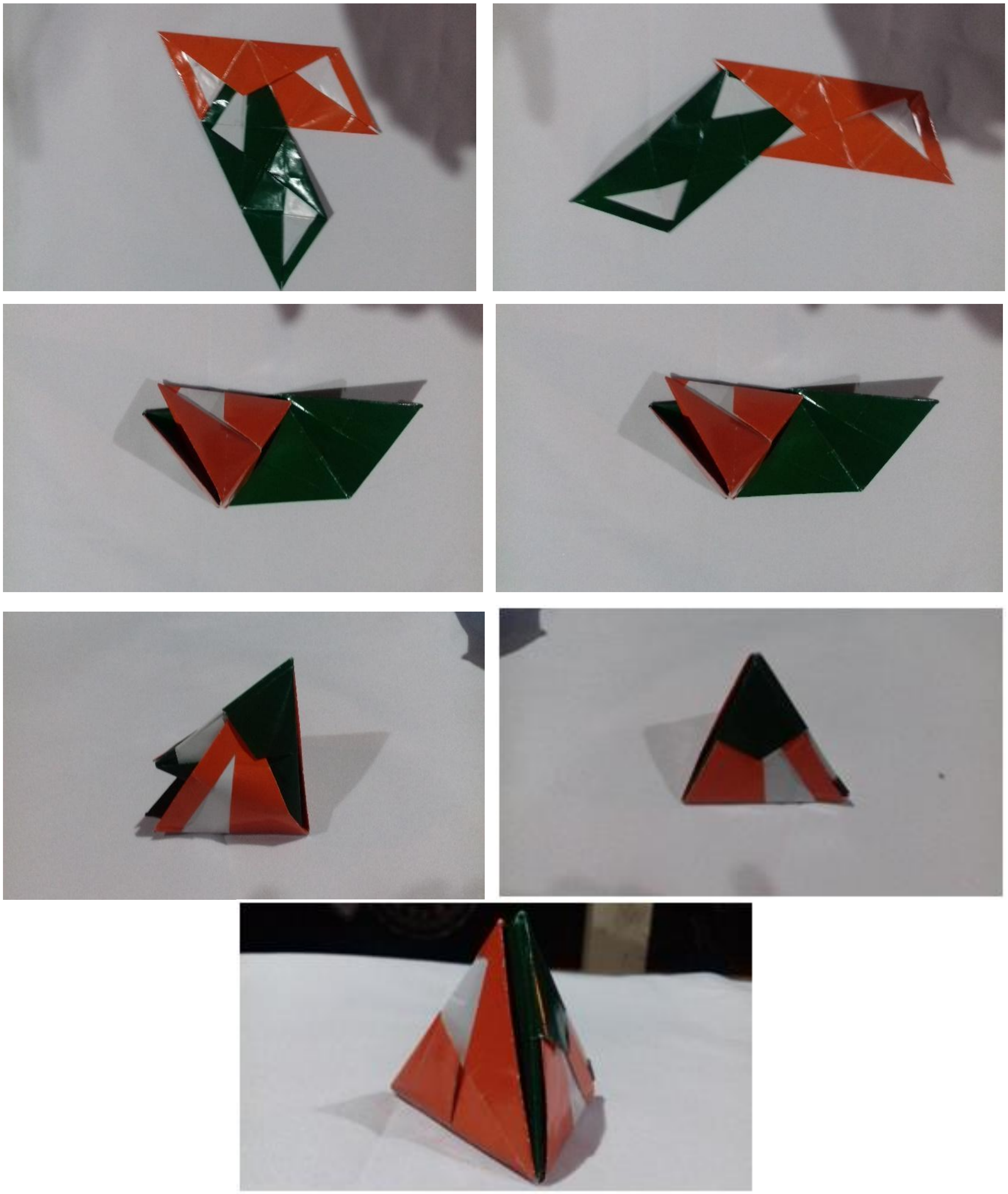


Figura 48 - Montagem Tetraedro
Fonte: a autora

CAPÍTULO 2

A teoria de Van Hiele e a Visão de Gutiérrez

No primeiro capítulo falamos do contexto histórico e como a geometria espacial e o origami foi concebido.

Neste capítulo discutir o “Teoria” ou “modelo” de Van Hiele, (neste trabalho usaremos os dois termos “Teoria” ou “modelo”, pois dois termos são usados por autores diferentes) e posteriormente, Gutiérrez, que adaptou a teoria de Van Hiele para a geometria espacial.

2.1- A Teoria de Van Hiele

Segundo (Ferreira, 2013, p. 03), em 1957, foi publicado as dissertações de doutorado de Dina Van Hiele-Geldof e Pierre Van Hiele, na Universidade de Utrecht, nos Países Baixos, intitulada *Structure and Insight: A theory of mathematics education* (Estrutura e Conhecimento: Uma teoria da educação matemática) é o ponto de partida da teoria de Van Hiele, que abrange a didática da matemática e, mais especificamente, a didática da geometria.

Logo após a publicação da tese, Dina vem a falecer e fica a cargo de Pierre o aperfeiçoamento e a divulgação da teoria. Os primeiros trabalhos baseados na Teoria de Van Hiele eram quase desconhecidos no Ocidente e ficaram mais conhecidos na década de 1980, com suas traduções para o inglês (CROWLEY, 1994) (apud Ferreira).

A Teoria de Van Hiele consiste em duas partes:

O primeiro, os "níveis de pensamento" ou “compreensão”, é uma descrição das formas de pensar que podem ser encontrados do aluno. A teoria de Van Hiele afirma que um estudante pode progredir através de vários níveis de raciocínio durante o seu processo de aprendizagem. A principal preocupação educacional para a Teoria Van Hiele é o progresso de um nível para o seguinte; este progresso não pode ser ensinado, mas é altamente dependente do tipo de ensino, ou seja, a metodologia do professor.

A segunda parte da Teoria Hiele Van, as "fases de aprendizagem", é uma sugestão para os professores sobre como organizar o pensamento geométrico no ensino da Geometria, a fim de facilitar e promover os alunos para passar de seu nível atual para o seguinte.

Os níveis de compreensão de Van Hiele sobre o pensamento geométrico, são divididos em cinco níveis, chamados: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor.

Algumas propriedades podem ser aparentes: uma melhoria sobre as capacidades de raciocínio de que o anterior.

Em seguida, um aluno pode atingir o nível 2 somente se ele já havia alcançado o nível 1, ou seja, os alunos progridem hierarquicamente através dessa sequência de níveis, cabe ao professor, conhecer previamente em qual nível de desenvolvimento o aluno se encontra, ou realizar uma sequência didática na qual siga esta hierarquia de conhecimento.

Para melhor esclarecimento, segue abaixo um resumo dessa teoria:

Nível de Van Hiele	Características	Exemplo
1º Nível Reconhecimento	Reconhecimento, comparação e nomenclatura das figuras geométricas por sua aparência global.	Classificação de recortes de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.
2º Nível Análise	Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.	Descrição de um quadrado através de propriedades: 4 lados iguais, 4 ângulos retos, lados opostos iguais e paralelos.
3º Nível Abstração	Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra; Argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.	Descrição de um quadrado através de suas propriedades mínimas: 4 lados iguais, 4 ângulos retos. Reconhecimento de que o quadrado é também um retângulo.
4º Nível Dedução	Domínio do processo dedutivo e das demonstrações; Reconhecimento de condições necessárias e suficientes.	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.
5º Nível Rigor	Capacidade de compreender demonstrações formais;	Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma geometria finita.

	Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.	

Quadro 1- Descrição dos níveis de Van-Hiele
Fonte: Nasser et al (2010, p. 07).

Para o aluno obter êxito no desenvolvimento geométrico relativo a um determinado assunto em geometria e em cada nível de compreensão, o casal Van Hiele criou um roteiro quanto à metodologia a ser aplicada pelo professor.

Becker (2009) esta teoria consiste em que a aprendizagem da geometria se faz passando por níveis graduais de pensamento, colocando-se como guia para a aprendizagem e para a avaliação das habilidades dos alunos em geometria.

Estes níveis não estão associados à idade, e têm as seguintes propriedades representadas:

1). Sequencial: Não se pode alcançar o nível *n* sem haver passado pelo nível anterior *n-1*, ou seja, o progresso dos alunos através dos níveis é invariante;

2). Avanço: um aluno não pode estar em um nível, sem ter dominado todos os níveis anteriores;

3). Intrínseco e extrínseco: Em cada nível de pensamento, o que era implícito, no nível seguinte volta explícito;

4). Linguística: Cada nível tem sua linguagem própria utilizada (símbolos linguísticos) e respectiva significância dos conteúdos (conexão destes símbolos com algum significado);

Apesar dessa teoria ser hierárquico, obedecendo a uma sequência, como se estivesse reforçando a aprendizagem da geometria exclusivamente das partes para o todo, do particular para o geral, sufocando a visão global. Ele aponta as lacunas de aprendizagem que o aluno tem e assim o professor poderá organizar-se criativamente na sua prática pedagógica para facilitar a aprendizagem do aluno. Estabelecendo estratégias metodológicas que favoreçam a resolução de problema e a interdisciplinaridade numa visão não linear.

No nível da visualização os indivíduos adquirem uma concepção de espaço em sua volta, reconhecendo as figuras apenas pela sua aparência, já no nível de análise são reconhecidas partes das figuras, as quais passam a ser identificada.

Posteriormente, surge à dedução informal, os indivíduos são capazes de deduzir as propriedades de uma figura e reconhecer classes de figuras.

No nível formal os alunos são capazes de construir uma demonstração diante da dedução do sistema axiomático. Quanto ao nível de rigor os estudantes são capazes de trabalhar com diferentes sistemas axiomáticos e estabelecer a diferença entre os objetos e a sua essência. Para melhor esclarecimento, segue abaixo um resumo dessa teoria:

Assim, de acordo com exposto, percebemos que a Teoria de Van Hiele, leva o aluno partir do nível da visualização de um conceito geométrico, seguir ao nível da análise, prosseguir pelo nível da dedução formal e, finalmente atingir o nível do rigor da conceituação do ente geométrico, passando a entender e relacionar conceitos geométricos abstratos. Consideramos que o origami propicia a vivência para todos esses níveis de pensamento partindo da visualização até a formalização de resultados a partir de questionamentos bem elaborados pelos professores.

2.2 - A Visão de Gutiérrez sobre as habilidades espaciais através da Teoria de Van Hiele

Angel Gutiérrez, é professor do departamento Didática da Matemática da Universidade de Valência (Espanha), publicou alguns livros e vários artigos em revistas e congressos, em 1988 Gutiérrez pública o primeiro artigo sobre Van Hiele, intitulado: “*Globality versus locality of the van Hiele levels of geometric reasoning.”*, entre outros de seus trabalhos publicado, sobre a teoria de Van Hiele, Gutiérrez direcionou específicamente a teoria para a geometria espacial. Assim Gutiérrez (1992), dividiu o problema do aprendizado relacionado à geometria espacial em duas partes: a aquisição das habilidades espaciais e o entendimento das relações entre os conceitos geométricos.

Ainda segundo Gutiérrez (1992), é fundamental que o aluno adquira e desenvolva habilidades que o permitam entender e interpretar diferentes tipos de representações bidimensionais de objetos tridimensionais. Essa capacidade que temos e devemos desenvolver, é básica no aprendizado deste campo de conhecimento.

Quem tiver dificuldades em visualizar os objetos em suas várias formas e o que ocorre com eles, terá dificuldades em entender os livros didáticos, que por terem representação plana, exigem que a pessoa tenha que representar em sua mente esses objetos espacialmente, ou seja, habilidades que permitam ao aluno criar, mover, transformar e analisar imagens mentais de objetos tridimensionais geradas por uma informação dada através de um desenho plano.

Para Del Grande (apud, Gutiérrez, 1991), especificou habilidades importantes que o indivíduo deve ter para auxiliar a representação espacial, num contexto mais amplo que o da Geometria. São eles:

1) Coordenação motora dos olhos: é a habilidade de observar e seguir com os olhos o movimento dos objetos de maneira ágil e eficaz;

2) Identificação visual: é a habilidade de reconhecer uma figura desligada de seu contexto;

3) Conservação da percepção: é a habilidade de reconhecer que um objeto mantém sua forma mesmo que girado, ocultado ou que deixe de vê-lo;

4) Reconhecimento de posições no espaço: é a habilidade de relacionar posições de um objeto de acordo com um referencial;

5) Reconhecimento de figuras espaciais: é a habilidade que permite reconhecer as formas e suas características;

6) Determinação visual: é a habilidade que permite identificar semelhanças e diferenças entre os objetos;

7) Memória visual: é a habilidade de recordar características visuais e posicionais quando um objeto é girado ou ocultado, parcialmente ou não.

Se fizermos uma classificação conjunta de imagens, processos e habilidades visuais, vamos perceber que, embora todos eles estão relacionados com a atividade matemática, alguns têm uma relação mais estreita com o contexto da aprendizagem da geometria espacial.

Mas ao depararmos com a realidade da sala de aula percebemos que os alunos encontram bastante dificuldade na habilidade de visualização.

O material manipulável no caso o origami vem contribuir para o desenvolvimento da capacidade de visualização. É importante o professor ter em mãos teorias que representam os sólidos que estão sendo estudados, para que os alunos se familiarizem e formem uma imagem dos mesmos.

A utilização do origami permitirá que as deduções e demonstrações e relações geométricas, a partir da construção dos sólidos Platão, possa ser observado em várias posições e angulações, tornando o registro da imagem mental mais dinâmico e com isso o aluno poderá explorar melhor as propriedades do objeto, fazer conjecturas e tirar conclusões sobre o mesmo.

Deste modo podemos facilitar o processo de desenvolvimento dos quatro primeiros níveis iniciais na teoria de Van Hiele do desenvolvimento do pensamento geométrico, dando destaque à visualização.

Capítulo 3

3.1 - Análise do Questionário aplicado para diagnóstico

A pesquisa foi realizada com alunos do primeiro ano de matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, UEMS, tal público foi escolhido pela pesquisa se relacionar com a geometria espacial sendo tal conteúdo ministrado na prática apenas nos últimos bimestres do segundo e terceiro ano do ensino médio, os acadêmicos do primeiro ano do curso de Matemática, portanto já teriam tido tal conteúdo.

A pesquisa foi realizada por meio de questionário que segue no **anexo 1** aplicado em sala e para facilitar o resgate do conhecimento referente aos poliedros foram levados para cada aluno uma reprodução em origami dos cinco poliedros de Platão além do paralelepípedo como mostra a figura 49.

Para cada figura espacial foi atribuído um número para facilitar a respostas do questionário como segue na lista abaixo:

1. Dodecaedro
2. Icosaedro
3. Tetraedro
4. Hexaedro
5. Octaedro
6. Paralelepípedo

Figura 49 - aplicação em sala
Fonte: a autora

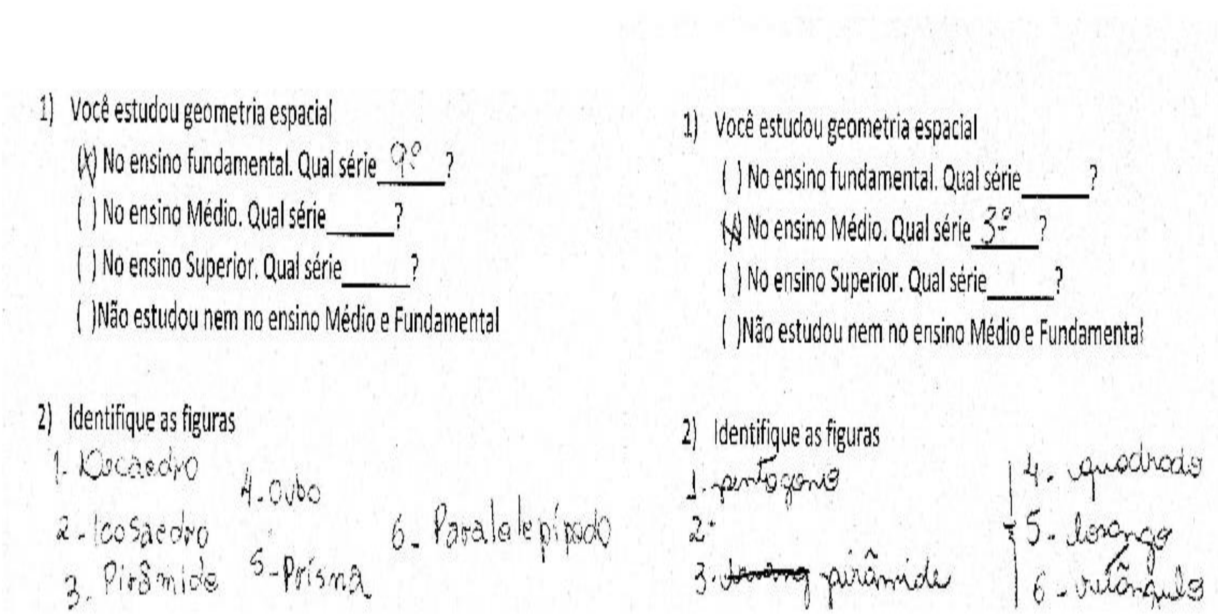
Deixamos claro aqui que o objetivo da aplicação do questionário foi puramente de diagnóstico para verificar o nível de pensamento geométrico segundo a teoria de Van Hiele que os estudantes se encontram, não criamos atividades visando o desenvolvimento do pensamento geométrico que demandaria muito tempo e muito mais aprofundamento teórico para a evolução desses níveis.

Ao realizar a análise dos questionário é possível observar que o estudo de geometria espacial se deu em diferentes séries para cada acadêmico se destacando quatro grupos o primeiro com quatro participantes que estudou desde o nono ano do ensino fundamental que chamaremos de grupo G1, o segundo grupo que estudou no terceiro ano do ensino médio grupo G2 aqui vamos incluir um acadêmico que não relata exatamente a série mas nos responde que estudou poliedros no ensino médio totalizando quatro alunos neste grupo, o terceiro grupo G3 que afirma estar estudando esta geometria no ensino superior no primeiro ano do curso de matemática, Licenciatura na disciplina de geometria plana e espacial que corresponde a maioria dos estudantes sete ao todo e por fim consideramos um grupo G4 que afirmam não ter estudado no ensino fundamental nem no médio e que não respondeu a questão que foi apenas um dos participantes da pesquisa, totalizando neste grupo quatro estudantes. Como é possível perceber temos o total de dezenove estudantes que aceitaram responder ao questionário e autorizaram o uso das informações neste trabalho de conclusão de curso, conforme quadro abaixo:

Número de Acadêmicos	Grupo	Característica
04	G1	Estudou os poliedros de Platão no nono ano do ensino fundamental
04	G2	Estudou os poliedros de Platão no terceiro ano do ensino médio
07	G3	Afirma estar estudando a geometria espacial no ensino superior no primeiro ano do curso de matemática
04	G4	Não estudou os poliedros de Platão no Ensino Fundamental e nem no Ensino Médio

Quadro 2 - Característica dos grupos.
Fonte: a autora

Como pode ser visto no **anexo 1** deste trabalho a segunda questão pedia a identificação das figuras espaciais em origami que foram entregues aos estudantes e enumeradas para facilitar a resposta do questionário não houve acerto total da identificação das figuras os estudantes conseguiram identificar apenas a figura três e quatro porém não como os poliedros de Platão como esperávamos mais sim como pirâmide e cubo respectivamente como poliedros de Platão seria tetraedro e hexaedro o que mostra que a nomenclatura dos poliedros de Platão é desconhecida para a maioria dos estudantes. Ainda analisando a questão dois podemos identificar a confusão entre figura plana e espacial como podemos ver em respostas de estudantes do grupo G2.


1) Você estudou geometria espacial
(X) No ensino fundamental. Qual série 9º ?
( ) No ensino Médio. Qual série____?
( ) No ensino Superior. Qual série____?
( )Não estudou nem no ensino Médio e Fundamental

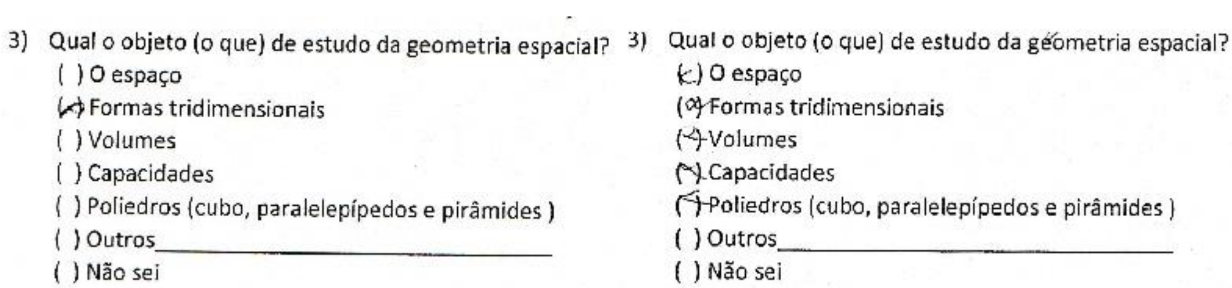
2) Identifique as figuras
1. Icosaedro
2. Icosaedro
3. Pirâmide
4. Cubo
5-Prisma
6. Paralelepípedo

1) Você estudou geometria espacial
( ) No ensino fundamental. Qual série____?
(X) No ensino Médio. Qual série 3º ?
( ) No ensino Superior. Qual série____?
( )Não estudou nem no ensino Médio e Fundamental

2) Identifique as figuras
1. pentogono
2.
3. ~~[illegible]~~ pirâmide
4. quadrado
5. losango
6. retângulo

Figura 50 - A esquerda estudante do grupo G1 nomes 3 e 4 corretos e a direita grupo G2 figura espacial confundida com figura plana.
Fonte: Questionário aplicado

Na questão três do questionário houve acerto quanto ao objeto de estudo da geometria que são as formas tridimensionais em todos os grupos considerados, mas também podemos observar uma confusão de ideias quanto ao objeto de estudo e as propriedades inerentes a esses objetos como o caso de capacidade e volume além de considerarem que a geometria espacial se ocupa apenas do estudo dos poliedros


3) Qual o objeto (o que) de estudo da geometria espacial?
( ) O espaço
(X) Formas tridimensionais
( ) Volumes
( ) Capacidades
( ) Poliedros (cubo, paralelepípedos e pirâmides)
( ) Outros____
( ) Não sei

3) Qual o objeto (o que) de estudo da geometria espacial?
(X) O espaço
(X) Formas tridimensionais
(X) Volumes
(X) Capacidades
(X) Poliedros (cubo, paralelepípedos e pirâmides)
( ) Outros____
( ) Não sei

Figura 51- A esquerda resposta do grupo G4 e a direita resposta do grupo G3.
FONTE: Questionário aplicado

3) Qual o objeto (o que) de estudo da geometria espacial?

( ) O espaço

( ) Formas tridimensionais

( ) Volumes

( ) Capacidades

(x) Poliedros (cubo, paralelepípedos e pirâmides)

( ) Outros______________________________

( ) Não sei

Figura 52 - Resposta do grupo G3. FONTE: Questionário aplicado

Quando o hexaedro é identificado como cubo todos os estudantes sabem indicar pela forma de qual figura se trata o cubo que conforme a numeração no momento da aplicação do questionário era o número quatro. O que mostra em relação à teoria de Van Hielle que os estudantes apresentam as características da fase inicial e analisando as respostas das questões seguintes são capazes em sua grande maioria de identificar algumas características dos poliedros como os polígonos que constituem as faces dos poliedros, mas não de maneira formal fato esse reforçado por eles não conseguirem responder a questão oito do questionário o conhecimento ainda se apresenta de maneira informal e não muito estruturado ver figura 53 apenas um estudante respondeu uma das características para um poliedro ser de Platão com grande coerência como podemos observar na figura 53, porém o estudante ainda não tem um conhecimento efetivo pois apresenta alguns erros nas respostas do questionário e acredita que há mais poliedros de Platão dos que foram apresentados .

4) Qual dos cinco poliedros dados é o hexaedro ou cubo (Indicar o número)

4

5) Como é chamado o poliedro número 3

( ) Icosaedro

(x) Tetraedro

( ) Não sei

6) Qual o polígono que está na face do poliedro número 2?

( ) Triangulo

(x) Pentágono

( ) Quadrado

( ) Não sei

7) Um poliedro é de Platão quando satisfaz as condições

(x) Todas as faces tem o mesmo número de aresta

( ) Todos os ângulos poliedros tem o mesmo número de arestas

( ) Se verifica a relação de Euler (V+F=A+2)

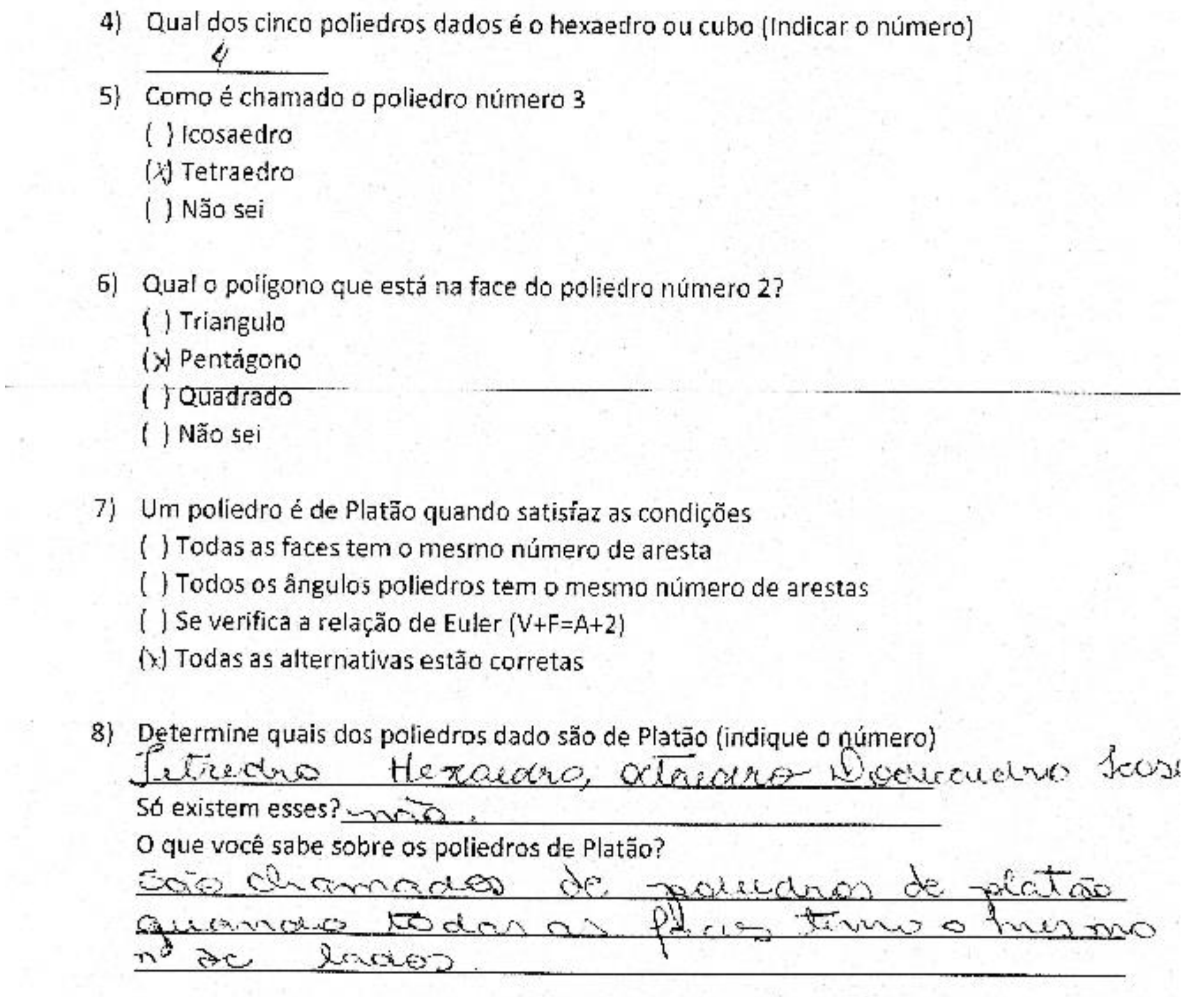
( ) Todas as alternativas estão corretas

8) Determine quais dos poliedros dado são de Platão (indique o número)

Só existem esses?

O que você sabe sobre os poliedros de Platão?

Figura 53 - Questões 4 e 5 corretas e a questão 8 não respondida.
FONTE: Questionário aplicado.



4) Qual dos cinco poliedros dados é o hexaedro ou cubo (Indicar o número)
4

5) Como é chamado o poliedro número 3
( ) Icosaedro
(X) Tetraedro
( ) Não sei

6) Qual o polígono que está na face do poliedro número 2?
( ) Triangulo
(X) Pentágono
( ) Quadrado
( ) Não sei

7) Um poliedro é de Platão quando satisfaz as condições
( ) Todas as faces tem o mesmo número de aresta
( ) Todos os ângulos poliedros tem o mesmo número de arestas
( ) Se verifica a relação de Euler (V+F=A+2)
(X) Todas as alternativas estão corretas

8) Determine quais dos poliedros dado são de Platão (indique o número)
Tetraedro Hexaedro, octaedro Dodecaedro Icosa
Só existem esses? não.
O que você sabe sobre os poliedros de Platão?
São chamados de poliedros de platão quando todas as faces tem o mesmo nº de lados.

Figura 54 - Questão oito com uma característica dos poliedros de Platão.
FONTE: Questionário aplicado

Há certa dificuldade em identificar por parte de estudantes do grupo G4 os polígonos que constituem a face dos poliedros como podemos ver nas respostas dadas abaixo deste grupo ver figura 55. O poliedro que corresponde a questão seis é o icosaedro e, portanto sua face é um triângulo.

6) Qual o polígono que está na face do poliedro número 2?
( ) Triangulo
(x) Pentágono
( ) Quadrado
( ) Não sei

7) Um poliedro é de Platão quando satisfaz as condições
( ) Todas as faces tem o mesmo número de aresta
( ) Todos os ângulos poliedros tem o mesmo número de arestas
( ) Se verifica a relação de Euler (V+F=A+2)
(x) Todas as alternativas estão corretas

8) Determine quais dos poliedros dado são de Platão (indique o número)
não sei identifica.
Só existem esses?___________________________
O que você sabe sobre os poliedros de Platão?
____
____

Figura 55 - Resposta do grupo G4.
FONTE: Questionário aplicado

Realizando uma análise mais geral do questionário é possível observar que o conhecimento de geometria espacial ainda se encontra muito informal apenas de algumas experiências vivenciadas em apenas algumas séries escolares os conceitos não estão apropriados pelo aluno um trabalho ainda precisa ser realizado para que os estudantes possam evoluir seu pensamento, em se tratando da teoria de Van Hiele os estudantes se encontram no segundo nível de pensamento apenas identificando e sabendo indicar algumas características referentes a um poliedro com alguma dificuldade, pois ainda fazem confusão entre a geometria plana e a geometria espacial. Mesmo que por tentativa e erro acertam a questão sete são honestos ao responder que não se lembram de propriedades ou características inerentes aos poliedros de Platão.

5) Qual o polígono que está na face do poliedro número 2?
(X) Triangulo
( ) Pentágono
( ) Quadrado
( ) Não sei

6) Um poliedro é de Platão quando satisfaz as condições
( ) Todas as faces tem o mesmo número de aresta
( ) Todos os ângulos poliedros tem o mesmo número de arestas
( ) Se verifica a relação de Euler (V+F=A+2)
(X) Todas as alternativas estão corretas

7) Determine quais dos poliedros dado são de Platão (indique o número)
4, 3, 5, 1.
Só existem esses?
O que você sabe sobre os poliedros de Platão?
Não me recordo

Figura 56 - Resposta do grupo G3.
FONTE: Questionário Aplicado

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho vem contribuir para o ensino da Geometria Espacial de uma forma mais lúdica, proporcionando maior compreensão no estudo dos poliedros de Platão e diagnosticar a necessidade de um trabalho mais cuidadoso com relação à geometria espacial que apesar de ter evoluído nos últimos anos por ser parte integrante do currículo do ensino médio ainda precisa ser melhor desenvolvido até mesmo no curso superior para sanar as dificuldades dos acadêmicos neste conteúdo.

Procuramos tratar aspectos direcionados a construção dos poliedros de Platão com o uso do origami como algo que não se deve ser encarado apenas como um passatempo ou brincadeira, e sim como um meio pedagógico e didático com múltiplas unidades e também como elemento motivador da aprendizagem na Geometria Espacial.

Desta forma, o uso do material concreto fará sentido quando associado a uma metodologia que direcione as atividades propostas.

Assim a eficácia mostrada pela utilização da Teoria de Van Hiele para aprendizagem de conceitos geométricos referentes à Geometria Plana se mostrou perfeitamente possível quando bem elaborada para o desenvolvimento de conceitos geométricos relativos à Geometria Espacial como Gutierez nos mostra.

O resultado final da construção dos poliedros de Platão através do origami é um material manipulável, que permite ao aluno manusear o objeto em estudo, para analisar suas propriedades e características e assim se o estudo for bem dirigido o aluno poderá ir elevando seu nível segundo a teoria de Van Hiele. A análise do questionário aplicado vem nos mostrar que é necessário um trabalho intenso no que se refere ao ensino da geometria espacial para que os conceitos possam ser melhor assimilados pelos alunos.

Mediante ao diagnóstico destas dificuldades se faz necessário a aplicação de atividades que possam contribuir para que os alunos desenvolvam seu pensamento geométrico para alcançar os mais altos níveis do pensamento, mas para isso é necessário um trabalho de longo prazo e de um professor mediador para que o responsável pela aprendizagem não seja só o professor, mas também os alunos. Sugerimos o uso do origami para que o aluno possa manusear e observar as características dos poliedros de maneira experimental mostramos no terceiro capítulo que é possível construir todos os poliedros de Platão e com o origami o aluno poderá de maneira prática observar as propriedades, indicamos o uso de software como recurso posterior quando os alunos já tiverem evoluídos de nível no que se refere a teoria de Van Hiele quarto nível que os alunos estão construindo os conceitos de maneira formal.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARRETO, Carlos Alberto. **A Geometria do Origami como ferramenta para o ensino da Geometria Euclidiana na Educação Básica**, 2013. 86p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão – SE.

BECKER, Marcelo. **Uma alternativa para o ensino de geometria: visualização geométrica e representações de sólidos no plano**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2009. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/17161 >. Acesso em: 17.07.2015.

BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, 2ª ed. - Editora Da Universidade de São Paulo, 1999.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. **Metodologia do ensino de matemática**. São Paulo: Editora Cortez, 2ª edição, 2006.

CASTRUCCI, Benedito. **Geometria: curso moderno.** São Paulo: Livraria Nobel S.A, 3ª edição, 1976.

CROWLEY, Mary L**. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico.** In: LINDQUIST, Mary & SHULTE, Albert P. (organizadores), Aprendendo e Ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1994.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José N. **Fundamentos de matemática elementar 10: geometria espacial**. 5ª edição. São Paulo: Atual Editora, 1999.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. 5ª ed. – Campinas. SP: Editora da Unicamp, 2011.

GUTIÉRREZ, A: las representaciones planas de cuerpos 3-dimensionales en la enseñanza de la geometría espacial. (Revista EMA 1998, vol. 3, n° 3, pp 193 – 220)

GUTIERREZ, A.: processos y habilidades en visualización espacial. Valencia 1991.

GUTIERREZ, A.:Exploring the links between van Hiele levels and 3-dimensional Geometry. Departamento de Didática de la matemática, Universidad de Valencia, Sapain,1992.

HAYASAKA, Enio Yoshinori, Nishida, Silvia Mitiko, **Pequena** historia sobre o origami <http://www2.ibb.unesp.br/Museu_Escola/Ensino_Fundamental/Origami/Documentos/indice_origami.htm>. Acesso em 25. 8.2016.

Kanegae, Mari, **Breve Histórico do Origami no Brasil,** **<**http://www.kamiarte.com.br/breve_historico2.htm>. Acesso em: 08. 08.2016.

LUNA, Marcelo de Oliveira, **ESTUDO DOS ORIGAMIS DOS POLIEDROS DE PLATÃO**, Universidade Federal de Pernambuco, 2014, Trabalho de Graduação

LINDQUIST, Mary Montgomery e Shulte, Albert P. (organizadores). **Aprendendo e Ensinando Geometria.** 4ª reimpressão. São Paulo, Atual Editora, 1994.

Martín, Bernabé. Papiroflexia. <http://www.aloestedigital.com/papirocurso/1_presentacin.html>. Acesso em: 20. 08. 2016.

NASSER e NEIDE F. Parracho Sant´Anna: **Geometria Segundo a teoria de Van Hiele.** 2 ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

Anexo

Questionário

1) Dodecaedro
2) Icosaedro
3) Tetraedro
4) Hexaedro
5) Octaedro
6) Paralelograma

1) Você estudou geometria espacial
   ( ) No ensino fundamental. Qual série_______?
   ( ) No ensino Médio. Qual série_______?
   ( ) No ensino Superior. Qual série_______?
   ( )Não estudou nem no ensino Médio e Fundamental

2) Identifique as figuras

(exposta na sala de aula)

3) Qual o objeto (o que) de estudo da geometria espacial?
   ( ) O espaço
   ( ) Formas tridimensionais
   ( ) Volumes
   ( ) Capacidades
   ( ) Poliedros (cubo, paralelepípedos e pirâmides)
   ( ) Outros______________________________
   ( ) Não sei

4) Qual dos cinco poliedros dados é o hexaedro ou cubo (Indicar o número)
   ____

5) Como é chamado o poliedro número 3
   ( ) Icosaedro
   ( ) Tetraedro
   ( ) Não sei

6) Qual o polígono que está na face do poliedro número 2?
   ( ) Triangulo
   ( ) Pentágono
   ( ) Quadrado
   ( ) Não sei

7) Um poliedro é de Platão quando satisfaz as condições
   ( ) Todas as faces tem o mesmo número de aresta
   ( ) Todos os ângulos poliedros tem o mesmo número de arestas
   ( ) Se verifica a relação de Euler (V+F=A+2)
   ( ) Todas as alternativas estão corretas

8) Determine quais dos poliedros dado são de Platão (indique o número)
   ____
   Só existem esses?____
   O que você sabe sobre os poliedros de Platão?
   ____
   ____
   ____
   ____
   ____

   Comentario se achar necessário
   ____
   ____
   ____
   ____

*Autorizo o uso do formulário sem identificação para o trabalho de conclusão de Curso
( ) Sim ( ) Não