Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Unidade Universitária de Nova Andradina
Curso de Matemática Licenciatura

Logaritmos: um pouco de história, conceitos e definição geométrica.

Anderson Aparecido do Carmo souza

Nova Andradina- MS

2016

Logaritmos: um pouco de história, conceitos e definição geométrica.

Anderson Aparecido do Carmo Souza

Trabalho de Conclusão de curso, do curso de Matemática, Licenciatura, turno noturno, da Universidade Estadual de Mato grosso do Sul, orientado pelo professor Luiz Oreste Cauz.

Nova Andradina- MS
2016

Logaritmos: um pouco de história, conceitos e definição geométrica.

Anderson Aparecido do Carmo Souza

Trabalho de conclusão de curso submetido ao corpo docente da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul- UEMS, unidade universitária da cidade de Nova Andradina, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Me. Luiz Oreste Cauz - UEMS ....
(orientador)

Prof. Dr. Fábio Rodrigues Lucas - UEMS ....

Prof. Esp. Anderson de Oliveira Chaves Negreli - UEMS ....

Nova Andradina

2016

Dedicatória

Eu dedico a minha familia, meu pai, Adão Pinto de Souza, minha mãe, Elsa Lopes do Carmo Souza e meu irmão, Rodrigo do Carmo Souza, pela paciência, carinho e amor, transmitidos incondicionalmente em minha vida, sempre motivando-me e dando-me estimulo e forças nos momentos de superação, portanto, encorajando-me a persistir e enfrentar firme e forte os momentos dificeis que passei ao longo do curso. E assim, consegui lutar e chegar até a ultima etapa da graduação que é escrever este trabalho. Dedico também ao meu orientador pela oportunidade que ele me destes, para trabalharmos juntos na elaboraçao deste trabalho.

Agradecimentos

Agradeço inicialmente a Deus e aos meus pais, que me consederam a vida e sempre me ajudaram a superar obstáculos, apoiando-me e motivando-me durante este período de curso. Agradeço os amigos acadêmicos que também trilharam comigo os árduos caminhos do saber e proporcionaram com vossa presença, momentos agradáveis vivenciados dentro e fora da sala de aula. Com grande respeito e admiração deixo um agradecimento especial para o professor Msc. Luiz Orestes Cauz, pela confiança depositada e o constante estimulo transmitido por ele para com a elaboraçao deste trabalho. E finalizando, agradeço a todas as pessoas que se fazem integrantes da comunidade universitária da UEMS da cidade de Nova Andradina.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo um estudo introdutório sobre Logaritmos. Ele descreve o contexto histórico em que os logaritmos foram descobertos e as pessoas que foram importantes para sua criaçao. Mostra os conceitos preliminares que são usados nos logaritmos e nas Funções Logaritmicas, também mostrando a concepção geométrica aplicada aos logaritmos e a uma função logaritmica, uma ideia antiga e excelente introdução ao cálculo diferencial que é muito importante para a resolução de problemas em sistemas onde outros métodos não são viáveis para se trabalhar.

Palavras-chave: Historia, Logaritmos, Função Logarítmica, Concepção Geométrica.

Abstract

The objective of this paper is to an introductory study on logarithms. It describes the historical context in which the logarithms were discovered and the people who were important to their creation. Shows the preliminary concepts that are used in logarithms and the Functions logarithmic, also showing the design of geometric applied to logarithms and a function logarithmic, an old idea and excellent introduction to differential calculus which is very important for the resolution of problems on systems where other methods are not viable to work.

Keywords: History, logarithms, logarithmic function, Geometric Conception.

Sumário

Introdução

Os logaritmos exercem certo fascínio por conta de sua beleza matemática, o que proporciona certa gratificação ao fazer um trabalho sobre o assunto e uma percepção de que se aprende muito com os logaritmos. O material de pesquisa para elaboração do trabalho exigiu uma leitura refinada e cuidadosa para obtermos um bom entendimento do tema proposto e podermos assim elaborar uma boa exposição acerca, do que se refere à definição sobre logaritmos. Embora o estudo e execução deste trabalho tenha sido de certa forma trabalhoso, principalmente na construção dos gráficos, ele foi de muito valor compreensivo e deixou transluzir de maneira expressiva a beleza e relevância do assunto aqui desenvolvido. O objetivo deste trabalho visa dar valorização ao contexto histórico, mostrar a importância dos logaritmos como ferramenta matemática e apresentar a importância da leitura gráfica dos mesmos. Este trabalho apresenta-se organizado da seguinte maneira: No Capítulo 1, abordamos a história dos logaritmos, destacando os principais matemáticos que contribuíram para a construção desse conhecimento, dando ênfase ao matemático Jhohn Napier como sendo o descobridor dos logaritmos, e assim, proporcionando a resolução de problemas complexos na Astronomia e Navegação. No Capítulo 2, é trabalhado e formalizado os conceitos preliminares de algumas definições e propriedades sobre potências e raízes, que estão relacionadas aos logaritmos, e também é abordada a definição direta sobre logaritmos e as consequências desta definição. No Capítulo 3, temos os logaritmos tratados geometricamente, através da definição de funções logarítmicas e do conceito de área de uma figura plana. Neste capítulo evidenciamos o estudo e desenvolvimento dos gráficos por intermédio das definições e de exemplos práticos. Por fim, apresentamos as considerações finais e referências bibliográficas.

Capítulo 1

Logaritmos: História e Aplicabilidade

1.1 Notas históricas

A historia por trás dos logaritmos, partindo do surgimento aos dias atuais, tem relevante papel na construção do saber, devido à sua enorme relevância em aplicações, tanto na vida diária como em outras ciências e na própria matemática, assim, temos os logaritmos como método de cálculo que permite realizar com presteza, multiplicações, divisões, potenciações e extrações de raízes, vista que, as operações aritméticas são classificadas em três grupos: Adição e Subtração formando as operações de 1ª espécie, Multiplicação e Divisão sendo as de 2ª espécie, enquanto que Potenciação e Radiciação constituem as operações de 3ª espécie. Todavia, procurava-se um processo que reduzisse as operações de 2ª e 3ª espécie em operações de 1ª espécie ou em uma espécie inferior e mais simples, foi então que estas operações se viram mais simples com a chegada dos logaritmos ao final do século XVI, graças ao desenvolvimento da astronomia e da navegação que exigiam na época,longos e laboriosos cálculos aritméticos na resolução de seus problemas e os logaritmos surgiram para facilitarem esses cálculos.

Diversos matemáticos do século XVI se mobilizaram e contribuíram na construção dos logaritmos que conhecemos hoje, porém, a solução surgiu simultaneamente entre o suíço JOBST BURGI $(1552 - 1632)$ fabricante de instrumentos astronômicos, matemático e inventor, e JOHN NAPIER $(1550 - 1617)$ um nobre escocês, que foi teólogo, físico, astrônomo e matemático. Era proprietário de imensas faixas de terra, Barão de Murchiston, que administrava suas grandes propriedades e escrevia sobre vários aspectos, interessava-se particularmente por assuntos referentes à computação, trigonometria e estudos relacionados à simplificação de cálculos. Embora,ambos se desconhecerem inteiramente, foram os dois grandes responsáveis pela publicação das primeiras tábuas de logaritmos. As tábuas de JOHN NAPIER foram lançadas no ano de 1614 na cidade de Edimburgo que é capital da Escócia, e as de JOST BURGI no ano de 1620 em Praga, que é a capital e maior cidade da Republica Checa. Logo, a influência de NAPIER no desenvolvimento dos logaritmos ficou eternizada a seu favor, simplesmente por causa da publicação em 1614, de seu MIRICIFI LOGARITHMORUM CANONIS DESCRIPTO "(Uma Descriçãoda Admirável Tábua de Logaritmos)" e de seu excelente ciclo de amizades com professores universitários.

Os logaritmos, sem dúvida, foi uma das invenções mais extraordinária daquela época e devido a seu grandioso fervor atraiu outros matemáticos como, o inglês HENRY BRIGGS $(1561 - 1631)$ professor da universidade de Londres e de Oxford que também contribuiu sendo o responsável pelo aparecimento dos logaritmos comuns, publicando suas primeiras tábuas em 1617 e depois as aperfeiçoando em 1624.

1.1.1 John Napier e a Primeira Ideia Sobre os Logaritmos

É conhecido como o descodificador do logaritmo natural (ou neperiano) e por ter popularizado o ponto decimal. Viveu 67 anos, entre seu nascimento no ano de 1550 e sua morte em 4 de Abril de 1617, vitima de um ataque cardíaco. Era originário de uma família rica, nasceu no castelo de Merchiston, nas proximidades de Edimburgo, filho de Archibald Napier (Pai). Desde pequeno, Napier mostrou-se diferente dos demais jovens da sua classe social, pelo fato de não dedicar-se à caça e à guerra, preferia insistentemente atividades intelectuais, revelando-se um grande estudioso. Até os doze anos, teve aulas particulares em seu castelo, com excelentes professores escoceses contratados por seu pai. Aos treze anos, ingressou na Universidade de ST. Andrews, destacando-se como melhor aluno. Por causa de sua extraordinária capacidade intelectual, foi mandado à França para estudar junto a mestres que estavam a revolucionar a matemática e a filosofia. Seu nome passou a ter enorme destaque é reconhecimento em toda a Escócia no ano de 1585, quando inventou vários artefatos de guerra. Mas, foi com os logaritmos que ele se consagrou internacionalmente. A invenção dos logaritmos fez com que Napier trabalhasse durante 20 anos, antes da publicação de seus resultados, o que comprova o inicio de suas ideias em 1594 aproximadamente. A principio ele pensou no matemático Alemão Michael Stifel, que publicou uma breve tabela logarítmica não muito precisa sobre sequências de potencias sucessivas de um dado número em 1544, cinquenta anos antes. Para tais sequências, tinha-se a soma e a diferença dos expoentes das potências correspondendo ao produto e ao quociente das próprias potências, no entanto, uma sequência com potências inteiras de uma base, sendo igual a dois, não poderia ser aplicada para computações, por que surgiam grandes espaços em branco entre os termos sucessivos, o que tornava a interpolação muito imprecisa. Enquanto Napier pensava no assunto, o médico Dr. John Craig, contou-lhe sobre o uso da prostaférese na Dinamarca. O Doutor havia adquirido tal conhecimento graças a uma viagem a Dinamarca na companhia de James VI que buscava encontrar sua noiva Anne de Dinamarca em 1590, Craig e os demais integrantes do grupo abrigaram-se perto do observatório do astrônomo Tycho Brahe, por conta do mal tempo e com isso, tiveram a oportunidade de encontrar e conversar com o astrônomo. Aparentemente foi mencionado o maravilhoso artificio da prostaférese, muito usado em computações no observatório, esta informação fez Napier redobrar seus esforços e finalmente em 1614 publicar sua grande obra sobre os logaritmos, passando a ser considerado um grande matemático e principalmente, eficaz colaborador para com a solução dos complicados problemas que apareciam na astronomia e navegação.

1.1.2 A teoria de Napier para criação dos Logaritmos

O segredo da obra de Napier pode ser explicado muito simplesmente. Para que fosse possível conservar os termos próximos um do outro e a interpolação se tornasse precisa, uma progressão geométrica de potências inteiras de um dado número tinha que manter o número dado muito próximo de um. Por isso, Napier escolheu para ser seu número dado $1 - 10^{-7}$ ou $0,9999999$. Dessa maneira, todos os termos na progressão de potências crescentes ficavam incrivelmente muito próximos. Para adquirir completo equilíbrio e evitar decimais, ele multiplicava cada potencia por 10^7, ou seja, $N = 10^7(1 - 1/10^7)^L$ e a letra L mencionada na expressão é o logaritmo de Napier do número N. Portanto o logaritmo de 10^7 é igual a 0 (zero), já o logaritmo de $10^7(1 - 1/10^7) = 9999999$ é equivalente a 1 (um). Dividindo os números e os logaritmos por 10^7 , teríamos potencialmente um sistema de logaritmos de base $1/e$, porque $(1 - 1/10^7)^{10^7}$ fica perto de $\lim_{n\to\infty}(1 - 1/n)^n = e$. Deve-se lembrar de que Napier não tinha o conceito de base de um sistema de logaritmos, pois sua definição era diferente da aplicada nos tempos de hoje. Por isso que construiu suas tabelas numericamente em vez de geometricamente e a principio chamou seus índices (expoentes) das potências como "números artificiais", porém mais tarde mudando-os para a palavra "logaritmo", que é a composição de outras duas palavras de origem grega, que são Logos (razão) e Arithmos (número). Ele também não raciocinou numa base de número inteiro para seu sistema, mas suas tabelas eram codificadas por multiplicações repetidas, equivalentes a potencia de $0,9999999$. Com isso, evidentemente a potência (número) descresse à medida que o índice (logaritmo) cresce. Esse resultado era de se esperar, pelo fato dele usar basicamente a base $1/e$ que é menor que 1 (um).

Outra diferença importante entre os logaritmos atuais e os de Napier, é que o seu logaritmo de um produto (ou quociente) não era igual à soma (ou diferença) dos logaritmos. Se $L_1 = \log N_1$ e $L_2 = \log N_2$, então $N_1 = 10^7(1-1/10^7)^{L_1}$ e $N_2 = 10^7(1-1/10^7)^{L_2}$, de modo que a soma dos logaritmos de Napier não será o logaritmo de N_1N_2, mas de $N_1N_2/10^7$. Essas modificações valem facilmente para os logaritmos de quociente, potências e raízes, como exemplo, se $L = \log N$, então $nL = N^n/10^{7(n-1)}$. Essas diferenças apresentam apenas um deslocamento da vírgula decimal e por isso não são muito significativas. Sem sombra de duvida, Napier conseguiu atingir seu objetivo, que era reduzir os cálculos enormes usados na construção das tabuas trigonométricas para Astronomia e Navegação, simplesmente resumindo as operações de multiplicação e divisão que aparentavam ser impossíveis de simplifica-las, portanto através dos logaritmos ele conseguira esse feito, ou seja, qualquer problema de multiplicação e divisão, por mais complexo que seja se reduz a outro, relativamente simples de adição e subtração.

O entendimento de Napier sobre os logaritmos era fundamentado em uma ideia já difundida, que é a comparação entre dois pontos em movimento, um dos quais gerava uma P.A. (Progressão Aritmética) e o outro, uma P.G. (Progressão Geométrica). Os termos de uma P.G. eram concebidos como $K^1, K^2, K^3, ..., K^n$ e os de uma P.A. eram dados a partir do conjunto dos naturais, sendo $1, 2, 3, ..., n$. Colocando esses valores em uma tabela para um caso particular onde a base $K = 2$, temos:

2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	...
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...

As duas progressões mostradas na tabela acima, garantem que os termos da progressão aritmética são considerados como expoentes de 2, agora os termos em destaque na progressão geométrica representam as quantidades resultantes da operação sugerida. Como exemplo, para calcular o produto 8 x 16, bastava efetuar a adição dos expoentes de $2^3 \cdot 2^4$, obtendo $2^{(3+4)} = 2^7 = 128$ que é o produto procurado. A cada termo da progressão aritmética é chamado de LOGARITMO do termo correspondente na progressão geométrica.

Os princípios de sua obra eram explicados geometricamente da seguinte forma. Dado uma reta r com o seu segmento de reta AB e uma semi-reta CDE, um ponto P se move ao longo de AB com velocidade variável e proporcional a distancia que resta entre PB. Outro ponto Q parte de C e se movimenta ao longo de CDE, com uma velocidade uniforme semelhante à velocidade inicial de P. Se os dois pontos partem de A e C ao mesmo instante, Napier chamava a distância CQ sendo o logaritmo da distância PB. Para uma melhor compreensão, podemos observar figura 1.1 abaixo:

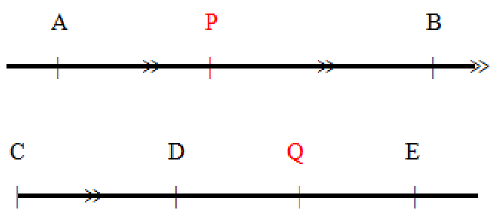

Figura 1.1: Reta e Semi-reta

Como explicado antes, Napier usava a base $1/e$ que é menor que $1(um)$ e isso gerava uma proporção da seguinte forma, a medida que PB diminuía, seu logaritmo CQ aumentava. Portanto, se tornou evidente que seria vantajoso fazer o logaritmo crescer com o número, e para isso, bastava apenas definir o logaritmo de $1(um)$ igual a $0(zero)$.

1.1.3 Os logaritmos de Jobst Burgi

Até agora ficou sugerido, que o surgimento dos logaritmos teve a contribuição específica de apenas um único homem, no entanto, essa impressão não deve continuar. Os relatos históricos caracterizam Jonh Napier como sendo o primeiro grande matemático a publicar uma obra sobre logaritmos. Mas, ideias idênticas foram desenvolvidas na Suíça de forma independente por Jobst Burgi, aproximadamente ao mesmo tempo em que as de Napier. Podemos dizer ainda, que é possível a ideia sobre logaritmos ter ocorrido a Burgi em 1588, exatamente 6(*seis*) anos antes de Napier despertar interesse pelo assunto. Porém, Burgi apenas publicou seus resultados na cidade de Praga em um livro intitulado como "ARITHMETISCHE UND GEOMETRISCHE PROGRESS-TABULEN" em 1620, alguns anos depois de Napier também divulgar seus próprios resultados. Ambos começaram seus trabalhos, partindo das propriedades de sequencias geométricas e aritméticas, influenciados pelo processo da prostaférese. Os princípios fundamentais eram os mesmos e a diferença entre as duas obras estava na nomenclatura e nos valores numéricos empregados. Em vez de usar um número menor que 1(*um*), como Napier fazia, Burgi escolheu o número $1 + 10^{-4}$ que é maior que 1(*um*) e multiplicava as potências deste número por 10^8, diferente do método de seu concorrente que multiplicava por 10^7. Os princípios fundamentais eram os mesmos e a diferença entre as duas obras estava na nomenclatura e nos valores numéricos empregados. Em vez de usar um número menor que 1(*um*), como Napier fazia, Burgi escolheu o número $1 + 10^{-4}$ que é maior que 1(*um*) e multiplicava as potências deste número por 10^8, diferente do método de seu concorrente que multiplicava por 10^7. Outra diferença, esta na tabulação adotada por Burgi, que multiplicava todos os seus índices de potências por 10(*dez*). Logo, se $N = 10^8(1 + 1/10^4)^L$, surgia-se o número $10L$, batizado por Burgi como "vermelho" e que é correspondente ao número "preto" N. Desta forma, se pegarmos todos os números pretos e dividirmos por 10^8 e os vermelhos por 10^5, virtualmente teríamos um sistema de logaritmos naturais. Usando um exemplo pratico de Burgi, o mesmo ofereceu para um número preto 1.000.000.000 o número vermelho $230.270, 022$. Ao deslocar a vírgula do número vermelho, equivale-se dizer que $ln10 = 2,30270022$. Comparando o valor encontrado até quatro casas decimais, com o valor moderno de hoje, poderemos ver que não ficou uma aproximação ruim, ainda mais lembrando que $(1 + 1/10^{-4})10^4$ não é a mesma coisa que $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - 1/n)^n$, mesmo que os valores obtidos coincidam um com o outro. As tabelas de Burgi eram organizadas com seus números vermelhos do lado da pagina e os pretos acomodados nas linhas e colunas, desta forma, tinha-se uma tabela de antilogaritmos, mas isso é um pequeno detalhe, vista que, a essência do principio dos logaritmos esta nela. Seus logaritmos se aproximam muito mais dos atuais do que os de Napier, pois no momento em que os números pretos de Burgi crescem os vermelhos também crescem. Isto é a mesma coisa em dizer, que o número N cresce junto com seu logaritmo. Embora os dois matemáticos contribuírem brilhantemente, seus sistemas compartilhavam do mesmo problema, caracterizado pelo logaritmo de um produto (ou quociente) não ser igual à soma (ou diferença) dos logaritmos.

1.1.4 Os logaritmos Briggsianos de Henry Briggs

Os logaritmos tiveram sucesso imediato após a publicação de Napier em 1614, e entre seus apreciadores mais calorosos estava Henry Briggs, que foi o primeiro professor de geometria em Oxford. Por meados de 1615 Briggs realizou uma visita ao castelo de Napier na Escócia para tratarem sobre possíveis modificações nos logaritmos. A proposta de Briggs era simples, ele queria que fossem usadas potências de $10(dez)$ e para sua surpresa, Napier disse que havia pensado nesta possibilidade e aceitava essa mudança. Os dois matemáticos depois de uma longa prosa, aderiram ao seguinte conceito, que o logaritmo de $1(um)$ deveria ser $0(zero)$ e o logaritmo de $10(dez)$ deveria ser $1(um)$. Embora os dois terem concordado um com o outro, Napier não tinha mais disposição para colocar a ideia em pratica e veio a falecer em 1617. Mesmo após a morte, uma segunda obra sobre logaritmos, o "Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio" apareceu em 1619. Neste trabalho, Napier demonstrava completamente todos os métodos que usava para construir suas tabelas e para alegria de Briggs, não mencionou nada sobre o assunto tratado com ele. Então, a responsabilidade de construir e publicar a primeira tabela de logaritmos comuns foi literalmente de Briggs. Portanto, a primeira alteração feita por Briggs, foi não usar as potências de um número aproximando-se de $10(dez)$ e sim, começou com $\log 10 = 1$, e depois utilizando raízes sucessivas, encontrou outros logaritmos. A o calcular $10^{1/2} = \sqrt{10} = 3,162277$, Briggs tinha que $\log 3,162277 = 0,5$ e calculando $10^{3/4} = \sqrt{31,62277} = 5,623413$ tinha-se que $\log 5,623413 = 0,75$. Em 1617, ano da morte de Napier, Briggs conseguiu publicar sua primeira obra com o titulo de "Logarithmorum Chilias Prima". Nela era encontrada os logaritmos comuns dos números de 1 a 1000, todos calculados com quatorze casas decimais. No ano de 1624, Briggs resolveu ampliar sua tabela inserindo logaritmos comuns dos números de 1 a 20.000 e de 90.000 a 100.000, igualmente calculados com quatorze casas. A partir dos logaritmos de Briggs, temos que, qualquer trabalho com logaritmos podia ser realizado da mesma forma como hoje, pois nas tabelas de Briggs teria como aplicar todas as leis usuais sobre logaritmos. Um fato importante dentre vários que foram ditos, é que as palavras "mantissa" e "característica" surgiram através do livro de Briggs de 1624 e os logaritmos comuns também podem ser chamados de logaritmos briggsianos em homenagem ao seu criador. Raras vezes, uma descoberta sobre um determinado assunto espalhou-se depressa, quanto à invenção dos logaritmos e todo esse trabalho ressalta a importância, que os logaritmos assumiram naquela época e o resultado foi o aparecimento imediato de tabelas de logaritmos que realizassem os cálculos trabalhosos, que emperravam o desenvolvimento de inúmeras atividades na astronomia e navegação.

1.1.5 A Aplicabilidade da teoria dos logaritmos

Do começo deste capitulo, ate o momento, tivemos a oportunidade de revivermos minuciosamente a historia deste grande achado chamado "Logaritmos", que é uma contribuição valiosa para com a matemática. É inegável que os logaritmos façam parte do cotidiano de todo cidadão. Eles estão presentes em varias atividades que o homem desempenha no seu dia-a-dia, inclusive em diversas outras áreas do conhecimento como Física, Biologia, Química, Medicina, Geografia entre outras. A aplicabilidade da teoria dos logaritmos em outras áreas do conhecimento, visa agilizar cálculos, bem como ampliar conhecimentos em assuntos específicos, vejam a seguir algumas aplicações desse fantástico assunto da matemática.

Logaritmos e a **Química:** Os químicos, para determinar o tempo de desintegração de uma substância radioativa, utilizam a fórmula $\mathbf{Q = Q_0 \cdot 2{,}71^{-rt}}$ em que $\mathbf{Q}$ é a massa da substancia, $\mathbf{Q_0}$ é a massa inicial, $\mathbf{r}$ é a taxa de redução da radioatividade e $\mathbf{t}$ é o tempo em anos. Podemos calcular o tempo gasto para **300 g** de determinada substancia se reduzir a **200 g**, a uma taxa de **7%** ao ano. Equações desse tipo podem ser resolvidas com auxílio da teoria dos logaritmos.

Logaritmos e os **Terremotos:** A escala de **Richter** é logarítmica e é usada desde 1935, por meio dela é possível calcular a magnitude (Quantidade de energia), epicentro (Origem do terremoto) e a amplitude de um terremoto. Dessa forma, é possível quantificar a energia, em joules, liberada pelo movimento tectônico. Se a energia liberada nesse movimento é representada por $\mathbf{E}$ a magnitude medida em grau Richter é representada por $\mathbf{M}$, a equação que relaciona as duas grandezas é dada pela seguinte equação logarítmica $\mathbf{\log E = 1{,}44 + 1{,}5\ M.}$

Logaritmos e a **Medicina:** Quando um paciente ingere um medicamento, a droga entra na corrente sanguínea e, ao passar pelo fígado e pelos rins, é metabolizada e eliminada a uma taxa que é proporcional a quantidade presente no corpo. Suponha uma super-dose de um medicamento cujo principio ativo é de **500 mg.** A quantidade **q** desse princípio ativo que continua presente no organismo **t** horas após a ingestão é dada pela expressão $\mathbf{q(t) = 500 \cdot (0{,}6)^t}$. Usando $\mathbf{\ln 3 = 1{,}1}$; $\mathbf{\ln 5 = 1{,}6}$ e $\mathbf{\ln 2 = 0{,}7}$; é possível obter o tempo necessário para que a quantidade dessa droga presente no corpo do paciente seja menor que **100 mg**. Posteriormente observada às aplicações citadas acima, podemos concluir que os logaritmos contribuem e são importantíssimos no desenvolvimento de outras áreas do conhecimento.

Capítulo 2

Bases Matematicas

2.1 Conceitos Preliminares

A seguir apresentaremos algumas definições e propriedades que estão relacionadas aos Logaritmos.

2.1.1 Potências e Raizes

Definição 2.1. *Dado um número real $a > 0$, definimos a potência de a, com expoente natural n, denotada por a^n, da serguinte forma:*

(i) $a^0 = 1$, *para* $a \neq 0$

(ii) $a^1 = a$

(iii) $a^{n+1} = a^n \cdot a$

Dessa definição decorre que:

$$a^1 = a^0 \cdot a = 1 \cdot a = a$$

$$a^2 = a^1 \cdot a = a \cdot a$$

$$a^3 = a^2 \cdot a = (a \cdot a) \cdot a = a \cdot a \cdot a$$

Propriedade 2.1. *Para os números reais $a > 0$ e $b > 0$, com $(m \in N)$ e $(n \in N)$, então valem as seguintes propriedades:*

P1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

P2. $a^m/a^n = a^{m-n}$, *$a \neq 0$ e $m \geq n$.*

P3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, *com $b \neq 0$ ou $n \neq 0$*

P4. $(a/b)^n = a^n/b^n$, *sendo $b \neq 0$*

P5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

As demonstrações a seguir serão feitas utilizando-se indução sobre n.

Demonstração. **P1. 1ª)** Considerando m fixo, sendo $n = p$, implica que:

$$a^m \cdot a^p = a^{m+p}$$

A propriedade é verdadeira para p = 0, pois:

$$a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0}$$

2ª) Suponhamos que para $n = p$ a propriedade seja verdadeira, isto é:

$$a^m \cdot a^p = a^{m+p}$$

Mostremos que também é verdadeira para $n = p + 1$, ou seja:

$$a^m \cdot a^{p+1} = a^m \cdot (a^p \cdot a) = (a^m \cdot a^p) \cdot a = a^{m+p} \cdot a = a^{m+p+1}$$

Onde segue que n = p + 1 é verdadeiro. Assim:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

□

Demonstração. **P3. 1ª)** A propriedade é verdadeira para $n = 0$, pois:

$$(a \cdot b)^n = (a \cdot b)^0 = 1 = 1 \cdot 1 = a^0 \cdot b^0 = a^n \cdot b^n$$

2ª) Suponhamos que para $n = p$ a propriedade seja verdadeira, isto é:

$$(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$$

Mostremos que também é verdadeira para n = p + 1, ou seja:

$$(a \cdot b)^{p+1} = (a \cdot b)^p \cdot (a \cdot b) = (a^p \cdot b^p) \cdot (a \cdot b) = (a^p \cdot a) \cdot (b^p \cdot b) = a^{p+1} \cdot b^{p+1}$$

Onde segue que $n = p + 1$ é verdadeiro. Assim:

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

□

Demonstração. **P5. 1ª)** Novamente considerando m fixo, sendo $n = p$, implica que:

$$(a^m)^p = a^{m \cdot p}$$

A propriedade é verdadeira para $p = 0$, pois:

$$(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m \cdot 0}$$

2ª) Suponhamos que para $n = p$ a propriedade seja verdadeira, isto é:

$$(a^m)^p = a^{m.p}$$

Mostremos que também é verdadeira para $n = p + 1$, ou seja:

$$(a^m)^{p+1} = (a^m)^p \cdot (a^m) = a^{m \cdot p} \cdot a^m = a^{m \cdot p + m} = a^{m(p+1)}$$

Onde segue que $n = p + 1$ é verdadeiro. Assim:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$\square$

2.1.2 Potência de Expoente Inteiro Negativo

Definição 2.2. *Dado um número real $a > 0$, e um número natural n. Definimos a potência de a, com expoente inteiro não positivo $-n$, denotado por a^{-n}, da seguinte forma:*

(i) $a^0 = 1$

(ii) $a^{-n} = 1/a^n$, *para todo* $n \in N^*$

Uma consequência imediata da definição (2.1) *é a seguinte: Dados $m, n \in N$, tem-se:*

$$(a^m)^{-n} = (a^n)^{-m}$$

De fato:

$$(a^m)^{-n} = 1/(a^m)^n = 1/a^{m \cdot n} = 1/a^{n \cdot m} = 1/(a^n)^m = (a^n)^{-m}$$

Propriedade 2.2. *Para os números reais $a > 0$ e $b > 0$, com $(m \in N)$ e $(n \in N)$, então valem as seguintes propriedades:*

P6. $a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{(-m)+(-n)}$;

P7. $a^{-m}/a^{-n} = a^{(-m)-(-n)}$, $a \neq 0$;

P8. $(a.b)^{-n} = a^{-n}.b^{-n}$, *com* $b \neq 0$ *ou* $n \neq 0$;

P9. $(a/b)^{-n} = a^{-n}/b^{-n}$, $b \neq 0$

P10. $(a^{-m})^{-n} = a^{(-m)\cdot(-n)}$

Demonstração. **P6.** Observe que:

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = 1/a^m \cdot 1/a^n = 1/a^m \cdot (1 \cdot 1)/(a^m \cdot a^n) = 1/a^{m+n} = a^{-(m+n)} = a^{(-m)+(-n)}.$$

Logo:

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = a^{(-m)+(-n)}$$

□

Demonstração. **P8.** Temos que:

$$(a \cdot b)^{-n} = 1/(a \cdot b)^{-n} = 1/a^n \cdot b^n = 1/a^n \cdot 1/b^n = a^{-n} \cdot b^{-n}$$

Portanto

$$(a \cdot b)^{-n} = a^{-n} \cdot b^{-n}$$

□

Demonstração. **P10.** Consideremos que:

$$(a^{-m})^{-n} = 1/(a^{-m})^n = 1/(a^n)^{-m} = (a^m)^n = a^{m \cdot n} = a^{(-m) \cdot (-n)}$$

Logo:

$$(a^{-m})^{-n} = a^{(-m) \cdot (-n)}$$

□

2.1.3 Raiz Enésima Aritmética

Definição 2.3. *Dado um numero real $a \geq 0$ e um numero natural $n \geq 1$, existe sempre um número real positivo ou nulo b, tal que $b^n = a$. O número b é chamado de raiz enésima aritmética de a, e é indicado pelo símbolo $\sqrt[n]{a}$, em que a é chamado radicando e n é o índice.*

Propriedade 2.3. *Se $a, b \in R_+$, com $n, p \in N^*$ e $m \in Z$, temos:*

R1. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$, *para $a \neq 0$ ou $m \neq 0$*

R2. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

R3. $\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}$, *com* $b \neq 0$

R4. $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$, *para* $a \neq 0$ *ou* $m \neq 0$

R5. $\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p \cdot n]{a}$

Demonstração. **R1.** Temos que:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

Façamos $\sqrt[n]{a^m} = x$, então:

$$x^{n \cdot p} = (\sqrt[n]{a^m})^{n \cdot p} = [(\sqrt[n]{a^m})^n]^p = [x^m]^p \Longrightarrow \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}.$$

□

Demonstração. **R2.** Temos que:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Façamos $x = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, então:

$$x^n = (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = a \cdot b \Longrightarrow x = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

□

Demonstração. **R4.** Temos que:

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Considerando m fixo e $m \geq 0$, provaremos por indução sobre m:

1ª) A propriedade é verdadeira para $m = 0$, pois:

$$(\sqrt[n]{a})^0 = 1 = \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{a^0}$$

2ª) Supondo a propriedade verdadeira para $m = p$, isto é, $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$, provaremos que é verdadeira para $m = p + 1$, ou seja:

$$(\sqrt[n]{a})^{p+1} = \sqrt[n]{a^{p+1}}$$

De fato:

$$(\sqrt[n]{a})^{p+1} = (\sqrt[n]{a})^{p} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{p}} \cdot \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a^{p} \cdot a} = \sqrt[n]{a^{p+1}}$$

Se $m < 0$, façamos $-m = q > 0$, então:

$$(\sqrt[n]{a})^{m} \cdot 1/(\sqrt[n]{a})^{q} = 1/\sqrt[n]{a^{q}} = 1/\sqrt[n]{a^{-m}} = 1/\sqrt[n]{1/a^{m}} = 1/1/\sqrt[n]{a^{m}} = \sqrt[n]{a^{m}}$$

$\square$

Demonstração. **R5.** Temos que:

$$\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[p \cdot n]{a}$$

Façamos $x = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a}}$, então:

$$x^{p} = (\sqrt[p]{\sqrt[n]{a}})^{p} = \sqrt[n]{a} \Longrightarrow (x^{p})^{n} = (\sqrt[n]{a})^{n} \Longrightarrow x^{p \cdot n} = a \Longrightarrow x = \sqrt[p \cdot n]{a}$$

$\square$

2.1.4 Potência de Expoente Racional

Definição 2.4. *Dado o número real $a > 0$, chama-se potencia de expoente racional p/q, com $p \in Z$ e $q \in N^{*}$ de base a, a potência denominada por $a^{p/q}$, que satisfaz a seguinte relação:*

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^{p}}$$

Se $a = 0$ e $p/q > 0$, adotamos a seguinte definição especial:

$$0^{p/q}$$

Propriedade 2.4. *Se $a, b \in R_{+}^{*}$ e $p/q, e/s \in Q$, então valem as seguintes propriedades:*

P1. $a^{p/q} \cdot a^{r/s} = a^{p/q+r/s}$

P2. $a^{p/q}/a^{r/s} = a^{p/q-r/s}$

P3. $(a \cdot b)^{p/q} = a^{p/q} \cdot b^{p/q}$

P4. $(a/b)^{p/q} = a^{p/q}/b^{p/q}$

P5. $(a^{p/q})^{r/s} = a^{p/q \cdot r/s}$

Demonstração. **P1.** Temos que:

$$a^{p/q} \cdot a^{r/s} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[q \cdot s]{a^{p \cdot s}} \cdot \sqrt[q \cdot s]{a^{r \cdot q}} = \sqrt[q \cdot s]{a^{p \cdot s} \cdot b^{r \cdot q}} = \sqrt[q \cdot s]{a^{p \cdot s + r \cdot q}} = a^{p \cdot s + r \cdot q / q \cdot s} = x^{p/q+r/s}$$

□

Demonstração. **P3.** Temos que:

$$(a \cdot b)^{p/q} = \sqrt[q]{(a \cdot b)^p} = \sqrt[q]{a^p \cdot b^p} = \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[q]{b^p} = a^{p/q} \cdot b^{p/q}$$

□

Demonstração. **P5.** Temos que:

$$(a^{p/q})^{r/s} = \sqrt[s]{(a^{p/q})^r} = \sqrt[s]{(\sqrt[q]{a^p})^r} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{a^{p \cdot r}}} = \sqrt[q \cdot s]{a^{p \cdot r}} = a^{p \cdot r / s \cdot s} = a^{p/q \cdot r/s}$$

□

Definição 2.5. *Dado um número real a, tal que $0 < a \neq 1$. Chama-se função exponencial de base a, a função $f : R \to R$ definida por $f(x) = a^x$.*

A função definida acima satisfaz as seguintes propriedades para quaisquer $x, y \in R$.

Propriedade 2.5.

1ª) *Na função exponencial $f(x) = a^x$, temos:*

$$x = 0 \Longrightarrow f(0) = a^0 = 1$$

Portanto, o par ordenado $(0,1)$ *pertence à função para todo* $a \in R_+^* - 1$. *Isto significa que o gráfico cartesiano de toda função exponencial corta o eixo* y *no ponto da ordenada* 1.

2ª) *A função exponencial* $f(x) = a^x$ *é crescente (decrescente) se, e somente se,* $a > 1$ $(0 < a < 1)$. *Portanto, dados os reais* x_1 *e* x_2, *temos:*

(i) *Quando* $a > 1 : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(ii) *Quando* $0 < a < 1 : x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Lema 2.1. *Sendo* $a \in R$, $a > 1$ *e* $n \in Z$, *temos:*

$a^n > 1$ *se, e somente se,* $n > 0$.

Demonstração. **1ª** Parte.

Provemos, por indução sobre n, a proposição: $n > 0 \Longrightarrow a^n > 1$:

1ª) É verdadeira para $n = 1$, pois $a^1 = a > 1$;

2ª) Suponhamos que a proposição seja verdadeira para $n = p$, isto é, $a^p > 1$, e provemos que é verdadeira para $n = p + 1$.

De fato, se $a > 1$, multipliquemos ambos os membros desta desigualdade por a^p e mantendo a desigualdade, pois a^p é positivo, temos:

$$a > 1 \Longrightarrow a \cdot a^p > a^p \Longrightarrow a^{p+1} > a^p > 1$$

2ª Parte.

Provemos, por redução ao absurdo, a proposição: $a^n > 1 \Longrightarrow n > 0$

Supondo $n \leq 0$, temos: $-n \geq 0$.

Notemos que $n = 0 \Longrightarrow a^0 = 1$ e pela primeira parte $-n > 0 \Longrightarrow a^-n > 1$;

Então:

$$-n \geq 0 \Longrightarrow a^-n \geq 1$$

Multiplicando ambos os membros dessa desigualdade por a^n e mantendo o sentido da desigualdade, pois a^n é positivo, temos:

$$a^-n \geq 1 \Longrightarrow a^n \cdot a^{-n} \geq a^n \Longrightarrow 1 \geq a^n$$

O que é um absurdo, pois contraria a hipótese $a^n > 1$.

Logo:

$$n > 0.$$

$\square$

Lema 2.2. *Sendo $a \in R, a > 1$ e $r \in Q$, temos:*

$$a^r > 1 \text{ se, e somente se, } r > 0.$$

Demonstração. **1ª** Parte.

Provemos a proposição: $r > 0 \Longrightarrow a^r > 1$.

Façamos $r = p/qcomp, q \in N^*$; então:

$$a^r = a^{p/q}$$

Pelo **(lema 2.1)**, se $a = (a^{1/q})^q > 1$ e $q > 0$, então $a^{1/q} > 1$. Ainda pelo mesmo **(lema)**, se $a^{1/q} > 1$ e $p > 0$, então $(a^{1/q})^p > 1$, ou seja:

$$(a^{1/q})^p = a^{p/q} = a^r > 1.$$

2ª Parte.

Provemos agora a proposição: $a^r > 1 \Longrightarrow r > 0$.

Façamos $r = p/q$ com $p \in Z$ e $q \in Z^*$; então:

$$a^r = a^{p/q} = (a^{1/q})^p$$

Supondo $q > 0$ e considerando que na primeira parte provamos que $a^{1/q} > 1$, temos, pelo **(lema 2.1)**:

$$a^{1/q} > 1, (a^{1/q})^p > 1 \Longrightarrow p > 0$$

Logo:

$$q > 0, p > 0 \Longrightarrow r = p/q > 0.$$

Supondo, agora $q < 0$, isto é, $-q > 0$, pelo **lema 2.1** temos:

$$a^{-1/q} > 1, (a^{1/q})^p = (a^{-1/q})^{-p} > 1 \Longrightarrow -p > 0 \Longrightarrow p < 0$$

Logo:

$$q < 0, p < 0 \Longrightarrow r = p/q > 0.$$

□

Lema 2.3. *Sendo $a \in R, a > 1$, r e s racionais, temos:*

$$a^s > a^r \textit{ se, e somente se, } s > r.$$

Demonstração.

$$a^s > a^r \Longleftrightarrow a^s \cdot a^{-r} > a^r \cdot a^{-r} \Longleftrightarrow a^{s-r} > 1 \Longleftrightarrow s - r > 0 \Longleftrightarrow s > r$$

□

Lema 2.4. *Sendo $a \in R, a > 1$ e $\alpha \in R - Q$, temos:*

$$a^\alpha > 1 \textit{ se, e somente se, } \alpha > 0.$$

Demonstração. Sejam os dois conjuntos que definem o numero irracional α,

$$A_1 = r \in Q | r < a e A_2 = s \in Q | s > \alpha$$

E o conjunto de potencias de expoente racionais que definem a^α,

$$B_1 = a^r | r \in A_1 e B_2 = a^s | s \in A_2$$

Parte.

Provemos a proposição: $\alpha > 0 \Longrightarrow a^{\alpha} > 1$

Pela definição do número α irracional e positivo, existem $r \in A_1$ e $s \in A_2$ tal que, $0 < r < \alpha < s$.

Pelo **(lema 2.2)**, como $a > 1, r > 0$ e $s > 0$, temos: $a^r > 1$ e $a^s > 1$.

Pelo **(lema 2.3)**, como $a > 1$ e $r < s$, temos: $1 < a^r < a^s$ e, agora pela definição de potência de expoente irracional, vem:

$$1 < a^r < a^{\alpha} < a^s$$

Portanto:

$$a^{\alpha} > 1$$

2ª Parte.

Vamos provar por redução ao absurdo, a proposição: $a^{\alpha} > 1 \Longrightarrow \alpha > 0$

Suponhamos $\alpha < 0$, isto é, $-\alpha > 0$

Pela primeira parte, temos:

$$a^{-\alpha} > 1 \Longrightarrow \begin{cases} A > 1, & -\alpha \in \mathbb{N} - \mathbb{Q} \\ & -\alpha > 0 \end{cases}$$

Multiplicando ambos os membros da desigualdade obtida por $a^{\alpha} > 0$, temos:

$$a^{-\alpha} \cdot a^{\alpha} > a^{\alpha}$$

Então:

$$1 > a^{\alpha}$$

Logo:

$$\alpha > 0.$$

$\square$

2.2 O Número e

Mais adiante, veremos que o (Número e) esta intimamente ligado ao cálculo de área de um logaritmo natural. Assim, é necessario termos conhecimento de tal número. Portanto, será feito nesta seção, a menção sobre este assunto.

Nosso primeiro objetivo, é provar que a sequência de termo geral $a_n = (1 + 1/n)^n$ é convergente. Então, definiremos o (número e) como sendo o limite da sequência, ou seja: $\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = e$.

Para provar a convergência da sequência, é suficiente provar que ela é crescente e que existe $M > 0$, tal que, $a_n < M$ para todo $n \geq 1$.

Propriedade 2.6. *A sequência de termo geral* $a_n = (1 + 1/n)^n$ *é convergente. Assim*

$$\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = e$$

Demonstração. **1ª)** Vamos provar que $(1 + 1/n)^n < 3$, para todo $n \geq 1$. Então:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{n} + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{n^2} + \begin{pmatrix} n \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{n^3} + \cdots + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} \frac{1}{n^n} =$$

$$1 + 1 + \frac{n(n-1)}{n^2} \cdot \frac{1}{2!} + \frac{n(n-1)\cdot(n-2)}{n^3} \cdot \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n^n} \cdot \frac{1}{n!}$$

De fato:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Como $2^n \leq (n+1)!$ para todo $n \geq 1$, resulta que ;

$$\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$$

para todo $n \geq 1$.

Daí,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

Como,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=2.$$

Logo:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3, \text{ para todo } n \geq 1.$$

2ª) Vamos provar que a sequência é crescente.

Sejam n e m naturais ≥ 1, tais que, $n < m$. Então:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{n(n-1)}{n^2}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{n(n-1)\cdot(n-2)}{n^3}\cdot\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{1}{n!}$$

e

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1+1+\frac{m(m-1)}{m^2}\cdot\frac{1}{2!}+\frac{m(m-1)\cdot(m-2)}{m^3}\cdot\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{m!}{m^m}\cdot\frac{1}{m!}$$

De $n < m$ resulta que:

$$1-\frac{1}{n} < 1-\frac{1}{m}$$

$$1-\frac{2}{n} < 1-\frac{2}{m}$$

ou seja,

$$1-\frac{n-1}{n} < 1-\frac{n-1}{m}$$

portanto,

$$\frac{n(n-1)}{n^2} < \frac{m(m-1)}{m^2}$$

$$\frac{n(n-1)\cdot(n-2)}{n^3} < \frac{m(m-1)\cdot(m-2)}{m^3}$$

Observando que:

$$\frac{m(m-1)\cdot(m-2)}{m^3} = \frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\frac{m-2}{m} = \left(1-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{m}\right)$$

segue que:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

se $n < m$. Logo, a sequência é crescente e assim, convergente. Seja e o limite dessa sequência. Assim

$$\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e.$$

□

Provado que a sequência do termo geral converge para o (Número e).

Nosso segundo objetivo é provar que $\lim_{x\to\infty}(1+1/n)^x = e$.

Sejam $n > 0$ um natural qualquer e $x > 0$ um real qualquer. Então:

$$n \le x < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n} \ge \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1+\frac{1}{n} \ge 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1}$$

daí,

$$n \le x < n+1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

ou seja,

$$n \le x < n+1 \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2}.$$

como,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = e$$

.

Logo:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

2.3 Logaritmos

Definição 2.6. *Sendo a e b números reais e positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de b na base a, o expoente que se deve dar à base a de modo que a potência obtida seja igual a b.*

Portanto: se $a, b \in R, 0 < a \neq 1$ *e* $b > 0$, *então:*

$$\log_a b = x \iff a^x = b.$$

Para $\log_a b = x$, *temos que:* a *é a base do logaritmo,* b *é o logaritmando,* x *é o logaritmo.*

Exemplo 2.1.

1ª) $\log_2 8 = 3 \iff 2^3 = 8$

2ª) $\log_3 1/9 = -2 \iff 3^{-2} = 1/9$

3ª) $\log_{0,2} 25 = -2 \iff (0,2)^{-2} = (1/5)^{-2} = 5^2 = 25$

2.3.1 Antilogaritmo

Definição 2.7. *Sejam* a *e* b *números reais positivos com* $a \neq 1$, *se o logaritmo de* b *na base* a *é* x, *então* b *é o antilogaritmo de* x *na base* a.

Portanto: se $a, b \in R, 0 < a \in 1$ *e* $b > 0$, *então:*

$$\log_a b = x \iff b = \text{antilog}_a x$$

Exemplo 2.2.

1ª) $antilog_3 2 = 9 \iff \log_3 9 = 2$

2ª) $\text{antilog}_{1/2} 3 = 1/8 \iff \log_{1/2} 1/8 = 3$

2.3.2 Consequências da Definição

Provêm da **definição 2.6** as seguintes propriedades:

Propriedade 2.7.

1ª) *O logaritmo do número* 1 *em qualquer base é igual a* 0 :

$$\log_a 1 = 0$$

2ª) O logaritmo da base para qualquer base é igual a 1 *:*

$$\log_a a = 1$$

3ª) Dois logaritmos com mesma base são iguais se, e somente se, os logaritmandos são iguais:

$$\log_a b = \log_a c \Longleftrightarrow b = c.$$

2.3.3 Propriedades dos Logaritmos

Propriedade 2.8.

1ª) Logaritmo do Produto.

Em qualquer base a $(0 < a \neq 1)$, *o logaritmo do produto de dois fatores reais positivos é igual à soma dos logaritmos dos fatores.*

Portanto: se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ *e* $c > 0$, *então:*

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Demonstração. Escrevendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a(b \cdot c) = z$, vamos provar que $z = x + y$.

Então:

$$\left.\begin{array}{rcl} \log_a b = x & \Longrightarrow & a^x = b \\ \log_a c = y & \Longrightarrow & a^y = c \\ \log_a(b \cdot c) = z & \Longrightarrow & a^z = b \cdot c \end{array}\right\} a^z = a^x \cdot a^y \Longrightarrow a^z = a^{x+y} \Longrightarrow z = x + y.$$

□

2ª) Logaritmo do Quociente.

Para toda base a $(0 < a \neq 1)$, *o logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual à diferença entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor.*

Portanto: Se $0 < a \neq 1, b > 0$ *e* $c > 0$, *então:*

$$\log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c$$

Demonstração. Escrevendo: $\log_a b = x, log_a c = y$ e $log_a(b/c) = z$, vamos provar que $z = x - y$.

Então:

$$\left.\begin{array}{rcl} \log_a b = x & \Longrightarrow & a^x = b \\ \log_a c = y & \Longrightarrow & a^y = c \\ \log_a(b/c) = z & \Longrightarrow & a^z = b/c \end{array}\right\} \Longrightarrow a^z = a^x/a^y \Longrightarrow a^z = a^{x-y} \Longrightarrow z = x - y.$$

□

3ª) Logaritmo da Potência

Para toda base a $(0 < a \neq 1)$, *o logaritmo de uma potência de base real positiva e expoente real é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência.*

Portanto: Se $0 < a \neq 1$, $b > 0$ *e* $\alpha \in R$, *então:*

$$\log_a b^\alpha = \alpha \cdot \log_a b$$

Demonstração. Escrevendo: $\log_a b = x$ e $log_a b^\alpha = y$, vamos provar que $y = \alpha \cdot x$.

Então:

$$\left.\begin{array}{rcl} \log_a b = x & \Longrightarrow & a^x = b \\ \log_a b^\alpha = y & \Longrightarrow & a^y = b^\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow a^y = (a^x)^\alpha \Longrightarrow a^y = a^{\alpha \cdot x} \Longrightarrow y = \alpha \cdot x.$$

□

2.3.4 Mudança de Base

Em algumas situações surgem logaritmos em bases diferentes que precisam ser convertidos para uma única base apropriada. Como já foi visto antes, na aplicação das propriedades operatórias, os logaritmos devem estar todos em uma mesma base. Portanto, vejamos o processo que permite a mudança de base.

Propriedade 2.9. *Se a, b e c são números reais positivos e, a e c diferentes de* 1*, então tem-se:*

$$\log_a b = \log_c b \log_c a$$

Demonstração. Vamos considerar $\log_a b = x, log_c b = y$ e $\log_c a = z$ para $z \neq 0$ e $a \neq 1$. provar que $x = y/z$.

Então:

$$\left.\begin{array}{lcl} \log_a b = x & \Longrightarrow & a^x = b \\ \log_c b = y & \Longrightarrow & c^y = b \\ \log_c a = z & \Longrightarrow & c^z = a \end{array}\right\} \Longrightarrow (a^z)^x = a^x = b = c^y \Longrightarrow z \cdot x = y \Longrightarrow x = y/z.$$

□

Exemplo 2.3.

1ª) $\log_3 5$ *convertendo para a base* 2*, temos:*

$$\log_3 5 = log_2 5/\log_2 3.$$

2ª) $\log_2 7$ *convertendo para a base* 10*, temos:*

$$\log_2 7 = log_1 07/\log_1 02.$$

Capítulo 3

Definição Geometrica dos Logaritmos

Neste capítulo os logaritmos serão tratados geometricamente, através do conceito de área de uma figura plana e da propriedade fundamental da função logarítmica, com uma vantagem incontestável de simplicidade conceitual e técnica.

3.1 Funções Logarítmicas

Definição 3.1. *Dado uma função real $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, cujo domínio é o conjunto dos números $\mathbb{R}^+$, chamamos de função logarítmica quando temos as seguintes propriedades primitivas:*
(A) *L é uma função crescente, para base maior que 1, isto é, $x < y \to L(x) < L(y)$; L é uma função decrescente, para base menor que 1, isto é, $x > y \to L(x) > L(y)$.*
(B) *$L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^+$.*

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$, o número $L(x)$ chama-se logaritmos de x.

Mostraremos agora, outras propriedades das funções logarítmicas, que são consequências das propriedades **(A)** e **(B)**.

Propriedade 3.1. *Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, é sempre injetiva, para $x, y \in \mathbb{R}^+$ com $x \neq y$. Portanto, temos o seguinte:*

1ª) *Se $x < y$, pela propriedade **(A)**, temos que, $L(x) < L(y)$.*

2ª) *Se $x > y$, pela propriedade **(A)**, temos que, $L(x) > L(y)$.*

Em qualquer hipótese, para $x \neq y$, concluímos que, $L(x) \neq L(y)$.

Propriedade 3.2. *O logaritmo de* 1 *é zero.*

*Pela propriedade **(B)** da definição, temos que:*

$$L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1)$$

Logo:

$$L(1) = 0$$

Propriedade 3.3. *Os números maiores do que* 1*(um) têm logaritmos positivos e os números menores do que* 1*(um) têm logaritmos negativos.*

Sendo L *crescente para* $0 < x < 1 < y$, *então* $L(x) < L(1) < L(y)$, *Sendo que* $L(1) = 0$.

Logo:

$$L(x) < 0 < L(y).$$

Propriedade 3.4. *Para todo* $x > 0$, *tem-se* $L(1/x) = -L(x)$.

Com efeito, de que $x \cdot (1/x) = 1$. *Aplicando-se a propriedade* (B), *temos que:*

$$L(x) + L(1/x) = L(x \cdot 1/x) = L(1) = 0$$

Logo:

$$L(1/x) = -L(x).$$

Propriedade 3.5. *Para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}^+$, *vale a seguinte relação:*

$$L(x/y) = L(x) - L(y).$$

De fato:

$$L(x/y) = L(x \cdot (1/y)) = L(x) + L(1/y) = L(x) - L(y).$$

Propriedade 3.6. *Para todo* $x \in \mathbb{R}^+$ *e todo número racional* $r = p/q$, *tem-se,* $L(x^r) = r \cdot L(x)$.

Demonstração. Antes de começarmos, vejamos que a propriedade $L(x \cdot y) = L(x) + L(y)$ se estende para um número qualquer de fatores, ou seja:

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n) = L(x_1) + L(x_2) + \cdots + L(x_n)$$

A demonstração se faz por etapas.

1ª) Etapa: Para $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, a propriedade vale se $r = n$ é um número natural.

Ela também vale quando $r = 0$, pois, para todo número $x \in \mathbb{R}^+$, temos $x^0 = 1$.

Logo:

$$L(x^0) = L(1) = 0 = 0 \cdot L(x)$$

2ª) Etapa: Para $n \in \mathbb{Z}^-$,

Consideremos agora $r = -n$, um inteiro negativo.

Para todo $x > 0$, temos $x^n \cdot x^{-n} = x^0 = 1$.

Então:

$$L(x^n) + L(x^{-n}) = L(x^{n-n}) = L(x^0) = L(1) = 0.$$

Logo:

$$L(x^{-n}) = -L(x^n) = -n \cdot L(x).$$

Além das etapas acima demonstradas, temos o caso geral, em que $r = p/q$ onde $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$, temos:

$$(x^r)^q = (x^{p/q})^q = x^p$$

Em virtude do que já foi provado, $q \cdot L(x^r) = L[(x^r)^q] = L(x^p) = p \cdot L(x)$.

Portanto:

$$q \cdot L(x^r) = p \cdot L(x) \text{ resulta que, } L(x^r) = (p/q) \cdot L(x).$$

Logo:

$$L(x^r) = r \cdot L(x).$$

□

Propriedade 3.7. *Uma função logarítmica* $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *é ilimitada, superiormente e inferiormente.*

Demonstração. Para provar que a mesma função é ilimitada superiormente e inferiormente, faremos:

1ª) Ilimitada Superiormente:

Suponhamos que nos seja dado um numero real β e que sejamos desafiados a achar um número $x \in \mathbb{R}^+$, tal que, $L(x) > \beta$. Para isso, tomamos um número natural n da seguinte forma, $n > \beta/L(2)$. Como $L(2)$ é positivo, idem (Propriedade 3), temos $n \cdot L(2) > \beta$. Usando a (Propriedade 5), vemos que $n \cdot L(2) = L(2^n)$.

Então:

$$L(2^n) > \beta.$$

Se escolhermos $x = 2^n$.

Logo:

$$L(x) > \beta.$$

2ª) Ilimitada Inferiormente:

Dado qualquer número real α, basta lembrar que $L(1/x) = -L(x)$. Assim, podemos achar $x \in \mathbb{R}^+$, tal que,$L(x) > \alpha$.

Então:

Se escolhermos $y = 1/x$, para $L(y)$.

Logo:

$$-L(x) < \alpha$$

□

Teorema 3.1. *Dadas as funções logarítmicas* $L, M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, *existe uma constante* $c > 0$, *tal que,* $M(x) = c \cdot L(x)$ *para todo* $x > 0$.

Demonstração. Suponhamos inicialmente que exista um número $a > 1$, tal que, $L(a) = M(a)$, assim, provaremos que $L(x) = M(x)$ para todo $x > 0$.

Se $L(a) = M(a)$, concluímos que $L(a^r) = M(a^r)$ para todo r racional, sendo que $L(a^r) = r \cdot L(a) = r \cdot M(a) = M(a^r)$. Por absurdo, tomemos algum $b > 0$, tal que, $L(b) \neq M(b)$. Se fizermos $L(b) < M(b)$ e n natural tão grande, que $n \cdot [M(b) - L(b)] > L(a)$.

Então:

$$L(a^{1/n}) = L(a)/n < M(b) - L(b).$$

Com efeito, a valores $c, 2c, 3c, \cdots$, que dividem $\mathbb{R}^+$ em intervalos justapostos, de mesmo comprimento c, dessa forma, por simplicidade escrevamos $c = L(a^{1/n})$. Como $c < M(b) - L(b)$, pelo menos um dos valores, digamos $m \cdot c$, pertence ao interior do intervalo $(L(b), M(b))$, ou seja, $L(b) < m \cdot c < M(b)$.

De fato:

$$m \cdot c = m \cdot L(a^{1/n}) = L(a^{m/n}) = M(a^{m/n}).$$

Então:

$$L(b) < L(a^{m/n}) = M(a^{m/n}) < M(b).$$

Como L é crescente, a primeira das desigualdades acima implica $b < a^{m/n}$. Contudo, como M também é crescente, a segunda desigualdade implica $a^{m/n} < b$. Desse modo, temos uma contradição mostrando que b não existe, e deve-se ter $M(x) = L(x)$ para todo $x > 0$.

Portanto:

Reduzindo-se o caso geral, para o caso particular acima, sendo dadas duas funções arbitrarias L e M, com $L(2) > 0$ e $M(2) > 0$. Seja $c = M(2)/L(2)$ e a função logarítmica $N : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $N(x) = c \cdot L(x)$. Como $N(2) = c \cdot L(2) = [M(2)/L(2)] \cdot L(2) = M(2)$, seguimos do que se provou antes, que $N(x) = M(x)$ para todo $x > 0$.

Logo:

$$M(x) = c \cdot L(x) \text{ para todo } x > 0.$$

$\square$

Observação 3.1. *O teorema acima, mostra a única maneira de obter funções logarítmicas, uma vez que se conheça uma delas e a sua constante $c > 0$. Portanto, $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função logarítmica e $M : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $M(x) = c \cdot L(x)$, também será função logarítmica.*

3.2 Área de Uma Faixa de Hipérbole

Para realizarmos o estudo sobre a concepção geométrica dos logaritmos, devemos reconhecer e definir a área de uma faixa de hipérbole. Após esse feito, definiremos também os logaritmos naturais e sua compreensão geométrica. Portanto, a partir deste momento daremos os primeiros passos no sentido de expor essa ideia, introduzindo as definições de hipérbole e área de uma faixa de hipérbole.

Definição 3.2. *Seja H (Hipérbole) o ramo positivo do gráfico da função $y = 1/x$, isto é, da função que associa a cada número real positivo x o número $y = 1/x$ (figura 3.1). H é o subconjunto do plano constituído pelos pontos da forma $(x, 1/x)$, onde $x > 0$. Desta maneira, temos:*

$$H = \{(x, y); x > 0, y = 1/x\}.$$

Geometricamente, H é o ramo da hipérbole $xy = 1$ que esta contida no primeiro quadrante, isto é, um ponto (x, y) do plano pertence ao conjunto H se, e somente se, $x > 0$ e $xy = 1$.

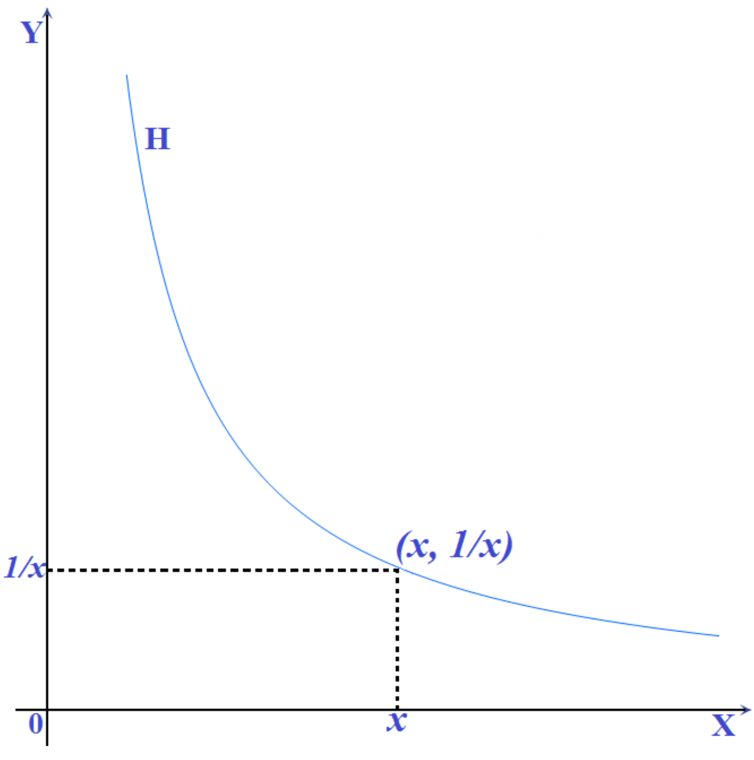

Figura 3.1: Hipérbole.

Definição 3.3. *Uma faixa de hipérbole é obtida quando fixamos dois números reais positivos*

a e b com $a < b$, e adotamos a região do plano limitada pelas duas retas verticais $x = a, x = b$, pelo eixo das abscissas e pela hipérbole H (figura 3.2). Portanto, indicaremos essa região pelo símbolo H_a^b.

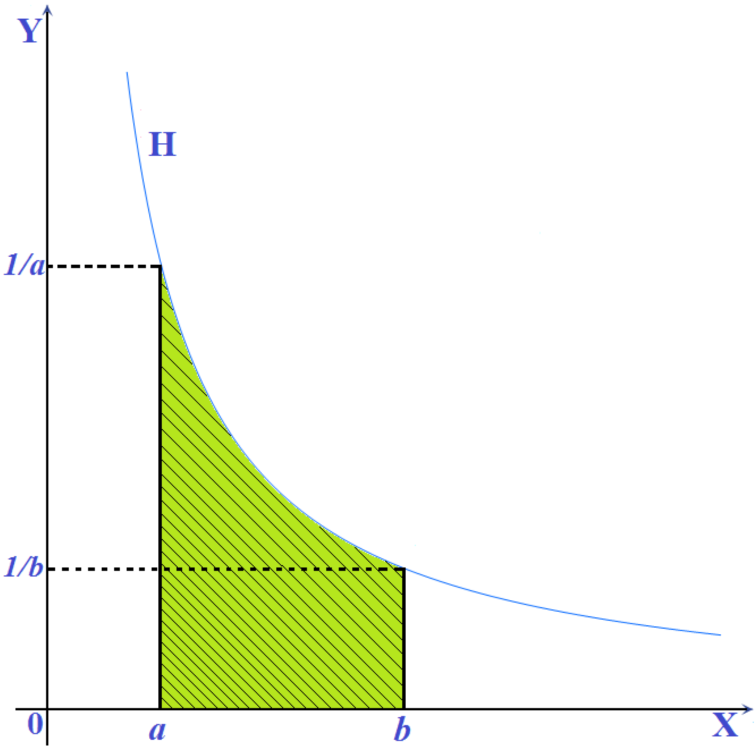

Figura 3.2: A região hachurada é a faixa H_a^b.

Assim, a faixa H_a^b é formada pelos pontos (x, y) cujas coordenadas cumprem simultaneamente as condições $a \leq x \leq b$ e $0 \leq y \leq 1/x$. Com relação a teoria dos conjuntos, temos a seguinte notação:

$$H_a^b = \{(x, y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq 1/x\}.$$

Observação 3.2. *Para calcular a área de uma faixa de hipérbole H_a^b, precisamos decompor o intervalo $[a, b]$ em um número finito de intervalos, por meio de pontos intermediários. Com base em cada um dos intervalos $[c, d]$ da decomposição, onde $c < d$, consideramos o retângulo de altura igual a $1/d$. O vértice superior direito desse retângulo toca a hipérbole H. Dessa forma, temos um retângulo inscrito na faixa H_a^b. E a reunião de todos os retângulos inscritos, constitui um polígono retangular também inscrito na faixa H_a^b. Assim, podemos definir a área de H_a^b, igual à área do polígono retangular inscrito em H_a^b (figura 3.3).*

Podemos observar que é fácil calcular a área, quando conhecemos os pontos de subdivisão do intervalo $[a, b]$.

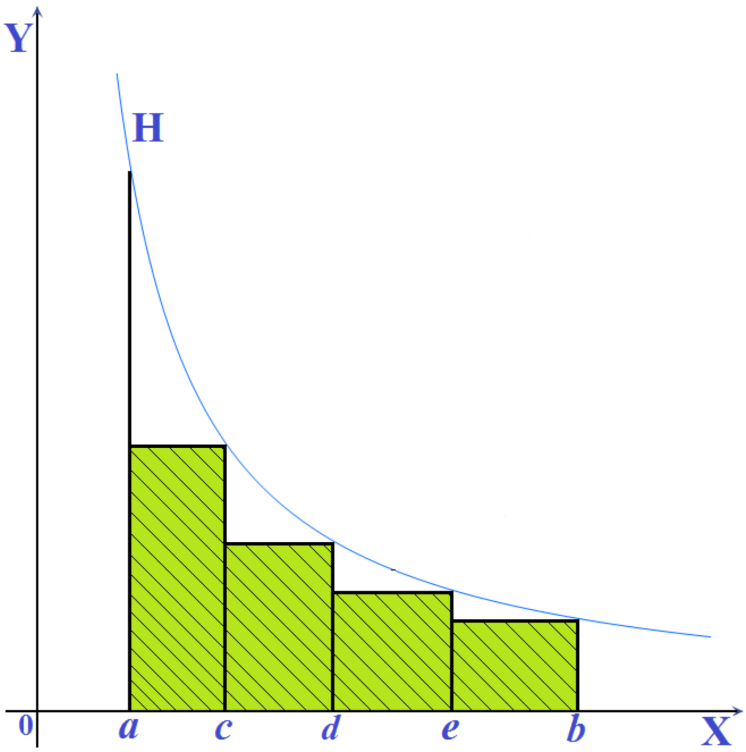

Figura 3.3: Polígono retangular inscrito na faixa H_a^b.

Exemplo 3.1. *Calculando a área de uma faixa de hipérbole* H_1^3.

Solução 3.1. *Se adotarmos uma subdivisão do intervalo* $[1,3]$ *através dos pontos intermediários* $1, 3/2, 2, 5/2, 3$, *obteremos um polígono retangular cuja a área total é igual à soma das áreas dos quatro retângulos abaixo rachurados (figura 3.4).*

De fato, a área de uma faixa H_a^b *vale:*

$$(1/2 \cdot 2/3) + (1/2 \cdot 1/2) + (1/2 \cdot 2/5) + (1/2 \cdot 1/3) = 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 = 57/60.$$

Solução 3.2. *Fazendo uma subdivisão mais fina do intervalo* $[1,3]$ *por meio dos pontos intermediários* $1, 5/4, 6/4, 8/4, 9/4, 10/4, 11/4, 3$, *obteremos um polígono retangular inscrito em* H_1^3, *cuja a área total é igual à soma das áreas dos oito retângulos abaixo rachurados (figura 3.5).*

Portanto, a área de uma faixa H_a^b *vale:* $1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + 1/10 + 1/11 + 1/12 = 84.813/83.160$, *ou seja,* $1,019$ *aproximadamente.*

Embora não saibamos o valor exato da área de H_1^3, *já podemos garantir que ela é maior que* 1(*um*).

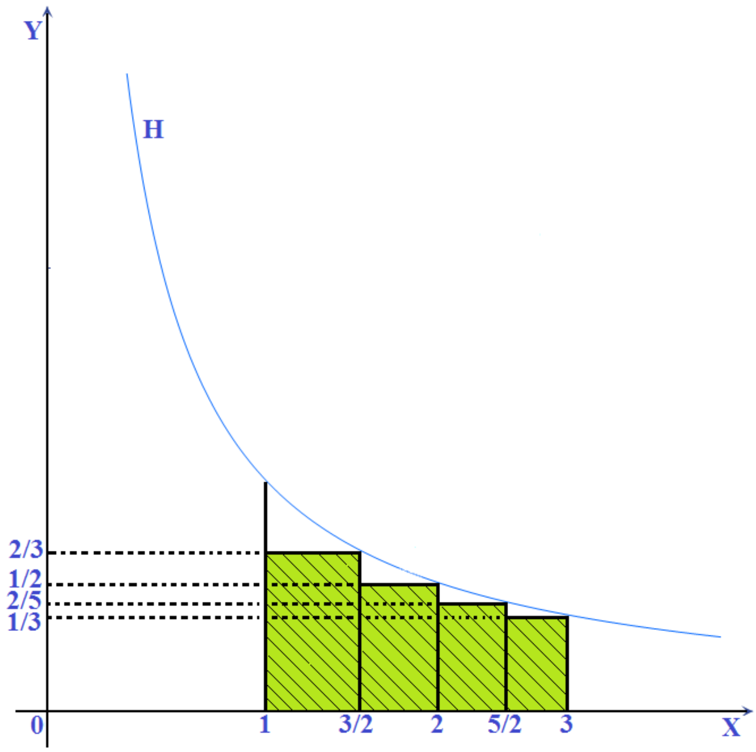

Figura 3.4: Uma primeira aproximação para a área de H_1^3.

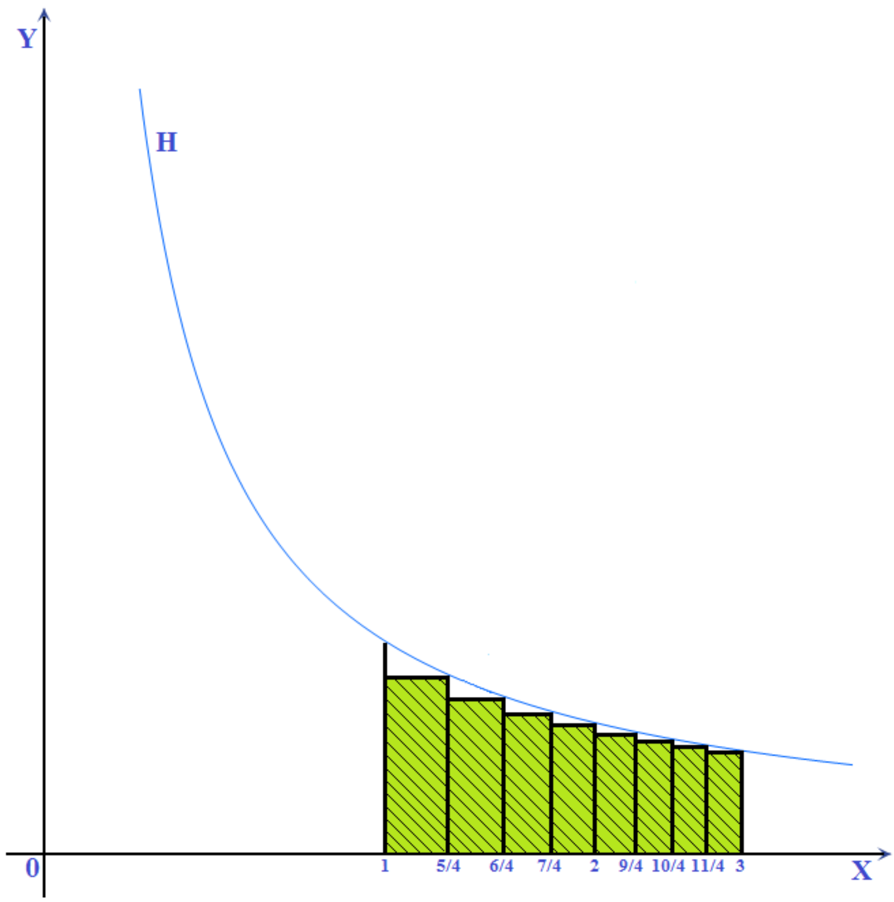

Figura 3.5: Uma aproximação melhor para a área H_1^3.

3.3 Logaritmos Naturais

Aproveitaremos o estudo feito sobre o cálculo da área de uma faixa de hipérbole, para darmos a definição de logaritmo natural, e consequentemente veremos sua concepção geométrica. A definição a seguir é baseada em um simples resultado do cálculo integral, a saber:

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \ln(x)\ ;\ \mathrm{x} > 1.$$

Definição 3.4. *Seja x um número real positivo, definiremos o logaritmo natural de x como sendo à área da faixa H_1^x. Assim, também fica definido que:*

Quando $x > 1$, indicaremos o logaritmo natural de x, (figura 3.6) por:

$$lnx = \ \acute{A}REA\ (H_1^X) > 0$$

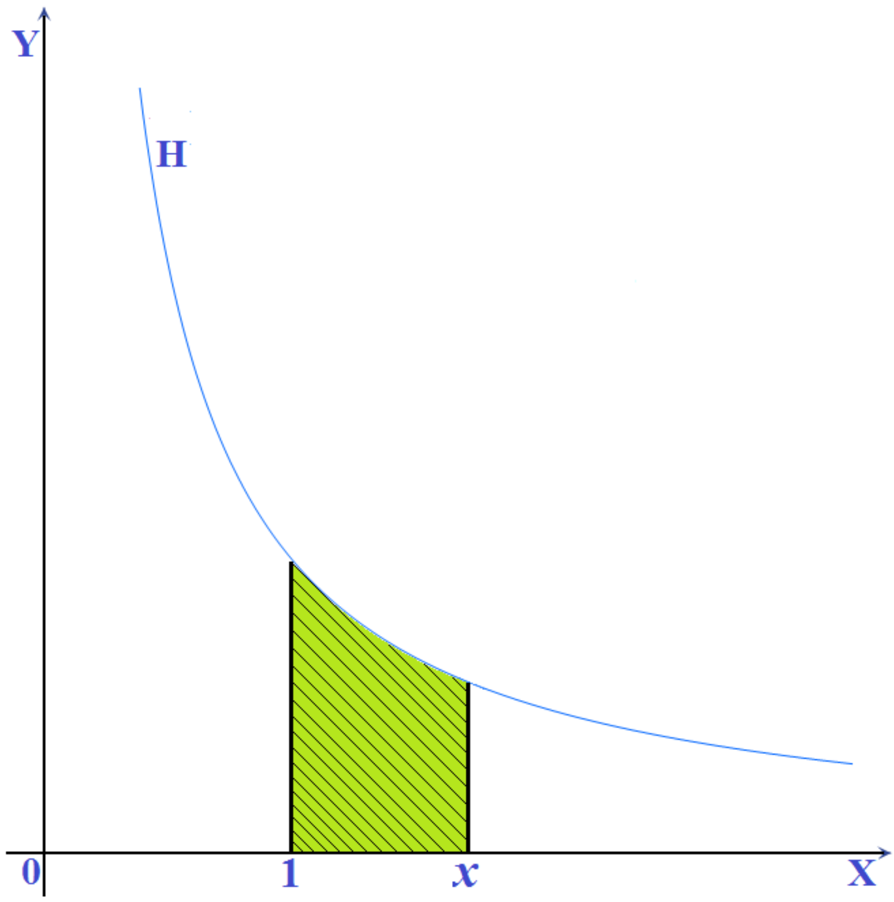

Figura 3.6: A área hachurada é igual a ln x.

Quando $0 < x < 1$, *indicaremos o logaritmo natural de* x, *(figura 3.7) por:*

$$lnx = \acute{A}REA(H_1^X) < 0.$$

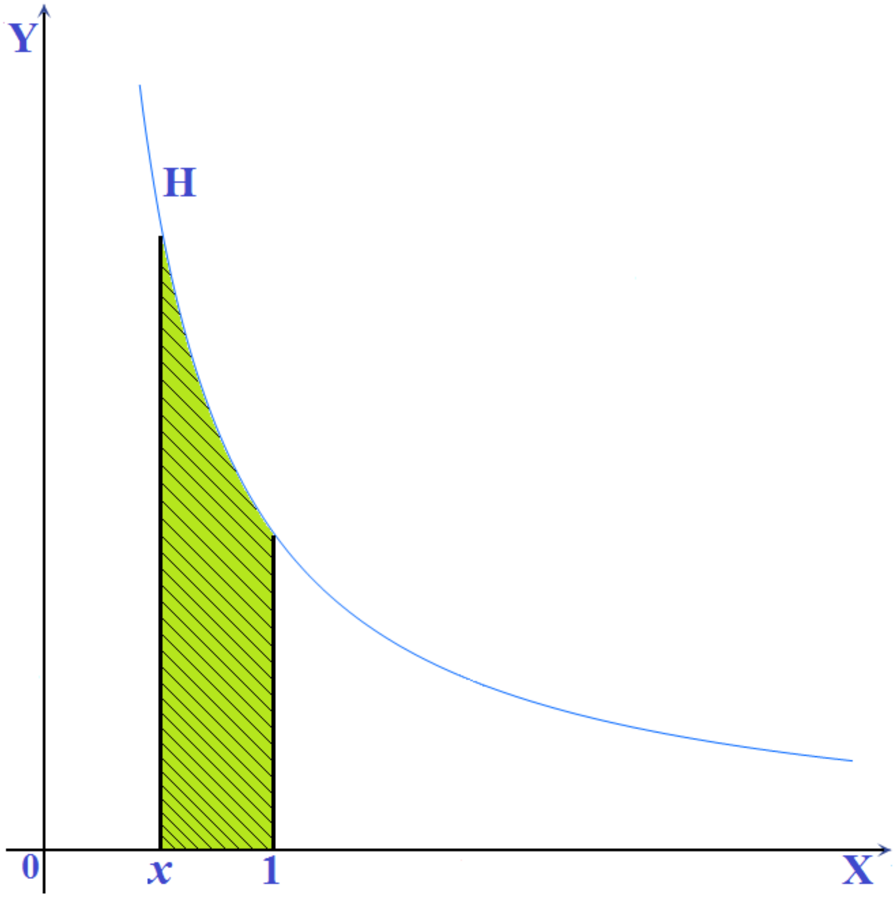

Figura 3.7: ln de x é a área hachurada com o sinal menos, quando $0 < x < 1$.

Quando $x = 1$, *indicaremos o logaritmo natural de* 1, *por:*

$$ln1 = \acute{A}REA\ (H_1^1) = 0.$$

Devido H_1^1 *se reduzir a um segmento de reta, portanto tem área igual a zero e poderemos escrever* $ln1 = 0$.

Exemplo 3.2. *Calculemos um valor aproximado para* $\ln 2$. *Com o intervalo* $[1, 2]$ *subdividido em dez partes iguais, por meio dos pontos de subdivisão* $1; 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,7; 1,8; 1,9; 2$.

Solução 3.3. *Primeiramente, os valores de* $1/x$ *quando* x *assume os onze valores acima são,* $1; 0,909; 0,833; 0,769; 0,714; 0,666; 0,625; 0,588; 0,555; 0,526; 0,500$. *Uma aproximação inferior* *para* $\ln 2$ *será fornecida pela área do polígono retangular inscrito na faixa* H_1^2, *formado por* 10 *retângulos (figura 3.8) cujas bases medem* $0,1$ *e cujas alturas são os dez últimos valores de* $1/x$ *na lista acima. Portanto, a área desse polígono retangular será igual* $0,6685$. *Logo, obtemos* $0,6685$ *como um valor aproximado por falta para* $\ln 2$.

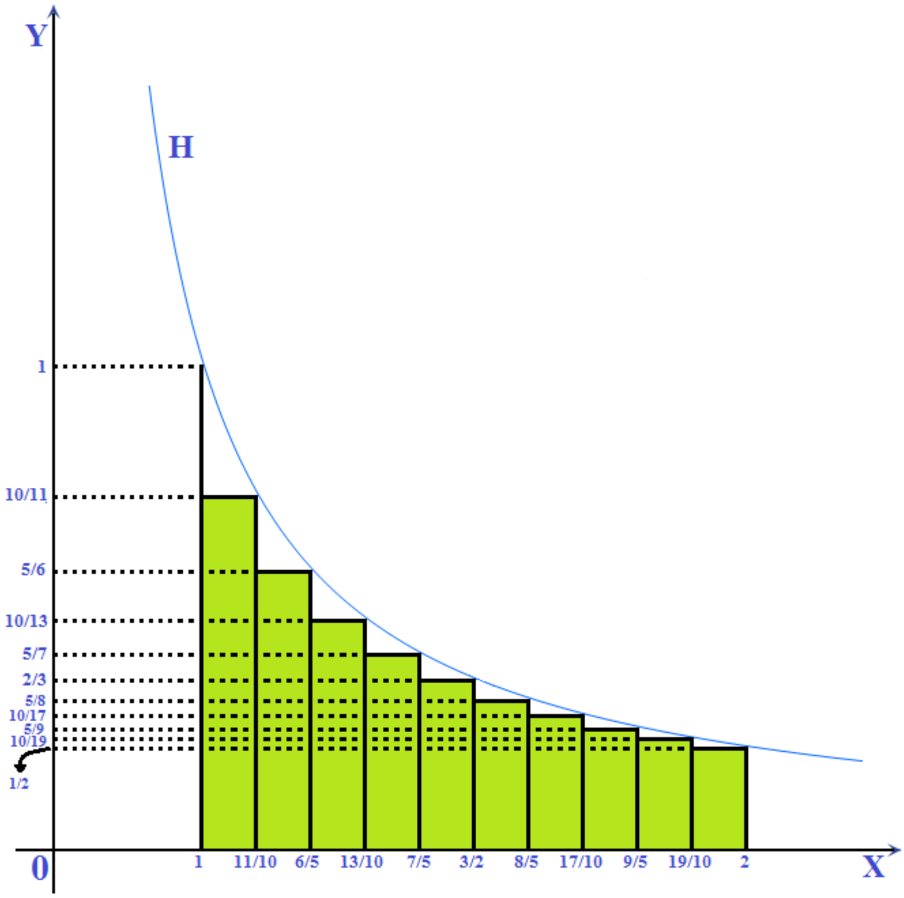

Figura 3.8: A área hachurada é aproximadamente igual a ln 2.

Corolário 3.1. *Uma função* $\ln : R^+ \to R$ *é uma função logarítmica. Para cada numero real* $x > 0$, *a função* $\ln$ *faz corresponder ao seu logaritmo natural* $\ln x$.

Observação 3.3. *O gráfico de uma função real de varável* f *é o subconjunto do plano formado pelos pontos cujas coordenadas cartesianas são* $(x, f(x))$, *onde* x *varia no domínio de* f. *Assim, o gráfico da função logaritmo natural é o conjunto:*

$$G = \{(x, lnx); x > 0\}.$$

O conhecimento do gráfico da função logaritmo natural, permitirá ter uma ideia sobre o comportamento desta função. Para desenhá-lo, lembremos que $\ln$ *se compara a uma função lo-*

garítmica, ou seja, é crescente, ilimitada nos dois sentidos e sobrejetiva. Logo, o gráfico de $\ln x$ *é uma curva contida no primeiro e no quarto quadrante, que corta o eixo das abscissas no ponto* $x = 1$, *quando* x *varia entre* 0 *e* $+\infty$, *a ordenada do ponto* $(x, \ln x)$ *sobre a curva, cresce de* $-\infty$ *a* $+\infty$.

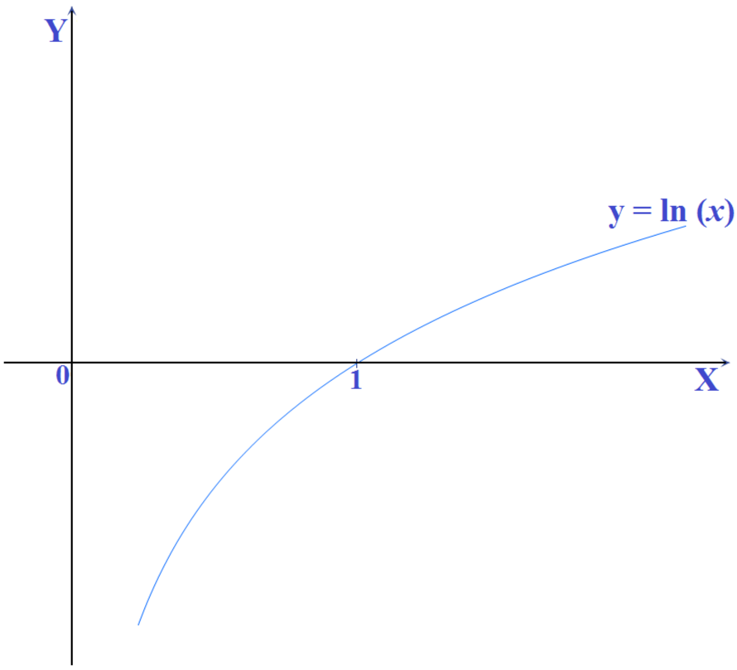

Figura 3.9: Aspecto geométrico da função logaritmo natural.

Capítulo 4

Considerações Finais

Ao pensarmos ou falarmos sobre logaritmos, devemos lembrar que o assunto vai muito além de números e operações. Os logaritmos estão no dia-a-dia de todos. Basta olharmos o mundo a nossa volta, mesmo que passem despercebidos, eles estão sempre presentes, abrangendo de maneira explicita o uso efetivo na construção das informações matemáticas sobre diferenciados assuntos. Podemos ainda destacar, a incrível participação dos logaritmos como ferramenta simples e de grande valia para outras ciências, que jamais conseguiriam obter seus resultados com altíssima precisão se não fosse por conta dessa maravilhosa invenção. Portanto, neste trabalho procuramos evidenciar parte da grande importância dos logaritmos para os seres humanos, bem como parte do seu valor em toda a Matemática. Pelo contexto histórico, percebemos que sua primeira tarefa, era facilitar simples operações, fica clara a evolução dessa descoberta, uma vez que sua primeira utilidade foi perfeitamente substituída pelas calculadoras, mas as vantagens que os logaritmos apresentam para as outras ciências jamais serão substituídas por qualquer aparelho eletrônico de cálculo. A experiência adquirida neste trabalho trouxe a satisfação de uma melhor compreensão sobre o que são os logaritmos, com isso, desperta o desejo de conhecer cada vez mais a sua relação com a Matemática e com outras ciências. Por fim, esperamos que esse trabalho seja o começo de um estudo que pode ser aprofundado por outras pessoas, onde todos possam compreender e desfrutar da beleza dos logaritmos.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, Carl B. **Historia da Matemática**. São Paulo, 2 Ed. Edgard Blucher, 1974.

[2] LIMA, Elon L. **Logaritmos**. Rio de Janeiro, 2 Ed. SBM, 1991.

[3] IEZZI, Gerson. **Fundamentos de Matemática Elementar: Logaritmos**. São Paulo, 9 Ed. Vol. II, Atual, 2004.

[4] MACHADO, Antônio dos S. **Matemática: Conjuntos Numéricos e Funções**. São Paulo, 2 Ed. Atual, 1988.

[5] WIKIPÉDIA, A Enciclopédia Livre. **Logaritmo: Natural, Comum e Binário** - Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Logaritmo - Acessado em 10-05-2016.

[6] WIKIPÉDIA, A Enciclopédia Livre. **John Napier** - Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/John_Napier - Acessado em 18-03-2016.