UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL

UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE NOVA ANDRADINA

CURSO DE MATEMÁTICA, LICENCIATURA

A RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

THASSIANE CALÍSSIA RAVAZI FERREIRA

NOVA ANDRADINA-MS

2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL

UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE NOVA ANDRADINA

CURSO DE MATEMÁTICA, LICENCIATURA

A RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática – Licenciatura, da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – Unidade de Nova Andradina, como requisito parcial para a obtenção do título de Licenciado em Matemática.

THASSIANE CALÍSSIA RAVAZI FERREIRA

NOVA ANDRADINA-MS

2016

A RAZÃO ÁUREA E A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

THASSIANE CALÍSSIA RAVAZI FERREIRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito final para a obtenção da referida graduação sob a orientação do Prof. Fabio Rodrigues Lucas

Banca Encaminhada

____

Prof. Dr. Fabio Rodrigues Lucas
Orientador
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

____

Prof. Dr. Oyran Silva Rayzaro
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

____

Prof. Me. Luiz Oreste Cauz
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

SUMÁRIO

Lista de Figuras

RESUMO

A razão áurea já era utilizada por arquitetos e escultores, muito tempo antes de Euclides definir em sua coleção de livros que traz tratados de geometria. A palavra áurea significa estética, algo agradável, magnifica ou valiosa, sendo em sua forma matemática um número irracional. A sequência de Fibonacci é constituída por números inteiros, porem tendem ao valor numérico irracional da razão áurea. Assim o presente objetivo desta pesquisa foi de explorarmos a razão áurea e de como ela está relacionada com a sequência de Fibonacci.

Palavras-Chave: Razão Áurea, Sequência de Fibonacci, Geometria.

ABSTRACT

The golden ratio was already used by architects and sculptors, long before Euclid set in his collection of books that brings treated geometry. The golden word means aesthetics, something nice, magnificent or valuable, and in its mathematical form an irrational number. The Fibonacci sequence consists of integers, however they tend to irrational numerical value of the golden ratio. Thus the present objective of this research was to explore the golden ratio and how it is related to the Fibonacci sequence.

Keywords: Golden Ratio, Fibonacci Sequence, Geometry.

INTRODUÇÃO

Desde a antiguidade o homem busca a perfeição e um sentido para o que criou ou irá criar, principalmente em suas construções na arte, encontraram então sentido na Matemática passando a ser usada por sua perfeição, beleza e harmonia, assim suas obras poderiam ser explicadas e obtidas a partir de ordem e relações entre números e combinações. O segmento áureo é um exemplo de perfeição e equilíbrio, representado em muitos dos trabalhos de Leonardo da Vince.

Em busca do sentido para suas obras, os artistas e arquitetos como também os matemáticos descobriram o enigmático número de ouro, um padrão matemático presente em animais, plantas e fenômenos da natureza. De forma generalizada o número de ouro se dá pela divisão de dois segmentos de reta, porem estes segmentos devem ser proporcionais obedecendo ao que Euclides chama de "segmentos divididos em média e estrema razão".

Conforme o decorrer desta pesquisa verificaremos quais as particularidades a razão áurea e a sequência de Fibonacci têm, pois ambas se tratam inegavelmente de padrões matemáticos presentes em elementos da natureza. Assim reveste-se de particular importância entre o número de ouro, a razão áurea e a sequência de Fibonacci. Sob esta ótica, ganha simbólica relevância a presença da razão áurea na atualidade em projetos arquitetônicos, em clinicas de estética, na produção de jogos eletrônico, etc.

Esse estudo tem por finalidade realizar uma pesquisa básica, para um melhor tratamento dos objetivos e melhor apreciação desta pesquisa, observou-se que ela é classificada como pesquisa bibliográfica no momento em que se fez uso de materiais já elaborados: livros, artigos científicos, revistas, documentos eletrônicos e enciclopédias na busca e alocação de conhecimento sobre a razão áurea, correlacionando tal conhecimento com abordagens já trabalhadas por outros autores. Sobre pesquisa bibliográfica diz Gil (2002, p. 44): “A pesquisa bibliográfica é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. [...]”.

Assim está pesquisa justifica-se através do estudo do número de ouro para a razão áurea, e como a sequência de Fibonacci pode estar relacionada com o número de ouro, de tal modo mostrar o feitio deste padrão e suas regularidades. Visando facilitar o conhecimento das pessoas ao qual se interessam por esse tema.

1 HISTÓRIAS

Neste capítulo falaremos um pouco da história dos temas que serão desenvolvidos neste trabalho, desde a razão áurea e seu surgimento e como esta influenciou vários campos do conhecimento, por que o número de ouro está relacionado a razão áurea, como também a sequência de Fibonacci.

1.1 SURGIMENTO DA RAZÃO ÁUREA

Não se pode afirmar certamente onde surgiu esta relação de proporção áurea, e se esta era utilizada ao acaso ou propositadamente, contudo esteve empregada na pintura e arquitetura ao longo do tempo.

“A geometria possui dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro a divisão de uma linha em extrema e media razões. O primeiro podemos comparar a uma medida do áureo; ao segundo podemos chamar de joia preciosa.” KEPLER (1571 – 1630).

Vale ressaltar que no Egito a secção áurea já era explorada em muitos de seus hieróglifos e construções, por exemplo na pirâmide de Gizé (ou pirâmide de Quéops). Muitas pessoas assumem que a proporção áurea ou secção dourada são nomes muito antigos; no livro “Os elementos de Euclides” já eram denotados como *média e extrema razão*.

No próprio símbolo da escola pitagórica, o pentagrama inscrito em uma circunferência e neste uma estrela de cinco pontas, do qual representava a junção do feminino com o masculino, porém os próprios pitagóricos desconheciam tal existência de proporção áurea presente no pentagrama.

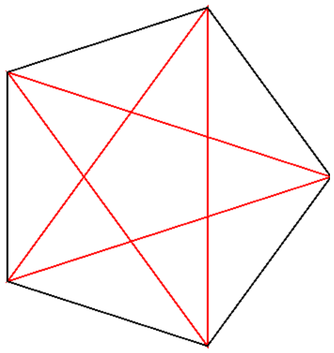

Figura 1 Estrela de cinco pontas inscrito em pentagrama
FONTE: Ferreira, 2016

A palavra áurea significa estética, algo agradável, magnifica ou valiosa. A razão áurea é um número irracional, ao qual os números irracionais foram descobertos pelo discípulo de Pitágoras, Hipaso de Metaponto. Ao usar o teorema da escola que frequentava ao qual atualmente leva o nome de “teorema de Pitágoras”

($a^2 = b^2 + c^2$), não se aplicava ao cálculo da diagonal do retângulo regular, sempre a diagonal deste retângulo resultava em um número irracional, está incomensurabilidade foi descoberta quando Hipaso empregou o “teorema de Pitágoras” em um retângulo de lados igual a 1, a diagonal não dava um número inteiro, Hipaso provou que o próprio número não era assim tão perfeito como Pitágoras definia, da qual para Pitágoras todos os números eram inteiros.

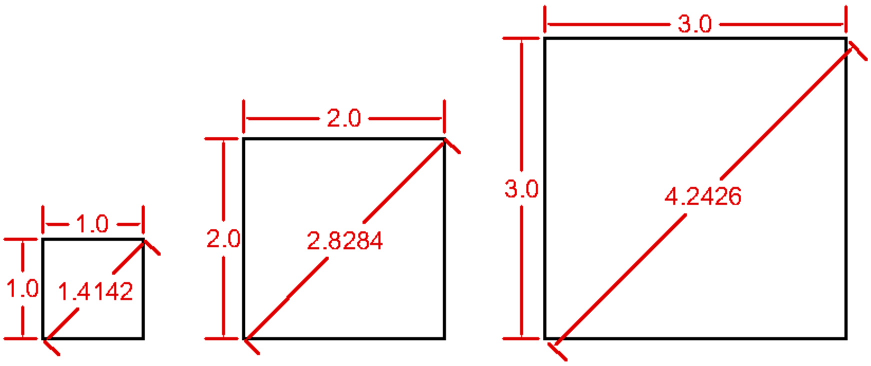

Figura 2 Retangulos regular (quadrados)
FONTE: Ferreira, 2016

1.2 O NÚMERO DE OURO

O *phi* Φ é a constante irracional que determina a razão áurea, comumente associado ao arquiteto Grego Phideas, ao qual, em suas obras incorporava esta razão, no entanto esta nomenclatura só ficou decidida no início deste século. Na divisão áurea, a razão entre o todo e o segmento maior ou o segmento maior e o menor é simbolizada pelo número irracional:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618033989 \ldots$$

O ponto que determina esta razão também é chamado de ponto de ouro, e ele divide o segmento de reta com o feitio mais agradável.

Podemos encontrar a razão áurea em:

- Infinitos animais;
- No corpo Humano;
- Na formação de plantas e flores;
- Nos frutos;
- Na espiral Logarítmica;
- Na construção geométrica do decágono e pentágono regular;
- No triângulo ideal (ou triângulo áureo);
- Na arquitetura;
- Na escultura e pintura.

Muitos autores denomina a divisão de segmentos por média e extrema razão como divina proporção, levando a uma ideia intuitiva de beleza. Os diferentes gosto relacionados a beleza difere de pessoa a pessoa, mas todo ser humano aprecia o objeto que contempla de simetria e proporções feitiáveis. Muitos objetos criados pelo ser humano possuem características de ordem e harmonia, algumas das mais conhecidas obras gozam dessa relação como a Mona Lisa, O Homem Vitruviano de Leonardo da Vince, os templos da Deusa Atenas executados por Phideas.

Uma ideia hipotética é que Leonardo da Vince utilizava elementos de caractere geométrico para a construção de suas obras. Ao analisar a pintura de Mona Lisa, percebesse que essa pintura foi feita partindo de linhas de referência (grid). Segue abaixo a representação de como talvez Leonardo da Vince organizou os caracteres de pintura de Mona Lisa.

Dividindo a pintura em quatro partes, sobre dois segmentos de retas que cortam tanto na diagonal como na vertical ao centro, formando quatro retângulos iguais. Nos retângulos acima do eixo horizontal retirasse o segmento áureo representado nas duas linhas em vermelho. Entre as duas linhas em vermelho, retira-se novamente os segmentos áureos, assim representados nos segmentos de reta em amarelo. Com o eixo vertical retirasse o segmento áureo da base inferior e superior, representado pelo segmento de reta em verde, entre os segmentos de reta em verde encontrar o ponto áureo e levar o ponto juntamente com os segmentos de reta em verde até o eixo vertical.

Verificamos que alguns dos segmentos de reta incide com determinados caracteres da pintura, por exemplo, o segmento de reta em amarelo pode ter sido utilizado como referência para os olhos, os dois segmentos de reta em verde como referência para delimitar a face, um dos segmentos de reta em vermelho corta a testa ao meio e o outro delimita os lábios.

Figura 3 Monalisa e a proporção áurea
FONTE: Ferreira, 2016

Como já foi dito, nada pode afirmar se realmente Leonardo da Vince utilizou tais proporções geométricas para o arranjo da pintura de Mona Lisa, na representação da figura 3 pode-se verificar as retas e a simetria, como cada uma das retas está em harmonia com algum elemento da pintura. Vários outros trabalhos de Leonardo têm aspecto geométrico explicito como por exemplo a figura 4 a seguir:

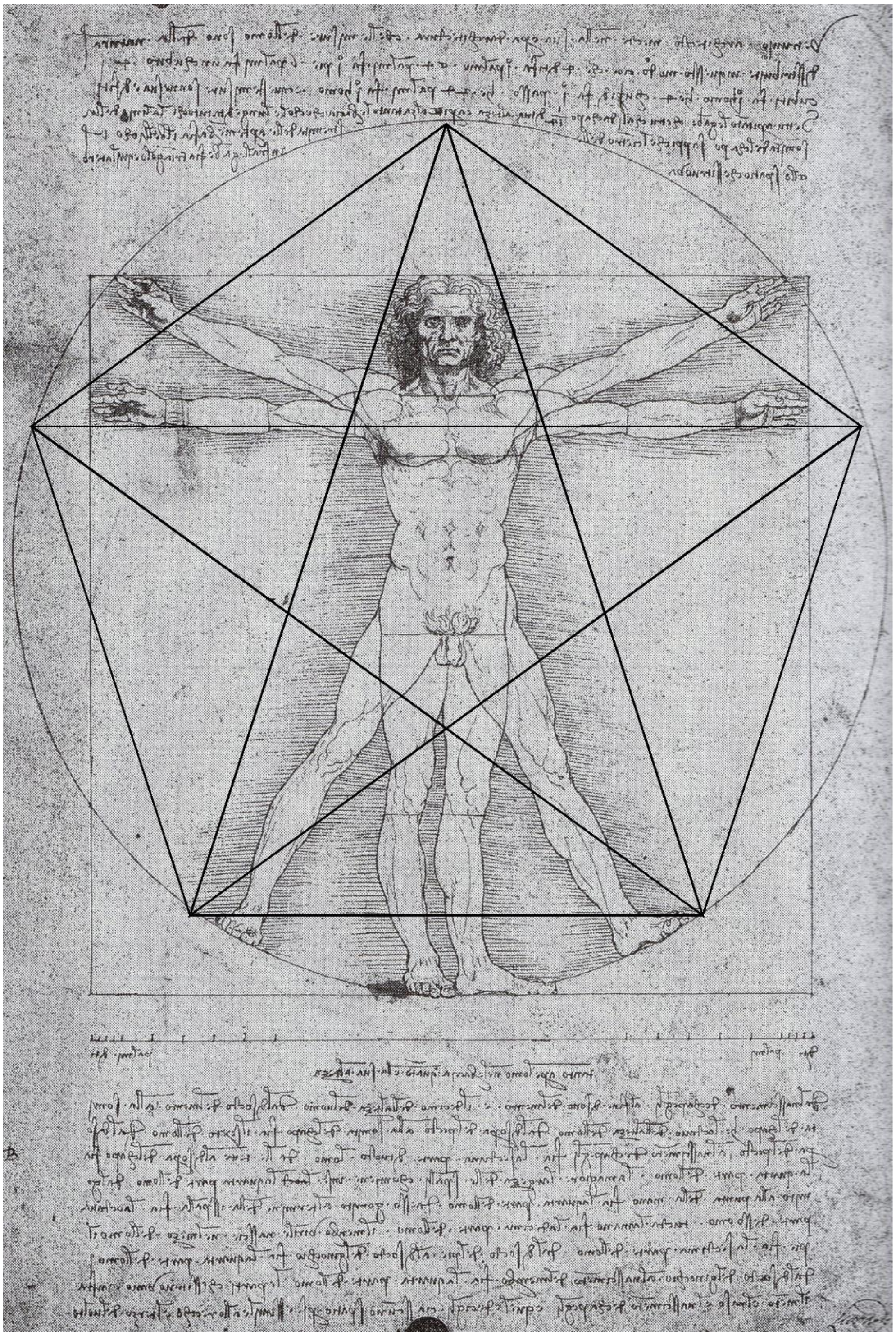

Figura 4 Homem Vitruviano de Leonardo da Vince
FONTE: BAGNI, D’AMORE, 2011

As principais construções no Egito e Grécia antiga eram os templos com forte ênfase arquitetônica. Para os gregos os deuses eram sinônimos de perfeição e beleza, assim seus templos teriam que ser belos e perfeitos, fazendo com que os arquitetos buscassem na Matemática desenvolvida por pensadores, filósofos e matemáticos da época, a devida perfeição, já que os Gregos clássicos acreditavam que a ordem do universo se fundamentava em números, logo o número se fundamentava na beleza artística e assim a perfeição. Sendo essa perfeição tão cobiçada pelos gregos, que até mesmo seus guerreiros teriam que ter estrutura corporal definida e simétrica.

Muitas de suas construções passaram a ser projetada em harmonia com a Matemática ou até mesmo simetria geométrica. Essa simetria pode ser encontrada nos templos da deusa Atenas, por ser a mais famosa possuía dois importantes e principais templos, o Parthenon e Erecteion.

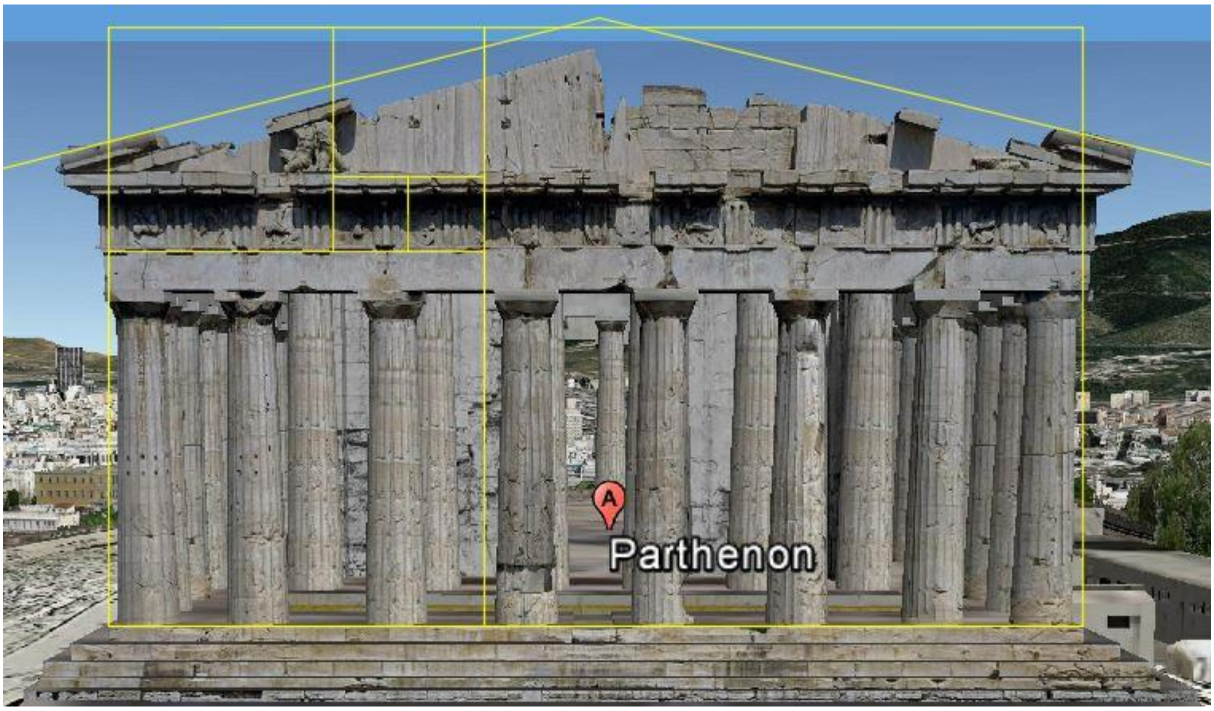

Figura 5 Templo Parthenon, Atenas Grecia
FONTE: Google Earth, 2016

Leonardo Da Vince, com seu o extraordinário talento, produziu muitos trabalhos onde incorporava a razão áurea, Johannes Kepler (1571-1630), era fascinado por esta relação, contudo daremos ênfase ao matemático italiano mais conhecido como Leonardo Fibonacci.

1.3 HISTÓRIA DE LEONARDO FIBONACCI

Leonardo, filho de Bonaccio (1175-1250 ?), também era conhecido como Leonardo de Pisa (ou Leonardo Pisano), nasceu em Pisa na Itália, cidade portuária e centro comercial para negócios mercantis com países do mediterrâneo, por seu pai ser comerciante, facilitou Leonardo introduzir-se na matemática do oriente, despertando interesse pela aritmética. Viajou para o

Egito, Sicília, Grécia e Síria, entrando em contato direto com a matemática Indu-Arábica, sendo esta já era utilizada desde dantes pelos comerciantes Italianos que faziam transações com países do oriente, por ser mais pratica para realizar cálculos. (Eves, 2004)

Ainda segundo (Eves, 2004), retornando de viagem para sua terra natal, publicou a obra de sua autoria intitulada *Liber Abaci* (Livro do Cálculo) em 1202, o livro contém conteúdo sobre aritmética. Foi partindo desta obra que a forma de númeração Indu-Arabica é introduzida na Europa, o sistema decimal. A obra possui problemas para estudo de fatos do cotidiano relacionado a matemática comercial usando algarismos Indu-Arábica, destacarei em especial o problema 18 sobre a reprodução de coelhos que segue uma sequência idealizada, do latim é chamado *Quot paria coniculorum in uno anno ex uno pario germinentur*, que deu origem a sequência que leva o título atualmente de "Sequência de Fibonacci":

"Um casal de coelhos torna-se produtivo após dois meses de vida, e a partir de então, produz um novo casal a cada mês. Começando com um único casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais existirão ao final de um ano?".

Em 1220, Leonardo publica uma nova obra *Practica Geometriae*, coleção sobre conteúdos de geometria e trigonometria. Em 1225 é publicada a obra *Liber Quadratorum*. Leonardo escreveu outras obras, mas estas foram perdidas ao longo dos anos.

Não se sabe ao certo de onde surgiu o termo "Fibonacci" ao qual é relacionado a Leonardo, alguns historiadores dizem estar conexo ao nome de seu pai, Bonaccio, fazendo então a junção "Filho de Bonaccio", pratica que era muito comum na Europa, utilizar o nome de algum ancestral importante como referência.

2 CONCEITOS E CARACTERÍSTICAS DA RAZÃO ÁUREA

Neste capítulo mostraremos como encontrar a divisão áurea de um segmento qualquer, vale lembrar que ao dividir produtos de mesma natureza tem-se uma razão. A razão é representada na forma $\frac{\text{PARTE}}{\text{TODO}}$, que é também uma fração, uma parte fracionada do todo.

Fração é todo número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ para a e b $\in \mathbb{R}$ e b $\neq 0$, salientando a razão, onde a e b $\frac{a}{b} \frac{\text{numerador}}{\text{denominador}}$ pertençam a mesma grandeza.

2.1 RAZÃO ÁUREA EM UMA RETA QUALQUER

Assim a razão áurea nada mais é que a divisão, fração ou razão que se aplica a seguinte definição de Euclides na proposição VI, 30 do livro II *"Dividir uma linha reta determinada na extrema e media razão".*

Demonstração: Seja um segmento de reta determinada por $\overline{\text{AB}}$ suas extremidades, dividiremos o segmento de reta $\overline{\text{AB}}$ (Figura 6) em média e extrema razão.

Figura 6 Segmento de reta *AB*
FONTE: Ferreira, 2016

Obs. Durant e a demonstração da proposição do livro de Euclides, optamos por dar um comprimento para o segmento de reta, porem essa mesma proposição pode ser aplicada a qualquer segmento de reta, com diversos comprimentos.

Encontrar o ponto médio de $\overline{AB}$. Para isso em cada extremidade projetar uma circunferência com raio menor que a reta $\overline{AB}$ como mostra a Figura 7.

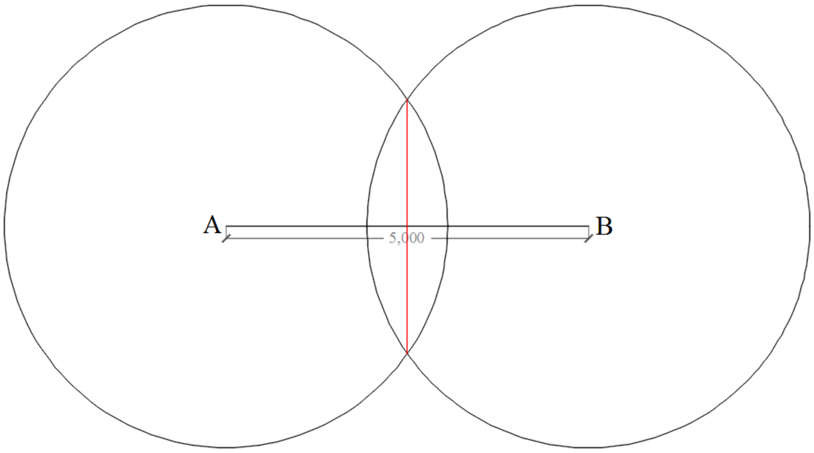

Figura 7 Ponto médio no segmento de reta *AB*
FONTE: Ferreira, 2016

A linha em vermelho marca o ponto médio da reta $\overline{AB}$ (Figura 8).

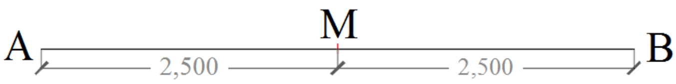

Figura 8 Ponto médio *M* do segmento de reta *AB*
FONTE: Ferreira, 2016

Projetar uma reta perpendicular a $\overline{AB}$ em uma de suas extremidades (Figura 9), ao qual a reta perpendicular deve ser da forma $\overline{BD} = \frac{\overline{AB}}{2}$, e $\overline{AM} = \overline{BM} = \frac{\overline{AB}}{2}$.

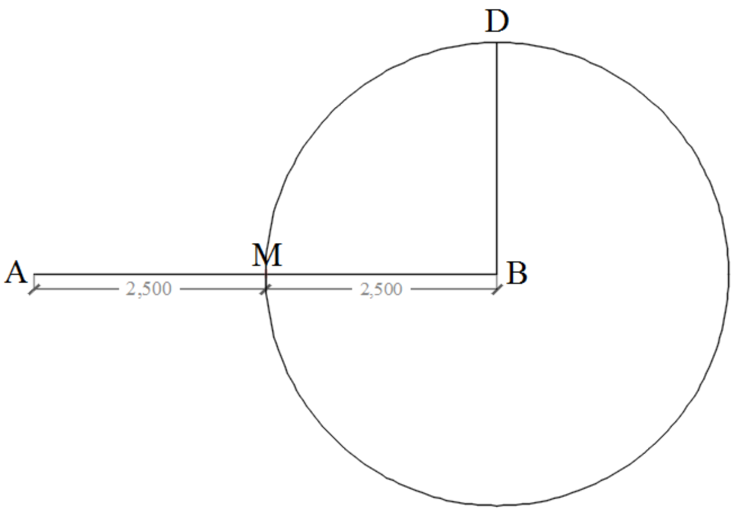

Figura 9 Segmento de reta perpendicular a *AB*
FONTE: Ferreira, 2016

Construir um retângulo *ABD* (Figura 10).

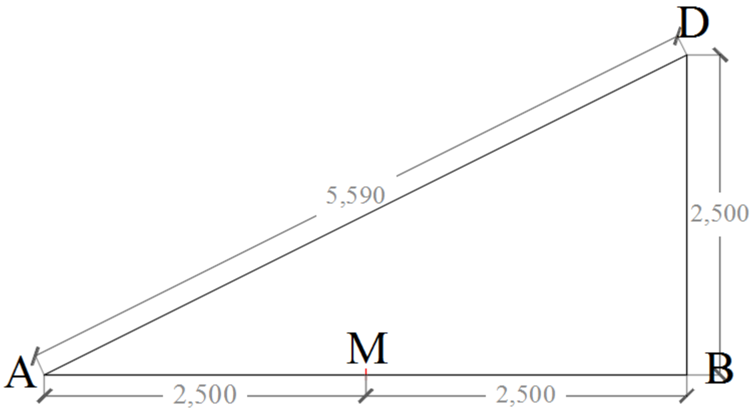

Figura 10 Triangulo *ABD*
FONTE: Ferreira, 2016

Retirar da reta $\overline{AD}$, uma semirreta com as mesmas dimensões de $\overline{DB}$, com centro em D e raio $\overline{DB}$, traçar o arco cortando $\overline{AD}$ em E, representado na Figura 11.

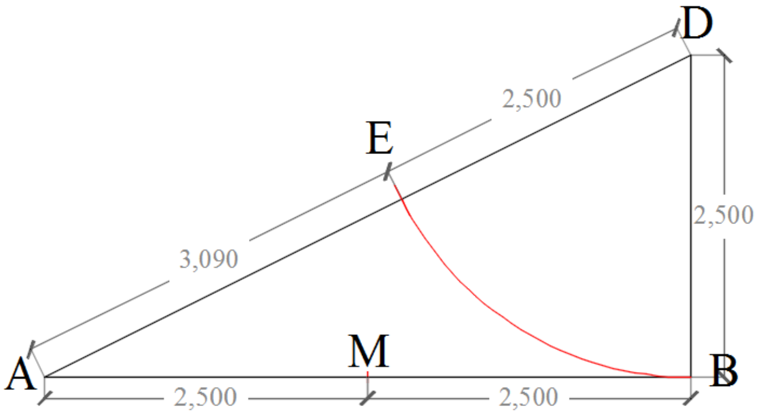

Figura 11 Arco com raio *DB*
FONTE: Ferreira, 2016

Com o centro em A e raio $\overline{AE}$, traçar um arco cortando $\overline{AB}$ em C (Figura 12).

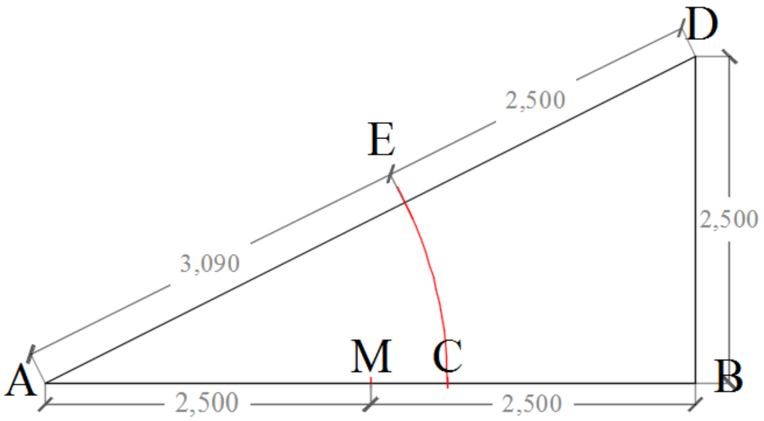

Figura 12 Arco com raio *AE*
FONTE: Ferreira, 2016

Logo C é o ponto que define a razão áurea para a reta $\overline{AB}$ (Figura 13).

Figura 13 Segmento de reta *AB* dividido em média e extrema razão em *C*
FONTE: Ferreira, 2016

Assim

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}, \frac{1,909}{3,091} \cong 0,618\ e\ \frac{3,091}{5} \cong 0,618$$

Ou ainda fazendo a inverso

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}, \frac{3,091}{1,909} \cong 1,618\ e\ \frac{5}{3,091} \cong 1,618$$

Logo o número de ouro (Φ) pode ser representado como $\frac{x}{y} \cong 1,61803398875$ ou ainda $\frac{y}{x} \cong 0,61803398875$.

Esta conclusão foi feita por Euclides, todavia, muito antes outras civilizações já usavam esse conceito de proporção, mas somente os gregos passaram a estudá-la. Euclides em seus trabalhos não usou demonstrações algébricas, e sim geométrica.

Outra forma mais simples, também feita por Euclides, para encontrar o ponto que divide a reta em média e extrema razão é a seguinte:

Considere a reta $\overline{AB}$, deve se fazer um retângulo onde seus lados são iguais a reta $\overline{AB}$ (Figura 14)

Figura 14 Segmento de reta *AB*
FONTE: Ferreira, 2016

Encontrar o ponto médio da reta $\overline{AD}$ (Figura 15)

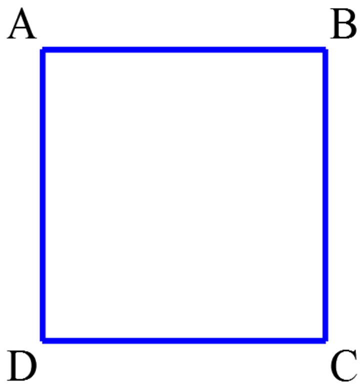

Figura 15 Quadrado construído com o segmento de reta *AB*
FONTE: Ferreira, 2016

Com centro em E e raio $\overline{EB}$ determinar a intersecção deste arco com o prolongamento da reta $\overline{AD}$ (Figura 16)

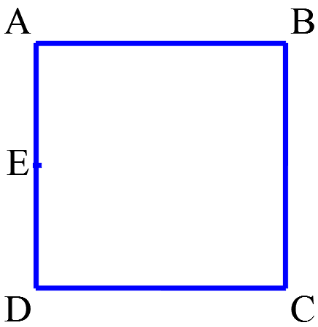

Figura 16 Ponto médio do segmento de reta *AD*
FONTE: Ferreira, 2016

Com a reta $\overline{AF}$ completar o retângulo regular de lados medindo $\overline{AF}$ (Figura 17)

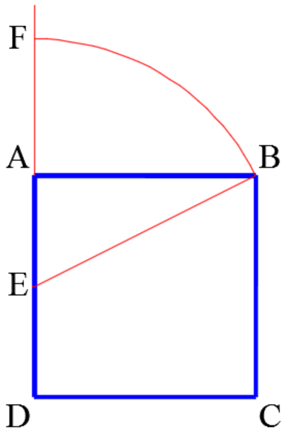

Figura 17 Arco com raio de *E* até *B*
FONTE: Ferreira, 2016

Logo H é o ponto que divide a reta $\overline{AB}$ em média e extrema razão (Figura 18 e 19)

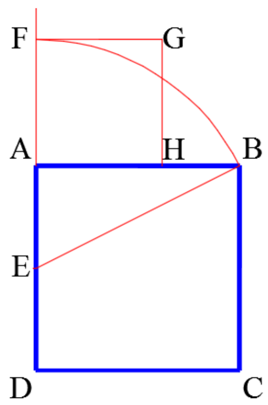

Figura 18 Quadrado feito através do segmento de reta *AF*
FONTE: Ferreira, 2016

Figura 19 Segmento de reta *AB* onde *H* divide em média e extrema razão
FONTE: Ferreira, 2016

2.2 DEMONSTRAÇÃO ALGÉBRICA DA RAZÃO ÁUREA

Então o ponto C divide a reta $\overline{AB}$ (Figura 20) em média e extrema razão se

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

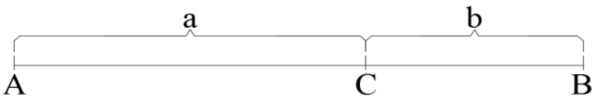

Figura 20
FONTE: Ferreira, 2016

Escrevendo a relação temos

$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$ com o $b < a$ e fazendo $\frac{a}{b} = x$,

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{b(a+b)} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{x}{a+b} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = x \Rightarrow \frac{b}{a} + 1 = x \Rightarrow \frac{1}{x} + 1 = x \Rightarrow 1 + x = x^2 \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Aplicando a fórmula de resolução da equação do 2º grau

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Sua raiz positiva é 1,618034 que é indicado por Φ (Phi), e a razão de $\frac{a}{b}$ é denominada por razão áurea e sua constante é 0,618.

2.3 A RAZÃO ÁUREA EM DIVERSOS POLÍGONOS

Podemos encontrar a razão áurea em diversos polígonos, como citado anteriormente o pentágono regular que é uma das faces do dodecaedro regular, ao qual, este é um dos cinco sólidos platônicos, muito apreciado pela sociedade pitagórica. Fazendo um breve estudo deste polígono, podemos retirar deste o triangulo áureo (triangulo triplo) ou o pentagrama (Figura 21).

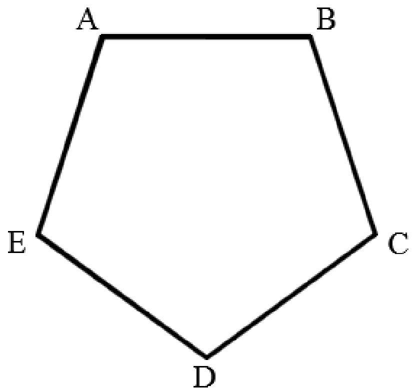

Figura 21 Pentágono
FONTE: Ferreira, 2016

Considerando o pentágono acima, prolongando seus lados até ocorrer a intersecção, formara o pentagrama (Figura 22).

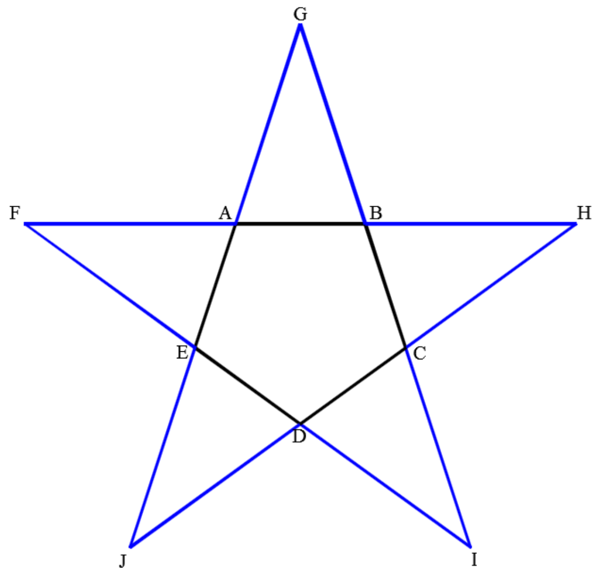

Figura 22 Pentágono estrelado
FONTE: Ferreira, 2016

Ligar os pontos F, G, H, I, J (Figura 23)

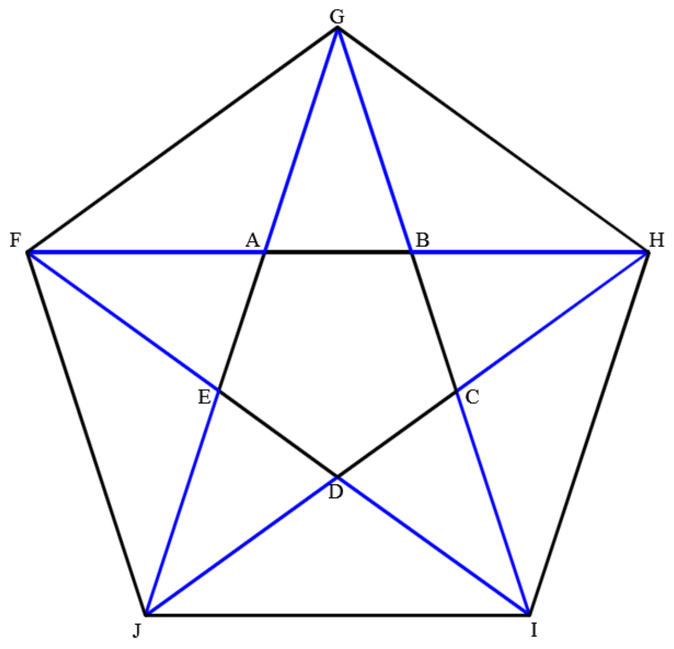

Figura 23 Pentágono *FGHIJ* feito à partir do pentágono estrelado
FONTE: Ferreira, 2016

Unir os pontos A, B, C, D, E (Figura 24)

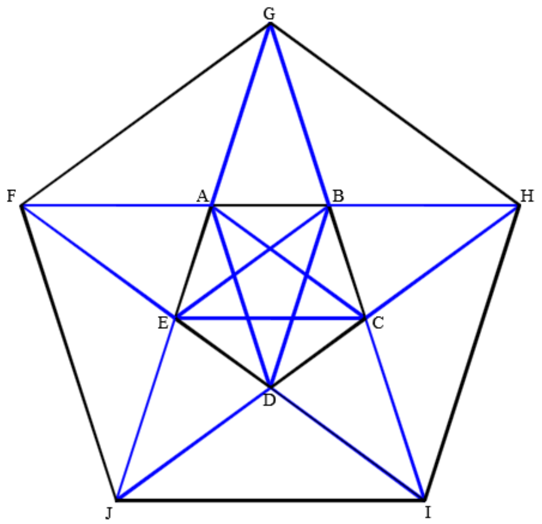

Figura 24 Vértices do pentágono ligados por segmentos de retas internas
FONTE: Ferreira, 2016

Desta figura podemos retirar algumas relações referentes a razão áurea (Figura 25)

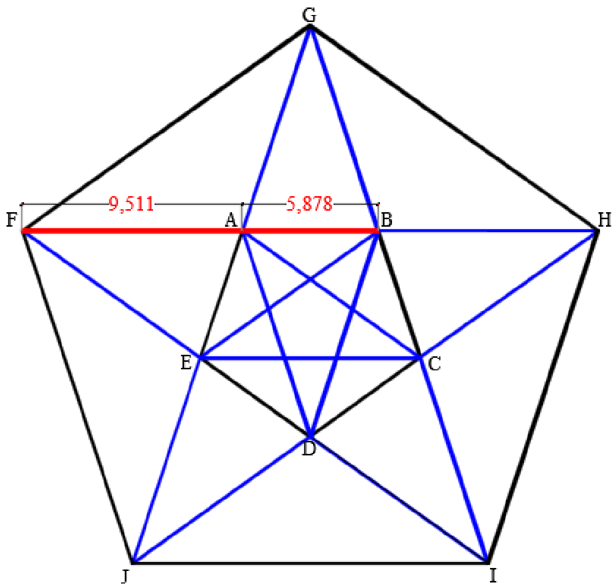

Figura 25
FONTE: Ferreira, 2016

A reta $\overline{AB}$ dividida pela reta $\overline{FA}$:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{FA}} = \frac{5,878}{9,511} = 0,618$$

E ainda fazendo a divisão da reta $\overline{FA}$ por $\overline{FB}$ temos:

$$\frac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = \frac{9,511}{15,389} = 0,618$$

Tanto o pentágono inscrito como o que circunscreve, ao dividir cada um dos seus cinco segmentos, esta divisão estará em média e extrema razão.

Triangulo áureo representado ao lado do pentagrama na Figura 26,

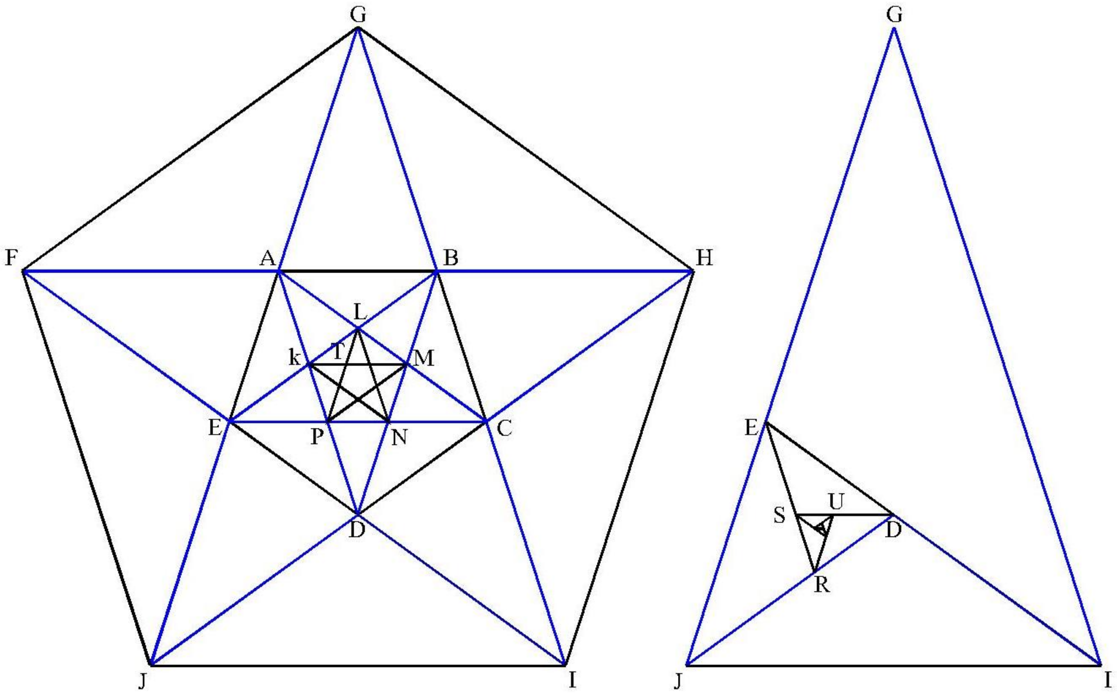

Figura 26 Triangulo áureo
FONTE: Ferreira, 2016

Podemos observar as seguintes propriedades em relação as retas:

$$\overline{ER} = \overline{KD}\,,\ \overline{SD} = \overline{NC} = \overline{EP}\,,\ \overline{RU} = \overline{NM}\,, \overline{SU} = \overline{KT}$$

Ainda a relação em que a divisão de determinados tipos de reta gera o número de ouro:

$$\frac{\overline{JI}}{\overline{GI}} = \frac{\overline{ED}}{\overline{JD}} = \frac{\overline{RD}}{\overline{ER}} = \frac{\overline{SR}}{\overline{RD}} = \frac{\overline{SU}}{\overline{SR}} = 0,6180$$

A diagonal do pentágono estará relacionada com os lados do pentágono, e ainda, o segmento $\overline{EB} = \overline{JD}$, este triangulo pode ser perfeitamente encaixado na espiral logarítmica, estudada por Jacob Bernoulli (1654-1705), representado na figura 27

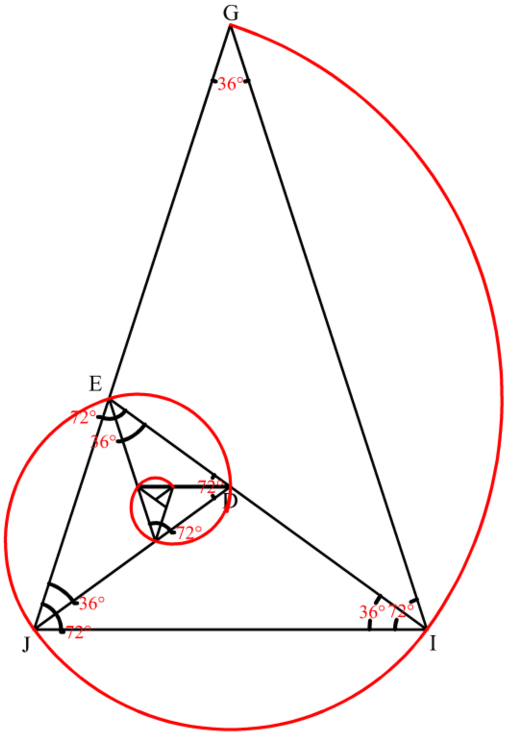

Figura 27 Espiral no triangulo áureo
FONTE: Ferreira, 2016

3 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Até então o problema dos coelhos de Fibonacci era somente uma questão de seu livro e que poucas pessoas a conhecia, foi quando o matemático Frances Édouard Anatole Lucas (1842 – 1891) estudando o problema dos coelhos de Fibonacci, que será visto na sequência, conseguiu desenvolver uma forma de encontrar o e-nesimo termo de qualquer sequência, sendo estas sequências numéricas geradas por números inteiros que satisfazem a relação de recorrência de

$$L_n = L_{1_{n-1}} - L_{2_{n-2}}\ para\ n \geq 3$$

Indicando f_n para os números de Fibonacci e L_n para os números de Lucas, $f_1 = f_2 = 1$ podendo ser qualquer outro valor definido inicialmente para $L_1\ e\ L_2$, tanto ambos satisfazem a relação de recorrência de Fibonacci (f_n) com diferentes tipos de condições iniciais, para construir os novos números de sua sequência, assim como veremos mais adiante dando ênfase a sequência de Fibonacci.

3.1 PROBLEMA DOS COELHOS

Estudando o problema 18 (problema dos coelhos), do *Liber Abaci* de Fibonacci:

"Um casal de coelhos torna-se produtivo após dois meses de vida, e a partir de então, produz um novo casal a cada mês. Começando com um único casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais existirão ao final de um ano?".

No primeiro e segundo mês tem-se somente um casal: mês 1 = mês 2 = 1

A partir do segundo mês o casal torna-se fértil, então no terceiro mês haverá dois casais: mês 3 = 2

No quarto mês tem-se um casal fértil e dois não férteis: mês 4 = 3

No quinto mês tem-se dois casais férteis e três não férteis: mês 5 = 5

No sexto mês tem-se três casais férteis e cinco não férteis: mês 6 = 8

Generalizando, certo mês haverá r casais férteis e s não férteis, no mês seguinte r casais férteis e $r+s$ casais não férteis, e no próximo mês $r+s$ casais férteis e $2r+s$ casais não férteis, ou seja, o número de casais não férteis ao fim de certo mês, partindo do terceiro é igual a soma do número de casais não férteis dos meses anteriores.

$$mês\ 1 = s$$

$$mês\ 2 = s$$

$$mês\ 3 = r + s$$

$$mês\ 4 = r + (r + s)$$

$$mês\ 5 = r + s + (2r + s) \ldots$$

Assim: $mês\ 1 = 1, mês\ 2 = 1, mês\ 3 = 1 + 1 = 2, mês\ 4 = 1 + 2 = 3, mês\ 5 = 2 + 3 = 5, mês\ 6 = 3 + 5 = 8, mês\ 7 = 5 + 8 = 13, mês\ 8 = 8 + 13 = 21, mês\ 9 = 13 + 21 = 34, mês\ 10 = 21 + 34 = 55, mês\ 11 = 34 + 55 = 89, mês\ 12 = 55 + 89 = 144$

Durante doze meses, totalizando 1 ano tem-se 144 casais de coelhos com 55 casais férteis e 89 não férteis.

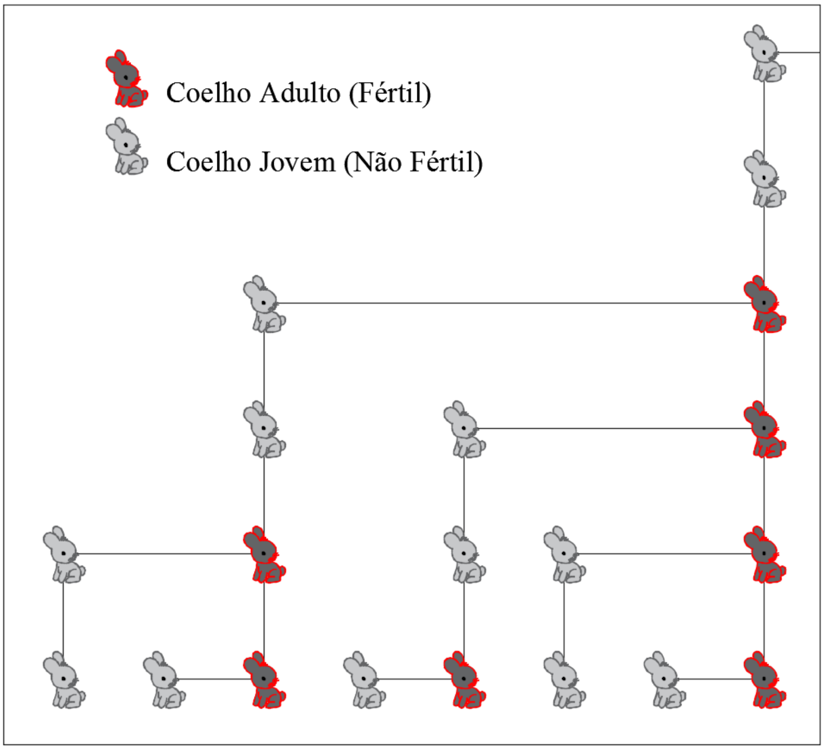

Figura 28 Reprodução dos coelhos em 6 mês
FONTE: Ferreira, 2016

3.2 SEQUÊNCIA DE FIBONACCI DEMONSTRADA ALGEBRICAMENTE

Ao gerar os números $(f_n) = (1,1,2,3,5,8,\ldots)$ através do problema dos coelhos Édouard deu o nome de *Sequência de Fibonacci*, designação que acabou sendo adotada universalmente e, assim, consagrando o nome de Fibonacci. Os termos dessa sequência são chamados *Números de Fibonacci*, e claro que $(\mathrm{f_n})$ pode ser definida da forma recursiva, onde:

$$f_1 = f_2 = 1 \qquad e \qquad f_{n+1} = f_{n-1} + f_n \ (n \geq 2)$$

Propriedades gerais:

I) para todo $n \geq 1$: $f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$

Prova Por Indução: Para $n = 1$

$$f_1 = f_3 - 1 \text{ (verdadeira)}$$

(Hipótese de Indução) vamos supor $r \geq 1 \ \ e \ \ f_1 + f_2 + \cdots + f_r = f_{r+2} - 1$

Para $n = r + 1$

$$f_1 + \cdots + f_r + f_{r+1} = f_{r+2} - 1 + f_{r+1} = f_{r+3} - 1$$

II) para todo $n \geq 1$: $f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$

Prova Por Indução:

Para $n = 1 = f_1^2 = f_1 f_2$ (verdadeira)

Seja $r \geq 1$ e suponhamos $f_1^2 + \cdots + f_r^2 = f_r f_{r+1}$

$$n = r + 1: f_1^2 + \cdots + f_r^2 + f_{r+1}^2 = f_r f_{r+1} + f_{r+1}^2 = f_{r+1}(f_r + f_{r+1}) = f_{r+1} f_{r+2}$$

III) Se $m \geq 1$ e $n > 1$, então $f_{n+m} = f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1}$

Prova Por Indução Sobre m

$$m = 1: f_{n+1} = f_{n-1} f_1 + f_n f_2 = f_{n-1} + f_n \text{ (verdadeira)}$$

$$m = 2: f_{n+2} = f_{n-1} f_2 + f_n f_3 = f_{n-1} + 2f_n = (f_{n-1} + f_n) + f_n = f_n + f_{n+1} \text{ (verdadeira)}$$

Seja $r > 2$ e suponhamos a propriedade verdadeira para todo k, $2 \leq k < r$, para todo $n > 1$. Esta suposição, mais o fato de que a propriedade vale também para $k = 1$, nos garante que:

$$f_{n+(r-2)} = f_{n-1} f_{r-2} + f_n f_{r-1}$$

$$f_{n+(r-1)} = f_{n-1} f_{r-1} + f_n f_r$$

Somando membro a membro essas igualdades e levando em conta a formula recursiva que define (f_n):

$$f_{n+r} = f_{n-1} f_r + f_n f_{r+1}$$

Ou seja, a formula vale também para r, sempre que $n > 1$. O segundo princípio de indução nos garante então que vale para todo $m \geq 1$ e qualquer $n > 1$.

3.3 ALGUMAS APLICAÇÕES MATEMÁTICAS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

Sequências Recorrentes Lineares

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ o conjunto dos números naturais. Uma função $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ chama-se sequência de números reais e em geral indicaremos, uma sequência por seus valores

$$\varphi = (\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), \dots, \varphi(n), \dots)$$

Dadas duas sequências $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $\sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, chama-se soma de φ e σ a sequência $\varphi + \sigma: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que:

$$(\varphi + \sigma)(n) = \varphi(n) + \sigma(n), \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Sendo φ uma seguencia e $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda\varphi$ é uma sequência dada por $(\lambda\varphi)(n) = \lambda\varphi(n)$, assim o conjunto $\mathbb{R}^\infty$ de todas as sequências de números reais está munido de uma adição e uma multiplicação por escalares podendo assim verificar que ele também é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. No entanto $\mathbb{R}^\infty$ não é um espaço com dimensão finita, porem o espaço $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$, com dimensão *n* é isomorfo ao subespaço de $\mathbb{R}^\infty$ formada pela sequência:

$$\varphi = (x_{0,}\, x_1\,, x_2\,, \dots, x_{n-1}\,, 0\,, 0\,, \dots)$$

Isto é, aqueles cujo termos são nulos a partir do índice *n* (inclusive). O isomorfismo é a transformação dada por:

$$(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R} \longmapsto (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$$

Portanto o $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ pode ser visto como subespaço vetorial de $\mathbb{R}^\infty$ desde que se identifique cada $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ com $(x_0, \dots, x_{n-1}, 0, 0, \dots) \in \mathbb{R}^\infty$.

Definição 1 – Uma sequência $(x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$ chama-se ***sequência recorrente linear*** de ordem 2 se existem $a, b \in \mathbb{R}$ com $b \neq 0$ tais que $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$ Para todo $n \geq 1$. Mas geralmente, se $x_n = a_{n-1}x_{n-1} + \cdots + a_{n-p}x_{n-p}$ verifica-se para todo $n \geq p$ e $a_{n-p} \neq 0$, a sequência $(x_0, \dots, x_n, \dots)$ é recorrente linear de ordem *p*. Os números $a_{n-1}, \dots, a_{n-p}$ são coeficientes da relação de recorrência.

Exemplos

1) As progressões aritméticas são sequências recorrentes lineares de ordem 2, pois $x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Os coeficientes são $a = 2$ e $b = -1$

2) As progressões geométricas são recorrentes lineares de ordem 1, pois $x_{n+1} = qx_n$.

3) As sequências de Fibonacci (dadas por $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $\forall n \geq 1$) são recorrentes lineares de ordem 2 com coeficientes $a = 1$ e $b = 1$.

Teorema 1 – fixando $a, b \in \mathbb{R}$, o conjunto de todas as sequências recorrentes lineares de ordem 2 com coeficientes a e b é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{\infty}$.

Demonstração: Seja S o conjunto das sequências recorrentes lineares de ordem 2 com coeficientes a e b e consideremos $(x_0, x_1, \ldots)$ e $(y_0, y_1, \ldots)$ em S e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:

$$x_{n+1} + y_{n+1} = (ax_n + bx_{n-1}) + (ay_n + by_{n-1})$$

$$= a(x_n + y_n) + b(x_{n-1} + y_{n-1}) \qquad \text{e}$$

$$\alpha x_{n+1} = \alpha(ax_n + bx_{n-1}) = a(\alpha x_n) + b(\alpha x_{n-1}) \qquad \forall n \geq 1$$

o que vem provar que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{\infty}$.

Um problema que apresenta agora é o de calcular uma base de S. Antes de resolver o caso geral, vejamos os exemplos enunciados acima:

Exemplo 1 – Tomemos o subespaço das progressões aritméticas definidas por

$$x_{n+1} = 2x_n - x_{n-1}$$

vamos calcular os termos x_2, x_3 , ... função de x_0 e x_1. Temos:

$$x_2 = 2x_1 - x_0$$

$$x_3 = 2x_2 - x_1 = 2(2x_1 - x_0) - x_1 = 3x_1 - 2x_0$$

$$x_4 = 2x_3 - x_2 = 2(3x_1 - 2x_0) - (2x_1 - x_0) = 4x_1 - 3x_0$$

Por indução teremos a fórmula

$$x_n = nx_1 - (n-1)x_0$$

A sequência é, então:

$$= (x_0, x_1, 2x_1 - x_0, 3x_1 - 2x_0, 4x_1 - 3x_0, \dots \ , nx_1 - (n-1)x_0, \dots) =$$

$$= (x_0, 0, -x_0, -2x_0, -3x_0, \dots \ , -(n-1)x_0, \dots) + (0, x_1, 2x_1, 3x_1, \dots \ , nx_1, \dots) =$$

$$= x_0(1, 0, -1, -2, -3, \dots \ , -(n-1), \dots) + x_1(0, 1, 2, 3, \dots \ , n, \dots).$$

Observemos atentamente os cálculos acima. Em primeiro lugar, x_0 e x_1 determinam univocamente o termo x_n , por meio de:

$$x_n = nx_{-1} - (n-1)x_0$$

Bastam portanto os dois primeiros termos para determinar toda a sequência. Em seguida, usando a igualdade acima foi possível decompor uma sequência $(x_0, x_1, \dots)$ como combinação linear, com coeficientes x_0 e x_1, das sequências:

$$\sigma_1 = (1, 0, -1, -2, -3, \dots \ , -(n-1), \dots) \qquad \text{e}$$

$$\sigma_2 = (0, 1, 2, \dots \ , n, \dots).$$

Estas duas sequências são progressões aritméticas (de razão -1 e 1, respectivamente) e são vetores (= sequências) linearmente independentes pois nenhuma delas é igual à outra multiplicada por um número real.

Conclusão: S tem dimensão 2 e $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ é uma base de S.

Exemplo 2 – Considere o conjunto S das sequências:

$$\sigma = (x_0, x_1, \dots, x_n, \dots)$$

em que $x_{n+1} = qx_n (q \in \mathbb{R}, \text{fixo})$.

Vamos calcular x_n em função de x_0. Temos:

$$x_1 = qx_0, x_2 = qx_1 = q(qx_0) = q^2x_0, x_3 = qx_2 = q(q^2x_0) = q^3x_0, \dots \ , x_n = q^nx_0$$

Se $q = 0$ a sequência é $\sigma = (x_0, 0, 0, \dots)$ e neste caso o conjunto S das sequências consideradas identifica-se com $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. Seja então $q \neq 0$. Então:

$\sigma = (x_0, qx_0, q^2x_0, \ldots\ , q^n x_0, \ldots) = x_0(1, q, q^2, \ldots\ , q^n, \ldots)$.

Conclusão: S tem dimensão 1 e $\{\sigma_1\} = \{(1, q, q^2, \ldots)\}$ é uma base de S.

Voltemos agora ao caso geral onde S é o conjunto das sequências $\sigma = (x_0, x_1, \ldots\ , x_n, \ldots)$ em que $x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$, isto é, sequências recorrentes lineares de ordem 2. Vamos procurar uma base de S formada de sequências da forma $\sigma(n) = q^n$, com $q \neq 0$. Sendo q^n uma solução, devemos ter $q^{n+1} = aq^n + bq^{n-1}, \forall n \geq 1$. Logo, dividindo por q^{n-1}, vem:

$$q^2 = aq - b$$

Que é equivalente,

$$q^2 - aq - b = 0$$

Caso 1: $a^2 + 4b > 0$

Neste caso existem números reais distintos entre si q_1 e q_2 que verificam a igualdade $q^2 - aq - b = 0$. Consideremos as sequências $\sigma_1(n) = q_1^n$ e $\sigma_2(n) = q_2^n$. Sendo $b \neq 0$, então $q_1 \neq 0$ e $q_2 \neq 0$ e como q_1 e q_2 são distintos entre si as sequências σ_1 e σ_2 são linearmente independentes. Se mostrarmos que toda sequência de S é combinação de σ_1 e σ_2, ficará provado que $\{\sigma_1, \sigma_2\}$ é base de S e portanto $\dim S = 2$.

Seja $\sigma = (x_0, x_1, \ldots) \in S$; procuremos $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ de maneira que $\sigma = c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2$. Ora, isto equivale a:

$$\begin{cases} \sigma(0) = c_1\sigma_1(0) + c_2\sigma_2(0) \\ \sigma(1) = c_1\sigma_1(1) + c_2\sigma_2(1) \end{cases}$$

ou seja, a

$$\begin{cases} x_0 = c_1 + c_2 \\ x_1 = c_1q_1 + c_2q_2 \end{cases}$$

Daí vem que:

$$c_1 = \frac{x_1 - x_0q_2}{q_1 - q_2} \quad e \quad c_2 = \frac{x_0q_1 - x_1}{q_1 - q_2}$$

e portanto

$$\sigma = \frac{x_1 - x_0 q_2}{q_1 - q_2}\sigma_1 + \frac{x_0 q_1 - x_1}{q_1 - q_2}\sigma_2$$

Exemplo: As sequências de Fibonacci são aquelas que satisfazem $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ isto é, aquelas em que $a = b = 1$. Neste caso:

$$a^2 + 4b = 5\,, \quad q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,, \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad e \quad q_1 - q_2 = \sqrt{5}$$

Então:

$$\mathrm{x_n} = \frac{x_1 - x_0\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x_0 - x_1}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

É o n-ésimo termo de uma sequência de Fibonacci. Se tomarmos, por exemplo, tomando $x_0 = 0\ e\ x_1 = 1$ teremos:

$$x_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}} - \frac{\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n\sqrt{5}} = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left(\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n\right)$$

Observe que, embora não pareça, x_n é inteiro, pois:

$$\sigma = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$$

Corolário: Para todo $\mathrm{n} > 1$: $\mathrm{f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2}$

Prova: Façamos $\mathrm{m = n}$ na fórmula dada pela propriedade anterior.

Então:

$$\mathrm{f_{2n} = f_{n-1}f_n + f_n f_{n+1} = f_n(f_{n-1} + f_{n+1})}$$

Mas

$$\mathrm{f_n = f_{n+1} - f_{n-1}}$$

Logo

$$f_{2n} = (f_{n+1} - f_{n-1})(f_{n+1} + f_{n-1}) = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$$

Propriedades aritmética

(IV) Dois números de Fibonacci consecutivos f_n e f_{n+1} são primos entre si.

Prova: Seja $d = mdc(f_n\ ,\ f_{n+1})$. Como f_n e f_{n+1} são maiores que zero, o mesmo ocorre com o d. O fato de d ser o divisor de f_n e f_{n+1} implica que $d|f_{n-1}$ pois $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$. Dividindo f_n e f_{n-1} então d divide f_{n-2}. Prosseguindo nesse raciocínio chegaremos a conclusão que $d|f_2$. Então $d = 1$ pois $f_2 = 1$.

Nota: Consideremos os números de Fibonacci f_{n+1} e f_{n+2} que já sabemos serem primos entre si. Mas se aplicássemos o processo das divisões sucessivas a esses números obteríamos:

$$f_{n+2} = f_{n+1}.1 + f_n$$
$$f_{n+1} = f_n.1 + f_{n-1}$$
$$\vdots$$
$$f_4 = f_3.1 + f_2$$
$$f_3 = f_2.2 + 0$$

Isso mostra que seriam necessárias *n* divisões sucessivas para chegar ao máximo divisor comum $f_2 = 1$ de f_{n+2} e f_{n+1}.

Logo, para todo $n > 0$, existem inteiros *a* e *b* tais que são necessárias exatamente *n* divisões sucessivas para se calcular $mdc(a, b)$ através do algoritmo da divisão.

(V) se $m|n$, então $f_m|f_n$.

Prova: Por hipótese $n = mr$, para algum $r \in \mathbb{N}$. Procedemos por indução sobre *r*.

Se $r = 1$, então $m = n$ e é imediato que $f_m|f_n$.

Seja $r \geq 1$e admitamos que $f_m|f_{mr}$

Então, levando em conta a relação fornecida por **III**:

$$f_{m(r+1)} = f_{mr+m} = f_{mr-1}.f_m + f_{mr}.f_{m+1}$$

Como $f_m|f_{mr-1}.f_m$ e $f_m|f_{mr}.f_{m+1}$ (pois pela hipótese da indução, divide f_{mr}), então f_m divide a soma desses dois produtos. Ou seja: $f_m|f_{m(r+1)}$.

(VI) se $d = mdc(m,n)$, então $mdc(f_m, f_n) = f_d$.

Prova: Mostremos primeiro que se $m = nq + r$, então $mdc(f_m, f_n) = mdc(f_n, f_r)$.

Observando a hipótese e levando em conta **III**:

$$mdc(f_m, f_n) = mdc\left(f_{nq+r}, f_n\right) = mdc\left(f_{nq-1}.f_r + f_{nq}.f_{r+1}\ , f_n\right)$$

Considerando porem que $mdc(a\ ,b) = mdc(a + c, b)$, sempre que $b|c$ e ainda que $f_n|f_{nq}$ (prop. V), chegamos a:

$$mdc(f_m, f_n) = mdc\left(f_{nq-1}.f_r, f_n\right)$$

Mostremos que f_{nq-1} e f_n são primos entre si. De fato, se d é um divisor comum a esses dois números, então $d|f_{nq-1}$ e $d|f_n$ (devido a V). Daí d é um divisor da soma de

$f_{nq-1} + f_n = f_{nq+1}$. Mas se $d|f_{nq}$ e $d|f_{nq+1}$, então **IV** nos assegura que $d = 1$.

Se $mdc\left(f_{nq-1}, f_n\right) = 1$, então $mdc(f_r, f_n) = mdc(f_{nq-1}.f_r, f_n)$, donde

$$r_{n-1}mdc(f_m, f_n) = mdc(f_n, f_r)$$

Assim, supondo $m > n$, e aplicando o processo das divisões sucessivas para se chegar a $d = mdc(m,n)$:

$$m = nq_1 + r_1\ \ (r_1 < n)$$

$$n = r_1q_2 + r_2\ \ (r_2 < r_1)$$

$$r_1 = r_2q_3 + r_3\ \ (r_3 < r_2)$$

$$r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n\ \ (r_n < r_{n-1})$$

$$r_{n-1} = r_nq_{n+1}\ \ (onde\ r_n = d)$$

O uso repetido do resultado anterior a cada uma das desigualdades anteriores nos levara a concluir que

$$mdc(f_m, f_n) = mdc(f_{r_{n-1}}, f_d)$$

Como $d|r_{n-1}$ e portanto, em virtude de **V** $f_d|f_{r_{n-1}}$, então:

$$mdc(f_m\ , f_n) = f_d$$

*Corolário (reciproco a **V**):* Se $f_m|f_n$ e $m \neq 2$, então $m|n$.

*Prova**:*** De $f_m|f_n$ decorre que $mdc(f_m\ , f_n) = f_m$. Mas, devido a **VI**:

$$mdc(f_m\ , f_n) = f_d$$

Onde $d = mdc(m\ , n)$. Logo $f_m = f_d$. Se $m > 2$, então $f_m \geq 2$, dai $f_d \geq 2$ e portanto $d > 2$, o que implica

$m = d$, o que obviamente acarreta $m|n$.

Os resultados com que já constamos nos permitem chegar a outras propriedades interessantes, como os "critérios de divisibilidade" que exporemos a seguir. Por critérios de divisibilidade entendemos, no caso, condições necessárias e suficientes para que um certo número de Fibonacci seja divisível, por um dado número.

Um número Fibonacci é divisível por 2 (portanto é par) se, e somente se, seu índice é divisível por 3.

Um número de Fibonacci é divisível por 3 se, e somente se, seu índice é divisível por 4.

Um número de Fibonacci é divisível por 4 se, e somente se, seu índice é divisível por 6.

Denotaremos em seguida o primeiro desses critérios.

Prova item A)

⇒ Por hipótese

$$f_3 = 2 = mdc(f_n\,, 2) = mdc(f_n\,, f_3) = f_{mdc(n\,,3)}$$

Logo

$$mdc(n\,, 3) = 3$$

O que implica $3|n$.

⇒ Como $3|n$, por hipótese, então $n = 3q$ e portanto

$$f_n = f_{3q}$$

Mas devido a **V**:

$$f_3|f_{3q}$$

Como $f_3 = 2$ e $f_{3q} = f_n$, então $2|f_n$.

3.4 RELAÇÃO DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI COM A RAZÃO ÁUREA

Se $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$ é um número da sequência de Fibonacci, então $\frac{f_{n-1}}{f_n}$ tende a Φ

Teorema: Seja $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_{n-1}}{f_n}$ tende a razão áurea $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \Phi$

Pela sequência de Fibonacci temos:

$$f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$$

Como

$$f_{n+1} > f_n$$

Então

$$0 < \frac{f_n}{f_{n+1}} < 1$$

Por ser limitado superiormente, e toda sequência monótona limitada superiormente é convergente

Seja

$$x_n = \frac{f_{n-1}}{f_n}$$

Como x_n é convergente temos:

$$lim\, x_n = a$$

Pela definição da Sequência de Fibonacci

$$f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$$

Assim dividindo tudo por f_n obtemos

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_{n-1}}{f_n} + \frac{f_n}{f_n} \therefore \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_{n-1}}{f_n} + 1$$

Ou seja

$$\frac{1}{x_{n+1}} = x_n + 1$$

Logo

$$\lim(x_n) = \frac{1}{\lim x_{n+1}} - 1$$

Chamando $\lim(x_n) = a$, temos

$$a = \frac{1}{a} - 1$$

$$a^2 = 1 - a$$

$$a^2 + a - 1 = 0$$

$$a = \frac{-1 \pm \sqrt{(1)^2 - 4.1.(-1)}}{2.1}$$

Pegando a raiz positiva temos:

$$a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

Portanto

$$a \cong 0{,}61803398\ldots$$

Como podemos ver o resultado final foi $\cong 0{,}61803398\ldots$ que é uma das representações do número de ouro

Assim podemos afirmar que quanto maior o número da sentença de Fibonacci dividido por seu sucessor, está divisão tende ao número de ouro.

$$\frac{f_{n-1}}{f_n} \cong 0{,}61803398\ldots$$

Como $f_n = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \ldots)$, utilizando os números da sequência de Fibonacci para os quadrados para constituir o retângulo áureo representado na figura 29

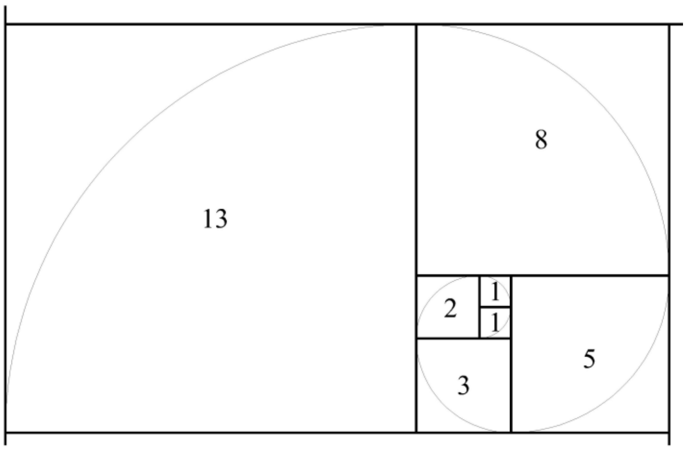

Figura 29 Espiral de Fibonacci
FONTE: Ferreira, 2016

Como mostra a figura acima, ao desenhar arcos com raio igual ao lado de cada quadrado, a junção dos arcos forma a espiral de Fibonacci.

CONCLUSÃO

No início da pesquisa verificamos que há uma infinidade de temas e assuntos relacionados a razão áurea e a sequência de Fibonacci. No entanto escolhemos mostrar como a razão áurea está relacionada ao número de ouro e este a sequência de Fibonacci.

Podemos perceber que estes temas são pouco abordados na escola, talvez por não fazer parte do plano curricular escolar, como também se verifica que a maioria dos livros didáticos não trazem tal conteúdo e quando abordado é de relance. Muitos alunos nem sabem que existe esses tipos de relações matemáticas, que muitas vezes aparece em filmes de ficção cientifica, como por exemplo no filme “O código da Vince” adaptação do romance de Dan Brown.

No entanto deve-se tomar cuidado com o que se lê, há muitos trabalhos que abordam sobre razão áurea e sequência de Fibonacci, porem alguns dos elementos contidos nestes trabalhos são relações mirabolantes que não fazem sentido, e muitas vezes tal relação é forçada a chegar no resultado. Podemos encontrar segmentos áureos no corpo humano, mas não é todo mundo que vai ter tais proporções. Na arquitetura é mais fácil de se encontrar os segmentos áureos já que quem o projetou tinha a intenção de fazer o uso destes segmentos.

Como podemos ver no capitulo 3.4, realmente a razão áurea e o número de ouro tem relação com a sequência de Fibonacci, onde números gerados pela sequência são números inteiros, e quando dividido determinado número por seu sucessor o resultado será um número irracional, e quanto maior o número escolhido da sequência mais se aproximará de Φ .

BIBLIOGRAFIA

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. **Ánálise Matemática para Licenciatura**. 1ª. ed. São Paulo, Editora Edgard Blucher, 2001.

BAGNI, Giorgio. T.; D'AMORE, Bruno. **Leonardo e a Matemática**. 1ª. ed. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2011.

BANGS, Herbert. **O Retorno da Arquitetura Sagrada:** a razão áurea e o fim do modernismo. Tradução de Bruno Costa. São Paulo, Pensamentos, 2010.

CALFA, Humberto Giovanni. **Desenho Geométrico Plano**. Rio de janeiro, Biblioteca do Exercito Editora, v. II, 1995.

CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H.; COSTA, Roberto C. F. **Álgebra Linear e Aplicações**. 5ª. ed. São Paulo, Atual Editora, 1987.

COMMANDINO, Frederico. **Euclides:** Elementos de Geometria. São Paulo, Edições Cultura, v. I, 1944.

COMMANDINO, Frederico. **Euclides:** Elementos de Geometria. São Paulo, Edições Cultura, v. II, 1944.

DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de aritmética**. 1ª. ed. São Paulo, Editora Atual, 1991.

EVES, Howard. **Introdução a Historia da Matemática**. 4ª. ed. Campinas, Editora Unicamp, 2004.

GIL, Antonio Carlos. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa.** 4ª. ed. São Paulo, Editora Atlas, 2002.

HUNTLEY, H. E. **A Divina Proporção:** um ensaio sobre a beleza na matmática. Tradução de Luís Carlos Ascêncio Nunes. Brasília, Universidade de Brasília, 1985.

TAHAN, Malba. **As Maravilhas da Matemática**. 2ª. ed. Rio de Janeiro, Edições Bloch, 1973.

http://www.nautilus.com.br/clientes/backup_pontes/biografia/lucas.htm > acessado e capturado em 6 de setembro de 2016.

http://ms.appliedprobability.org/data/files/feature%20articles/43-3-6.pdf > acessado e capturado em 6 de setembro de 2016.

http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br/wp-content/uploads/2013/08/nota_aula_03.pdf > acessado em 04 de outubro de 2016.

http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html > acessado e capturado em 20 de maio de 2016.

http://www.oratorium.co.uk/wp-content/uploads/2013/12/03-Tuscany.jpg > imagem do Fibonacci

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/e/ec/Mona_Lisa,_by_Leonardo_da_Vinci,_from_C2RMF_retouched.jpg/687px-Mona_Lisa,_by_Leonardo_da_Vinci,_from_C2RMF_retouched.jpg > imagem da mona lisa – acessado em 27 de setembro de 2016)