Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Matemática, Licenciatura

ALESSANDRA LIMA DE MORAES MANTOVANI

ESTUDO DE CONCEITOS DA GEOMETRIA PLANA POR MEIO DA CONSTRUÇÃO COM RÉGUA E COMPASSO VIA TEORIA DE VAN-HIELE.

Nova Andradina
2016

ALESSANDRA LIMA DE MORAES MANTOVANI

ESTUDO DE CONCEITOS DA GEOMETRIA PLANA POR MEIO DA CONSTRUÇÃO COM RÉGUA E COMPASSO VIA TEORIA DE VAN-HIELE.

O trabalho de conclusão do curso apresentado à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, unidade de Nova Andradina, como parte dos requisitos para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora:Me. Luciana Kemie Nakayama.

Nova Andradina
2016.

ESTUDO DE CONCEITOS DA GEOMETRIA PLANA POR MEIO DA CONSTRUÇÃO COM RÉGUA E COMPASSO VIA TEORIA DE VAN-HIELE.

O trabalho apresentado à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, unidade de Nova Andradina, como parte dos requisitos para obtenção do título de licenciado em Matemática.

EXAMINADORES

____

Profª. Me. Luciana Kemie Nakayama-UNESPAR/Apucarana

Orientadora

____

Profª. Me. Lucineide Keime Nakayama de Andrade-UNESPAR/Apucarana

____

Prof. Luis Orestes Cauz – UEMS/ Nova Andradina

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Zilda Lima de Moraes e Silvino de Moraes, ao meu esposo Marcelo Mantovani e meu filho Marcelo Lima de Moraes Mantovani que sempre me incentivou para as realizações dos meus ideais, me encorajando a enfrentar todos os momentos difíceis da vida. Também dedico com muito carinho aos amigos que conseguimos ao longo desses quatro anos que sempre me apoiaram, me compreenderam e contribuíram para minha formação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que fizeram parte dessa construção profissional, primeiramente quero agradecer a Deus por a cada dia me dar forças para me manter nessa caminhada, a toda minha família, em especial meu esposo Marcelo Mantovani, por toda paciência e entendimento nas minhas ausências, ao meu filho por ser a minha maior motivação, a minha mãe Zilda C. L. de Moraes e ao meu falecido pai Silvino de Moraes, por ter me ensinado a nunca desistir dos meus sonhos, pessoas essas que sempre fizeram de tudo para ver meu crescimento, apoiando, incentivando, acreditando, lutando, e por toda base que me deram, quero agradecer também por todas as pessoas que Deus colocou no meu caminho as quais contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional, a todos os professores, em especial aos professores Drs. Antonio Sales, Sonner Arfux de Figueiredo, José Felice e a minha orientadora Luciana Kemie Nakayama, e a todas as amizades construídas nessa longa jornada. A todos o meu mais sincero OBRIGADO!!!.

EPÍGRAFE

"Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível". (Charles Chaplin).

RESUMO

Este Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) tem por objetivo fazer uso do desenho geométrico para auxiliar os avanços dos educandos, na educação básica, segundo os níveis do pensamento geométrico da Teoria de Van Hiele, bem como resgatar as formas de construção de polígonos regulares através de régua e compasso que são pouco explorados atualmente nas escolas. Tendo como um dos resultados que as construções geométricas utilizando uma régua não graduada e um compasso nos permiti obter pontos que podem ser construídos através de uma sequência finita de operações, esses instrumentos foram utilizados como uma ferramenta para que os alunos pudessem evoluir pelos cinco níveis do pensamento geométrico de forma prática e motivadora. Para isso foram realizadas a construção de alguns polígonos, bem como explicado alguns conceitos da geometria plana, como, retas, retas paralelas, retas perpendiculares, transporte de ângulos, entre outros.

Palavras-chave: Desenho Geométrico, Van Hiele, Geometria.

ABSTRACT

This Work Course Conclusion (TCC) is to make use of geometric design to assist the progress of students in basic education, according to the levels of geometric thinking of Van Hiele Model and rescue the forms of construction of regular polygons by ruler and compass are currently little exploited in schools. Having as one of the results that the geometric constructions using a non-graded ruler and a compass to let get points that can be built through a sequence fi nite operations, these instruments have been used as a tool for students to be able to evolve the five levels geometric thinking practice and motivating way. To this were done the construction of some polygons and explained some concepts of flat geometry, as straight, parallel lines, perpendicular lines, transmission angles, among others.

Keywords: Geometric Design, Van Hiele Geometry.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O estudo dos conceitos da geometria plana é realizado no curso de matemática, porém é um estudo teórico sem muitas aplicações. A construção com régua e compasso possibilita a aprendizagem destes conhecimentos de forma mais dinâmica, o que motivou o tema para discussão do trabalho de conclusão de curso de Matemática, Licenciatura, que visou realizar um estudo sobre a teoria de Van Hiele, que teve origem nas respectivas teses de doutorado de Dina Van Hiele-Geldof e de seu marido, Pierre Van Hiele, na Universidade de Utrecht, Holanda, em 1957.

No primeiro capítulo deste trabalho salientaremos sobre o Desenho geométrico no Brasil e a Teoria de Van Hiele, onde os Van Hiele propuseram um modelo teórico para a construção do pensamento geométrico, segundo os autores, ensino da geometria leva o aluno a adquirir uma rede de relações que propicia enunciar o seu pensamento, de uma forma lógica e dedutiva. Neste sentido, o pensamento geométrico contribui para a construção de uma rede de representações relacionais, que é formada pouco a pouco, essa construção se dá em um grau de dificuldade crescente em diferentes níveis aos quais abordaremos na fundamentação teórica. A teoria de Van Hiele propõe um pensamento geométrico com o objetivo de identificar o nível de maturidade geométrica que os alunos se encontram e indicam caminhos para ajudá-los a avançar de um nível para outro, tendo por base as dificuldades apresentadas por alunos do curso secundário na Holanda.

No segundo capítulo abordaremos as Construções de Polígonos Regulares: Triângulo, Quadrado, Trapézio, Losango, Pentágono e os Conceitos Básicos da Geometria, pois, para realização dessas construções será necessário rever ou aprender vários conceitos matemáticos como retas, segmentos, tipos de retas, aqui particularmente iremos utilizar retas paralelas e perpendiculares, mediatriz, bissetriz e entre outros.

No terceiro capítulo apresentaremos sugestões de algumas atividades para que os alunos do ensino básico possam realizar, obtendo assim um diagnóstico referente à quais dos cinco níveis do pensamento geométrico estudado por Van Hiele que o aluno se encontra e com estas informações como o professor pode desenvolver um plano para que seu aluno possa evoluir o pensamento geométrico. Tais atividades são sugeridas com a utilização da construção geométrica com régua e compasso as quais foram aplicadas com alunos do nono ano em uma escola pública de Nova Andradina-MS. No mesmo capítulo encontra-se ainda a análise feita mediante as respostas coletadas através da atividade sugerida neste trabalho, onde conseguimos identificar em quais níveis segundo a Teoria cada aluno se encontra.

As referidas atividades propostas foram adaptações, do livro Geometria Segundo a teoria de Van Hiele[1] que realizou um projeto para melhorar a aprendizagem de geometria em turmas de oitavo ano em escolas públicas do Rio de Janeiro pesquisa esta realizada para sua tese de doutorado e tem por objetivo contribuir para que os alunos avancem nos níveis de Van Hiele.

1 SILVA, Luciana; CANDIDO, Claudia Cueva. **Modelo de Aprendizagem de Geometria do Casal Van Hiele.** São Paulo- SP.

Capítulo 1

O Desenho geométrico no Brasil e a teoria de Van Hiele

1.1 A Origem do Desenho Geométrico no Brasil

Segundo Uibricht (apud DUTRA, 2010, p.17), o estudo geométrico foi iniciado no Brasil em 1771 na Capitania de São Paulo, em 1779 em Pernambuco e em 1812 a Academia Militar começava a ensinar Geometria Descritiva que se estendeu até o século 20 ou 21. As construções geométricas utilizando uma régua não graduada e um compasso, permiti obter pontos que podem ser construídos através de uma sequência finita de operações: triângulos, bissetrizes, mediatrizes, quadrados, retângulos, divisões de segmentos e muitas outras, basta se ter dois pontos distintos. No próximo capítulo demonstraremos passo a passo como se faz cada uma dessas construções geométricas baseando-se em seus teoremas e definições, após seu surgimento em torno de 300 a.C estes instrumentos tem sido a marca registrada da Geometria.

Segundo Eves, (apud SILVA, 2013, p.6), os matemáticos da Grécia Antiga já tinham um grande interesse por estas construções e segundo, o traçado de construções era conhecido como um jogo, que tinha suas regras, e era considerado como um dos jogos mais fascinantes e absorventes daquela época.

Com o auxílio desses instrumentos os gregos conseguiram realizar várias construções geométricas e ainda solucionar alguns problemas geométricos, como: construção de retas paralelas, a bissecção de segmentos, a construção de circunferência e arco, a construção de uma reta perpendicular passando por um ponto, dentre muitas outras.

As construções geométricas continuam até hoje a ter grande importância na compreensão da Matemática elementar. Seus problemas desafiam o raciocínio e exigem conhecimentos dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras e não é exagero dizer que não há nada melhor para aprender geometria do que praticar as construções geométricas.

A pureza das construções com régua e compasso é a mesma da geometria analítica que também resolve, de forma equivalente, problemas de geometria usando as coordenadas, (pontos dados), a equação da reta (régua) e a equação da circunferência (compasso).

Durante a reforma educacional dos ensinos primários, secundários e superiores nos anos de 1882 e 1883, o desenho geométrico teve uma valorização maior nos dois primeiros níveis de ensino, devido à intervenção de Rui Barbosa, que para atingir o desenvolvimento industrial e promover o progresso do país propôs uma educação técnica.

Vieira, (apud DUTRA, 2010, p.18), afirma que no primário o desenho era abordado como parte da Geometria prática. Já no secundário, o programa de Geometria era amplo e abrangia a Geometria Descritiva, Teoria das Sombras, Perspectivas, Álgebra e Cálculo Diferencial.

De acordo com Penteado (1960) [5], na segunda série atualmente 3° série os alunos eram instruídos a não fazer uso de instrumentos para as construções de desenho geométrico, mais sim a continuar o desenho a mão livre, o objetivo principal do traçado a mão livre seria habilitar o aluno a fazer indicações de um modo sumario, mas, com relativa correção, procurando dar ao aluno uma linguagem gráfica própria ao lado da sua caligrafia individual, porém nem sempre essa orientação era seguida, pois, alguns professores toleram o uso de instrumentos, devido a esses acontecimentos fora recomendado apenas o uso dos principais instrumentos, os quais são: a régua, o esquadro e o compasso.

No caso de desenhos decorativos, os alunos das séries iniciais utilizavam apenas lápis preto (n° 1 e 2), borracha, uma caixa de lápis de cor (com seis cores no mínimo). A régua, o compasso e o esquadro poderiam ser utilizados apenas em casos especiais.

As formas dos objetos bem como as suas dimensões experimentam modificações, maiores ou menores, segundo a distância e o lugar ocupados pelos modelos a serem copiados. Somente os objetos esféricos apresentam o mesmo aspecto sempre na totalidade, a não ser aumentando ou diminuindo de tamanho, conforme se aproximam ou se afastam, mas sempre teriam o mesmo aspecto de uma esfera. (apud Penteado p.47,1960), para esse fenômeno Penteado o nomeia como Perspectivas.

Com o conhecimento das regras dessas perspectivas podiam-se representar os objetos, mas não com suas reais dimensões, mais sim, de acordo com que elas eram vistas, criando as imagens com dimensões maiores ou menores dependendo da distância do observador, assim podemos dizer que se trata de uma perspectiva de observação.

Para enquadrar uma figura ou um objeto na forma de perspectiva de observação eram necessários quatro elementos fundamentais os quais são:

- Linha de horizonte: está sempre a altura dos nossos olhos.
- Ponto de vista: a posição ocupada pelos olhos do observador.
- Pontos de distância: seriam os pontos de fuga para os quais se dirigem as retas na posição horizontal.
- Ponto principal: seria a extremidade da perpendicular ou raio que vai do olho do observador a linha do horizonte, qualquer que seja a altura.

O principal objetivo a ser atingido era aumentar a capacidade de ver os objetos e suas formas, naturalmente e não como vinham fazendo de maneira estreita e acanhada, Penteado entendia que era necessário o aluno com perseverança e força de vontade, aprender a ver e compreender e representar graficamente as imagens, mas não só do ponto de vista do objeto real, mas também com uma visão livre. Não há aqui a preocupação matemática em si de justificar os desenhos, mas a visão que o desenho desenvolve o pensamento e dá ao aluno um desenvolvimento da visão artística do meio em que vive e ensina a trabalhar com régua e compasso além do esquadro.

Pela reforma Francisco Campos proposta pelo Decreto n° 19890, de 18 de abril de 1932, a grade curricular do Ciclo Fundamental do Curso Secundário, com quatorze disciplinas dispostas em cinco anos, o desenho geométrico juntamente com as outras quatro, estava presente em todas as séries.

As duas séries no Ciclo Complementar era destinado a preparação para ingressar em escolas superiores, esteve presente também na segunda série para candidatos aos cursos de Engenharia e Arquitetura.

Com a aprovação da Lei Federal 5692/71 Art. **7º onde afirma que,** Será obrigatória a inclusão de Educação Moral e Cívica, Educação Física, Educação Artística e Programas de Saúde nos currículos plenos dos estabelecimentos de lº e 2º graus, observado quanto à primeira o disposto no Decreto-Lei n. 369, de 12 de setembro de 1969, que nos dois últimos anos do Segundo Grau a disciplina de Desenho Geométrico foi substituído pela de Educação Artística. Com isso, muitas escolas deixaram de aplicar as construções geométricas como um componente curricular obrigatório, passando está a ser uma disciplina do núcleo optativo, que integraria a parte diversificada do currículo, onde a escola tinha liberdade de escolher.

A Lei Federal que tornou obrigatório artes nas escolas, entretanto, não pôde assimilar, como professores de arte, pois não tinham professores habilitados para tal função. O Governo Federal então decidiu criar um novo curso universitário para preparar professores para a disciplina Educação Artística criada pela nova lei, criado em 1973, compreendendo um currículo básico que poderia ser aplicado em todo o país, com isso o mesmo poderia lecionar música, teatro, artes visuais, desenho, dança e desenho geométrico, tudo ao mesmo tempo, da lª à 8ª série e, em alguns casos, até o 2º grau. Sendo assim após aprovação da Lei de 1971 o desenho geométrico deixa de ser uma disciplina obrigatória no currículo escolar e passa a fazer parte integrada da disciplina de Artes.

De acordo com Kopke (apud OLIVEIRA, p.3) estudo do Desenho Geométrico é fundamental para uma boa aprendizagem da geometria. Quando observou as dificuldades encontradas pelos alunos de Engenharia Civil e Elétrica, Matemática, Arquitetura e Artes, se propôs a lecionar a disciplina de Desenho Geométrico. Ele lembra que a maioria dos alunos não foi estimulada suficientemente para trabalhar com a visão espacial, por isso existe uma dificuldade em aprender a disciplina.

Ao desenhar as figuras os alunos estimulam suas habilidades cognitivas, imaginando construções, pesquisando interconexões, forçando o raciocínio, e exercitando a mente.

Os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática, o trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula a criança a observar, perceber semelhanças e diferenças e identificar regularidades e caso esse trabalho seja feito a partir da exploração dos objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, ele permitirá ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

Kalter (apud OLIVEIRA) fez uma investigação exploratória consistindo de: um teste de geometria aplicado a 136 alunos de 8ª série de seis escolas de Curitiba com a finalidade de comparar os rendimentos entre aqueles alunos que tiveram e aqueles que não tiveram a oportunidade de estudar desenho geométrico; um questionário (com questões abertas e fechadas) aplicado a quatorze professores das mesmas escolas, com o objetivo de coletar opiniões sobre a importância do Desenho Geométrico e a Geometria. Os resultados mostraram que os alunos das escolas que ofereceram Desenho Geométrico apresentaram um desempenho significativamente melhor em relação aos outros. Os professores, por outro lado, opinaram que o Desenho Geométrico "concretiza os conteúdos abstratos" da Geometria e as duas disciplinas se completam. Kalter sugere que o Desenho Geométrico retorne como disciplina obrigatória no currículo das séries terminais do Ensino Fundamental. Recomenda que os conteúdos de Geometria sejam revitalizados tendo em vista uma possível integração com o Desenho Geométrico

O desenho geométrico pode contribuir em diversos campos da matemática, como no cálculo de integrais duplas, triplas e gráficos de funções de duas variáveis. Os desenhos de regiões e gráficos são um passo fundamental no entendimento e na resolução de problemas de cálculo, pois quando não se tem essa visão os alunos muitas vezes não conseguem esboçar as regiões de integração e por isso não conseguem resolver os cálculos, mesmo que tivessem entendido bem todas as técnicas de integração.

Se olharmos ao nosso redor poderemos perceber que tudo nos rodeia são figuras geométricas, com várias formas, tamanhos e ângulos, como podemos notar nas construções das portas de uma casa, que para se obter o resultado desejado é preciso primeiramente fazer um desenho geométrico com todas suas medidas, formas e ângulos para assim concluir o projeto e atingir o objetivo final.

De acordo com Marmo & Marmo (apud OLIVEIRA, p.4), o Desenho é a matéria mais adequada para incutir nos jovens bons hábitos de capricho, cuidado com os instrumentos de trabalho, habilidade manual, entre outras. Lembra também que o Desenho Geométrico nos ensina a linguagem gráfica que é uma forma concisa, precisa e universal de comunicar e expressar ideias, não estudá-lo torna-se uma falha no ensino.

1.2 Um panorama geral do desenho geométrico nas escolas e Universidades Brasileiras nos dias atuais.

Mesmo com os PCNs apontando as Construções Geométricas no currículo escolar, no Brasil não possui uma prescrição obrigatória, permanecendo assim nas escolas de forma opcional ou complementar. Existem livros didáticos específicos para a disciplina, mas as essas construções perderam o destaque dentro dos livros matemáticos.

Podemos perceber que nos últimos anos está havendo uma maior preocupação por parte dos autores de livros didáticos, professores da educação básica e poder público com relação a uma revitalização ao ensino de Geometria.

Os PCNs de matemática incentiva às construções geométricas com a utilização de instrumentos de desenho por se preocupar com o desenvolvimento do pensar geométrico de cada aluno, afim de que ele possa visualizar de uma forma clara, precisa e concreta a teoria, nos dando referências explicitas às construções com régua e compasso nas propostas de conceitos e procedimentos a serem desenvolvidos no terceiro ciclo, como:

> Identificação de um número irracional como um número de representação decimal infinita, e não periódica, e localização de alguns deles na reta numérica, com régua e compasso. Divisão de segmentos em partes proporcionais e construção de retas paralelas e retas perpendiculares com régua e compasso. Resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor. Identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso. BRASIL, (apud Raymundo, 2010, p. 39).

Para o 6º e 7º ano do Ensino Fundamental é recomendado o desenvolvimento do pensamento geométrico por meio da exploração de situações-problema que integram figuras geométricas planas, utilizando processos de ampliação e redução, transformação, dentro muitas outras formas.

Segundo Putnoki (apud Raymundo, 2010) é de se verificar, muito claramente, a proposta da utilização dos instrumentos de desenho, reforçando que o.

> [...] aspecto que merece atenção nesse ciclo é o ensino de procedimentos de construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro, transferidor, estabelecendo- se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes. É importante que essas atividades sejam conduzidas, de forma que mantenham ligações estreitas com o estudo de outros conteúdos, em particular com as atividades numéricas, métricas e com a noção de proporcionalidade.

Para o 8º e 9º do Ensino Fundamental, no trecho sobre Espaço e Forma é proposto que sejam realizados .

> [...] resolução de situações-problema que envolva a obtenção de mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, das retas paralelas e perpendiculares e de alguns

> ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos feito régua, compasso, esquadro e transferidor. Bem como a identificação e construção de alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso, sendo abordadas, também verificações experimentais e aplicações do teorema de Tales.

Nas universidades também podemos perceber a importância da presença do ensino do desenho em suas ementas curriculares, em um breve levantamento encontramos algumas universidades que ainda ensinam essa disciplina em diversos cursos, logo abaixo, podemos comprovar esse fato de acordo com o conteúdo das ementas de cada curso analisado.

Matemática: caracterização dos problemas e métodos do Desenho Geométrico. Relação entre construção e demonstração na Geometria Euclidiana. Construções elementares: paralelas; perpendiculares; mediatriz; bissetriz; arco capaz; divisão de segmentos em partes iguais; traçado de tangentes a um círculo. Construção de expressões algébricas tais como a proporcional; o segmento áureo; a média geométrica; e a Equivalências e partições de áreas. Transformações Geométricas: translações, reflexões; rotações e homotetias. Construções aproximadas

Postulados do desenho geométrico. Congruência e semelhança de triângulos. Lugares geométricos. Relações métricas nos segmentos. Teorema de Thales. Teorema de Pitágoras, Média Geométrica. Segmento Áureo. Relações métricas na circunferência. Construção de triângulos e quadriláteros. Pontos notáveis de um triângulo. Retificação e retificação de segmentos de arcos e de circunferência. Divisão da circunferência por métodos exatos e aproximados. Polígonos estrelados. Ampliação e redução de figuras. Homotetia e equivalência de áreas. Divisão de áreas. Tangência e concordância. Aplicações computacionais de conceitos geométricos através da geometria dinâmica.

Podemos observar que o conteúdo estudado permite desenvolver o terceiro e quarto nível do conhecimento geométrico segundo Van Hiele, o estudo da construção com régua e compasso permite o estudo formal da geometria o aluno é levado a outro nível de conhecimento sendo necessária a compreensão das definições e teoremas da geometria além do domínio da técnica de construção.

Arquitetura: Estudo crítico e reflexivo das projeções ortogonais, dos meios descritivos, dos problemas métricos e das transformações geométricas espaciais como ferramenta para a investigação projetual e a expressão da criatividade em Arquitetura e Urbanismo. Introdução ao método mongeano de projeções e de suas aplicações em arquitetura. Introdução ao método axonométrico de perspectiva.

Geometria plana com abordagem focada em problemas práticos constantes das atividades de criação e representação em Arquitetura e Urbanismo.

Para a construção de um projeto, por meio do desenho técnico, torná-se necessário, a utilização de uma linguagem que seja comum a todos, para que todas as pessoas envolvidas na execução da obra possam compreender o projeto elaborado, para isso a representação gráfica, que é trabalhada no ensino do Desenho Geométrico, exerce um papel de extrema importância.

Engenharia Elétrica: Estuda as normas de desenho técnico e suas aplicações. Elabora e interpreta desenhos técnicos.

Engenharia Civil: Elaboração e interpretação de esboços e desenhos técnicos por meio manual e computacional. Trabalhar os conceitos das formas de representação através da experimentação em complexidade crescente. Desenvolvimento do conceito de desenho através de suas características de multimídia. Trabalho em equipe através de computador.

Dentro da engenharia o objetivo do desenho geométrico em relação ao curso de matemática muda, saber construir e ler essas construções torna-se mais necessário para o futuro profissional, a pesar de manusear os instrumentos geométricos régua, compasso, transferidor e esquadro o aluno pode utilizar-se da tecnologia computacional que permite visualizar a construção sem tanta necessidade das definições e teorias.

1.3 A Teoria de Van Hiele.

Nesta seção estudaremos um pouco a teoria de Van Hiele que mostra como se dá o desenvolvimento do pensamento geométrico no ser humano dividindo em cinco níveis distintos.

A compreensão de muitos conceitos geométricos se materializa através de construções geométricas. Os Van Hiele propuseram um modelo teórico para a construção do pensamento geométrico, segundo eles o ensino da geometria leva o aluno a adquirir uma rede de relações que propicia enunciar o seu pensamento, de uma forma lógica e dedutiva. O pensamento geométrico contribui para a construção de uma rede de representações relacionais, que é formada pouco a pouco, essa construção se dá segundo um grau de dificuldade crescente em diferentes níveis: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. As construções geométricas fundamentais, apesar de estarem vinculados a todos esses níveis, estariam mais propriamente situadas a partir do nível de dedução informal. Neste nível considera-se que o estudante consegue estabelecer as inter-relações das propriedades, deduzindo-as, e as definições passam a ter sentido. Embora não se possa, ainda, obter uma visão mais ampla do que seja uma dedução, é possível seguir e exprimir informalmente alguns argumentos. Cada etapa remete a um ponto específico da teoria. As construções mais elaboradas, tendo como base as construções fundamentais, se encontrariam nos demais níveis de construção do pensamento geométrico.

A teoria dos Van Hiele surgiu dos trabalhos de doutoramento de Dina Van Hiele – Geldof e Pierre Van Hiele, após o falecimento de Dina, Pierre foi quem deu continuidade esclarecendo e aperfeiçoando a teoria. Em seus estudos puderam perceber as dificuldades encontradas pelos alunos em identificar figuras geométricas, com base nesses estudos desenvolveram o modelo Van Hiele de pensamento geométrico, que poderia ser usado tanto para orientar a formação, como para avaliar as habilidades dos alunos.

A teoria consiste em cinco níveis de compreensão, de forma sucinta temos:

0. **Visualização** (Nível básico): Neste nível da teoria o aluno consegue identificar a figura apenas por sua aparência física, o conceito de geometria para eles se dá como entidades totais e não como entidades que possuem componentes e atributos, são capazes de transcrever algumas figuras, mais não são capazes de identificar se as mesmas possuem ângulos retos ou se os lados opostos são paralelos. Os alunos compreendem as figuras globalmente, isto é, as figuras são entendidas apenas pela sua aparência. O aluno tem uma percepção global das figuras, na observação de um conjunto de figuras, cada figura é observada isoladamente de outras figuras de mesma classe e é dada atenção a atributos irrelevantes das figuras. Usando da percepção individual o aluno observa o objeto e o associa à figura, sem reconhecer que ela faz parte de uma classe, a figura é observada por suas partes. As descrições das figuras são feitas através de comparações de objetos com formas geométricas. O vocabulário é básico para poder fazer descrições das figuras, sem a utilização de propriedades das formas geométricas. As descrições são feitas pelos aspectos físicos e posição no espaço.

1. **Análise:** Os alunos já conseguem identificar características das figuras, onde surgem às propriedades que conceituam classes de configurações, podem visualizar que as figuras têm partes e que podem ser reconhecidas por suas partes, mas ainda não são capazes de explicar propriedades e definições, eles entendem as figuras como o conjunto das suas propriedades, começam a perceber conceitos geométricos, fazendo análise das características das figuras. Observam as figuras não como um todo, mas identificam suas partes, propriedades geométricas e percebem as consequências das propriedades. Há utilização dessas propriedades para resolução de problemas e demonstrações por meio de exemplos. Os alunos não relacionam diferentes propriedades entre figuras diferentes, não entendem de definições, utiliza-se de muita observação e experimentação.

2. **Dedução Informal:** Aqui os alunos já são capazes de deduzir propriedades e reconhecer classes de figuras, tanto as classes, quanto as definições são compreendidas e possuem significados, por exemplo, num quadrilátero, se os lados opostos são paralelos, necessariamente os ângulos opostos são iguais. Mesmo assim ainda não entendem o significado de dedução como um todo ou mesmo o papel dos axiomas, são capazes de acompanhar as demonstrações, mas não conseguem visualizar como se pode alterar a ordem lógica ou até mesmo construir uma prova partindo das premissas diferentes ou familiares. Os alunos ordenam logicamente as propriedades das figuras, conseguem fazer inter-relações entre as propriedades de uma figura e compará-las com outra figura, por exemplo, um quadrado é um retângulo, pois, tem todas as propriedades de um retângulo. Podem realizar classificações inclusivas, definem corretamente conceitos e tipos de figuras, possuem raciocínio dedutivo informal, podem entender uma demonstração, mas não são capazes de elaborar uma demonstração formal completa.

3. **Dedução Formal:** Neste nível há uma maior compreensão entre, definições, axiomas, postulados, teoremas, demonstrações, dentre outros. O aluno já é capaz de construir demonstrações com mais de uma forma, compreende a interação das condições necessárias e suficientes, já possuem habilidades para fazer distinções, em fim possuem um conhecimento mais amplo sobre as figuras geométricas, entendem a Geometria como

um sistema dedutivo. Os alunos conseguem fazer distinção entre postulados, teoremas e definições, elaboram demonstrações formais sem decorá-las. São capazes de ter uma visão global das demonstrações, percebem que podem chegar ao mesmo resultado mediante diferentes formas de demonstração. São capazes de formular enunciados de problemas e utilizam linguagem precisa.

4. **Rigor:** O aluno já consegue estudar geometrias não euclidianas e comparar sistemas diferentes, já veem a geometria em um plano abstrato, estudam diversos sistemas axiomáticos para a Geometria, estão aptos a estudar sistemas axiomáticos distintos do usual, (geometria euclidiana). São capazes de fazer comparações entre diferentes sistemas axiomáticos.

.

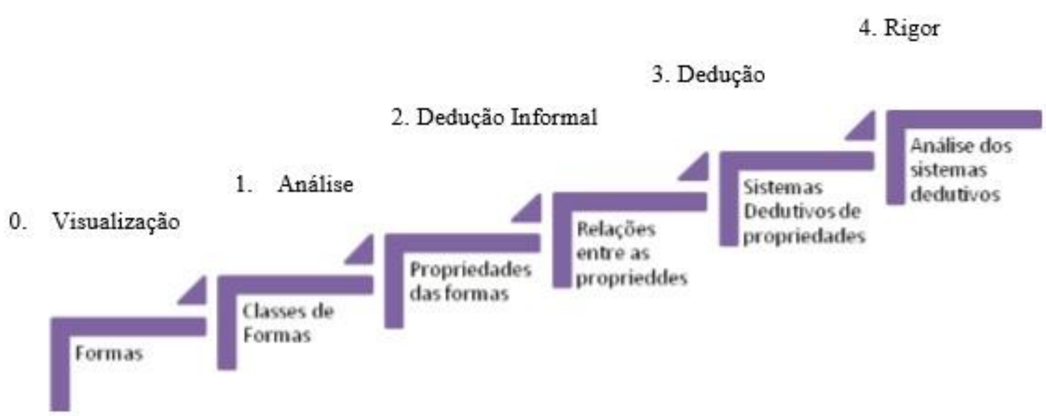


Figura 1: Características dos níveis de Van Hiele
Fonte: Van de Walle (apud Oliveira, p4)

Segundo a teoria o pensamento geométrico evolui de modo lento desde as formas iniciais de pensamento até às formas dedutivas finais onde a intuição e as deduções se vão articulando. As crianças começam por reconhecer as figuras e diferenciá-las pelo seu aspecto físico e só depois o fazem pela análise das suas propriedades, portanto, é importante que ao nível do 1º ciclo se privilegie a abordagem intuitiva e experimental do conhecimento do espaço e do desenvolvimento das formas mais elementares de raciocínio geométrico em ligação com as propriedades fundamentais das figuras e das relações básicas entre elas.

Tais níveis sugerem que o ensino da Geometria deva ser feito de forma progressiva, consequentemente, não pode haver compreensão quando se é ensinado num nível mais elevado do que o nível em que o aluno se encontra.

O modelo dá orientação aos professores de como melhorar o ensino de geometria, favorecendo assim os estudantes, para que estes tenham o máximo de aproveitamento na aprendizagem de cada tópico. Ajuda os professores a identificar formas de raciocínio do aluno verificando em que nível ele se encontra; se verificar que o aluno se encontra em um nível inferior em relação a toda a classe, o professor tem subsídios para que este avance seu nível se compreensão, o professor tem as ferramentas adequadas para ajudar o aluno a progredir de nível. O modelo visa sempre colocar o aluno não como um ser passivo na aprendizagem de geometria, mas sim um ser ativo, participando ativamente das aulas e obtendo assim o desenvolvimento necessário para a aprendizagem em geometria. (apud SILVA).

Van Hiele descreveu um modelo que vê a aprendizagem da Geometria como um processo gradual, global e construtivo. Gradual, porque a intuição, o raciocínio e a linguagem geométrica são obtidos gradualmente. Global, porque figuras e propriedades não são abstrações isoladas, elas têm relações e pressupõem diversos níveis que levam a outros. Construtivo, porque pressupõem que não existe transmissão de conhecimentos, mas que o aluno deverá construir ele próprio os seus conceitos. (Berbigier, 2010).

A teoria dos Van Hiele afirma que para obter sucesso ao longo dos níveis é de fundamental importância a forma com que se organiza o curso, o conteúdo e o material usado, a fim de obter esse sucesso, propuseram cinco fases sequenciais de aprendizagem:

1. **Interrogação/Informação**: onde professor e aluno conversam e desenvolvem atividades, fazem observações e um levantamento de questões. Nesta fase, seria mais uma questão de coleta de dados, procurar saber qual o conhecimento geométrico do aluno.
2. **Orientação dirigida:** o professor deve fazer com que o aluno, com o apoio do material por ele já escolhido, construa uma figura geométrica. Neste trabalho sugerimos os

materiais régua não graduada e compasso como será observado no último capítulo ao qual sugerimos algumas atividades de construções que passe gradativamente por cada fase.

3. **Explicação:** nesta fase os alunos começam a se expressar, trocar suas visões emergentes sob as estruturas observadas e discutir entre si e com o professor sobre que figuras podem ser formadas e quais as suas propriedades.
4. **Orientação Livre:** neste estágio o aluno já possui habilidade para trabalhar com tarefas mais complexas, que exija mais dedicação de sua parte, consegue visualizar que tarefas podem ser concluídas de várias maneiras, ganham experiências ao descobrir sua própria maneira de resolver tarefas.
5. **Integração:** neste nível os alunos fazem um levantamento de tudo o que fora aprendido nas fases anteriores, possuem um novo nível de pensamento, estão prontos para seguirem em frente e repetirem as fases em cada nível seguinte.

Para ser adequado, isto é, para ter em conta o nível de pensamento dos alunos, o ensino da Geometria no 1º ciclo deve ter como preocupação ajudá-los a progredir do nível visual para o nível de análise. Assim, eles devem começar por identificar, manipular, construir, desenhar e descrever figuras geométricas. Devem desenhar quadrados no geoplano[2] e procurar retas paralelas ou retas perpendiculares. Atividades com o tangram[3], que permite a construção de figuras geométricas que enriquecem a capacidade de visualização e de identificação das propriedades das figuras, favorecendo na evolução de sua aprendizagem.

Segundo Putnoki (apud Raymundo, 2010, p.38) em vários países como a Espanha, França e Suíça, o ensino de Geometria é visto como indispensável e as Construções Geométricas são desenvolvidas dentro da Geometria Plana. No Brasil, isso parece não acontecer do mesmo modo. Em muitas escolas o estudo de Geometria ficou limitado ao reconhecimento de figuras geométricas e cálculos de áreas como vimos na seção anterior.

[2] **GEOPLANO**: O Geoplano é um pedaço de madeira, de forma quadrada, com vários pregos cravados, a meia altura, formando um quadriculado, é um recurso utilizado para auxiliar os professores no trabalho com figuras e formas geométricas planas.

[3] **TANGRAM:** é um jogo antigo que surgiu no Oriente e consiste em sete peças. É formado basicamente por uma base quadrada dividida em cinco triângulos de tamanhos diferentes, um pequeno quadrado e um paralelogramo. Seu objetivo é conseguir montar uma determinada forma, usando as sete peças.

Capítulo 2

Construções de Polígonos Regulares: Triângulo, Quadrado, Trapézio, Losango, Pentágono.

Para realizarmos as construções desses polígonos será necessário rever ou aprender vários conceitos matemáticos como reta, segmento, tipos de retas, aqui particularmente irá utilizar retas paralelas e perpendiculares, mediatriz, bissetriz e entre outros.

2. Conceitos Básicos da Geometria

2.1 Ponto

A ideia de ponto é primitiva. Não se define. O ponto não tem dimensão e fica determinado pelo encontro de duas linhas retas ou curvas. Indicamos o ponto utilizando letras maiúsculas do alfabeto latino.

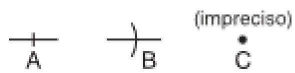


Figura 2Traçado de ponto
Fonte: As autoras

2.2 Reta

Da mesma forma que o ponto, não tem definição. A ideia de linha reta é a de um ponto que se move numa mesma direção. Indicamos a reta utilizando letras minúsculas do alfabeto latino.

Figura 3: Traçado de reta
Fonte: As autoras

2.3 Plano

A noção intuitiva de plano apoia-se na ideia de superfícies como a de um quadro ou a de uma parede. O plano é uma figura ideal. A partir da ideia que dele fazemos, deve-se entendê-lo como formado por infinitos pontos. Ele é aberto e infinito. A identificação do plano é dada por letras minúsculas do alfabeto grego: α, β, δ, ϕ, ψ, etc.

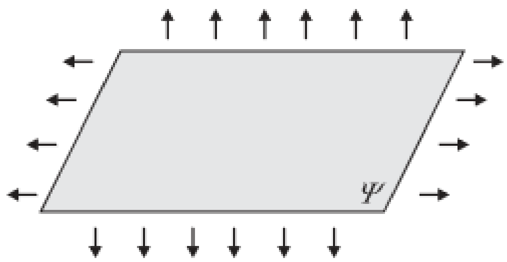


Figura 4: Plano
Fonte: As autoras

2.4 Ângulo

Ângulo é a figura plana formada por duas semirretas de mesma origem. A origem comum chama-se vértice, e as semirretas chamam-se lados. A medida usual ao ângulo é o grau, e o instrumento usado para medi-lo é o transferidor. Ângulos de mesma medida dizem-se congruentes. Indica-se o ângulo ou utilizando-se letras do alfabeto grego ^ α, ^ β, ^ γ, ou por três letras minúsculas do alfabeto, ou por três letras maiúsculas do alfabeto latino, indicando a letra do meio o vértice do ângulo e as outras duas os lados.

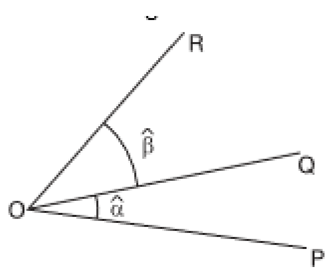


Figura 5: Identificação de ângulo
Fonte: As autoras

2.5 Triângulos

O Triângulo é o polígono com o menor número de lados (3 lados) e a soma dos seus ângulos internos é igual a 180º.

Os triângulos podem ser classificados de acordo com as medidas de seus lados e de acordo com as medidas de seus ângulos internos, é uma figura geométrica formada por três retas que se encontram duas a duas e não passam pelo mesmo ponto, formando três lados e três ângulos.

2.6 Mediatriz

Definição: mediatriz de um segmento AB é a reta perpendicular a AB passando pelo ponto médio desse segmento.

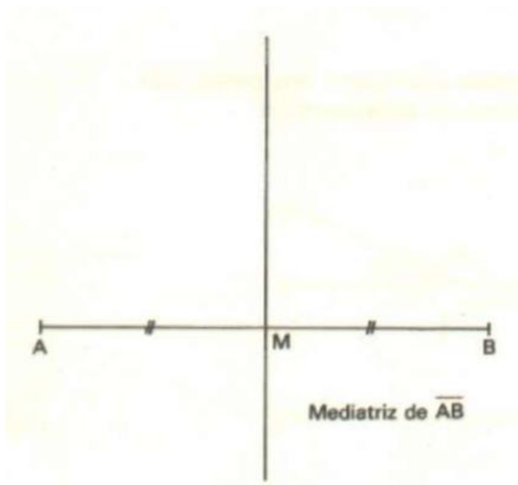


Figura 6: Traçado da mediatriz.
Fonte: José Carlos Putnoki p.71

Dado um segmento AB, você é capaz de imaginar um ponto P cuja distância até A seja igual a distância até B, isto é, PA=PB?

É claro que sim! Basta pensar em um triângulo isóscele PAB, onde AB é a base.

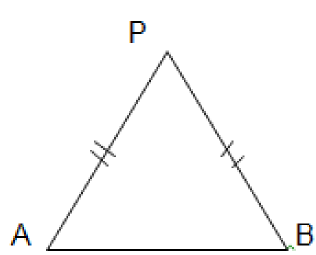


Figura 7: Triângulo Isósceles
Fonte: José Carlos Putnoki p.71

Quando um ponto P está a **igual distância** de dois pontos A e B, dizemos que P é **equidistante** de A e B.

Dados dois pontos A e B, quantos pontos equidistantes de A e B você é capaz de imaginar? Muitos?

Sim, são muitos. Na realidade, são infinitos os pontos que equidistam de A e B. Basta imaginar uma infinidade de triângulos isósceles construídos sobre a base AB. Todo vértice P, de um desses triângulos PAB, é um ponto equidistante de A e B.

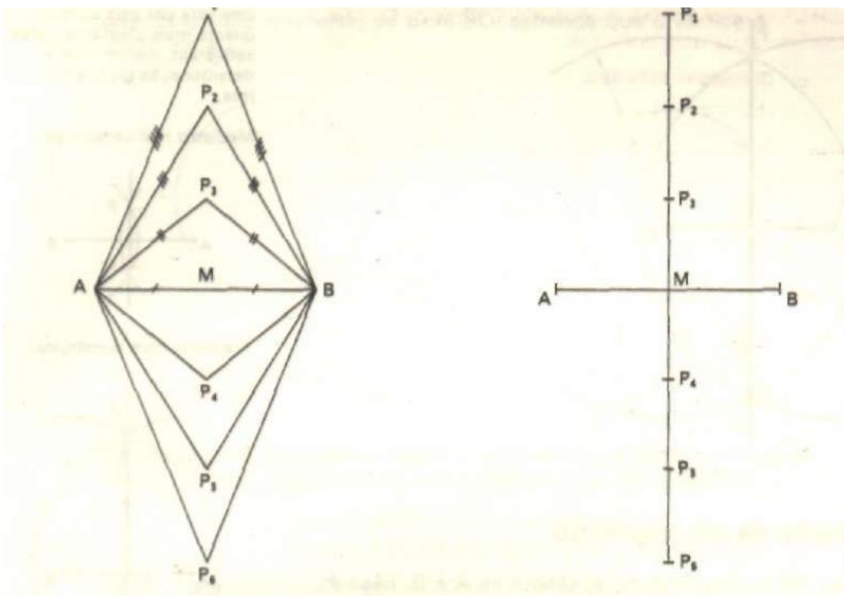


Figura 8: Traçado da mediatriz.
Fonte: José Carlos Putnoki p.71

A importante propriedade de todos os infinitos pontos equidistantes de A e B é que a reunião deles resulta numa reta notável: a **mediatriz de AB.**

Essa propriedade dos pontos da mediatriz de um segmento AB a eleva à categoria de **lugar geométrico*,** pelo seguinte:

- Todo ponto de mediatriz de AB equidista de A e B;
- Somente os pontos de mediatriz de AB equidistam de A e B.

Com isso, podemos fazer o seguinte enunciado.

- O lugar geométrico dos pontos equidistantes de dois pontos A e B dados é a mediatriz do segmento AB.

Sempre que um ponto procurado for equidistante de dois pontos A e B dados, esse ponto pertencerá à mediatriz de AB.

Obs. * Uma figura é denominada **lugar geométrico** dos pontos que possuem uma propriedade φ (φ é uma letra grega que se lê "fi"), quando, e somente quando:

- Todos os pontos dessa figura possuem propriedade φ;
- Somente os pontos dessa figura possuem a propriedade φ.

2.6.1 Construção da Mediatriz

Sabemos que dois pontos distintos determinam uma reta. Portanto, para podermos traçar a mediatriz de um segmento AB, só precisamos conhecer dois pontos da mesma. Como todo ponto equidistante de A e B pertence a essa mediatriz, vamos obter dois pontos distintos, P e Q, que sejam equidistantes de A e B. Veja como.

1. Com centro em A e raio r qualquer, usaremos uma raio de tamanho razoavelmente grande para melhor visualização do traçado, traçamos então uma circunferência λ_1.
2. Com centro em B e o mesmo raio r, traçamos a circunferência λ_2.
3. Os pontos P e Q de intersecção dessas circunferências são equidistantes de A e B. A mediatriz, é então, a reta conduzida por P e Q.

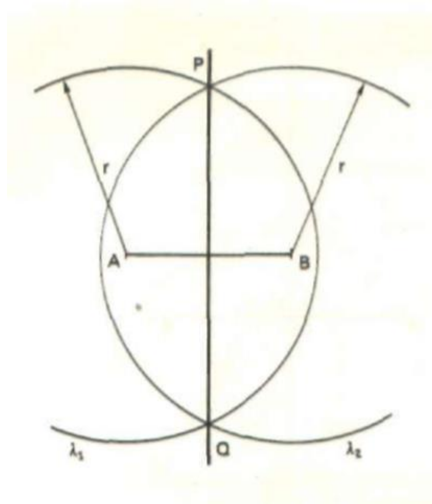


Figura 9: Traçado da mediatriz.
Fonte: José Carlos Putnoki p.72

2.7 **Ponto Médio**

O segmento de reta possui inúmeros pontos alinhados, mas somente um deles irá dividir o segmento em duas partes iguais. A identificação e a determinação do ponto médio de um segmento de reta será demonstrado com base na ilustração a seguir.

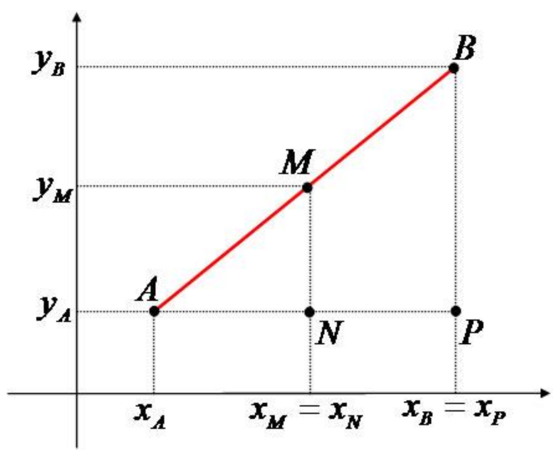


Figura 10 Ponto Médio
Fonte: brasilescola.uol.com.br

O segmento de reta AB terá um ponto médio (M) com as seguintes coordenadas (xM, yM). Observe que os triângulos AMN e ABP são semelhantes, possuindo os três ângulos respectivamente iguais. Dessa forma, podemos aplicar a seguinte relação entre os segmentos que formam os triângulos. Veja:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AP}$$

Podemos concluir que AB = 2 x (AM), considerando que M é o ponto médio do segmento AB. Temos:

$$\frac{AM}{2*AM} = \frac{AN}{AP}$$

$$\frac{AN}{AP} = \frac{1}{2}$$

$$AP = 2*AN$$

$x_P – x_A = 2*(x_M – x_A)$

$x_B – x_A = 2*(x_M – x_A)$

$x_B – x_A = 2x_M – 2x_A$

$2x_M = x_B – x_A + 2x_A$

$2x_M = x_A + x_B$

$x_M = (x_A + x_B)/2$

Utilizando método análogo, conseguimos demonstrar que $y_M = (y_A + y_B)/2$. Portanto, considerando M o ponto médio do segmento AB, temos a seguinte expressão matemática capaz de determinar a coordenada do ponto médio de qualquer segmento no plano cartesiano:

$$x_M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

Percebemos que o cálculo da abscissa xM é a média aritmética entre as abscissas dos pontos A e B. Assim, o cálculo da ordenada yM é a média aritmética entre as ordenadas dos pontos A e B.

2.8 Retas Perpendiculares

Definição: duas retas concorrentes são perpendiculares quando uma delas contém um lado de um mesmo ângulo reto.

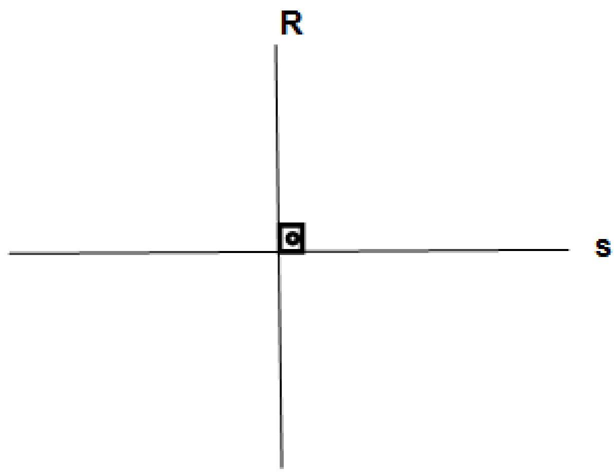


Figura 11: Retas Perpendiculares
Fonte: As autoras

r$\perp$ s: o símbolo $\perp$ denota perpendicularidade.

Dados um ponto P e uma reta b, traçar, por P, uma reta **a** perpendicular a **b.**

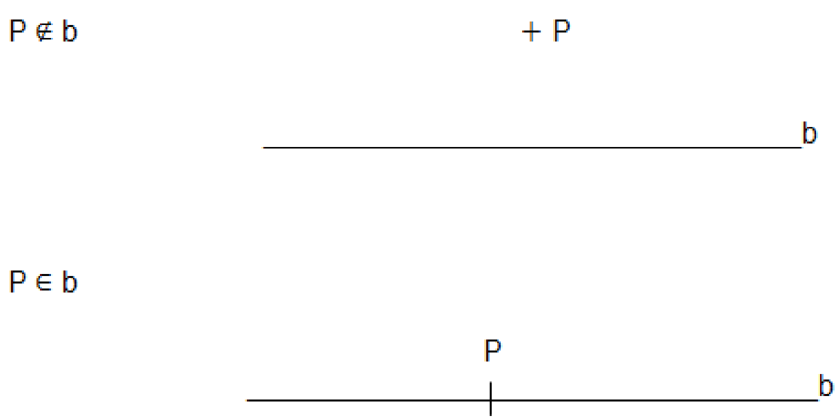


Figura 12: Traçado da reta perpendicular
Fonte: As autoras

Resolução: não importa se o ponto P pertence ou não à reta b. Construímos a perpendicular da seguinte forma.

1. Com centro em P descrevemos um arco de circunferência, com uma medida maior que o ponto médio imaginado para que se ocorra à intersecção das circunferências, que intercepta a reta b nos pontos A e B.

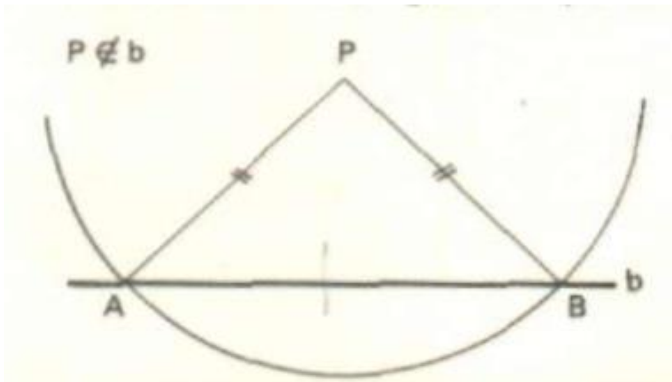


Figura 13: Traçado da reta perpendicular
Fonte: José Carlos Putnoki p.74

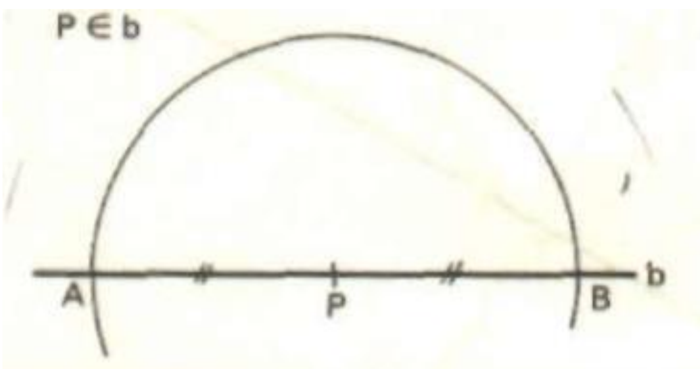


Figura 14: Traçado da reta perpendicular
Fonte: José Carlos Putnoki p.74

Nos dois casos, observe que P é equidistante de A e B, isto é, P pertence à mediatriz de AB. Mas a mediatriz de AB é perpendicular a esse segmento. Logo, ela é perpendicular à reta b. Só resta, então, determinar um segundo ponto Q dessa mediatriz e conduzir a reta procurada por P e Q.

2- Basta agora construir a mediatriz do segmento AB como descrito anteriormente.

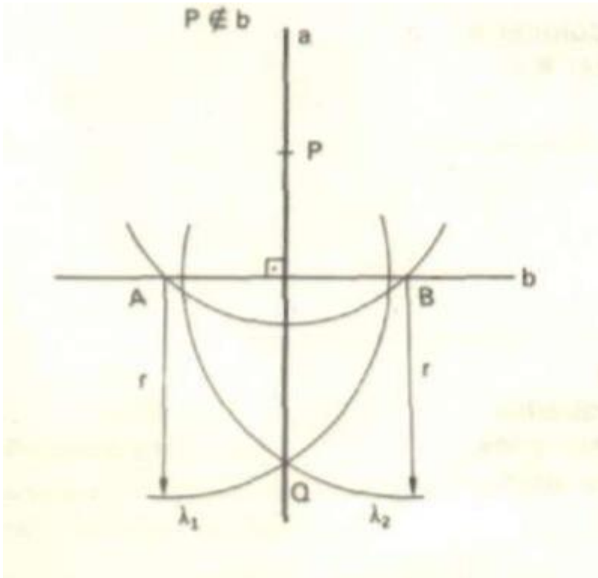


Figura 15: Traçado da reta perpendicular
Fonte: José Carlos Putnoki p.75

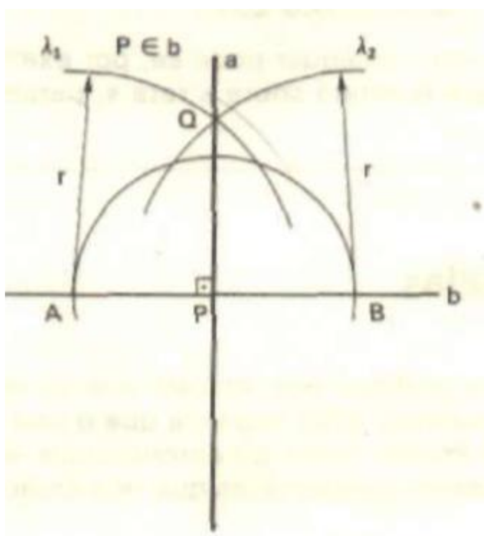


Figura 16: Traçado da reta perpendicular
Fonte: José Carlos Putnoki p.75

2.8 Retas Paralelas e Paralelas Por Um Ponto

Definição: duas retas de um plano são paralelas quando não possuem pontos comuns.

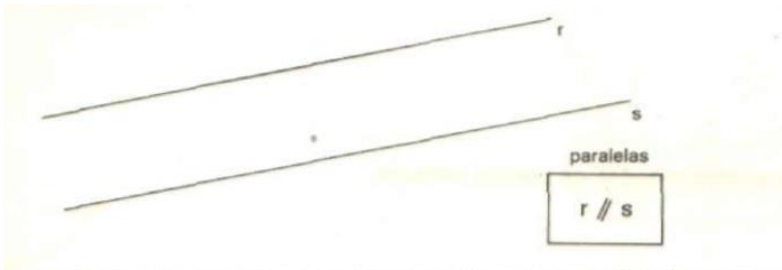


Figura 17: Retas Paralelas
Fonte: As autoras

Dizemos que duas ou mais retas tem a mesma direção se elas são paralelas entre si.

Antes de aprendermos as construções convém examinar duas propriedades geométricas que são muito uteis nesses traçados.

1. Propriedade:
    - Todo quadrilátero que tem quatro lados congruentes é um paralelogramo, isto é, possui os lados opostos paralelos.

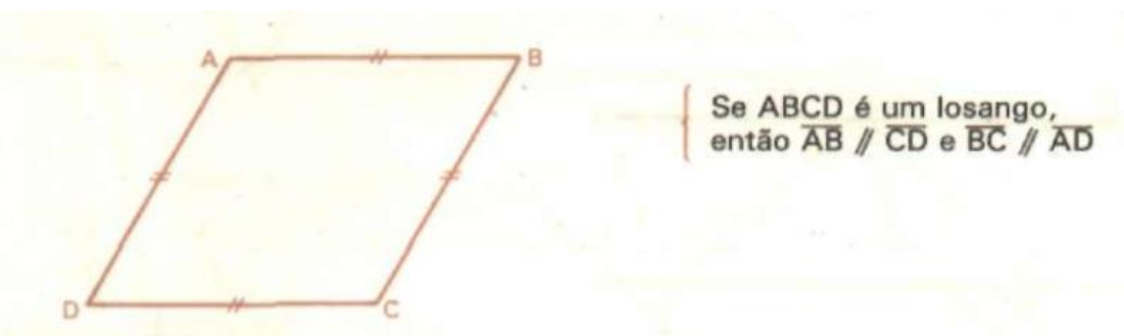


Figura 18: Losango
Fonte: José Carlos Putnoki p.77

2. Propriedade:
    - As extremidades de duas cordas congruentes quaisquer, de uma mesma circunferência, são pontos pelos quais passam duas retas paralelas.

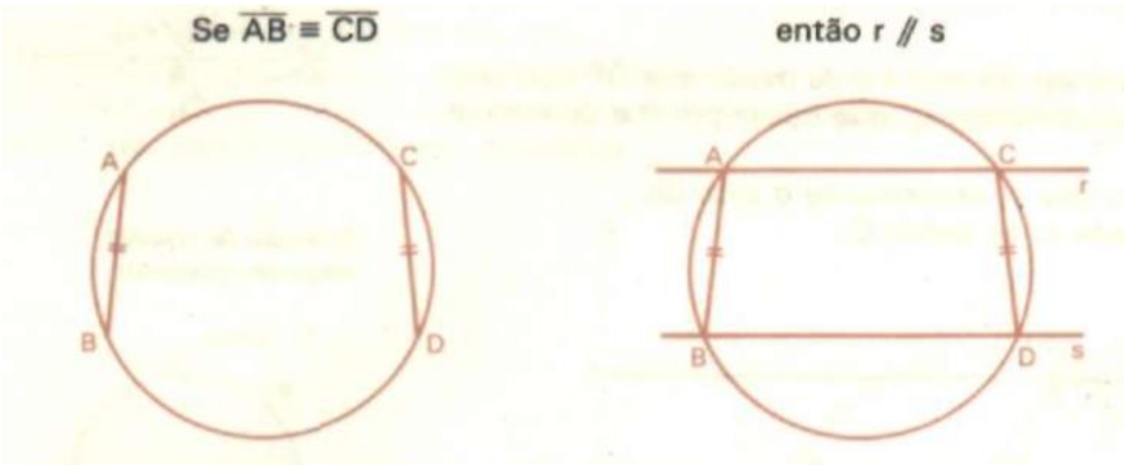


Figura 19 : Traçado da reta paralela
Fonte: José Carlos Putnoki p.77

Tendo conhecimento dessas propriedades, podemos resolver um problema importante.

Problema: dados uma reta t um ponto P, fora de t, conduzir por P a reta s paralela à t.

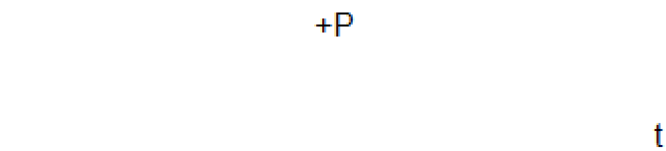


Figura 20: Traçado inicial para construção do losango.
Fonte: As autoras

1° processo: vamos construir um losango que tem um vértice P e um lado contido na reta t. vejamos como.

Com um raio r qualquer, traça-se os seguintes arcos de circunferências:

1. λ_1, com centro em P, determinando o ponto A em t;
2. λ_2, com centro em A, determinando o ponto B em t;
3. λ_3, com centro em B, determinando o ponto C em λ_1.

Evolução do traçado do primeiro processo:

1° passo:

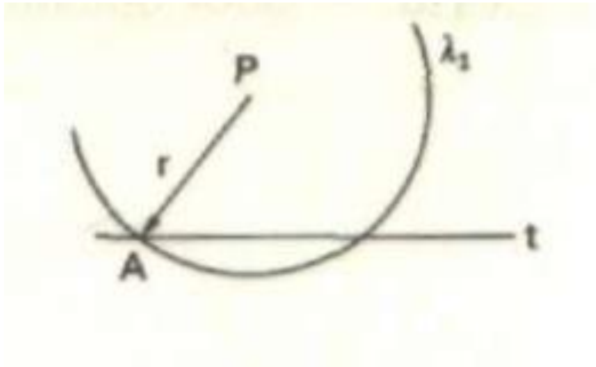


Figura 21: Traçado da reta paralela.
Fonte: José Carlos Putnoki p.78

2° passo:

Ao determinar o ponto B em t, encontramos r, ou seja, encontramos o raio da circunferência que foi traçada com centro em A.

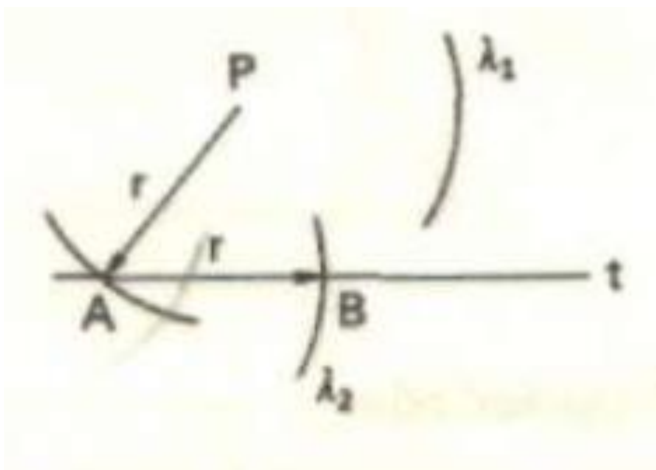


Figura 22: Traçado da reta paralela.
Fonte: José Carlos Putnoki p.78

3° passo:

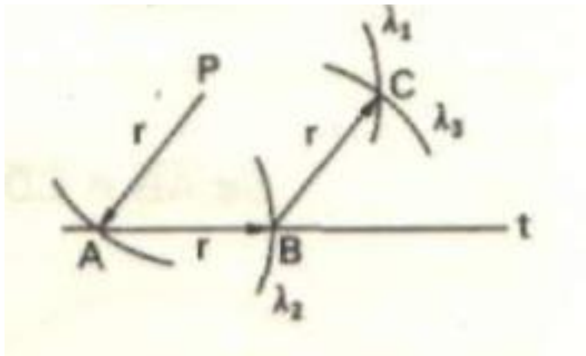


Figura 23: Traçado da reta paralela.
Fonte: José Carlos Putnoki p.78

Resultado final:

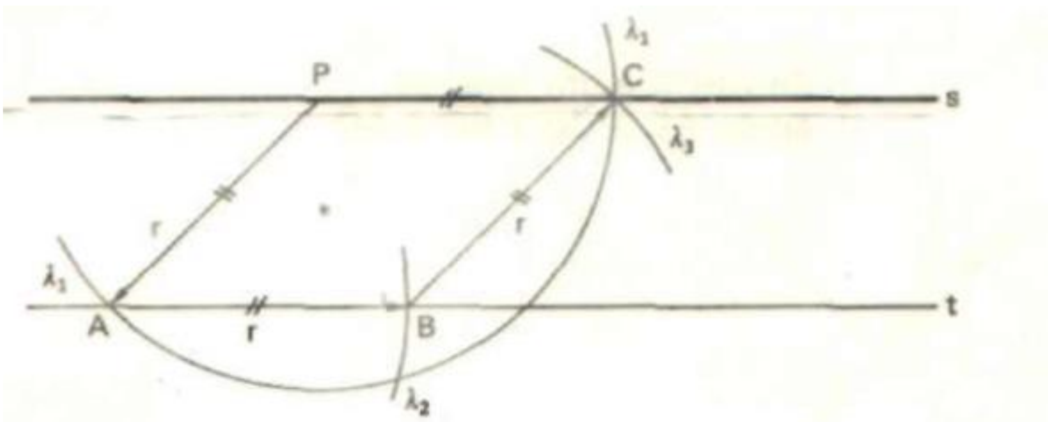


Figura 24: Traçado da reta paralela.
Fonte: José Carlos Putnoki p.78

A reta conduzida por P e C é a reta s procurada.

Como o quadrilátero PABC tem os quatros lados de comprimentos iguais a r, ele é um losango. Logo, os lados opostos PC e AB são paralelos, isto é, a reta s é paralela a t e passa por P.

O lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a uma reta r dada são iguais a l constitui um par de retas paralelas a r.

2.8.1 Construções de Retas Paralelas e Distantes da Mesma

Sejam dadas uma reta r e uma distância l. Queremos construir as retas paralelas a r e distantes l da mesma.

1° processo

1. Tomam-se dois pontos A e B sobre a reta r, convenientemente afastados e traçam-se por eles as retas s e t perpendiculares a r.
2. Com centro em A e depois em B, traçam-se arcos de circunferência de raios iguais a l, determinando os pontos S e S' sobre s e T e T' sobre t.

Evolução do traçado.

1 passo:

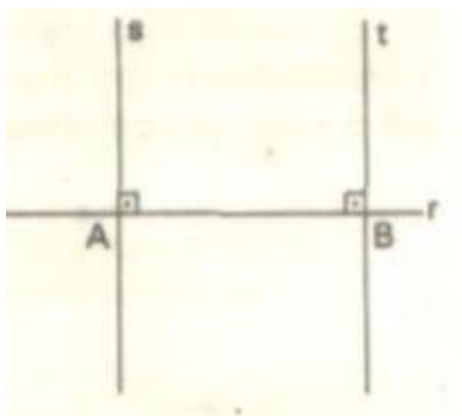


Figura 25: Traçado da reta paralela.
Fonte: José Carlos Putnoki p.80

2 passo:

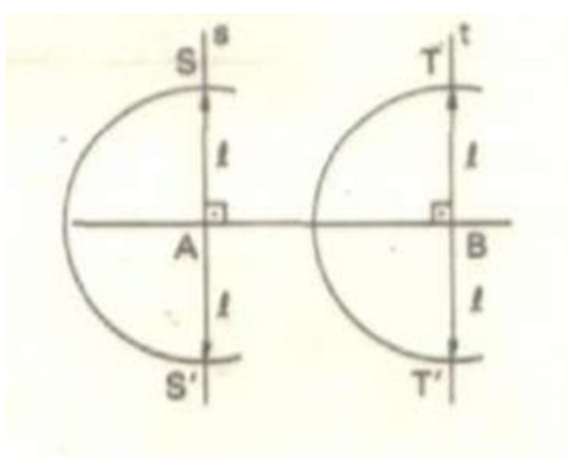


Figura 26: Traçado da reta paralela.
Fonte: José Carlos Putnoki p.80

Resultado final:

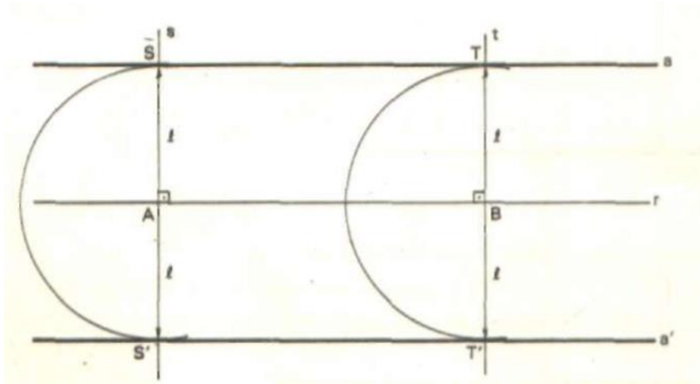


Figura 27: Traçado da reta paralela.
Fonte: José Carlos Putnoki p.80

A reta a; conduzida por S e T, e a reta a’, conduzida por S’ e T’, constituem o lugar geométrico procurado.

2.9 Bissetriz

Definição: Bissetriz de um ângulo é a semirreta que tem origem no vértice desse ângulo e que o divide em dois ângulos adjacentes (quando não possuem pontos internos em comuns) e congruentes (quando possuem a mesma medida).

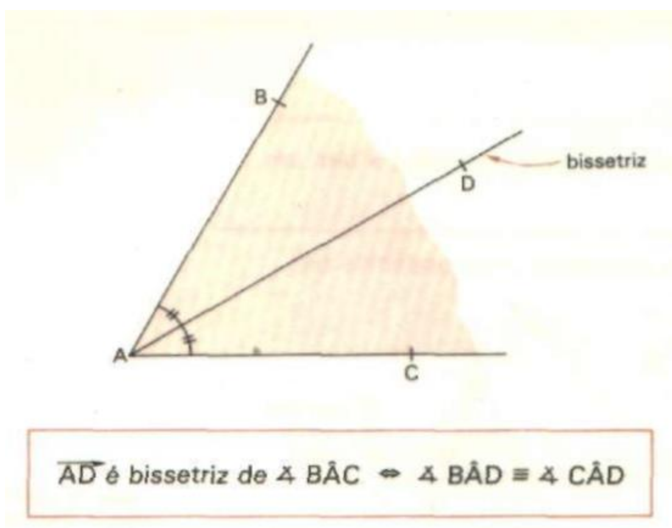


Figura 28: Traçado da Bissetriz.
Fonte: José Carlos Putnoki p.22

2.9.1 Construção da Bissetriz

Seja dado um ângulo. Para construir sua bissetriz, fazemos o seguinte:

1. Com centro no vértice do ângulo e raio qualquer, com uma abertura maior que o raio, traça-se um arco de circunferência λ_1, o qual intercepta os lados nos pontos A e B.
2. Com centro em A e depois em B, e com um raio r qualquer, descrevem-se os arcos de circunferência λ_2 e λ_3, os quais interceptam-se no ponto P.

1° Passo.

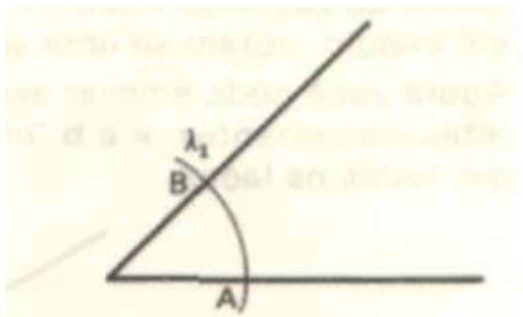


Figura 29: Traçado da bissetriz.
Fonte: José Carlos Putnoki p.84

2) Passo.

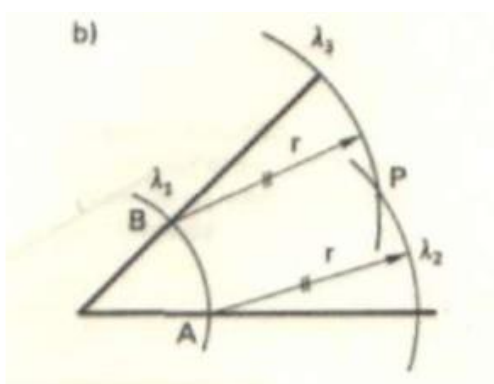


Figura 30: Traçado da bissetriz.
Fonte: José Carlos Putnoki p.84

E por fim a bissetriz é a semirreta que tem origem no vértice do ângulo e passa por P.

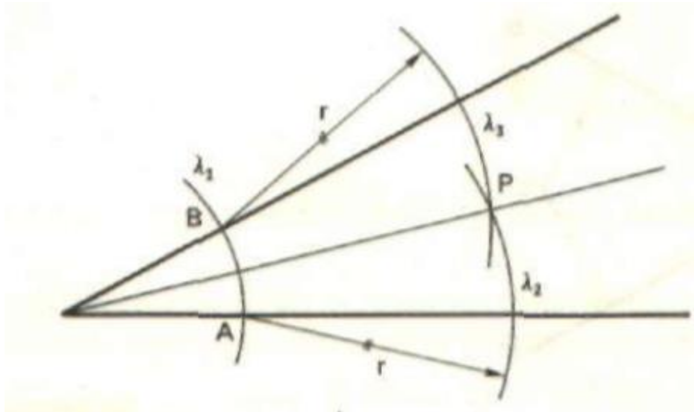


Figura 31: Traçado da bissetriz.
Fonte: José Carlos Putnoki p.84

Observações:

- Os raios dos arcos λ_2 e λ_3 tem que ser iguais, mas não necessariamente iguais ao de λ_1, embora de um modo geral, pode-se fazer a construção com um só raio para os três arcos. O importante é que se obtenha o ponto P suficientemente afastado do vértice.
- Para traçar as bissetrizes dos quatro ângulos formados por duas retas concorrentes, basta construir as bissetrizes de dois ângulos adjacentes quaisquer e prolonga-las pelo vértice.

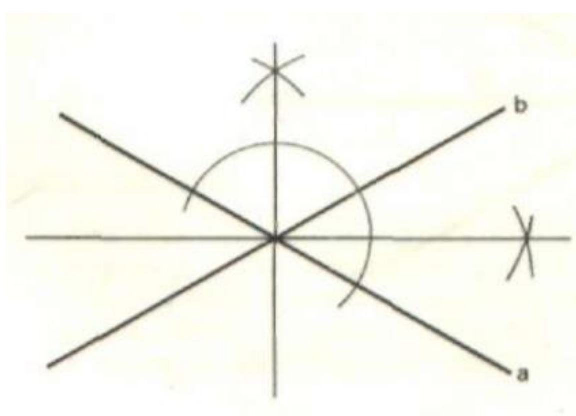


Figura 32: Traçado da bissetriz.
Fonte: José Carlos Putnoki p.84

2.10 Construções de Ângulos Notáveis.

Vamos estudar as construções de ângulos através de régua e compasso.

- A família 90°, 45°, 22°30'.

Traçando por um ponto P de uma reta r qualquer uma reta s perpendicular a r, constrói-se um ângulo de 90°.

Traçando a bissetriz do ângulo reto, obtém-se o ângulo de 45°.

Traçando a bissetriz do ângulo de 45°, constrói-se o ângulo de 22°30'. Procedendo assim, pode-se construir uma infinidade de ângulos, mas apenas os dois primeiros nos são realmente importante.

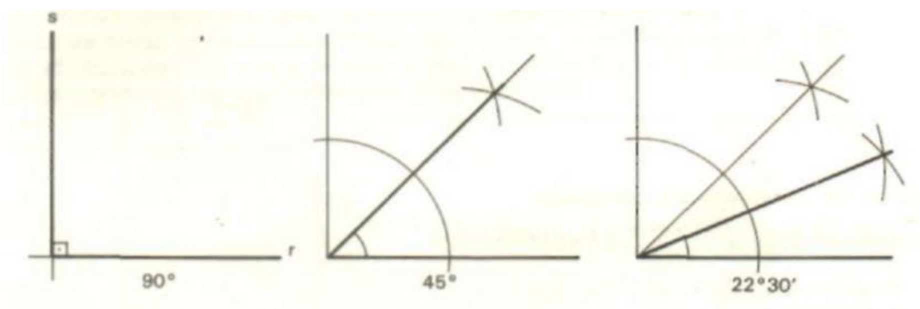


Figura 33: Construção de ângulos notáveis.
Fonte: José Carlos Putnoki p.91

Obs.: É comum também se usar o ângulo de 135°. Note, porém, que esse ângulo surge naturalmente, quando se constrói o de 45°, pois 135° é o suplemento de 45°.

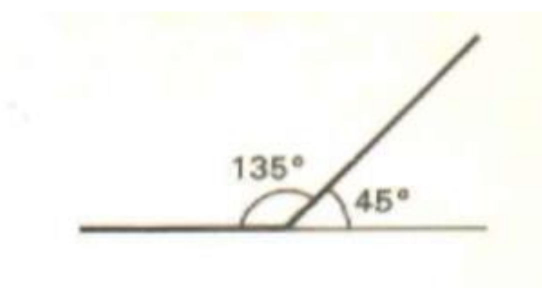


Figura 34: Traçado do ângulo suplementar
Fonte: José Carlos Putnoki p.91

A família 60°, 30°, 15°.

Uma vez construído de 60°, temos que os de 30°e os de 15° são obtidos por sucessivos traçados de bissetriz.

A construção do ângulo de 60° é feita em função da construção de um triângulo eqüilátero de lado qualquer. Tomemos, sobre uma reta r, o ponto A para o vértice do ângulo. Temos então:

1°) Com centro em A e raio L qualquer, traça-se o arco de circunferência λ_1, que intercepta r em B;

2°) Com centro em B e o mesmo raio L, traça-se o arco de circunferência λ_2, o qual intercepta no ponto C.

Evolução dos traçados

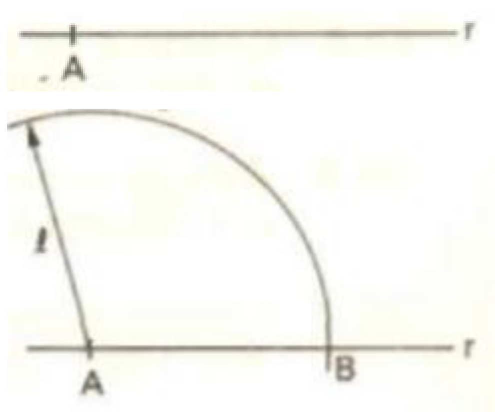


Figura 35: Construção do ângulo de 60°.
Fonte: José Carlos Putnoki p.91

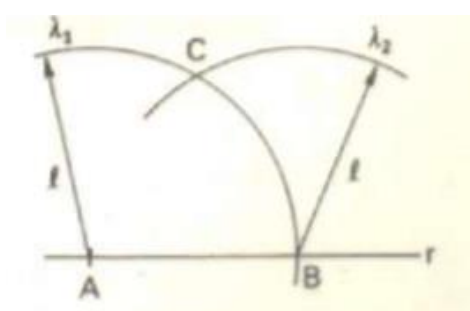


Figura 36: Construção do ângulo de 60°.
Fonte: José Carlos Putnoki p.91

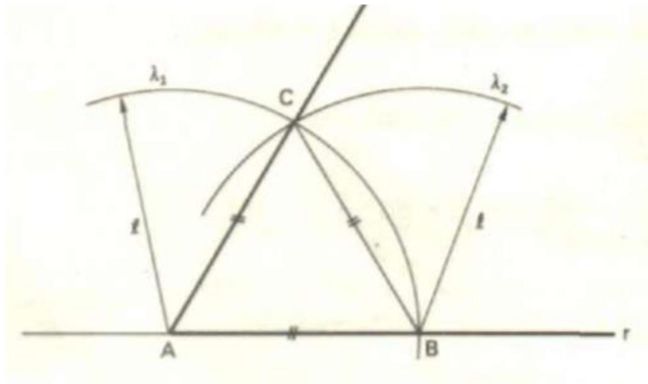


Figura 37: Construção do ângulo de 60°.
Fonte: José Carlos Putnoki p.91

A justificativa é imediata, pois o triângulo ABC é eqüilátero de lado L. Logo, BÂC=60°.

Teorema: Dados dois triângulos ABC e EFG, se AB=EF, Â=Ê e ^B=^F, então ABC=EFG.

Prova: Sejam ABC e EFG dois triângulos tais que AB=EF, Â=Ê e ^B=^F. Seja D um ponto da semirreta S_{AC} tal que AD=EG.

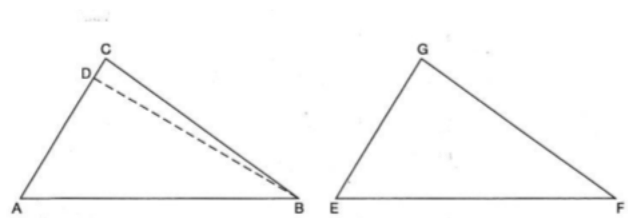


Figura 38: Triângulo Isósceles.
Fonte: Aa autoras

Considere o triângulo ABD e o compare com o triângulo EFG. Como AD=EG, AB=EF e Â=Ê, concluímos pelo axioma IV, que ABD=EFG.

Como consequência, tem-se que A^BD=^F. Mas por hipótese, ^F=ABC, logo A^BD=A^BC.

Consequentemente as semirretas S_{BD} e S_{BC} coincidem. Mas então o ponto D coincide com o ponto C e, portanto, coincidem os triângulos ABC e ABD. Como já provamos que ABD=EFG, então ABC=EFG.

Definição: Um triângulo é dito isósceles se tem dois lados congruentes. Estes lados são chamados de laterais e o terceiro lado é chamado de base.

Obs.: Também são frequentemente usados os ângulos de 120° e o de 150°, os quais são os suplementos de 60° e 30°, respectivamente.

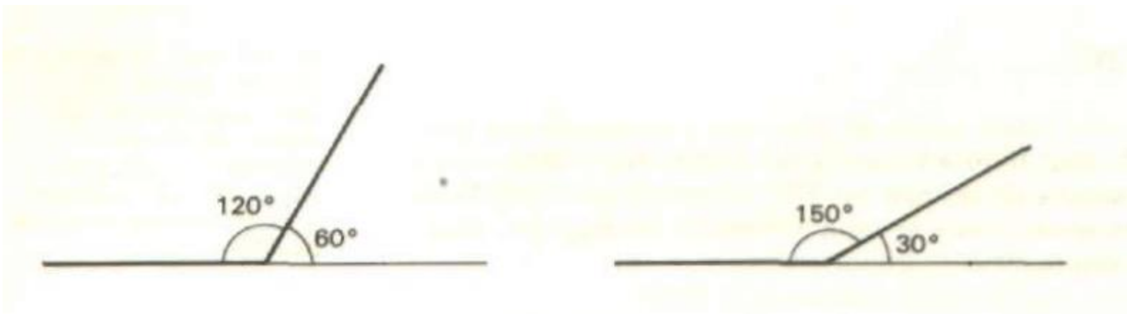


Figura 39: Traçado do ângulo suplementar
Fonte: José Carlos Putnoki p.92

2.11 Transportes de Ângulos.

É comum, em problemas de construções geométricas, constar nos dados um ângulo. Porém na grande maioria dos casos, esse ângulo deve ainda ser construído em outra posição que não aquela em que ele foi dado. Nesses casos, ao construir esse ângulo na posição desejada, dizemos que foi feito o transporte do ângulo dado.

Verifique no problema seguinte.

Problema:

Construir um ângulo, conhecidos o vértice O e um lado, de modo que ele seja congruente a um ângulo P^QR dado.

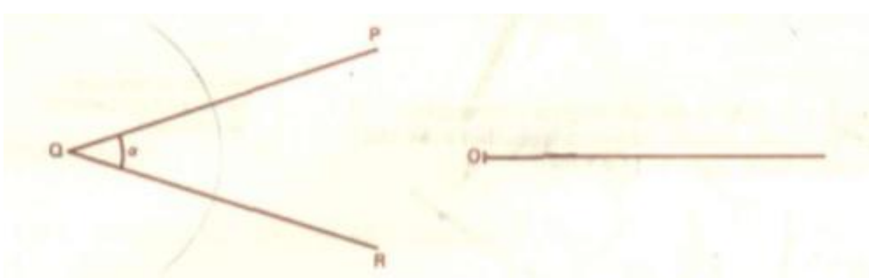


Figura 40: Traçado do transporte de ângulos
Fonte: José Carlos Putnoki p.91

Resolução:

1. Com centro em Q e raio r, traça-se o arco de circunferência λ_1, o qual o intercepta os lados do ângulo P^QR nos pontos A e B. Seja l a distancia de A e B.
2. Com centro em O e o mesmo raio r de λ_1, descreve-se um arco de circunferência λ_2, o qual intercepta o lado do ângulo a ser construído no ponto L.
3. Com centro em L e raio l, descreve-se o arco de circunferência λ_3, o qual intercepta λ_2 nos pontos M e M'.

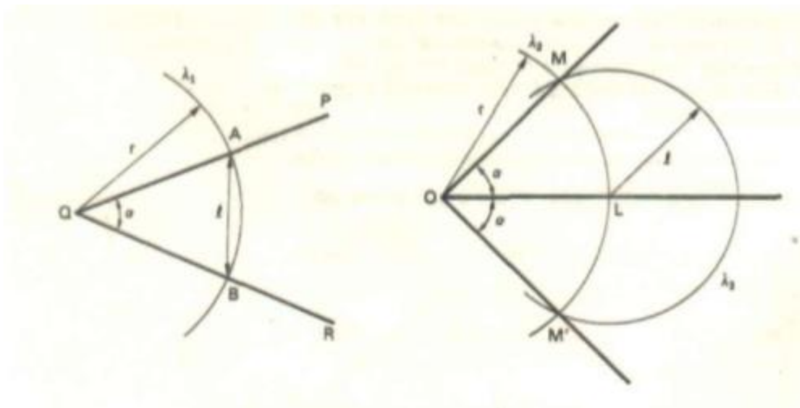


Figura 41: Traçado do transporte de ângulos
Fonte: José Carlos Putnoki p.87

Os ângulos LÔM e LÔM' são as soluções dos problemas.

2.12 Adições de Ângulos

Dados dois ângulos de medidas α e β, para obter um ângulo de medida α mais β transportamos um dos ângulos de modo que ele fique adjacente ao outro.

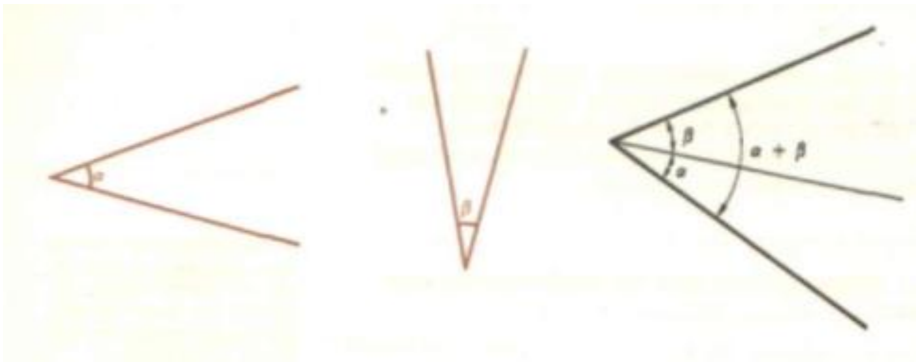


Figura 42: Traçado da adição dos ângulos
Fonte: José Carlos Putnoki p.88

2.13 Construções de Figuras Geométricas

Polígono

Um polígono é uma porção de plano limitada por linhas retas. Trata-se de uma figura geométrica que é formada por segmentos consecutivos não alinhados, que recebem o nome de lados.

2.13.1 Triângulo Escaleno.

Definição: Um triângulo que não tem lados congruentes é um triângulo escaleno.
Obs. Um triângulo que não possui lados congruentes não possui ângulos internos congruentes, pois, como seus lados não são igual isso significa que seus ângulos internos também não sejam.

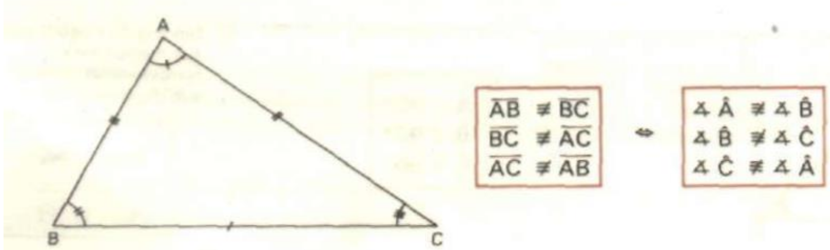


Figura 43 Triângulo Escaleno
Fonte: José Carlos Putnoki p.43

2.13.1.1 Construção do triângulo escaleno dado os três lados.

1°) Traça o segmento AB. Com a abertura do compasso igual a CB e fazendo centro em B, traça um arco.

2°) Com a abertura do compasso igual a AC e fazendo centro em A, traças outro arco que cruza com o primeiro (ponto c).

3°) Unindo os pontos A, B e C obténs o triângulo escaleno.

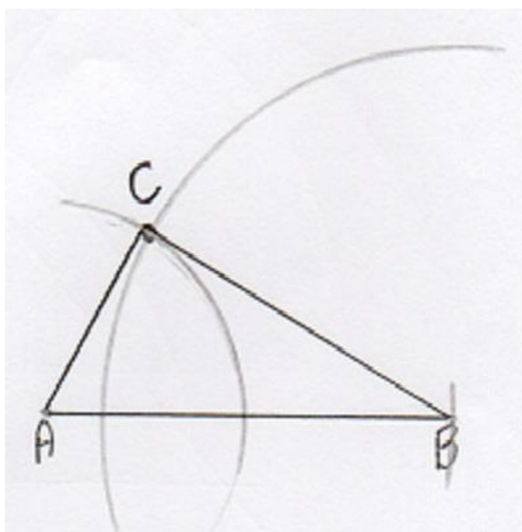


Figura 44: Construção do Triângulo Escaleno
Fonte: As autoras.

2.13.2 Triângulo Isóscele

Definição: um triângulo é dito isósceles se tem dois lados congruentes. Estes lados são chamados de laterais e o terceiro lado é chamado de base.

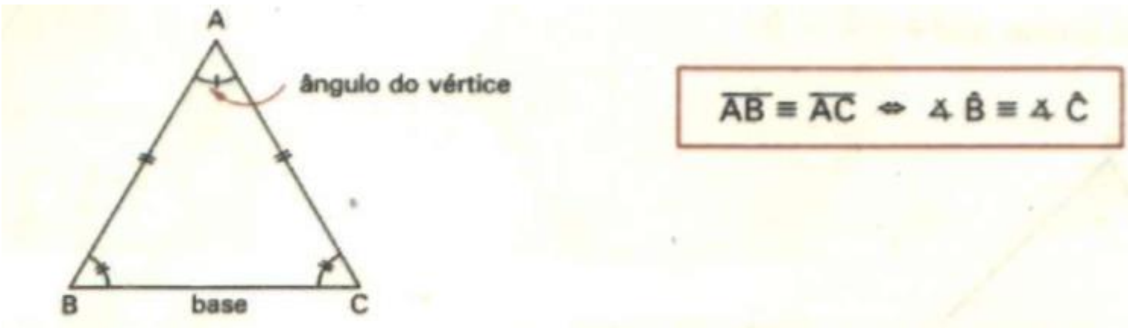


Figura 45: Triângulo Isósceles
Fonte: José Carlos Putnoki p.43

Observações.

- O ângulo compreendido entre os lados congruentes é o ângulo do vértice, ou seja, onde as semirretas se encontram, do triângulo isósceles.

Proposição1: Em um triângulo isóscele os ângulos da base são congruentes.

Prova: Seja ABC um triângulo em que AB=AC. Pretende-se provar que ^B=^C. Para isto compare o triângulo ABC com ele mesmo fazendo corresponder os vértices da seguinte maneira.

$$A \longleftrightarrow A,\ B \longleftrightarrow C \text{ e } C \longleftrightarrow B$$

Por hipótese, AB=AC e AC=AB. Como Â=Â, segue-se (pelo axioma IV) que esta correspondência define uma congruência. Como consequência tem-se ^B=^C.

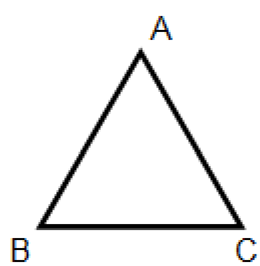


Figura 46: Triângulo Isósceles
Fonte: As autoras

Axioma IV: dados dois triângulos ABC e EFG, se AB=EF, AC=EG E Â=Ê então ABC=EFG.

2.13.2.1 Construção Do Triângulo Isósceles Sendo Dados A Base (Ab) E Um Dos Lados (Ac).

Segmento AB, base do triângulo.

1°) Construa um segmento AB sobre uma reta r.

2°) Com uma abertura do compasso igual ao segmento AC e fazendo centro nos pontos B e A descreve os arcos que se cruzam em C.

3°) Unindo este ponto com os pontos A e B, tens o triângulo isósceles.

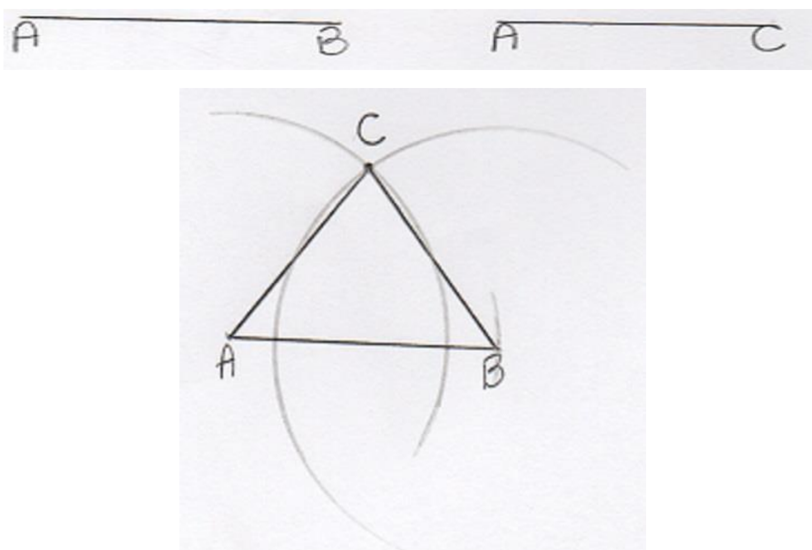


Figura 47: Construção do Triângulo Isósceles
Fonte: As autoras.

2.13.3 Triângulo Equilátero

Definição: Um triângulo que tem os três lados congruentes é um triângulo equilátero.

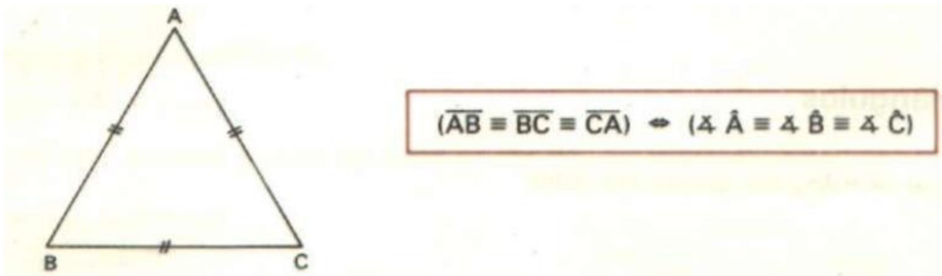


Figura 48: Triângulo Equilátero
Fonte: José Carlos Putnoki p.44

Observação: os três ângulos internos de um triângulo equilátero são congruentes. Daí se deduz que cada um mede 60°, pois, como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° e o único ângulo agudo cuja soma é 180° é o ângulo de 60° ficando assim provado a medida dos ângulos desse polígono.

2.13.3.1 Construção Do Triângulo Equilátero

Dado o lado do triângulo AB

1°) Construa um segmento AB sobre uma reta r.

2°) Fazendo centro em B e com uma abertura do compasso igual a AB, traça-se um arco de circunferência acima do segmento.

3°) Com a mesma abertura fazendo centro em A, traça-se outro arco que cruza com o anterior no ponto C.

4°) Unindo o ponto C com os pontos A e B tens o triângulo equilátero.

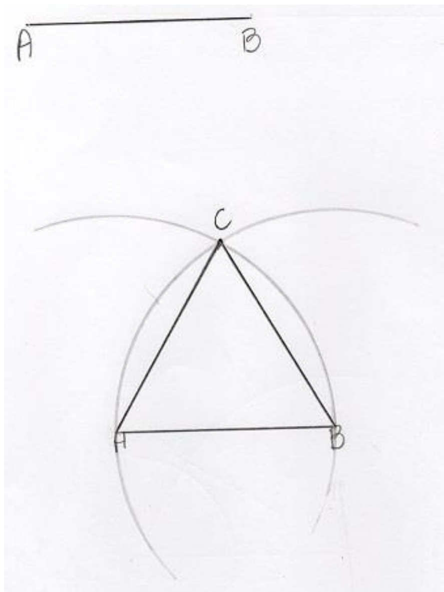


Figura 49: Triângulo Equilátero
Fonte: As autoras.

2.13.4 Triângulo Retângulo

Definição: Um triângulo que tem um ângulo interno reto é um triângulo retângulo.

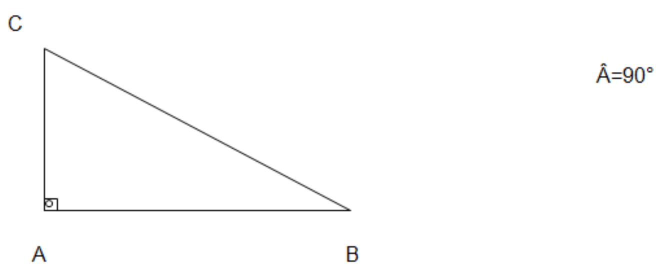


Figura 50: Triângulo Retângulo
Fonte: As autoras
.

Num triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é denominado hipotenusa, e os lados que formam o ângulo reto são denominados os catetos.

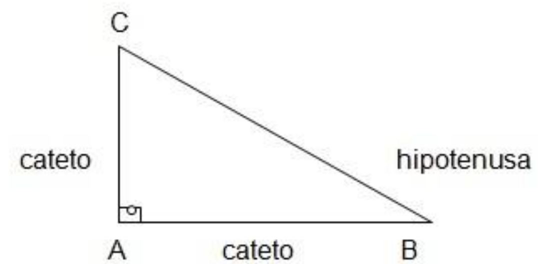


Figura 51Triângulo Retângulo
Fonte: As autoras.

✓ Teorema que caracteriza um triângulo retângulo (Teorema de Pitágoras):

Em todo triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.

Em termos da notação estabelecida acima o teorema de Pitágoras afirma que $a^2=b^2+c^{2.}$

Prova: A prova do teorema de Pitágoras é uma consequência da semelhança dos triângulos ADB, ACD e ABC. Da semelhança de ADB e ABC (A →C, B →B e D →A), conclui-se que m/c = c/a.

Da semelhança dos triângulos CDA e ABC concluem-se que n/b = b/a.

Logo $am=c^2$ e $na=b^2$. Portanto $a\ (m+n) = c^2+b^2$. Como m+n=a, então $a^2=b^2+c^2$, como queríamos demonstrar.

2.13.4.1 Construção Do Triangulo Retângulo.

Construir um triângulo retângulo dados os lados AB = 4 U e AC = 2 U.
1° passo:

Traçar o lado AB e AC

Figura 52: Construção do Triângulo Retângulo
Fonte: As autoras.

2° passo:
Traçar uma perpendicular à extremidade A.

Figura 53: Construção do Triângulo Retângulo
Fonte: As autoras.

3° passo:
Ligar os pontos A, B e C, definindo o triângulo pedido.

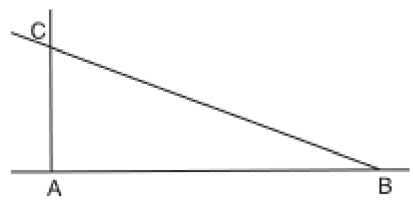


Figura 54: Construção do Triângulo Retângulo
Fonte: As autoras.

2.13.5 Trapézio

Definição: Quadriláteros que possuem dois lados paralelos entre si chamados de bases (maior ou menor). Os lados não paralelos são chamados de transversais. A distância entre lados paralelos é chamada de altura (h).

Figura 55: Trapézio
Fonte: As autoras.

Podem ser divididas em: retângulo, isóscele e escaleno.

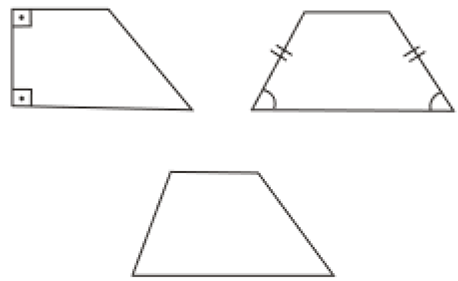


Figura 56: Trapézios retângulo, isóscele e escaleno.
Fonte: As autoras.

2.13.5.1 Construção do Trapézio.

Construir um trapézio isóscele conhecendo se o lado maior, AB = 4U, a base menor CD = 2U e sua altura = 3U.

1° passo:

Traçar uma reta suporte e marcar a medida AB, e em seguida marcar a metade de AB (ponto médio).

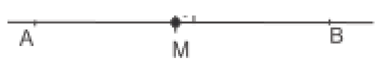


Figura 57: Construção do Trapézio
Fonte: As autoras.

2° passo:

Levantar uma perpendicular a partir de M., como construído na seção 2.6.

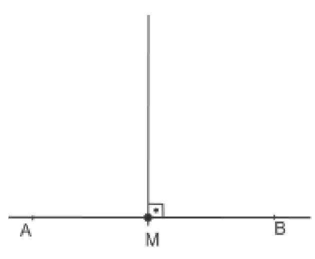


Figura 58: Construção do Trapézio
Fonte: As autoras.

3° passo:

Marcar a altura do trapézio MM e traçar uma reta paralela a AB passando por M, como realizado na seção 2.7.

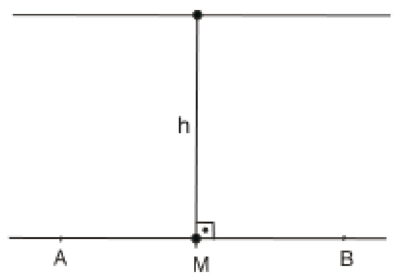


Figura 59: Construção do Trapézio
Fonte: As autoras.

4° passo:

Construa o ponto médio do segmento CD, marque sobre esta reta paralela a AB a metade do segmento CD com centro em n, sendo que a metade desta medida NC está para a esquerda e ND para a direita. Unindo-se os pontos A, B, C e D, obtêm-se o trapézio pedido.

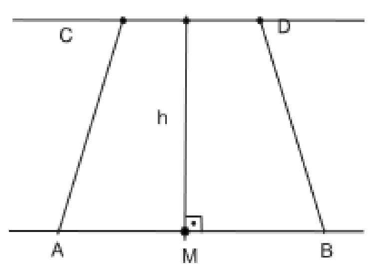


Figura 60: Construção do Trapézio
Fonte: As autoras.

2.13.6 Losango

Definição: Diferenciam-se dos quadriláteros retangulares pela sua inclinação ou angulação, proporcionada pelas suas diagonais de tamanho, transmitindo sensação de desequilíbrio e, ao mesmo tempo, dinamismo, parecendo estar em movimento ou deslocamento.

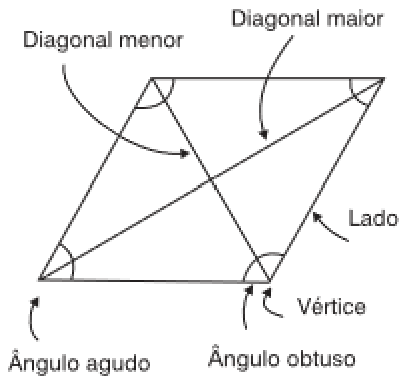


Figura 61: Losango
Fonte: As autoras.

2.13.6.1 Construção Do Losango

Construir um losango sabendo-se o seu lado AB = 3U. (usar compasso e régua).

1°passo:

Traçar uma reta suporte e nela marcar o segmento AB.

Figura 62: Construção do Losango
Fonte: As autoras.

2° passo:

Com centro em A e abertura AB, traça-se um arco acima de B.

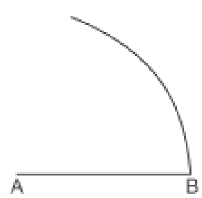


Figura 63: Construção do Losango
Fonte: As autoras.

3° passo:

Com centro em B e mesma abertura AB, traça-se um arco que cruzará o arco anterior definindo o ponto C.

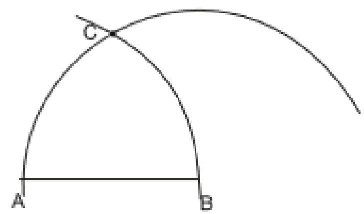


Figura 64: Construção do Losango
Fonte: As autoras.

4° passo:

Com centro em C e abertura (mesma) AB, traça-se um arco cruzando a circunferência de centro em B e definindo o ponto D. Unindo-se os pontos A, B, D e C, temos o losango desejado.

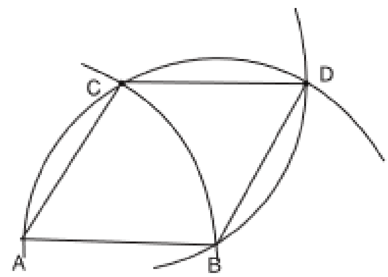


Figura 65: Construção do Losango
Fonte: As autoras.

2.13.7 Quadrado

Definição: São polígonos que possuem quatro lados iguais, com formas que apresentam aspecto de rigidez, conservadorismo e estabilidades e os quatro ângulos retos (90°).

2.13.7.1 Construção Do Quadrado

Construir um quadrado, dadas suas diagonais.

1° passo:

Traçar as duas diagonais prolongadas, cruzando-as no ponto O (centro).

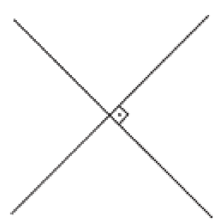


Figura 66: Construção do Quadrado
Fonte: As autoras.

2° passo:

Com a ponta-seca do compasso em O e abertura sendo a metade da diagonal, traça-se uma circunferência, determinando quatro pontos.

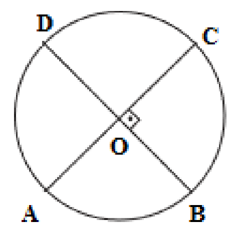


Figura 67: Construção do Quadrado
Fonte: As autoras.

3°passo:

Ligam-se os pontos na ordem A, B e C, que são os lados do quadrado.

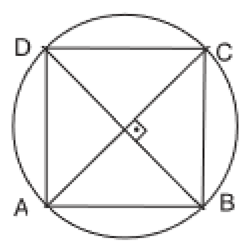


Figura 68: Construção do Quadrado
Fonte: As autoras.

2.13.8 Pentágono

Definição: Em geometria, pentágono é um polígono com cinco lados. A soma dos ângulos internos do pentágono regular é 540º, ou seja, num pentágono regular cada ângulo interno tem a medida de 108º.

2.13.8.1 Construção Do Pentágono

Construir um pentágono circunscrito conhecendo-se a circunferência.

1° passo:

Construa uma reta r suporte e uma circunferência com centro em qualquer ponto da reta. Construa uma reta perpendicular passando pelo centro O da circunferência sendo estes os dois diâmetros perpendiculares da circunferência, AB e CD.

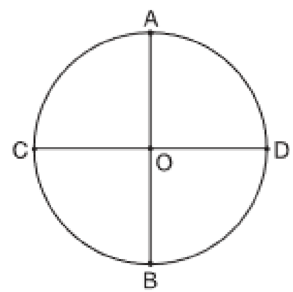


Figura 69: Construção do Pentágono
Fonte: As autoras.

2°passo:

Traça-se o ponto médio do raio OD, como construído na seção 2.7, determinando o ponto X. Com raio XA, descreve-se um arco que vai cortar o diâmetro CD (horizontal) no ponto P.

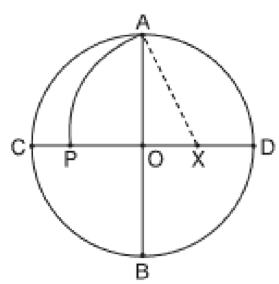


Figura 70: Construção do Pentágono
Fonte: As autoras.

3° passo:

Agora, com o centro em A e raio AP, traça-se outro arco, que vai interceptar a primeira circunferência no ponto E, que unido com A dará o lado do pentágono circunscrito.

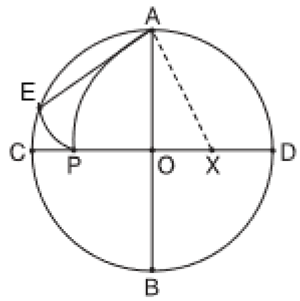


Figura 71: Construção do Pentágono
Fonte: As autoras
.

4° passo:

Finalmente, com centro em E e medida AE, marca-se sobre a circunferência o pontos F, com centro em F e raio AE marca-se sobre a circunferência o ponto G, com centro em G e raio AE marca-se sobre a circunferência o ponto H, ligando os pontos EF, FG, GH e HA, definirão o pentágono regular inscrito.

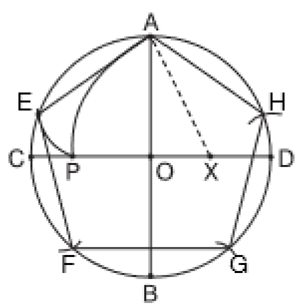


Figura 72: Construção do Pentágono
Fonte: As autoras

2.13.9 Hexágono

Definição: Hexágono é um polígono que possui 6 lados, sendo regular esses lados deverão ser todos iguais (mesma medida), portanto, hexágono regular é uma figura plana que possui 6 lados com a mesma medida.

2.13.9.1 Construção Do Hexágono

Construir um hexágono regular conhecendo se a circunferência de diâmetro AB = 4U.

1° passo:

Traça-se uma reta suporte horizontal na qual se marca o diâmetro AB e seu meio O (centro).

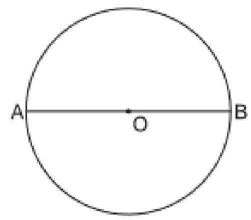


Figura 73: Construção do Hexágono
Fonte: As autoras.

2° passo:

Traça-se a circunferência, e com centro em A e raio AO, descreve-se arco de círculo que cortará a circunferência duas vezes, obtendo-se os pontos C e D, onde AC ou AD já é o lado do hexágono circunscrito.

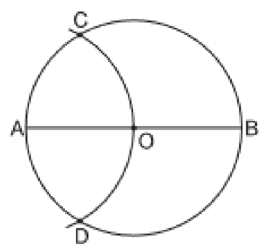


Figura 74: Construção do Hexágono
Fonte: As autoras.

3° passo:

Agora, com centro em B e raio BO, descreve-se outro arco de circulo que cortará a circunferência nos pontos E e F. Unindo-se os pontos AC, CE, EB, BF, FD e DA, obtêm-se o hexágono regular inscrito.

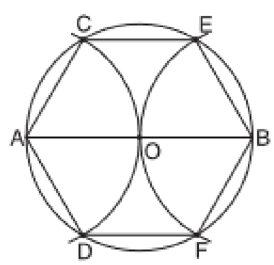


Figura 75: Construção do Hexágono
Fonte: As autoras.

2.14 Construções dos Polígonos Regulares através do Ângulo Central

Como foi possível ver podemos construir os polígonos utilizando-se de régua e compasso utilizando diferentes formas de construção, o que queremos mostrar nesta seção é uma forma relativamente única de construção para os polígonos regulares por meio do ângulo central tomando como base inicial uma circunferência e uma reta, mas, primeiramente precisamos entender o que é um ângulo central.

Ângulo Central

Definição: um ângulo que tenha seu vértice no centro de uma circunferência é denominado ângulo central.

Construção das Figuras

Faremos a seguir as construções dos polígonos regulares: triângulo, quadrado e hexágono, utilizando-se do ângulo central dessas figuras.

2.14.1 Triângulo

Para construirmos um triângulo equilátero a partir do ângulo central, sabemos pelo início da seção 2.13.3 que o ângulo deverá ser de 360º/3= 120º como mostra a figura abaixo:

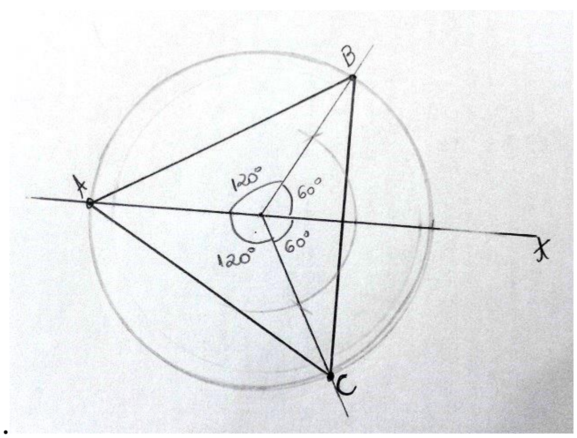


Figura 76: Triângulo Equilátero
Fonte: As autoras.

Utilizando a régua construa um segmento de reta t e com o compasso construa uma circunferência de raio r qualquer e centro em um dos pontos da reta t. Como mostra a figura abaixo:

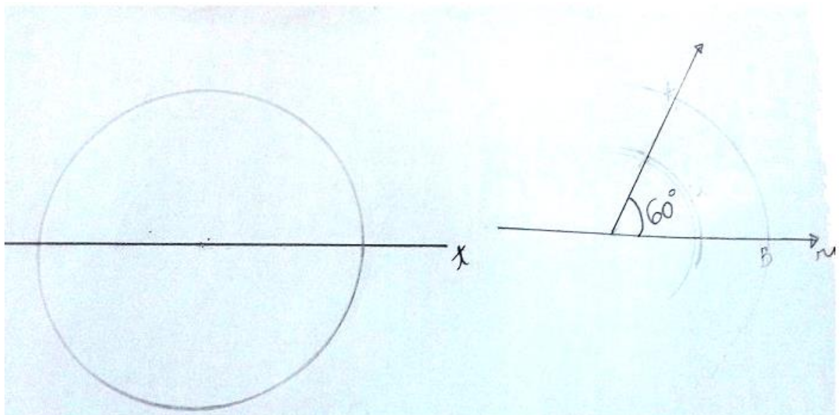


Figura 77: Construção do Triângulo Equilátero
Fonte: As autoras

Suponha que a reta desenhada corte o ângulo central do triângulo a ser construído ao meio, sendo assim vamos construir um ângulo de apenas 60º, usando a reta t como um dos lados do ângulo e o outro lado do ângulo para a esquerda conforme a construção realizada na seção 2.10 do ângulo de 60º. Assim teremos a figura mostrada abaixo:

Observe que o ponto A obtido com a interseção do lado do ângulo construído e a circunferência será o primeiro vértice do triângulo equilátero.

A Partir do lado do ângulo construído anteriormente faça a construção de um ângulo de 120º grau como realizado na seção 2.10 a interseção do lado do ângulo com a circunferência será o ponto B, o segundo ponto do triângulo equilátero que queremos construir como mostra a figura abaixo:

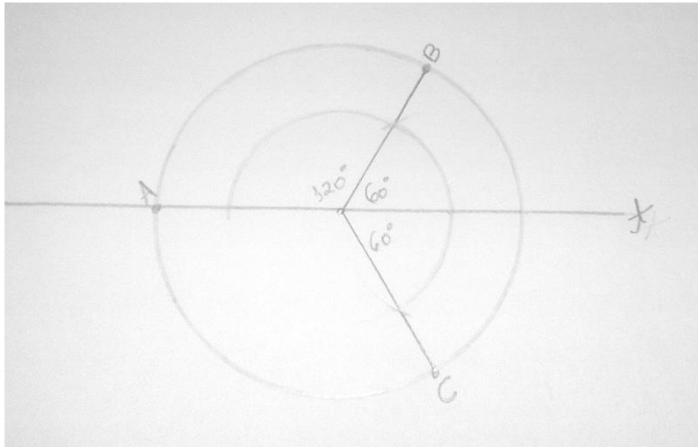


Figura 78 Construção do Triângulo Equilátero
Fonte: As autoras

Para obter o terceiro vértice do triângulo basta proceder da mesma forma e construir novamente um ângulo de 120º encontrando o ponto C use a régua para ligar os pontos como mostra a figura:

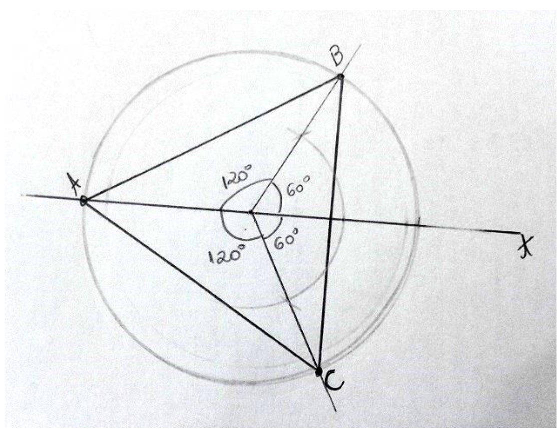


Figura 79: Triângulo Equilátero
Fonte: As autoras

2.14.2 Quadrado

Utilizando a régua construa um segmento de reta t e com o compasso construa uma circunferência de raio r qualquer e centro em um dos pontos da reta t. Como mostra a figura abaixo:

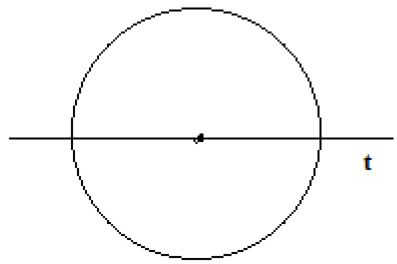


Figura 80: Quadrado
Fonte: As autoras

Traçando pelo ponto de origem da circunferência uma reta s perpendicular a t, constrói-se um ângulo de 90°, conforme a construção realizada na seção 2.10 do ângulo de 90°. Assim teremos a figura abaixo:

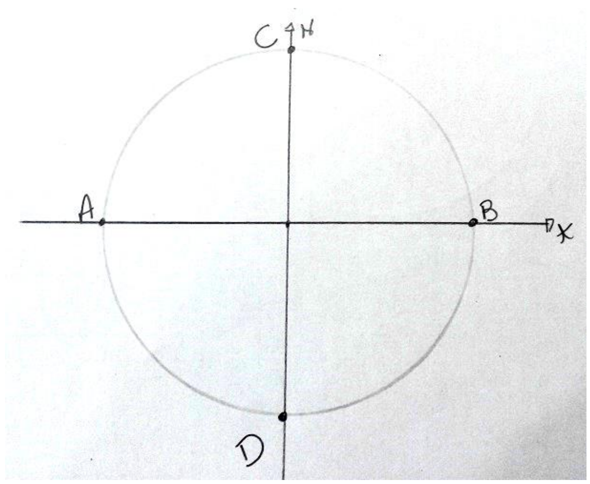


Figura 81: Construção do Quadrado
Fonte: As autoras

Observe que os pontos A, B, são obtidos com a interseção da reta t na circunferência e os pontos C, D são obtidos com a interseção da reta s na circunferência, construindo assim os quatro vértices do quadrado, use a régua para ligar os pontos como mostra a figura:

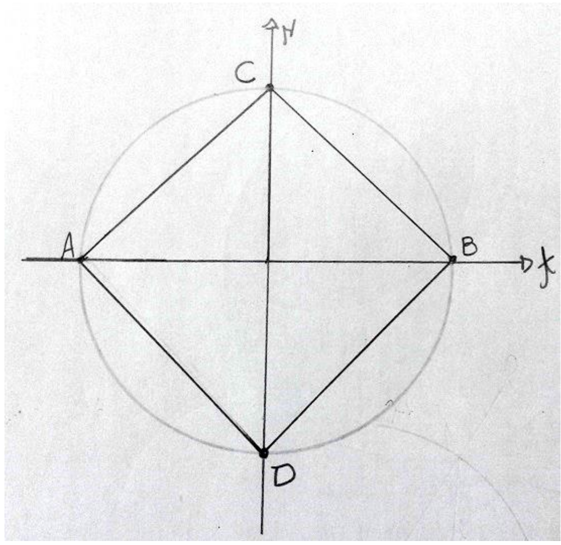


Figura 82: Quadrado
Fonte: As autoras

2.14.3 Hexágono

Para construirmos um hexágono a partir do ângulo central, sabemos pelo inicio da seção que o ângulo deverá ser de 360º/6= 60º como mostra a figura abaixo:

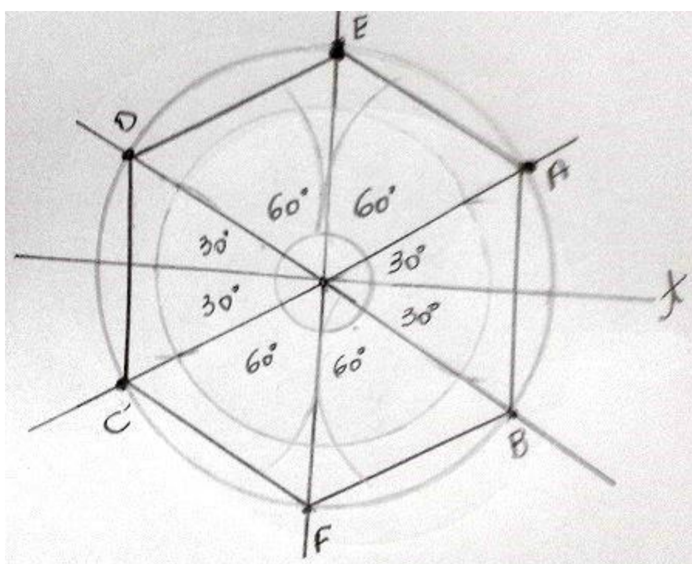
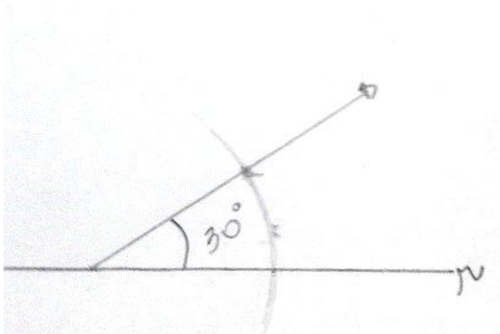


Figura 83 Hexágono
Fonte: As autoras

Utilizando a régua construa um segmento de reta t e com o compasso construa uma circunferência de raio r qualquer e centro em um dos pontos da reta t. Como mostra a figura abaixo:



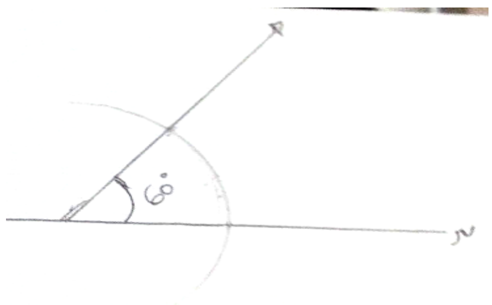


Figura 84 Ângulo de 60°
Fonte: As autoras

Figura 85 Ângulo de 30°
Fonte: As autoras

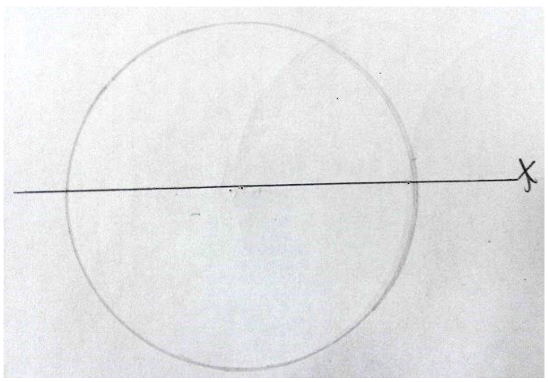


Figura 86: Construção do Hexágono
Fonte: As autoras

Suponha que a reta desenhada corte o ângulo central do Hexágono a ser construído ao meio, sendo assim vamos construir um ângulo de apenas 30º, usando a reta t como um dos lados do ângulo e o outro lado do ângulo para a esquerda conforme a construção realizada na seção 2.10 do ângulo de 30º. Assim, obteremos os ponto A e B, como mostra a figura abaixo:

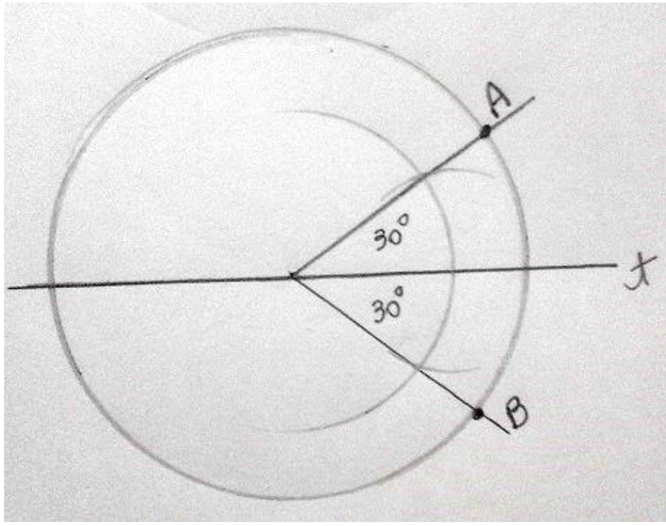


Figura 87 Construção do Hexágono
Fonte: As autoras

Repita o mesmo processo do lado esquerdo onde à reta intercepta a circunferência, obtendo assim, os pontos C e D do Hexágono. Como mostra a figura abaixo:

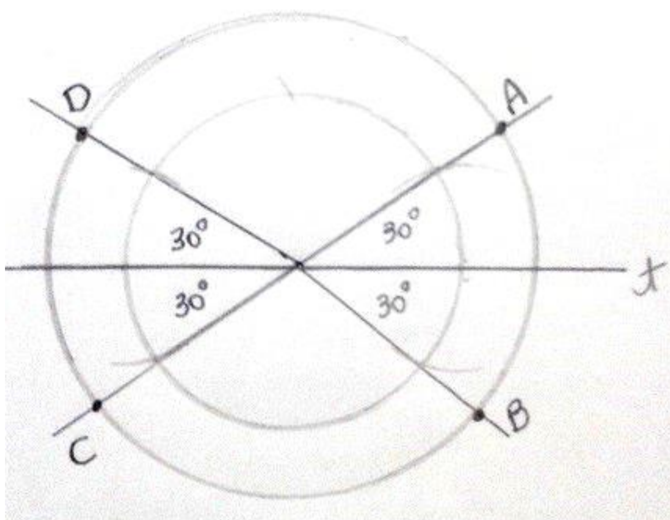


Figura 88 Construção do Hexágono
Fonte: As autoras

A Partir do lado do ângulo construído anteriormente faça a construção de dois ângulo de 60º grau como realizado na seção 2.10 a interseção do lado do ângulo com a circunferência será o ponto E e F, como mostra a figura abaixo:

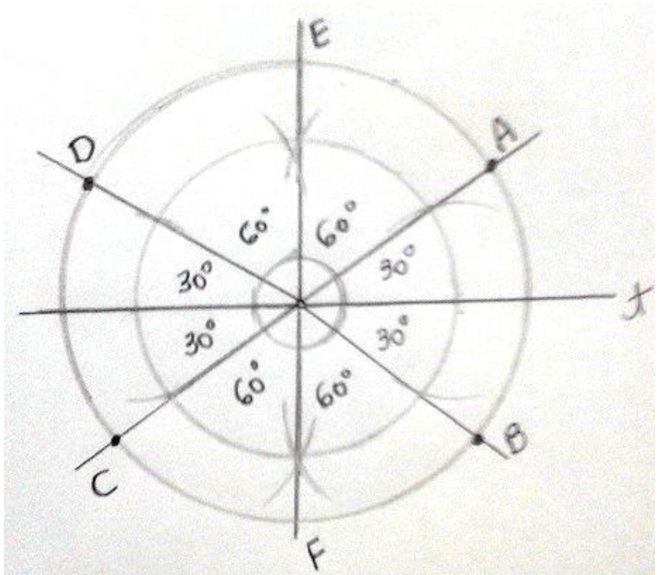


Figura 89: Construção do Hexágono
Fonte: As autoras

Unindo-se os pontos EA, AB, BF, FC, CD e DE, obtêm-se o hexágono regular inscrito.

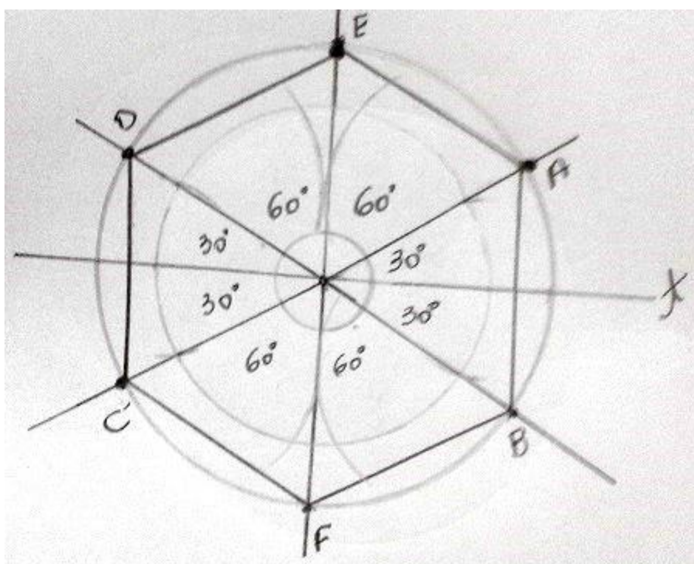


Figura 90 Hexágono
Fonte: As autoras

Capítulo 3

Considerando os avanços nos níveis de Van Hiele fundamentais para evolução do pensamento, procuramos propor atividades que contribuam para reconhecer nível de pensamento geométrico que os alunos se encontram bem como propicie o desenvolvimento do pensamento.

As atividades propostas têm como objetivo identificar os níveis de Van Hiele que os alunos se encontram e estimular a evolução nos níveis, não a há intenção de que a atividade seja um modelo a ser seguido, mas uma sugestão que possa ser alterada de acordo com a realidade da sala de aula que será usada e de acordo com o conteúdo que se precisa trabalhar. Há a preocupação de realizar a atividade voltada para o uso da régua não graduada e compasso instrumentos básicos da geometria, sendo assim consideramos que os alunos já tenham certa familiaridade com este material como transporte de medida para uma reta, ou seja, transporte de segmento com o compasso e traçar linha reta com a régua, caso contrário se faz necessárias aulas para ensinar os alunos a utilizar este material antes de iniciar as atividades que serão propostas.

Para identificar se o aluno do ensino básico se encontra na fase um de Van Hiele sugerimos atividades de identificação de figuras como, por exemplo:

Quais destas figuras são triângulos retângulos?

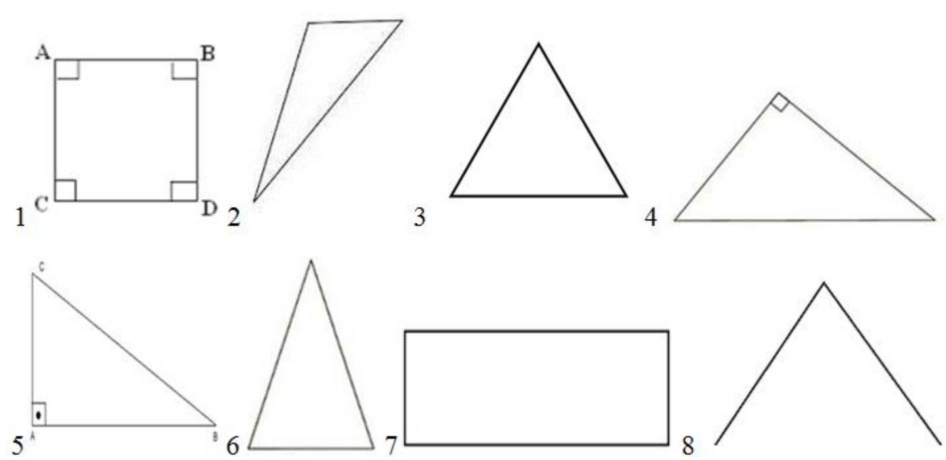


Figura 91: Atividade para o reconhecimento de um triângulo retângulo

Fonte: As autoras

A atividade pode ser dada impressa ou mesmo com as figuras recortadas que possam ser manuseadas pelos alunos, a forma de aplicar a atividade varia conforme a série que os alunos se encontram, além disso, é possível variar as figuras que devem ser identificadas como os diferentes quadriláteros ou os polígonos regulares pentágono, hexágono dependendo do que se pretende ensinar de geometria.

Após a atividade de identificação realizar uma roda de discussão na sala onde o professor possa questionar quais as características que a figura deve ter para que ela seja um triângulo e um triângulo retângulo, o aluno que estiver na fase um será capaz de identificar por meio da figura sem apresentar característica como três lados por exemplo. É bem provável que indique todos os triângulos dados na atividade sem levar em conta a característica de um triângulo retângulo que é o ângulo de 90º.

No nível dois de pensamento o aluno conseguirá visualizar características como:

- É um polígono de três lados.
- Figura Fechada.
- Deve apresentar um ângulo de 90º.
- O ângulo de 90º pode estar em qualquer posição.

Após a listagem dessas características, o próximo desafio será realizar a construção do triângulo retângulo através de régua e compasso, passando primeiramente pela construção do ângulo de 90º (ângulo reto) que pode ser realizado diretamente com um esquadro ou ser ensinado à construção de retas perpendiculares para obtenção de tal ângulo. (ver PUTINOK 1993).

Após a construção do ângulo reto, o aluno deverá, a partir de três lados dados, construir o triângulo retângulo, a professora irá propor as medidas 3, 4, 5 entregando uma folha com esses três segmentos desenhados além do ângulo reto e deve pedir para que o aluno sobreponha essas medidas com o auxílio de régua e compasso sobre as retas perpendiculares que formam o ângulo reto, de forma a construir o referido triângulo, o professor irá questionar como poderão ser organizadas essas medidas de forma a fechar um triângulo. É conhecido que o lado maior deverá ser sempre a hipotenusa do triângulo retângulo tal característica deverá ser questionada pelo professor durante o processo de construção, o aluno que conseguir perceber tal característica terá avançado para um nível mais formal do pensamento geométrico uma ordenação, neste momento convém o professor dar nomes aos lados do triângulo retângulo, o que facilitará a identificação do lado maior ser sempre oposto ao ângulo reto sendo a hipotenusa e os outros dois sendo os catetos.

Um questionamento que possibilitará a evolução do pensamento para o formal será: o que garante que três medias dadas podem formar triângulos retângulos? Acreditamos que os alunos para conseguirem tirar algumas conclusões devem ter realizado varias construções com medidas estabelecidas, primeiramente medidas que formam os triângulos retângulos e posteriormente medidas que não formam tais triângulos.

Almejando alcançar o nível máximo do pensamento geométrico de Van Hiele propomos apresentar o teorema que garante que três medidas podem formar um triângulo retângulo que é o teorema de Pitágoras, de posse deste conhecimento podemos testar se as medidas que formaram os triângulos retângulos obedecem este teorema para ajudar os alunos a se convencerem da validade deste resultado. A sequência natural é a demonstração do teorema de forma empírica e posteriormente com a linguagem matemática formal.

Para cada atividade proposta a fim de testar em que níveis os alunos se encontram é necessário que estipulem um tempo ao qual o aluno possa pensar com calma e buscar seus próprios conhecimentos, além dos constantes questionamentos do professor.

As atividades semelhantes a citadas acima foram aplicadas em uma escola pública com os alunos do nono ano da cidade de Nova Andradina, composta por 23 alunos, mas foram necessárias algumas alterações na forma de realizá-la devido ao tempo que nos foi disponibilizado e tendo em vista que as atividades também foram apenas uma coleta de dados para diagnosticar em qual nível do pensamento geométrico os alunos se encontram e não para desenvolver os níveis de Van Hiele propriamente se trabalhadas com o tempo necessário as atividades podem ser usadas para o desenvolvimento do pensamento. Foi realizado apenas o diagnóstico, pois não houve tempo hábil para realizar atividades para que os alunos pudessem evoluir nos níveis de Van Hiele durante o tempo que dispomos para realização de um trabalho de conclusão de curso tais atividades exigem mais tempo e conhecimento teórico. Foram sete exercícios o primeiro correspondendo ao nível que classificamos como zero, o exercício dois correspondendo a fase 1, o exercício três nos traz informações das características da fase dois, os exercícios 4, 5 e 6 nos ajudam a identificar alunos que estão na fase que classificamos como fase 3 e finalmente o exercício sete diz respeito a fase quatro ao qual o alunos já realiza abstrações, podendo realizar até demonstrações de resultados, as atividades podem ser encontradas no anexo 1, colocamos uma oitava questão para que o aluno pudesse nos dar informações relevantes para analise pedindo para que ele escrevesse alguma dificuldade que apresentou ao fazer a atividade. Assim como os Van Hiele colocaram em sua pesquisa a fase quatro é, mas difícil de ser encontrada alguns adultos não apresentam esta fase e não esperamos aqui identificá-la em estudantes de nono ano.

Realizando a análise dos dados coletados através das chegamos as seguintes informações, dos 23 alunos que participaram da atividade, três alunos não conseguiram responder nenhuma das questões sugeridas atribuímos isto ao fato de não desejarem realizar a pesquisa, para diagnosticar a fase destes alunos seria necessário realizar atividades dentro da sala no decorrer do ano e dos conteúdos de geometria que devem ser estudados, seis alunos conseguiram responder as questões que se referiam a fase que classificamos como fase 0, de identificação de figuras através apenas da forma sem consideram características pontuais da figura, e a que classificamos com fase 2 que conseguem perceber características da figura e quatorze alunos conseguiram responder apenas as questões que se referiam a Fase 3 segundo a Teoria de Van Hiele, portanto, o que podemos concluir diante desses dados é que os alunos que acertaram a questão que se referia a Fase 1 da Teoria realmente se encontram nessa fase, pois, conseguiram responder por meio da visualização, porém os alunos que acertaram as questões referente a Fase 3, na verdade eles não possuíam o conhecimento necessário para estarem na referida fase, simplesmente o fato que os fez acertarem se deu pela lógica e não pelo fato da medida maior de um triângulo retângulo ser a hipotenusa conclusão esta também tirada com os diálogos durante a aplicação do questionário e o fato de não se referirem ao teorema de Pitágoras no exercício sete da atividade realizada. A pesquisa realizada nos mostra que os alunos não estão totalmente na fase 0 pois conseguem identificar algumas propriedades do triângulo retângulo porém ainda não há ainda um pensamento organizado para estarem na fase formal estando entre a fase de identificação do todo e a fase informal para que se evoluam é necessário realizar atividades com este propósito e a dinâmica de conversa com os alunos em sala de forma que eles também sejam responsáveis pela sua aprendizagem e que o ensino não fique centralizado no professor.

Salientamos que a escolha da figura do triângulo retângulo se deu pelo fato do conteúdo fazer parte da série onde foi realizada a pesquisa e ainda pelo fato de que o aluno já trabalhou com o conceito de triângulo em séries anteriores.

Considerações Finais.

A teoria de Van Hiele visa contribuir para que o professor identifique por meio de atividades os níveis de conhecimento geométrico em que cada aluno se encontra, para assim desenvolver atividades condizentes com esses conhecimentos e ir avançando gradualmente.

Fazer o uso desta teoria proporciona uma mudança no papel aluno e professor em sala de aula, o aluno não é mais um ser passivo na aprendizagem de geometria, mas sim um ser ativo, responsável pela sua aprendizagem enquanto o professor passa de detentor do saber para um mediador. O processo de ensino e aprendizagem torna-se um grande desafio e irão depender dos dois lados, aluno e professor para que se possa ter êxito. A utilização da teoria de Van Hiele permite buscar um caminho novo para apresentação de teoremas da geometria que algumas vezes são ensinados como algo mecânico sem significado, eles farão parte de uma evolução do pensamento não apenas como algo a ser decorado.

Este trabalho de conclusão de curso possibilitou perceber melhor as falhas do ensino da Geometria nos anos escolares que apesar de ser considerado importante foi sendo deixado de lado ao longo dos anos, foi possível perceber o quanto é importante que os professores saibam combinar aprendizagem com o nível de pensamento do aluno para que a aprendizagem possa ser efetiva.

Por meio da atividade aplicada, constatei que a análise das fases de desenvolvimento do aluno é de suma importância para um bom trabalho, o estudos da teoria devem ser trabalhados como ferramenta para sanar as falhas encontradas no desenvolvimento das habilidades geométricas do aluno e que é necessário realizar não apenas um trabalho de diagnostico, mas também um trabalho para o desenvolvimento do pensamento geométrico apenas saber em qual nível o aluno se encontra não é suficiente se eles estivessem no nível quatro poderíamos de certa forma estar despreocupados com o ensino de geometria, mas o diagnóstico nós mostra outra realidade que precisamos avançar muito para que os alunos possam estar neste nível de pensamento. Como educadores que somos acreditamos que este estudo deve ser aprofundado e ações que levem a mudança de nível de pensamento devem ser realizadas.

Precisamos compreender que esse processo de desenvolvimento do pensamento geométrico, não depende apenas do histórico do aluno, mas também, de como ele aprende e como se deve estimulá-lo.

Através desses estudos consegui expandir a visão que tenho sobre o ensino da Geometria nas escolas, como melhorar a forma de conduzir um trabalho em sala de aula e como futura professora pensando em pesquisa como um instrumento para melhorar a prática em sala de aula, possibilitando uma melhor reflexão dos objetivos traçados.

Referências Bibliográficas.

[1] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.

[2] BOYER, C. B. **História da Matemática.** São Paulo. Edgar Blucher. 1974.

[3] DUTRA, Fernando Junior. **Desenho Geométrico como ferramenta de aprendizagem de Geometria**. Porto Alegre, Rs. 2010/02.

[4] SILVA, Luciana; CANDIDO, Claudia Cueva. **Modelo de Aprendizagem de Geometria do Casal Van Hiele.** São Paulo- SP.

[5] PENTIADO, José de Arruda. **Curso de Desenho** para a segunda série ginasial. Campanha editora nacional, 1960.

[6] PUTINOK, José Carlos. **Elementos de Geometria & Desenho Geométrico:** volume 1. 4. ed. São Paulo: Scipione, 1993.

[7] BECKER, Marcelo. **Uma alternativa para o ensino de geometria: visualização geométrica e representações de sólidos no plano**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, 2009.
Disponível em: <http://hdl.handle.net/10183/17161>. Acesso em: 10. jan. 2014.

[8] RAYMUNDO, Márcia Fonseca Soutello Moreira. **Construção De Conceitos Geométricos: Investigando A Importância Do Ensino De Desenho Geométrico, Nos Anos Finais Do Ensino Fundamental.** Vassouras, 2010.

[9] VALENTE, J. A. **Análise dos Diferentes Tipos de Softwares Usados na Educação**. Campinas, SP, 1999.

[10] NASSER e NEIDE F. Parracho Sant´Anna: **Geometria Segundo a teoria de Van Hiele.** 2 ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

[11] LINDQUIST, Mary Montgomery e Shulte, Albert P. (organizadores). **Aprendendo e Ensinando Geometria.** 4ª reimpressão. São Paulo, Atual Editora, 1994.

[12] OLIVEIRA, Clézio Lemes de: **IMPORTÂNCIA DO DESENHO GEOMÉTRICO.** Licenciando do Curso de Matemática da Universidade Católica de Brasília – DF.

[13] http://brasilescola.uol.com.br/matematica/ponto-medio-um-segmento-reta.htm

Anexo 1

Colocar a atividade completa realizada 1 ao 8.

Conferir depois de terminar para ver se não sobrou folha em branco no meio o pagina com pouco desenho que dá pra subir essas coisas para que a impressão fique ótima.