Construção dos Conjuntos: Naturais, Inteiros e Racionais

Fausto Costa

Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Unidade Universitária de Nova Andradina

Curso de Matemática/ Licenciatura Plena

Orientadora:Me. **Luciana Kemie Nakayama**

Nova Andradina- MS

2012

Construção dos Conjuntos: Naturais, Inteiros e Racionais

Fausto Costa

Trabalho de Conclusão de curso, do curso de Matemática/ Licenciatura, turno noturno, da Universidade Estadual de Mato grosso do Sul, orientado pela professora Luciana Kemie Nakayama.

Nova Andradina- MS

2012

Construção dos Conjuntos: Naturais, Inteiros e Racionais

Fausto Costa

Trabalho de conclusão de curso submetido ao corpo docente da unidade universitária de Nova Andradina da Universidade Estadual de Mato grosso do Sul-UEMS-MS, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovada por:

Prof.Me. Luciana Kemie Nakayama - UEMS ....

(Orientadora)

Prof.Dr. Fábio Rodrigues Lucas-UEMS ....

Prof.Me. Luis Oreste Cauz -UEMS ....

Nova Andradina

2012

RESUMO

Este trabalho constrói formalmente os conjuntos dos naturais, inteiros e racionais, o primeiro por meio dos axiomas de Peano e os demais são construídos por meio de relção de equivalência de números naturais e inteiros respectivamente.A inclusão dos conjuntos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ é realmente por meio da função imersão que nada mais é que um homomorfismo sobrejetor.

Palavras-Chave: Conjuntos, relação de equivalência, inclusão de conjunto e homomorfismo.

ABSTRACT

This work builds formally the sets of natural, whole and rational, the first by means of axioms of Peano and the others are constructed by means of relation of equivalence of natural numbers and whole respectively. The inclusion of the sets $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ and carried out by means of immersion that is nothing more than a surjective homomorphism.

Word-Keys: sets, relation of equivalence, inclusion of whole and homomorphism.

Índice

Introdução

Este trabalho traz um pouco da teoria dos números, iniciando com a história da simples necessidade de contar para guardar animais até a construção lógica formal dos três principais conjuntos numéricos visto durante o ensino básico, sendo eles os números naturais, os números inteiros e por fim os números racionais.

Poderemos observar como os três conjuntos se relacionam entre si de maneira formal, dando sentido a sentença tão amplamente empregada no ensino básico, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ como números diferentes podem estar relacionados pela relção de ordem contido ou não? Como apartir dos naturais se constrói os inteiros? Como apartir dos inteiros se constrói os racionais? Estas são algumas questões a serem respondidas neste trabalho de conclusão de curso.

Os naturais serão construidos apartir dos axiomas de Peano, partindo da ideia de sucessor. Já os números inteiros dependerão dos naturais para serem construídos, através de uma relção de equivalência a saber:

$$(a, b)\, R\, (c, d) \;\Rightarrow\; a + d = b + c \;\; \forall a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{N}$$

Os números inteiros serão classes de equivalência dessa relação.

Por fim os números racionais também serão classes de equivalência, porém não mais números naturais e sim números inteiros.

Apesar dos conjuntos não terem aparecido juntos na história ao longo deste trabalho poderemos observar que eles estão interligados, um conjunto é formado apartir do outro usando como já dissemos as relacões de equivalência. Mesmo a natureza dos números sendo distintas poderemos dizer que um está contido no outro de maneira formal usando a função imersão que em álgebra vemos como homomorfismo.

O trabalho é dividido em quatro capítulos, sendo o primeiro referente a história dos números e os capítulos subsequentes refere-se a construção lógica formal dos conjuntos naturais, inteiros e racionais respectivamente.

Mostrando ainda as operações usuais de adição e multiplicação definidas nesses conjuntos, bem como as propriedades as quais elas obedecem como associativa, comutatividade entre outras.

Capítulo 1

A História dos números

Você calcula, soma ou subtrai, multiplica ou divide todos os dias, já chegou a se perguntar de onde vêm os números? Parece simples, tão evidente, que chegam a considerá-lo como uma aptidão inata do ser humano, mas os números não são concebidos desta forma.

A concepção de enumerar, quantificar, foi criada para corresponder às preocupações de ordem utilitária. Aqueles que guardavam rebanhos de carneiros ou de cabras, por exemplo, precisavam ter certeza de que, ao voltar do pasto, todos os animais tinham entrado no curral. Os que estocavam ferramentas ou armas, ou que armazenavam reservas alimentares para atender a uma vida comunitária, deviam estar aptos a verificar se a disposição dos mantimentos, armas ou instrumentos era idêntica a que eles haviam deixado anteriormente. Então, tudo começou com artifício conhecido como correspondência um a um, que confere, mesmo aos espíritos mais desprovidos, a possibilidade de comparar com facilidade duas coleções de seres ou de objetos, da mesma natureza ou não, mas, este artifício de correspondência não oferece apenas um meio de estabelecer uma comparação entre dois grupos, ele permite também abarcar vários números sem contar nem mesmo nomear ou conhecer as quantidades envolvidas.

Foi sem dúvida graças a este princípio que durante milênios, o homem pré-histórico pode praticar a aritmética antes mesmo de ter consciência e de saber o que é um número abstrato.

Vejamos o exemplo de um homem que guardava um rebanho de animais todas as noites numa caverna, são cinquenta e cinco animais, mas este pastor, como tal não sabe contar, ignora completamente o que seja o numero 55. Ele sabe apenas que há "muitos"carneiros, mas como isto é muito vago, precisaria estar certo de que todas as noites o rebanho inteiro está protegido. Um dia ele tem uma idéia, sem saber, vai recorrer ao procedimento da comparação ou correspondência. Ele se senta à entrada da caverna e faz entrar um por um os animais. Com um seixo"instrumento de corte", faz um entalhe num pedaço de osso cada vez que um carneiro passa a sua frente. Assim sem conhecer o verdadeiro significado da matemática, ele fez cinquenta e cinco talhos no osso. Toda vez que voltar do pasto ele fará os animais seguirem um por um, colocando cada vez um dedo no talho que corresponde a um carneiro, se ao final faltar talhos é porque nasceu um animal, e se sobrar é porque algum animal se perdeu.

Com este mesmo artifício, homens de toda parte utilizaram também conchas, pérolas, frutos duros, ossos, dentes de elefantes, cocos, bolinhas de argila, tudo arrumadinho em montinhos ou em fileiras correspondentes a quantidade de seres ou de objetos que queriam enumerar. Do mesmo modo, alinharam riscos na areia, nós em pequenas cordas, também usavam os dedos das mãos ou os membros das diferentes partes do corpo humano.

Para se ter uma ideia, os aborígenes também não eram capazes de conceber os números abstratos, mas conseguiram contornar o problema, obtendo resultados satisfatórios quando se tratava de quantidades relativamente reduzidas. Para tanto, recorrem a todo tipo de meios concretos. Mas na maioria das vezes eles "contavam visualmente"segundo a técnica corporal a seguir:

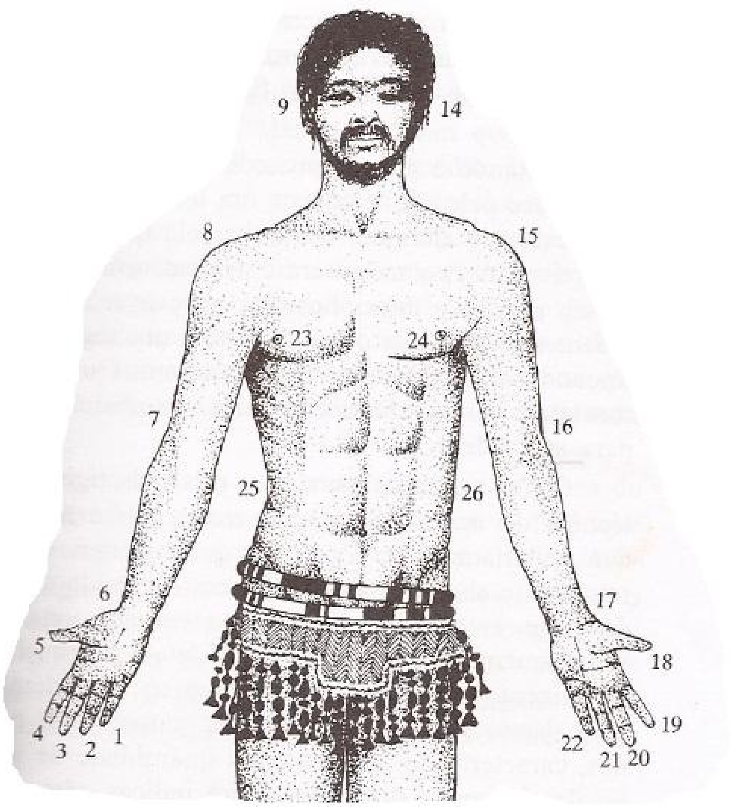

Figura 1.1: Corpo Humano: origem da Artimética
Técnica utilizada pelos Papua da Nova Guiné
Fonte: Ifrah, Georges. **Os Números: História de uma Grande Invensão.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de matemática,2001.

Número	Partes do corpo	Número	Partes do corpo
1	mindinho direito	11	nariz
2	anular direito	12	boca
3	médio direito	13	olho esquerdo
4	indicador direito	14	orelha esquerda
5	polegar direito	15	ombro esquerdo
6	pulso direito	16	cotovelo esquerdo
7	cotovelo direito	17	Pulso esquerdo
8	ombro direito	18	Polegar esquerdo
9	orelha direita	19	indicador esquerdo
10	olho direito	20	médio esquerdo

Tabela 1.1: Relação dos números com o corpo

Toca-se sucessivamente um por um os dedos da mão direita a partir do menor, em seguida o pulso, o cotovelo, o ombro, a orelha e o olho do lado direito. Depois se toca o nariz, a boca, o olho, a orelha, o ombro, o cotovelo e o pulso do lado esquerdo, acabando no dedo mindinho da mão esquerda. Chega-se ao número 22. Se isto não basta, acrescentam-se primeiramente os seios, os quadris e o sexo, depois os joelhos, os tornozelos e os dedos dos pés direito e esquerdo. O que permite atingir dezenove unidades suplementares, ou seja, 41 no total.

Uma expedição certa vez foi levada a cabo por estes indígenas contra uma aldeia vizinha que se revoltou, submetendo-se em seguida. Ao fim da reunião do conselho de guerra, o chefe decide exigir uma reparação, e encarregam vários de seus comandantes de cobrar o resgate junto aos habitantes desta aldeia.

"Para cada guerreiro perdido no combate-– diz o chefe — "deverão nos dar tantos colares de pérolas quantos existem desde o dedo mindinho da mão direita até o olho do mesmo lado. Em seguida, tantas peles quantas existirem desde o dedo mínimo da mão esquerda até a boca. Finalmente, tantos cestos de alimentos quantos podem haver desde o mindinho da mão direita até o pulso esquerdo."

O chefe explica então aos seus homens que a punição infligida aos rebeldes foi fixada em:

10 colares de pérola para cada guerreiro 12 peles de animais morto em combate 17 cestos de alimento.

Nesta batalha, os indígenas perderam dezesseis homens. Evidentemente, eles não conhecem o número dezesseis, mas dispõe no caso de um meio infalível para determiná-lo. Antes da expedição, cada guerreiro coloca uma pedrinha num monte e a retira na volta. Assim, as pedras restantes correspondem exatamente ao numero de perdas no combate. Um dos enviados do chefe pega então dezesseis pedrinhas, que são substituídas por um monte de pauzinhos de mesmo número, mais fácil de transportar. O chefe verifica se seus mensageiros assimilaram e guardaram bem todas as instruções, e eles partem para a aldeia rebelde.

Depois de comunicar aos vencidos "o montante"da pena que eles devem pagar, os enviados iniciam a enumeração do resgate. Um deles se adianta e manda que os habitantes da aldeia tragam um colar de pérolas a cada vez que ele designar uma parte de seu corpo. Ele mostra, sucessivamente, o auricular, o anular, o médio, o indicador e o polegar da mão direita. Traz-lhe um primeiro colar, um segundo, e assim até o quinto. Em seguida ele passa para o pulso, o cotovelo, o ombro, a orelha e o olho direito, o que permite obter, consequentemente, cinco colares suplementares. Assim, sem conceber abstratamente o numero exato, ele consegue ao final desta operação os dez colares exigidos.

Adotando o mesmo procedimento, outro mensageiro recolhe doze peles de animais e um terceiro se apropria dos dezessete cestos de alimentos. Então aquele que conhece o número de guerreiros mortos na guerra entra em cena e separa um dos dezesseis preciosos pauzinhos. Recomeçam-se as três operações precedentes, depois das quais se separa um segundo pauzinho, continuando assim até que eles se acabem. Quando os mensageiros contatam que a conta esta feita, apanham o resgate e voltam para sua aldeia.

Resumindo, os aborígines contavam sem saber contar.

Muitos anos ainda se passaram até que se iniciasse o desenvolvimento teórico do conceito de número que, embora hoje nos pareça natural, foi lento e complexo, envolvendo diversas civilizações.

Os registros históricos nos mostraram a utilização de vários sistemas de numeração, por exemplo, os povos babilônios de 2000 a.C., que desenvolveram o sistema de numeração sexagesimal e empregaram o principio posicional; os egípcios, que já usavam o sistema decimal (não posicional); os romanos, que fizeram história através do uso simultâneo do principio da adição e do raro emprego do principio da subtração; e os gregos antigos, povos que utilizavam diversos sistemas de numeração.

Quase quatro mil anos separam as primeiras manifestações de numeração escrita da construção do sistema de numeração posicional decimal que utilizamos, munido do símbolo denominado zero. Esse símbolo foi criado pelos hindus nos primeiros séculos da era cristã. A concepção do zero foi ignorada, durante milênios, por civilizações matematicamente importantes como a dos gregos e a dos egípcios.

A invenção do zero foi um passo decisivo para a consolidação do sistema de numeração indo-arábico, devido à sua eficiência e funcionalidade em relação aos demais sistemas de numeração. Como efetuar, por exemplo, a multiplicação 385x9807 usando algarismos romanos?

Um marco importante na história dos números e da matemática se deu no século VI a.C., na Escola Pitagórica. Em seus estudos, os pitagóricos envolviam-se de um certo misticismo, pois acreditavam que existia uma harmonia interna no mundo, governada pelos números.

Desde Pitágoras, pensava-se que, dados dois segmentos de reta quaisquer, AB e

CD, seria sempre possível encontrar um terceiro segmento EF, contido um numero inteiro de vezes em AB e um numero inteiro de vezes em CD. Expressamos essa situação dizendo que EF é um submúltiplo comum de AB e CD ou que AB e CD são comensuráveis.

Essa idéia que permite comparar dois segmentos de reta da seguinte maneira: dado dois segmentos, AB e CD, dizer que a razão AB/CD é o numero racional m/n, significa que existe um terceiro segmento EF, submúltiplo comum desses dois, satisfazendo: AB é m vezes EF e CD é n vezes EF.

É natural imaginarem que, para dois segmentos AB e CD dados, é sempre possível tomar EF suficientemente pequeno para caber um numero inteiro de vezes simultaneamente em AB e em CD. Em outras palavras, dois segmentos de reta são sempre comensuráveis, como pensava os pitágoricos, sendo, portanto, os números naturais suficientes para expressar a razão entre eles e, de modo mais geral, a relação entre grandezas da mesma natureza.

O reinado dos números naturais, na concepção pitagórica, foi profundamente abalado por uma descoberta originada no seio da própria comunidade pitagórica e que se deu em particular, numa figura geométrica comum e de propriedades aparentemente simples, o quadrado. Trata-se da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado. Essa situação só foi contornada através do matemático e astrônomo ligado à Escola de Platão, Eudoxo de Chindos (408 a.c. - 355 a.c.), que criou a Teoria das Proporções pra tratar de grandezas incomensuráveis através da geometria, o que , embora genial, contribui para a desaceleração do desenvolvimento da aritmética por muitos séculos.

O coroamento da fundamentação matemática do conceito de número ocorreu somente no final do século XIX, principalmente através dos trabalhos propostos por Richard Dedekind (1831-1916), Georg Cantor (1845-1918) e Giuseppe Peano (1858-

1932). Esses estudos foram motivados pelas demandas teóricas que surgiram a partir do volume de conhecimentos matemáticos adquiridos a partir do calculo diferencial e integral de Isaac Newton (1643- 1727) e Gottfried Leibniz (1646- 1716), no século XVII.

É interessante notar como o processo histórico da conceituação de um número assemelha-se à nossa própria formação desse conceito. Desde crianças, admitem os números naturais como um fruto do processo de contagem, da mesma forma que a humanidade os admitiu ate o século XIX. Alias, entre os gregos da época de Euclides, números eram os que hoje escrevemos como 2,3,4,5 etc., ou seja, os naturais maiores que 1. O próprio 1 era concebido como a unidade básica a partir da qual os números, as quantidades, eram formadas. O zero, como vimos, foi uma concepção já dos primeiros séculos da era cristã, criada pelos hindus, para a numeração escrita. Para uma criança aprendendo a contar, este ato só faz sentido a partir da quantidade, senão, contar o quê? Ela só admite o zero depois de ter passado alguns anos experimentando os números "de verdade", isto é, contando e adquirindo experiência, o que se dá no início de sua aprendizagem da numeração escrita.

As frações eram admitidas pelos gregos não como números, mas como razão entre números (2,3,4 etc.). Da mesma forma, os números negativos, inicialmente utilizados para expressar dívidas, débitos e grandezas que são possíveis de serem medidas em sentidos opostos, só receberam o status de números séculos após serem utilizados na matemática e em suas aplicações. Novamente podemos observar a semelhança com a nossa experiência pessoal em matemática.

A existência de grandezas incomensuráveis e a ausência de um tratamento eficiente para expressá-las, isto é, o descobrimento de uma fundamentação teórica para o conceito de numero real, não impediu o progresso de ramos da matemática do século XVI ao século XIX. No entanto, a complexidade dessa matemática conduziu a problemas cuja compreensão e solução o entendimento intuitivo não era suficiente. É mais ou menos assim que formamos o nosso conceito de numero real: apesar de ouvirmos falar de números reais desde o Ensino Fundamental, concretamente só trabalhamos com números racionais naquela fase ou, no máximo, manipulamos números que aprendemos a chamar de "reais". Isso ocorre até no Ensino Superior e, mais grave, em não raras faculdades de matemática, os formandos concluem o seu curso com a mesma ideia de número real como nele ingressaram.

Os números complexos apareceram no estudo de equações, no século XVI, com o matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576), mas também só adquiriram o status de número a partir de suas representações geométricas, dadas no século XVIII (por K.F Gauus(1777-1855) e J.R. Argand (1768-1822)), e da sua álgebra, apresentada por W.R. Hamilton em 1833, na qual eles eram definidos como pares ordenados de números reais. Estes, por sua vez, foram construídos rigorosamente a partir dos racionais.

Por fim, os números racionais podem ser construídos rigorosamente a partir dos números inteiros e esses a partir dos naturais. Mas, e os números naturais, os primeiros são admitidos pela nossa intuição? Assim se perguntaram alguns matemáticos do século XIX, na busca de completar o conceito matematicamente rigoroso de número. Eles podem ser construídos a partir da Teoria dos Conjuntos, ou podem ser apresentados através de axiomas, como fez G. Peano, em 1889, e como verão a seguir neste trabalho.

Capítulo 2

Os Números Naturais

Neste capítulo faremos a construção do conjunto dos números naturais através dos Axiomas de Peano.

Deve ficar claro que o conjunto $\mathbb{N} = 0, 1, 2, 3, ...$ dos números naturais é uma sequência de objetos abstratos que, em princípio, são vazios de significado. Cada um desses objetos (um número natural) possui apenas um lugar determinado nesta sequência. Neste capítulo faremos a construção lógica formal dos números naturais por meio dos axiomas de Peano.

2.1 Axiomas de Peano

Se $\delta(n)$ denota o sucessor do número natural n, então podemos escrever os axiomas de peano da seguinte maneira:

1. $0 \in \mathbb{N}$;

2. $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists! \; \delta(n) \in \mathbb{N}$;

3. $\forall n \; \in \mathbb{N}, \; \delta(n) \neq 0$;

4. $\delta(n) = \delta(m) \Rightarrow m = n, \; \forall n, \, m \in \mathbb{N}$;

5. $X \, C \, \mathbb{N}$. Se $0 \in X$ e $\delta(n) \in X, \forall \, n \in X \Rightarrow X = \mathbb{N}$ (Axioma da indução completa).

Todo número natural tem um sucessor (único). Será que todo número natural, com exceção de 0,é sucessor? Veremos no resultado a seguir.

Proposição 1.2 Para todo $a \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$, existe $b \in \mathbb{N}$ tal que $a = \delta(b)$

Demonstração:

Considere o seguinte conjunto: S = $\{0\}$ U $\{a \in \mathbb{N}, a \neq 0$ e $a = \delta(b)\}$. Mostremos, usando o axioma indução completa, que $S = \mathbb{N}$.

1º) $S \subset \mathbb{N}$;

2º) $0 \in S$ pela definição de S;

3º) Tome $n \in S$. Seja $x = \delta(n)$. Devemos mostrar que $x \in S$.

$\rightarrow x \in \mathbb{N}$, pois x é sucessor de um natural.

$\rightarrow x = \delta(n) \neq 0$, pela propriedade 3.

$\rightarrow x = \delta(n)$, com $n \in \mathbb{N}$, pois $n \in S \subset \mathbb{N}$.

Logo $\delta(n)$ e S.

Portanto, pelo axioma da indução completa, temos que $S = \mathbb{N}$. Assim, a propriedade enunciada acima vale para todo natural diferente de zero

Proposição 1.3 Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq \delta(n)$.

Considere $S = \{n \in \mathbb{N}; \, \delta(n) \neq n\}$.

Vamos mostrar que $S = \mathbb{N}$.

1º) $S \subset \mathbb{N}$;

2º) $0 \in \mathbb{N}$ e $0 \neq \delta(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, em particular , $0 \neq \delta(n)$. Logo, $0 \in S$;

3º) $n \in S$. Seja $x = \delta(n)$. Devemos mostrar que $x \in S$.

$\rightarrow x \in \mathbb{N}$, pois x é sucessor de um número natural.

$\rightarrow \delta(x) \neq x$. De fato, se $\delta(x) = x$,então $\delta(x) = \delta(n)$,o que implica em $x = n$.(por 4).Assim teríamos $\delta(n) = n$, e consequemtemente n não pertence a S(contradição!).

Logo, $\delta(n) \in S$.

Portanto, pelo axioma da indução completa, temos que $S = \mathbb{N}$.

Assim a propriedade enunciada acima vale para todo natural.

2.2 Operação em $\mathbb{N}$

As operações fundamentais adição e Multiplicação devem ser definidas por indução, como se segue.

2.3 Adição (ou soma), indicado por +

Seja n um dado número natural. Então,

- $n + 0 = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
- $n + \delta(p) = \delta(n + p)$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

Observação 2.1. ***como somar*** $2 + 3$

$$\begin{aligned} 2+3 &= 2+\delta(2) = \delta(2+2) = \delta(2+\delta(1)) \\ &= \delta(\delta(2+1)) = \delta(\delta(2+\delta(0))) \\ &= \delta(\delta(\delta(2))) = \delta(\delta(3)) = \delta(4) = 5. \end{aligned}$$

Proposição 2.1. *Seja n um número natural dado. Então para todo natural p a soma $n+p$ esta em $\mathbb{N}$, ou seja, $n+p \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Seja $n \in \mathbb{N}$ e considere $S = \{p \in \mathbb{N} \setminus n+p \in \mathbb{N}\}$.

Vamos mostrar que $S = \mathbb{N}$:

1º) $S \subset \mathbb{N}$;

2º) $0 \in S$, pois $0 \in \mathbb{N}$ e $n+0 = n \in \mathbb{N}$ esta definido;

3º) Tome $p \in S$. Seja $x = \delta(p)$. Devemos mostrar que $x \in S$

$\rightarrow$ $x \in \mathbb{N}$, pois x é sucessor de um número natural

$\rightarrow$ $n + \delta(p) = \delta(n+p)$, pela definição da adição. Como $p \in S$, temos que $n+p$ esta definido, ou seja,$(n+p) \in \mathbb{N}$

Pelo axioma (2) $\delta(n+p) \in \mathbb{N}$, já que $(n+p) \in \mathbb{N}$. Logo, $n+\delta(p) \in \mathbb{N}$, ou seja, a soma $n+x$ esta definida, o que implica $x \in S$.

Portanto, pelo axioma da indução completa, temos $S = \mathbb{N}$, ou seja, a soma $n+p$ esta definida para quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$. $\square$

2.4 Multiplicação (ou produto)

Seja n um número dado. Então,

- $n.0 = 0\, \forall n \in \mathbb{N}$;
- $n.\delta(p) = n.p + n$, para todos $p \in \mathbb{N}$.

Observação 2.2. ***como multiplicar:***

$2.2 = 2.\delta(1) = 2.1 + 2 =$

$2.\delta(0) + 2 = \; 2.0 + 2 + 2$

$= \; 0 + 2 + 2 = 4$

Esta ultima igualdade diz que, se sabemos multiplicar todos os números naturais n por p, sabemos tambem multiplicá-los por $p+1$,basta tomar $n(p+1) = np + n$.

Proposição 2.2. *Sejam n e p números naturais. Então a multiplicação $n.p$ está definida em $\mathbb{N}$, ou seja, $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Seja $n \in \mathbb{N}$ e considere $S = \{p \in \mathbb{N} / n.p \in \mathbb{N}\}$.

Vamos mostrar que $S = \mathbb{N}$:

1º) $S \subset \mathbb{N}$;

2º) $0 \in S$ pois $0 \in \mathbb{N}$ e $n.0 = 0 \in \mathbb{N}$ está definido;

3º) Tome $p \in S$. Seja $x = \delta(p)$. Devemos mostrar que $x \in S$.

$\rightarrow x \in \mathbb{N}$, pois é sucessor de um natural.

$\rightarrow n.x = n.\delta(p) = n.p + n \in \mathbb{N}$, pois $n.p \in \mathbb{N}$ (já que $p \in S$) , $n \in \mathbb{N}$ e a soma está definida nos $\mathbb{N}$.

Logo $n.x$ esta definido, o que implica em $x \in S$.

Portanto, pelo axioma da indução completa, temos $S = \mathbb{N}$, ou seja, o produto $n.p$ está definido para quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$. □

Como podemos obsrvar nas duas últimas proposições, o axioma da indução garante que a soma $n + p$ está definida para quaisquer $n, p \in \mathbb{N}$ e também a multiplicação de todo n por qualquer p. Desta forma, ficam bem definidas as duas operações em $\mathbb{N}$.

Definição 2.1. *Se $a, b, c \in \mathbb{N}$ são tais que $c = a + b$, então c é denominado "a soma de a e b"onde a e b são parcelas da soma. Definimos como **adição** à operação assim* *definida no conjunto dos números naturais:*

$$
\begin{aligned}
+ : \mathbb{N}X\mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\
(a,b) &\rightarrow a+b.
\end{aligned}
$$

Definição 2.2. *Se $a, b, c \in \mathbb{N}$ são tais que $c = a.b$, então c é denominado "o produto de a por b"onde a e b são fatores da multiplicação. Definimos como* ***multiplicação*** *à operação assim definida no conjunto dos números naturais:*

$$
\begin{aligned}
. : \mathbb{N}X\mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\
(a,b) &\rightarrow a.b.
\end{aligned}
$$

2.5 Propriedade da adição e da multiplição

Estas operações gozam das conhecidas de associatividade, comutatividade e distributividade.

$A1$ **Associatividade da adição:**

$$(a+b)+c = a+(b+c), \ \forall a,b,c \in \mathbb{N}.$$

Para quaisquer números naturais a, b, c, vale $(a+b)+c = a+(b+c)$.

Demonstração: Consideremos o seguinte conjunto:

$S = \{n \in \mathbb{N}; (a+b)+n = a+(b+n)$ para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}\}$.

Se mostrarmos que $S = \mathbb{N}$ consequentemente teremos quie a propriedade é válida para todos os naturais:

1º) $S \subset \mathbb{N}$;

2º) $0 \in S$; pois $(a+b)+0 = a+(b+0)$ já que

$(a+b)+0 = a+b$ e

$a+(b+0) = a+(b) = a+b$.

3º) Tome $n \in S$ e considere $x = \delta(n)$. Devemos mostrar que $x \in S$, sabemos que vale $(a+b)+n = a+(b+n)$.

$\rightarrow$ $x = \delta(n) \in \mathbb{N}$, pois é sucessor de um número natural.

$\rightarrow$ $(a+b)+x = (a+b)+\delta(n) = \delta((a+b)+n) = \delta(a+(b+n))$

$$= a+\delta(b+n) = a+(b+\delta(n))$$

$$= a+(b+x).$$

resumidamente temos $(a+b)+x = a+(b+x)$, o que implica em $x = \delta(n) \in S$.

Portanto, pelo axioma de indução completa, temos que $S = \mathbb{N}$. □

$A2$ **Elemento neutro aditivo:**

$a+0 = 0+a$, para todo $a \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Pela definição da adição já temos $a+0 = a$, $\forall a \in \mathbb{N}$.

Logo basta mostrar que $0+a = a$, $\forall a \in \mathbb{N}$.

Seja $S = \{n \in \mathbb{N} \,/\, 0+n = n\}$.

1º) $S \subset \mathbb{N}$.

2º) $0 \in S$, pois $0+0 = 0$ $\quad$ $(n = 0 \in S$, pois $0+n = 0+0 = 0 = n)$

3º) Tome $n \in S$. Então $0+n = n$.

Seja $x = \delta(n)$. Devemos mostrar que $x \in S$.

$\rightarrow\ x = \delta(n) \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow\ 0 + x = 0 + \delta(n) = \delta(n + 0) = \delta(n) = x$.

Logo $x = \delta(n) \in S$.

Portanto, pelao axioma de induçao completa, temos que $S = \mathbb{N}$, ou seja, vale a propriedade $0 + a = a\, \forall a \in \mathbb{N}$.

Juntando com a parte que já temos por definição obtemos:

$a + 0 = a = 0 + a$, para todo $a \in \mathbb{N}$. $\square$

Observação 2.3. ***Unicidade do elemento neutro aditivo:***

O elemento $e \in \mathbb{N}$ que satisfaz a propriedade acima, é unico.

Já vimos que:

$$0 + a = a + 0 = a,\ \forall a, \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Supomha que exista outro elemento

$$0' \in \mathbb{N} \ \textit{tal que} \ 0' + a = a + 0' = a,\ \forall a, \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

De (2.2) temos em particular que

$0' + 0 = 0 + 0' = 0$

e de (2.1) temos em paticular

$0 + 0' = 0' + 0 = 0'$

Portanto, $0' = 0$.

Já que o elemento neutro 0 *é único será denominado o elemento neutro aditivo.*

Agora que já definimos a operação de adição em $\mathbb{N}$, podemos relacionar o conceito de sucessor com a soma. Podemos observar isso na próxima proposição.

Proposição 2.3. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, *temos que* $\delta(n) = 1 + n$.

Demonstração: Consideremos $S = \{n \in \mathbb{N}; \delta(n) = 1 + n\}$.

1º) $S \subset \mathbb{N}$;

2º) $0 \in S$; pois $\delta(0) = 1 + 0$ (já que zero é elemento neutro).

3º) Tome $n \in \mathbb{N}$. Então $\delta(n) = 1 + n$.

Consideremos $x = \delta(n)$. Devemos mostrar que $x \in S$.

$\to$ $x = \delta(n) \in (N)$.

$\to$ $\delta(x) = \delta(\delta(n)) = \delta(1 + n) = 1 + \delta(n) = 1 + x$.

Logo $x \in S$, ou seja, dado $n \in S$, temos que $\delta(n) \in S$.

Portanto, pelo axioma de indução completa, temos que $S = \mathbb{N}$, isto é, a proposição é verdadeira para todo natural. □

A3 comutatividade

$a + b = b + a, \forall a, b \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja $a \in \mathbb{N}$ consideremos $S = \{n \in \mathbb{N}; a + n = n + a\}$.

1º) $S \subset \mathbb{N}$;

2º) $0 \in S$; pois $a + 0 = 0 + a$.

3º) tome $n \in S$. Então $a + n = n + a$.

Seja $x = \delta(n)$.

$\rightarrow\ x = \delta(n)\ \in\ \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} a + x = \ a + \delta(n) \ &= \ \delta(a+n) = \ \delta(n+a) = \ 1 + (n+a) \\ &= \ (1+n) + a = \delta(n) + a = x + a \end{aligned}$$

logo $x = \delta(n)\ \in\ S$.

Portanto, pelo axioma de indução completa, temos $S = \mathbb{N}$. $\square$

A adição possui ainda as seguintes propriedades :

(i) Lei do cancelamento.

se $a + b = a + c\ \Rightarrow\ b = c\ , \forall a, b, c\ \in\ \mathbb{N}$.

Demonstração: Dados $b, c\ \in\ \mathbb{N}$, consideremos $S = \{n\ \in\ \mathbb{N}; n + b = n + c\ \Rightarrow\ b = c\}$.

1º) $S\ \subset\ \mathbb{N}$;

2º) $0\ \in\ S$; pois $0 + b = 0 + c\ \Rightarrow\ b = c$.

3º) Tome $n\ \in\ S$. Se $n + b = n + c$, então $b = c$.

Considere $x = \delta(n)$. Vamos mostrar que $x\ \in\ S$.

$\rightarrow\ x\ \in\ \mathbb{N}$, pois é sucessor.

$\rightarrow$ Suponha que $x + b = x + c$. Então $\delta(n) + b = \delta(n) + c$.

Pela comutatividade $b + \delta(n) = c + \delta(n)$.

Pela definição de adição $\delta(b+n) = \delta(c+n)$.

Pelo axioma (4) $b + n = c + n\ \Rightarrow\ n + b = n + c\ \Rightarrow\ b = c$, pois $n\ \in\ \mathbb{N}$.

Logo $x+b=x+c \;\Rightarrow\; b=c$, o que resulta em $x \in S$.

Portanto, pelo axioma de indução completa, $S=\mathbb{N}$. $\square$

(ii) Anulamento da adição.

Se $a,b \in \mathbb{N}$ e $a+b=0 \;\Rightarrow\; a=b=0$.

Demonstração: Sejam $a,b \in \mathbb{N}$ tais que $a+b=0$.

suponha $b \neq 0$

Então $b=\delta(n)$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Assim, $a+b=0 \;\Rightarrow\; a+\delta(n)=0 \;\Rightarrow\; \delta(a+n)=0$, o que contradiz o axioma $(3-)$ (zero não é sucessor de qualquer natural).

Portanto $b=0$.

Desta forma, $a+0=0 \;\Rightarrow\; a=0$.

Portanto $a+b=0 \;\Rightarrow\; a=0$ e $b=0$ $\square$

Propriedades da Multiplicção:

M1 Elemento neutro da multiplicaçao: Para todo $a \in \mathbb{N}$, $a.1=1.a=a$.

Demonstração: Observe inicialmente que $a.1=a.\delta(0)=a.0+a=0+a=a$.

Vamos mostrar por indução que $1.a=a\,\forall a \in \mathbb{N}$.

Consideremos $S=\{n \in \mathbb{N};\, 1.n=n\}$.

1º) $S \subset \mathbb{N}$;

2º) $0 \in S$; pois $1.0=0$.

3º) Tome $n \in S$. Então $1.n=n$.

Considere $x=\delta(n)$. Vamos mostrar que $x \in S$.

$\rightarrow\ x \in \mathbb{N}$, pois é sucessor.

$\rightarrow\ 1.x = 1.\delta(n) = 1.n + 1 = n + 1 = 1 + n = \delta(n) = x.$

Logo $x \in S$.

Portanto, pelo axioma de indução, $S = \mathbb{N}$, e assim a propriedade vale para todo natural. $\square$

Obs: Unicidade do elemento neutro :

Suponha que exista $1' \in \mathbb{N}$ tal que

(1) $a.1' = 1'.a = a$, $\forall a \in \mathbb{N}$.

(2) $a.1 = 1.a = a$, $\forall a \in \mathbb{N}$. Como vimos acima.

Desta forma

(1) $\Rightarrow\ 1 = 1'.1 = 1.1' = 1'$.

Provando assim, unicidade do elemento neutro.

M(2) **Propriedade distributiva:** Para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$, tem-se:

(a) $(b + c).a = b.a + c.a.$

(b) $a.(b + c) = a.b + a.c.$

Demonstração: (a) Fixado $a, b \in \mathbb{N}$.

Seja $S = \{n \in \mathbb{N};\ (b + c).n = b.n + c.n\}$.

Vamos mostrar que $S = \mathbb{N}$.

1º) $S \subset \mathbb{N}$;

2º) $0 \in S$; pois $(b+c).0 = 0 \qquad b.0+c.0 = 0+0 = 0$ ou seja , $(b+c).0 = b.0+c.0$.

3º) Tome $n \in S$. Então $(b + c).n = b.n + c.n$.

Considere $x = \delta(n)$. Devemos mostrar que $x \in S$.

$\to$ $x \in \mathbb{N}$, pois é sucessor.

$$
\begin{aligned}
\to (b+c).x = (b+c).\delta(n) &= (b+c).n + (b+c) \\
&= b.n + c.n + (b+c) \\
&= b.n + (c.n + b) + c \\
&= b.n + (b + c.n) + c \\
&= b.n + b + (c.n + c) \\
&= b.\delta(n) + c.\delta(n) \\
&= b.x + c.x
\end{aligned}
$$

ou seja, $(b+c).x = b.x + c.x$.

(b) $S = \{n \in \mathbb{N};\, n.(b+c) = n.b + n.c,\, \forall b, c \in \mathbb{N}$.

1º) $S \subset \mathbb{N}$;

2º) Vamos mostrar que $0 \in S$. Para isso, observemos que $0.n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. De fato,

$n + 0.n = 1.n + 0.n = (1+0).n = 1.n = n$ e

$0.n + n = 0.n + 1.n = (0+1).n = 1.n = n$

ou seja, $n + 0.n = 0.n + n = n$. Assim, $0.n$ é o elemento neutro da adiçao, que é único, portanto $0.n = 0$.

Desta forma, pelo que vimos acima $0.n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Em particular,

$0.(b+c) = 0$; e

$0.b + 0.c = 0 + 0 = 0.$

Logo, $0.(b + c) = 0.b + 0c$, o que implica em $0 \in S$.

3º) Tome $n \in S$. Então $n.(b + c) = n.b + n.c$

Considere $x = \delta(n)$. Devemos mostrar que $x \in S$.

$\rightarrow x \in \mathbb{N}$, pois é sucessor.

$\rightarrow x.(b + c) = \delta(n).(b + c) = (n + 1)(b + c) = n.(b + c) + 1.(b + c)$

$= n.b + n.c + (b + c)$

$= n.b + b + (n.c + c)$

$= n.b + 1.b + (n.c + 1.c)$

$= (n + 1).b + (n + 1).c$

$= \delta(n).b + \delta(n).c$

$= x.b + x.c,$

ou seja, $x.(b + c) = x.b + x.c$. Logo $x \in$.

Portanto, pelo axioma de indução, $S = \mathbb{N}$. □

M3 Associatividade da multiplicação:

Para todo $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a.(b.c) = (a.b).c$.

Demonstração: Fixados $a, b \in \mathbb{N}$.

Seja $S = \{n \in \mathbb{N}; a.(b.n) = (a.b).n\}$.

1º) $S \subset \mathbb{N}$;

2º) $a.(b.0) = a.0 = 0$; e

$(a.b).0 = 0$, logo $a.(b.0) = (a.b).0$ e assim $0 \in S$.

3º) Tome $n \in S$. Então $a.(b.n) = (a.b).n$

Considere $x = \delta(n)$. Devemos mostrar que $x \in S$

$\rightarrow x \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow a.(b.x) = a.(b.\delta(n)) = a.(b.n + b) = a.(b.n) + a.b$

$= (a.b).n + a.b = (a.b).n + (a.b).1$

$= (a.b)(n + 1) = (a.b).(\delta(n)$

$= (a.b).x$.

Logo $x \in S$ e portanto, pelo axioma de indução, $S = \mathbb{N}$. $\square$

M4 Comutatividade da multiplicação:

Para todo $a, b \in \mathbb{N}$, $a.b = b.a$.

Demonstração: Fixado $b \in \mathbb{N}$, consideremos $S = \{n \in \mathbb{N};\ n.b = b.n\}$.

1º) $S \subset \mathbb{N}$;

2º) $0 \in S$; pois $0.b = 0 = b.0$.

3º) Tome $n \in S$. Então $n.b = b.n$.

Seja $x = \delta(n)$. Vamos mostrar que $x \in S$.

$\rightarrow x \in \mathbb{N}$.

$\rightarrow x.b = \delta(n).b = (n + 1).b = n.b + 1.b = b.n + 1.b = b.n + b$

$= b.\delta(n) = b.x$.

Logo $x \in S$,e portanto, $S \in \mathbb{N}$. $\square$

$M5$ **Anulamento do produto.**

Para todo $a, b \in \mathbb{N}$ satisfazendo $a.b = 0$, temos que $a = 0$ ou $b = 0$.

Demonstração: Se $a = 0$ não há nada a demonstrar, suponha $a \neq 0$. Então $a = \delta(n)$ para algum n.

Assim, $a.b = 0 \Rightarrow \delta(n).b = 0 \Rightarrow (n+1).b = 0 \Rightarrow n.b + b = 0$

$\Rightarrow \delta(n).b = 0$ e $b = 0$

ou seja, se $a.b = 0$, então $a = 0$, ou $b = 0$. □

2.6 Relação de Ordem em $\mathbb{N}$

Nossa descrição do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais termina com a relção de ordem $m \leqslant n$.

Definição 2.3. *Define-se a relação $\leq$ (menor ou igual) em $\mathbb{N}$ do seguinte modo:*

Dados $a, b \in \mathbb{N}$, diz-se que a é menor do que ou igual a b, e escreve-se $a \leq b$, se $b = a + u$ para algum $u \in \mathbb{N}$. (Isto quer dizer que b é sucessor do sucessor...do sucessor de a, o ato de tomar o sucessor sendo interado u vezes.)

O número u nessas condições chama-se diferença entre a e b e é indicado por $u = b - a$,onde b é o minuendo e a o subtraendo. Assim a subtração $(a, b) \mapsto a - b$, só está definida para pares ordenados (a, b) em que $b \leq a$.

Propriedades da relação de ordem:

$\mathbf{O}_1$) $a \leq a, \ \forall \in \mathbb{N}$;

De fato $a = a + 0$.

$\mathbf{O}_2$) $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$;

Demonstração: $a \leq b \Rightarrow b = a + u_1$, para algum $u_1 \in \mathbb{N}$.

$b \leq a \Rightarrow a = b + u_2$, para algum $u_2 \in \mathbb{N}$.

Assim

$b = a + u_1 \;\Rightarrow\; b = (b + u_2) + u_1 \;\Rightarrow\; b + 0 = b + (u_2 + u_1) \;\Rightarrow\; 0 = u_2 + u_1$

$\Rightarrow\; u_2 = 0 = u_1 \;\Rightarrow\; b = a + 0 \;\Rightarrow\; b = a.$ $\square$

O$_3$) $a \leq b$ e $b \leq c \;\Rightarrow\; a \leq c$;

Demonstração: $a \leq b \;\Rightarrow\; b = a + u_1$, para algum $u_1 \in \mathbb{N}$.

$b \leq c \;\Rightarrow\; c = b + u_2$, para algum $u_2 \in \mathbb{N}$.

Assim

$c = b + u_2 \;\Rightarrow\; c = (a + u_1) + u_2 \;\Rightarrow\; c = a + (u_1 + u_2) \;\Rightarrow\; c = a + u.$

Portanto $a \leq c$. $\square$

Obs: As propriedades O$_1$),O$_2$) e O$_3$ garatem que $\leq$ é uma relção de ordem.

O$_4$) $a \leq b$ ou $b \leq a$ (dados $a, b \in \mathbb{N}$).

($\leq$ é uma relação de ordem total).

Demonstração: Fixado $a \in \mathbb{N}$, considere S=$\{n \in \mathbb{N};\ n \leq a$ ou $a \leq n\}$.

1º) $S \subset \mathbb{N}$;

2º) $0 \in S$, pois $0 \in \mathbb{N}$ e $0 \leq a$ $(a = 0 + a)$.

3º Tome $n \in S$. Então

$$\begin{cases} n \leq a \quad \text{ou} \\ \\ a \leq n. \end{cases} \tag{2.3}$$

Seja $x = \delta(n)$. Vamos mostrar que $x \in S$ ou seja, que

$$\begin{cases} x \leq a \quad \text{(o que é equivalente a } \; a = x + u_1) \;\; \text{ou} \\ \\ a \leq x \quad \text{(o que é equivalente a} x = a + u_2). \end{cases} \tag{2.4}$$

Se $x \leq a$, então $a = n + k$, para algum $k \in \mathbb{N}$.

Se $k = 0 \quad \Rightarrow \quad a = n$ e $x = \delta(n) = n + 1 = a + 1 \quad \Rightarrow \quad a \leq x$.

Se $k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad k = \delta(u)$, para algum $u \in \mathbb{N}$. Assim $a = n + k \quad \Rightarrow \quad a = n + \delta(u) = n + (u + 1) = n + (1 + u) = (n + 1) + u = \delta(n) + u = x + u$ o que implica em $x \leq a$.

Logo , neste caso $x \in S$.

Se $a \leq n$, então $n = a + k$, para algum k. Assim $x = \delta(n) = n + 1 = (a + k) + 1 = a + (k + 1)$, o que implica em $a \leq x$.

Logo, neste caso também temos $x \in S$.

Portanto $S = \mathbb{N}$.

$\square$

Capítulo 3

Os números Inteiros

Neste capítulo faremos a construção dos números inteiros e para tal construção definiremos uma relação de equivalência no conjunto dos números naturais através da qual teremos classe de equivalência que serão denominados de números inteiros.

Nosso objetivo aqui é dar um sentido matemático a todas as expressões do tipo $a - b$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{N}$, de maneira a poder tratar como antes do mesmo conjunto tanto aquelas como $7 - 3$, $5 - 1$, e $4 - 0$ quando aquelas como $3 - 7$, $1 - 3$ e $0 - 2$, por exemplo. Nese sentido convém observar primeiro que antes a cada "diferença"$a - b$ está o par ordenado $(a, b) \in \mathbb{N} X \mathbb{N}$. Além disso é fácil ver que, por exemplo, a igualdade em $\mathbb{N}$

$$5 - 3 = 9 - 7$$

equivale a $5 + 7 = 9 + 3$. De uma maneira geral, se $a, b, d \in \mathbb{N}$, $a \geq b$ e $c \geq d$, vale a equivalência:

$$a - b = c - d \Leftrightarrow a + d = c + b$$

Essas considerações, aliadas ao fato de que o conjunto dos inteiros a ser construído, deve ser uma "ampliação"de $\mathbb{N}$, ajudam a entender o caminho que tomaremos.

No conjunto $\mathbb{N}\,X\,\mathbb{N}$ consideremos a relação R definida como a seguinte maneira: para quaisquer $(a,\, b)$ e $(c,\, d)$ em $\mathbb{N}\,X\,\mathbb{N}$,

$$(a,\, b)\; R\; (c,\, d) \;\Leftrightarrow\; a + d \;=\; c + b$$

$$(7,\, 3)\; R\; (5,\, 1) \;\Leftrightarrow\; 7 + 1 \;=\; 5 + 3$$

Para relação R valem as propriedades:

- Reflexiva pois, como para todo $(a,\, b) \in \mathbb{N}\,X\,\mathbb{N}$, se verifica $a+b \;=\; b+a$, então $(a,\, b)\, R\, (a,\, b)$.

- Simétrica pois, como para todo $(a,\, b)\, R\, (c,\, d)$, então $(c,\, d)\, R\, (a,\, b)$.

$$A\, R\, B \;\;\Rightarrow\;\; B\, R\, A$$

$$(a,\, b)\, R\, (c,\, d) \;\;\Rightarrow\;\; (c,\, d)\, R\, (a,\, b)$$

$$(a,\, b)\, R\, (c,\, d)$$

$$a + d \;=\; c + b$$

$$c + b \;=\; a + d \;=\; d + a$$

$$c + b \;=\; d + a \;\Rightarrow\; (c,\, d)\, R\, (a, b).$$

- Transitiva pois, $(a,\, b)\, R\, (c,\, d)$ e $(c,\, d)\, R\, (e,\, f) \;\Rightarrow\; (a,\, b)\, R\, (e,\, f)$

$$(a,\, b)\, R\, (c,\, d)$$

$$(c,\, d)\, R\, (e,\, f)$$

$$a + d = c + b$$

$$c + f = e + d$$

$$a + d + c + f = c + b + e + d$$

$$a + f = e + b \Rightarrow (a,\, b)\, R\, (e,\, f).$$

Logo R é uma relação de equivalência em $\mathbb{N}\, X\, \mathbb{N}$ e, por conseguinte determina uma partição neste conjunto em classes de equivalência. Para cada $\overline{(a,\, b)}$ a classe de equivalência determinada por $(a,\, b) \in \mathbb{N}\, X\, \mathbb{N}$. Assim:

$$\overline{(a,\, b)} = \{\, (x,\, y) \in \mathbb{N}\, X\, \mathbb{N} | (x,\, y)\, R\, (a,\, b)\} =$$

$$= \{(x,\, y) \in \mathbb{N}\, X\, \mathbb{N}\, |\, x + b = y + a\}$$

o conjunto quociente de $\mathbb{N}\, X\, \mathbb{N}$ por R, ou seja, o conjunto de todas as classes $\overline{(a,\, b)}$, para qualquer $(a,\, b) \in \mathbb{N}\, X\, \mathbb{N}$, será indiciado por $\mathbb{Z}$. Então :

Por exemplo:

$$\overline{(4,\, 2)} = (2,\, 0); (3,\, 1); (4,\, 2); ...$$

$$\overline{(2,\, 4)} = (0,\, 2); (1,\, 3); (2,\, 4); ...$$

$$\overline{(1,\, 5)} = (0,\, 4); (1,\, 5); (2,\, 6); ...$$

É claro que: $\overline{(a,\, b)} = \overline{(c,\, d)} \Leftrightarrow (a,\, b)\, R\, (c,\, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$. Em particular vale o seguinte: se $a \geq b$, então $\overline{(a,\, b)} = \overline{(a - b,\, 0)}$, pois $a + 0 = (a - b) + b$; e se $b \geq a$; então $\overline{(a,\, b)} = \overline{(0,\, b - a)}$, uma vez que $a + (b - a) = b + 0$. Assim , se $\overline{(a,\, b)} \in \mathbb{Z}$, então $\overline{(a,\, b)} = \overline{(c,\, 0)}$ ou $\overline{(a,\, b)} = \overline{(0,\, c)}$, para algum $c \in \mathbb{N}$. E essa maneira de representar o elemento $\overline{(a,\, b)}$ é única pois, por exemplo, se $\overline{(c,\, 0)} = \overline{(d,\, 0)}$, então $c + 0 = d + 0$ e daí $c = d$.

3.1 Adição em $\mathbb{Z}$

Consideremos os números naturais 3 e 4 escrito sob a forma: $4 = 5-1$ e $3 = 7-4$. Então: $4+3 = (5-1) + (7-4)$. Essa observação ajuda a entender a definição a seguir:

Definição 3.1. *Sejam $m = \overline{(a,b)}$ e $n = \overline{(c,d)}$ elementos quaisquer de $\mathbb{Z}$. Chama-se soma de m com n, e se indica por $m+n$, o elemento de $\mathbb{Z}$ dfinido por:*

$$m+n = \overline{(a+c, b+d)}$$

Suponhamos $m = \overline{(a,b)} = \overline{(a_1,b_1)}$ e $n = \overline{(c,d)} = \overline{(c_1,d_1)}$; então

$m+n = \overline{(a+c,b+d)}$ e $m+n = \overline{(a_1+c_1,b_1+d_1)}$. Então vamos mostrar que:

$(a+c,b+d)\ R\ (a_1+c_1,b_1+d_1)$. De fato temos que:

$(a,b)\ R\ (a_1,b_1) \quad (c,d)\ R\ (c_1,d_1)$.

Assim

$$a+b_1 = a_1+b \tag{3.1}$$

$$c+d_1 = d+c_1 \tag{3.2}$$

Somando (3.1) e (3.2)

$(a+c)+(b_1+d_1) = (b+d)+(a_1+c_1)$

$(a+c,\ b+d)\ R\ (a_1+c_1,\ b_1+d_1)$.

Assim fica mostrado que a soma independe dos representantes que forem tomados.

Exemplo 3.1. *Suponhamos* $m = \overline{(4,1)} = \overline{(5,2)}$ *e* $n = \overline{(5,3)} = \overline{(9,7)}$*; então*

$m + n = \overline{(4+5,\ 1+3)}$ *e* $m + n = \overline{(5+9,\ 2+7)}$. *Então vamos mostrar que:*

$(9,\ 4)\ R\ (14,\ 9)$.

De fato temos que:

$(4,1)\ R\ (5,2) \quad (5,3)\ R\ (9,7)$

Assim

$$4 + 2 = 5 + 1 \tag{3.3}$$
$$5 + 7 = 9 + 3 \tag{3.4}$$

Somando (3.3) e (3.4)

$(4+5) + (1+3) = (9+5) + (7+2)$

$(9,\ 4)\ R\ (14,\ 9)$.

Donde $(a+c, b+d) = (a_1+c_1, b_1+d_1)$. Logo a relação dada por

$$(m,n) \ \rightarrow \ m+n$$

é uma aplicação de $\mathbb{Z}\ X\ \mathbb{Z} \ \rightarrow \ \mathbb{Z}$ e portanto é uma operaçao sobre $\mathbb{Z}$. A essa operação chama-se *adição* em $\mathbb{Z}$.

Para a adição em $\mathbb{Z}$ valem as seguintes propiedades:

a) ***Associativa***

Demonstração: De fato, se m=$\overline{(a,b)}, n = \overline{(c,d)}$ e $r = \overline{(e,f)}$ são elementos genéricos de $\mathbb{Z}$, então:

$$\begin{aligned}(m+n)+r &= \overline{(a+c,b+d)+(e+f)} = \overline{(a+c)+e,(b+d)+f} \\ &= \overline{(a+(c+e),(b+(d+f))} = \overline{(a+b)} + \overline{(c+e,d+f)} \\ &= \overline{(a,b)} + (\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}) = m+(n+r)\end{aligned}$$

□

b) ***Comutativa*:** $m+n = n+m, para\ todo\ m,n \in\ \mathbb{Z}.$

Demonstração: De fato, se m=$\overline{(a,b)}$ e $n = \overline{(c,d)}$ são elementos genéricos de $\mathbb{Z}$, então:

$m+n = \overline{(a+c,b+d)} = \overline{(c+a,d+b)} = n+m.$ □

c) ***Existe um elemento neutro* :** é classe $\overline{(0,0)}$. De fato, para qualquer $\overline{(a,b)}\ \in\ \mathbb{Z}$.

$$\overline{(a,b)} + \overline{(0,0)} = \overline{(a+0,b+0)} = \overline{(a,b)}.$$

É óbvio que $\overline{(a,a)} = \overline{(0,0)}$, para todo $a\ \in\ \mathbb{N}$. Usaremos a notaçao $0 = \overline{(0,0)}$, a qual será justificada no item 2.

d) Todo $m = \overline{(a,b)}\ \in\ \mathbb{Z}$ admite *oposto* (simétrico aditivo). Ou seja para todo $m\ \in\ \mathbb{Z}$ existe um $m`\ \in\ \mathbb{Z}$ de modo que $m + m` = 0$. Usaremos a notação $-m = m`$.

Demonstração: Como

$$\overline{(a,b)} + \overline{(b,a)} = \overline{(a+b,b+a)} = 0$$

então,

$$m = \overline{(a,b)} \Rightarrow -m = \overline{(b,a)}.$$

$\square$

Destacamos a *lei do cancelamento* em $\mathbb{Z}$:

$$m + r = n + r \Rightarrow m = n.$$

Demonstração: De fato : $m = m + 0 = m + [r + (-r)] = (m + r) + (-r)=$

$=(n + r) + (-r) = n + [r + (-r)] = n + 0 = n.$ $\square$

3.2 subtração em $\mathbb{Z}$

Para cada par de elementos $m, n \in \mathbb{Z}$, chama-se diferença entre m e n e indica-se por $m - n$ o elento $m + (-n) \in \mathbb{Z}$. Ou seja:

$$m - n = m + (-n).$$

Assim, posto que $m - n \in \mathbb{Z}$, a relação dada por

$$(m, n) \Rightarrow m - n$$

é uma aplicação de $\mathbb{Z}\ X\ \mathbb{Z}_{-}$ ou seja, é uma operação sobre $\mathbb{Z}$. A essa operação denominamos *subtração* em $\mathbb{Z}$. Esta operação, contudo, não é associativa, comutativa e tampouco admite elento neutro.

3.3 Multiplicação em $\mathbb{Z}$

Definição 3.2. *Uma maneira pouco prática de multiplicar os números naturais* $3 = 5 - 2$ *e* $4 = 10 - 6$ *seria a seguinte:*

$3.4 = (5-2).(10-6) = (5.10 + 2.6) - (5.6 + 2.10) = 62 - 50 = 12.$

Sejam $m = \overline{(a,b)}$ *e* $n = \overline{(c,d)}$ *elementos genéricos de* $\mathbb{Z}$*. Chama-se* produto *de* m *por* n *(ou* $m\ .\ n$*) o elemento de* $\mathbb{Z}$ *definido por:*

$$m.n = \overline{(ac + bd, ad + bc)}$$

Se $m = \overline{(a,b)} =\ m = \overline{(a_1,b_1)}$ e $n = \overline{(c,d)} =\ n = \overline{(c_1,d_1)}$

Vamos mostrar que:

$(ac + bd, ad + bc)\ R\ (a_1c_1 + b_1d_1, a_1d_1 + b_1c_1)$

como

$(a,b)\ R\ (a_1,b_1)$ e $(c,d)\ R\ (c_1,d_1)$

teremos que

$$a + b_1 = a_1 + b \tag{3.5}$$

$$c + d_1 = d + c_1 \tag{3.6}$$

Multiplicando (3.5) por c e por d obtemos

$$ca + cb_1 = ca_1 + cb \tag{3.7}$$

$$da_1 + db = da + db_1 \tag{3.8}$$

Multiplicando (3.6) por a_1 e por b_1 temos que

$$a_1c + a_1d_1 = a_1d + a_1c_1 \tag{3.9}$$

$$b_1d + b_1c_1 = b_1c + b_1d_1 \tag{3.10}$$

Somando as igualdades (3.7), (3.8), (3.9) e (3.10)obtemos que

$ca+cb_1+da_1+db+a_1c+a_1d_1+b_1d+b_1c_1 = ca_1+cb+da+db_1+a_1d+a_1c_1+b-1c+b_1d_1$

Simplificando teremos

$(ac + bd) + (a_1d_1 + b_1c_1) = (ad + bc) + (a_1c_1 + b_1d_1)$

Dessa forma teremos

$(ac + bd, ad + bc)\ R\ (a_1c_1 + b_1d_1, a_1d_1 + b_1c_1)$.

Isto mostra que a operação de multiplicação independe dos representantes.

Isso significa que a relação

$$(m, n) \ \Rightarrow \ mn$$

é uma aplicação de $\mathbb{Z}\ X\ \mathbb{Z} \ \rightarrow \ \mathbb{Z}$ e, por isso, uma operação sobre $\mathbb{Z}$. Trata-se, obviamente, da *multiplicação* em $\mathbb{Z}$, da qual destacamos as propriedades a seguir:

$\mathbf{m}_1$) Associativa $m(nr) = (mn)r$, para qualquer $m, n, r \in \mathbb{Z}$.

Demonstração:

De fato, se m=$\overline{(a,b)}, n = \overline{(c,d)}$ e $r = \overline{(e,f)}$ são elementos genéricos de $\mathbb{Z}$, então:

$$\begin{aligned} m(nr) &= \overline{(a,b)(ce+df, cf+de)} \\ &= \overline{(a(ce+df)+b(cf+de), a(cf+de)+b(ce+df))} \\ &= \overline{(ace+adf)+(bcf+bde), (acf+ade)+(bce+bdf)} \end{aligned} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} (mn)r &= \overline{(ac+bd, ad+bc)(e,f)} \\ &= \overline{(ac+bd)e+(ad+bc)f, (ac+bd)f+(ad+bc)e} \\ &= \overline{(ace+adf)+(bcf+bde), (acf+ade)+(bce+bdf)} \end{aligned} \tag{3.12}$$

Assim, por (3.11) e (3.12), obtemos que

$$m(nr) = (mn)r.$$

□

$\mathbf{m}_2$) Comutativa

Demonstração: De fato, se m=$\overline{(a,b)}, n = \overline{(c,d)}$ e $r = \overline{(e,f)}$ são elementos genéricos de $\mathbb{Z}$, então:

$$mn = \overline{(ac+bd, ad+bc)} = \overline{(ca+db, cb+da)} = nm.$$

m_3) Existe um elemento neutro: é a classe $\overline{(1,0)}$, à qual indicamos apenas por 1 (a justificativa para essa simplificação será vista no item 2), pois:

$\forall\ \overline{(a,b)}\ \in\ \mathbb{Z}\ \Rightarrow\ \overline{(1,0)}\ .\ \overline{(a,b)} = \overline{(1.a+0.b, 1.b+0.a)} = \overline{(a,b)}.$ $\square$

m_4) Lei do anulamento do produto : Se $m, n\ \in\ \mathbb{Z}$ e $mn = 0$, então $m = 0$ ou $n = 0$.

Demonstração: Como já observamos anteriormente, todo elemento de $\mathbb{Z}$ pode ser representado univovamente sob uma das seguintes formas: $\overline{(a,0)}$ ou $\overline{(0,a)}$, para algum a $\in\ \mathbb{Z}$. Vamos supor, por exemplo , $m = \overline{(a,0)}\ \in\ n = \overline{(0,b)}$. Então, por hipótese, $mn = \overline{(0,ab)} = \overline{(0,0)}$. Daí $0+0 = ab+0$ ou $ab = 0$ (em $\mathbb{N}$), o que implica $a = 0$ ou $n = 0$. Os demais casos não apresentam nenhuma novidade. $\square$

m_5 *Distributiva*: Para quaisquer $m, n, r\ \in\ \mathbb{Z}$, $m(n+r) = mn+mr$.

Demonstração: De fato, se m=$\overline{(a,b)}$, $n = \overline{(c,d)}$ e $r = \overline{(e,f)}$ são elementos genéricos de $\mathbb{Z}$, então:

$$\begin{aligned} m(n+r) &= \overline{(a,b)(c+e,d+f)} \\ &= \overline{((ac+ae)+(bd+bf),(ad+af)+(bc+be))} \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} mn+mr &= \overline{(ac+bd,ad+bc)} + \overline{(ae+bf,af+be)} = \\ &= \overline{((ac+ae)+(bd+bf),(ad+af)+(bc+be))} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Assim, partindo de (3.13) e (3.14),obtemos que

$$m(n+r) = mn + nr.$$

$\square$

O conjunto $\mathbb{Z}$, munido das operações introduzidas através das definições (3.1) e (3.2), mais a relação de ordem a ser introduzida no item seguinte, é chamado *conjunto dos números inteiros.* E os elementos de $\overline{Z}$, nessas condições, são chamados *números inteiros* .

3.4 Relação de ordem em $\mathbb{Z}$

Se $m \in \mathbb{Z}$, então $m = \overline{(a,0)}$ ou $m = \overline{(0,a)}$, para algum $a \in \mathbb{N}$. Assim, se fizermos

$$\overline{(0,0)} = 0$$
$$\overline{(1,0)} = +1$$
$$\overline{(2,0)} = +2$$
$$\overline{(0,1)} = -1$$
$$\overline{(0,2)} = -2$$
$$\overline{(0,3)} = -3$$

torna-se válido escrever

$$\mathbb{Z} = ..., -2, -1, 0, +1, +2, ...$$

Façamos $0, +1, +2, ... = \mathbb{Z}_+$ e $..., -2, -1, 0 = \mathbb{Z}_-$. Os elementos de $\mathbb{Z}_+$ se dizem *inteiros positivos* e os de $\mathbb{Z}_-$ *inteiros negativos.* Todo elemento $m \in \mathbb{Z}_+^* = +1, +2, +3, ...$ é chamado de inteiro *estritamente positivo;* e todo $m \in \mathbb{Z}_-^* = ..., -3, -2, -1$ é um inteiro *estritamente negativo.*

Notemos que se $m \in \mathbb{Z}_+$ (ou $\mathbb{Z}_+^*$), então $-m \in \mathbb{Z}_-$ (ou $\mathbb{Z}_-^*$) e vice-versa. De fato, se por exemplo $m = \overline{(a,0)}$ (logo $m \in \mathbb{Z}_+$), então $-m = \overline{(0,a)}$ (que está em $\mathbb{Z}_-$.

Definição 3.3. *Sejam* $m, n \in \mathbb{Z}$. *Lê-se que* m *é* menor que ou igual *a* n *e anota-se* $m \leq n$ *se:*

$$n = m + r$$

para algum $r \in \mathbb{Z}_+$. *Neste caso também se pode escrever* $n \geq m$, *o que se lê:* "n maior que ou igual a m". *Se* $n = m + r$, *onde* $r \in \mathbb{Z}_+$,*então* m *se diz* menor que n. *Notação:* $m < n$. *É equivalente dizer que* n *é* maior que m *e anotar* $n > m$.

Em particular $0 \leq r$, $\forall\, r \in \mathbb{Z}_+$, pois $r = 0 + r$; e $s \leq 0$, $\forall\, s \in \mathbb{Z}_-$, já que $0 = s + (-s)$. Tambem: $0 < r$, para todo $r \in \mathbb{Z}_+$ e $r < 0$ para todo $r \in \mathbb{Z}_+$.

Vejamos agora as propriedades mais importantes da relação $\leq$ sobre $\mathbb{Z}$.

O$_1$) Reflexiva: $m \leq m$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, pois $m = m + 0$ e 0 e $\mathbb{Z}_+$.

O$_2$) Anti-simétrica: Vamos supor que $m \leq n$ e $n \leq m$. Então $m = n + r_1$, onde $r_1 = \overline{(a,0)}$, para algum $a \in \mathbb{Z}$, e $n = m + r_2$, onde $r_2 = \overline{(b,0)}$, sendo b um conviniente elemento dos $\mathbb{Z}$.

Se $m \leq n \qquad \Rightarrow \qquad n \leq m$

$$\begin{aligned} m \leq n \quad &\Rightarrow \quad n = m + r_1 \\ n \quad &= \quad m + \overline{(a,0)} \\ &= \quad n + \overline{(0,a)} = m \\ &= \quad n + r_0 \Rightarrow m \geq n. \end{aligned}$$

O$_3$**) Transitiva:** $m \leq n$ e $n \leq q \ \Rightarrow \ m \leq q$. Então $n = m+r_1$, onde $r_1 = \overline{(a,0)}$, para algum $a \ \in \mathbb{Z}$, $\ m = n + r_2$, onde $r_2 = \overline{(b,0)}$, para algum $b \ \in \mathbb{Z}$ e $q = m + r_3$, onde $r_3 = \overline{(c,0)}$, para algum $c \ \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Se $m \leq n \quad$ e $\quad n \leq q \quad \Rightarrow \quad m \leq q$.

Então, partindo disto, temos que:

$m \leq n \Rightarrow \ n = m + r_1 \qquad\qquad n \leq q \Rightarrow \ q = n + r_2$

$n = m + \overline{(a,0)} \qquad\qquad q = n + \overline{(b,0)}$

$n = m + \overline{(a,0)} \qquad\qquad q + \overline{(0,b)} = n$

$m + \overline{(a,0)} = q + \overline{(0,b)}$

$m + \overline{(a,0)} + \overline{(0,b)} = q \quad \Rightarrow \quad m + \overline{(ab+0)} = q \quad \Rightarrow \quad m + r_3 = q \quad \Rightarrow \quad m \leq q.$

O$_4$**)** $m \leq n \quad$ ou $\quad n \leq m. \qquad m = (1,0) \qquad n = (2,0)$

Vamos supor $m = \overline{(a,0)}$ e $n = \overline{(b,0)}$. Se $a \leq b$, então $b = a + c$ para algum $c \ \in \ \mathbb{N}$ e portanto:

$n = \overline{(b,0)} = \overline{(a+c,0)} = \overline{(a,0)} + \overline{(c,0)} = m + \overline{(c,0)} = m + r \quad r \ \in \ \mathbb{Z} \ n = m + r$ o que garante a relação $m \leq n$.

Se ao contrário $b \leq a$ então:

$a = b + d$ para algum $d \in \mathbb{N}$

$m = \overline{(a,0)} = \overline{(b+d,0)} = \overline{(b,0)} + \overline{(d,0)} = n + \overline{(d,0)} = n + t \qquad t \in \mathbb{Z}$

ou seja $m = n + t$ donde $n \leq m$.

Considere agora o caso $\quad m = \overline{(0,a)}$ e

$n = \overline{(0,b)} \qquad m = (0,1)$

$n = (0,2)$

Se $a \leq b$ temos:

$b = a + c_1 \qquad$ onde, $\quad c_1 \in \mathbb{N}$

$n = \overline{(0,b)} = \overline{(0,a+c_1)} = \overline{(0,a)} + \overline{(0,c_1)} = m + \overline{(0,c_1)} = m + r_1 \qquad$ onde, $r_1 \in \mathbb{Z}$ ou seja, $n = m + r_1$ dessa forma $m \leq n$.

Se $b \leq a$ temos que,

$a = b + d_1$ assim

$m = \overline{(0,a)} = \overline{(0,b+d_1)} = \overline{(0,b)} + \overline{(0,d_1)} = n + \overline{(c,0)} = n + t_1 \qquad$ onde, $t_1 \in \mathbb{Z}$

Dessa forma $m = n + t_1$ o que garante a relação $n \leq m$.

Finalmente $m = \overline{(a,0)}$ e $n = \overline{(0,b)}$.

Então,

$m = \overline{(0,a)} = \overline{(a+b,b)} = \overline{(0,b)} + \overline{(a+b,0)} = n + \overline{(a+b,0)} = n + r$ com $\overline{(a+b,0)} \in \mathbb{Z}$.

Logo $n \leq m$. $\square$

Vamos mostrar

$\vdash \overline{(a,0)}\ R\ \overline{(a+b,b)}.$

$$\begin{aligned} a+b &= 0+a+b \\ a+b &= a+b \end{aligned}$$

3.5 Imersão de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$

Mostraremos agora, dentro da construção que fizemos, em que termos se pode considerar $\mathbb{N}$ como parte de $\mathbb{Z}$.

Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(a) = \overline{(a,0)}$, para todo $a \in \mathbb{N}$. Ou seja:

$$\begin{aligned} f(0) = \overline{(0,0)} = 0 \\ f(1) = \overline{(1,0)} = +1 \\ f(0) = \overline{(2,0)} = +2. \end{aligned}$$

Então:

- $Im(f) = \{f(a) | a \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}_+ = \{0, +1, +2, +3 + ...\}$.
- $f(a) = f(b) \Rightarrow \overline{(a,0)} = \overline{(b,0)} \Rightarrow a = b$ o que mostra que f é injetora.
- $f(a+b) = \overline{(a+b,0)} = \overline{(a,0)} + \overline{(b,0)} = f(a) + f(b),\ \forall a,\ b \in \mathbb{N}$
- $f(ab) = \overline{(ab,0)} = \overline{(a,0)}.\overline{(b,0)} = f(a).f(b),\ \forall a,\ b \in \mathbb{N}$.
- Se $a \leq b$, então $b = a + c$, para algum $c \in \mathbb{N}$ e portanto $f(b) = \overline{(b,0)} = \overline{(a+c,0)} = \overline{(a,0)} + \overline{(c,0)} = f(a) + \overline{(c,0)}$ o que significa que $f(a) \leq f(b)$.

Capítulo 4

Números racionais

Neste capítulo faremos a construção dos números racionais apartir de classes de equivalência de números inteiros, bem como a imersão do conjunto dos números inteiros nos racionais.

Seja $\mathbb{Z}^*$=$\{m \in \ / \ m \neq 0\}$ e consideremos sobre $\mathbb{Z}$x$\mathbb{Z}^*$=$\{(m, n) \ / \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^*\}$ a relação R definida por:

$$(m, n)R(p, q) \ \Leftrightarrow \ mq = np.$$

Para R valem as três propriedades que carecterizam uma relação de equivalência, ou seja:

i)$(m, n)R(m, n)$, para todo $(m, n) \in \mathbb{Z}X\mathbb{Z}^*$ (reflexiva).

Note que:

$m.n =^* n.m \implies (m, n)R(m, n)$

*comutatividade dos inteiros.

ii)$(m, n)R(p, q) \ \Rightarrow \ (p, q)R(m, n)$ (simétrica).

$mq = np \qquad \forall m, n, p, q \in \mathbb{Z}.$

Como os inteiros são comutativo temos que:

$pn = qm \quad \Rightarrow \quad (p, q)R(m, n).$

iii)$(m, n)R(p, q)$ e $(p, q)R(r, s) \implies (m, n)R(r, s)$ (transitiva).

$mq = np$ e $ps = qr.$

Multplicando a primeira igualdade por (s) e a segunda igualdade por (n), disso temos que:

$mqs = nps \; psn = qrn$

Dessa forma

$mqs = nps = qrn$ com $q \neq 0$

Pela lei do cancelamento

$ms = nr \implies (m, n)R(r, s).$

Logo a relação R determina sobre $\mathbb{Z} \, \mathrm{X} \, \mathbb{Z}^*$ uma partição em classes de equivalência. Para cada par $(m, n) \in \mathbb{Z} \, \mathrm{X} \, \mathbb{Z}^*$, a classe de equivalência à qual esse elemento pertence será indicada por $\dfrac{m}{n}$. Ou seja:

$\dfrac{m}{n} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \, \mathrm{X} \, \mathbb{Z}^* \,|\, (x, y) \, R \, (m, n)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \, \mathrm{X} \, \mathbb{Z}^* \,|\, nx = my\}.$

Por exemplo :

$\dfrac{1}{2} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \;\mathrm{X}\; \mathbb{Z}^* \,|\, 2x = y\} = \{(1, 2); (-1, -2); (2, 4); (-2, -4); ...\}.$

Devido à propriedade reflexiva, é claro que $(m, n) \in \dfrac{m}{n}$, para todo $(m, n) \in \mathbb{Z} \, \mathrm{X} \, \mathbb{Z}^*$. Além disso, como:

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow (m, n) \, R \, (r, s)$$

(resultado da teoria das relações de equivalência), então,

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s} \Leftrightarrow ms = nr.$$

Por exemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{2}{4} = \frac{-2}{-4} = ...$$

O conjunto quociente de $\mathbb{Z} \,\mathrm{X}\, \mathbb{Z}^*$ por R, ou seja, o conjunto de todas as classes de equivalência deternminada por R sobre $\mathbb{Z} \,\mathrm{X}\, \mathbb{Z}^*$, será designado por $\mathbb{Q}$. Logo:

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid (m, n) \in \mathbb{Z} \, X \, \mathbb{Z}^* \right\}.$

Assim, cada $a \in \mathbb{Q}$ admite infinitas representações $\frac{m}{n}(m \in \mathbb{Z}; n \in \mathbb{Z}^*)$. Em cada uma delas m é o numerador e n é o denominador. Dois elementos $a, b \in \mathbb{Q}$ sempre admitem representações de denominadores iguais. De fato, se $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ então:

$$\frac{m}{n} = \frac{ms}{ns} \text{ e } \frac{r}{s} = \frac{nr}{ns}$$

pois $m(ns) = n(ms)$ e $r(ns) = s(nr)$ os elementos de $\mathbb{Q}$ são chamados números racionais desde que se definam a adição, multiplição e relação de ordem, conforme o faremos nos itens seguintes.

4.1 Adição em $\mathbb{Q}$

Definição 4.1. *Sejam $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{r}{s}$ elementos de $\mathbb{Q}$. Chama-se soma de a com b e indica-se por $a + b$ o elemento de $\mathbb{Q}$ definidos das seguinte maneira:*

$$a+b=\frac{ms}{ns}+\frac{nr}{ns}=\frac{ms+nr}{ns}.$$

Mostraremos que a soma $a+b$ independe dos pares ordenados escolhidos para definir a e b. De fato, se $a=\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}$ e $b=\frac{r}{s}=\frac{r'}{s'}$, então:

$$mn'=nm' \,\text{e}\, rs'=sr'$$

Multiplicamos a primeira dessas igualdades por ss' e a segunda por nn' e somando membro a membro as relações obtidas.

$$msn's'+rns'n'=nsm's'+nsr'n'$$

ou seja:

$$(ms+rn)n's'=ns(m's'+r'n')$$

o que garante

$$\frac{ms+rn}{ns}=\frac{m's'+r'n'}{n's'}$$

Portanto a correspondência

$(a,b) \quad \rightarrow \quad a+b$ conforme a definicão 4.1, é uma aplicação e, portanto,trata-se de uma operação sobre $\mathbb{Q}$, à qual chamamos *adição em* $\mathbb{Q}$.

Para a adição em $\mathbb{Q}$ valem as seguintes propriedade:

a$_1$) $(a+b)+c=a+(b+c)$, $\forall a,b,c\in\mathbb{Q}$ (associativa).

De fato, se $a=\frac{m}{n}$ $b=\frac{r}{s}$ $c=\frac{p}{q}$ com $m,n,r,s,p,q,\in\mathbb{Z}$.

$(a+b)+c=\left(\frac{m}{n}+\frac{r}{s}\right)+\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{m+r}{n+s}\right)+\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{(m+r)+p}{(n+s)+q}$

como os $\mathbb{Z}$ é associativo, então temos que:

$(a+b)+c = \dfrac{m+(r+p)}{n+(s+q)} = \dfrac{m}{n} + \left(\dfrac{r+p}{s+q}\right) = a+(b+c).$

a$_2$**)** $a+b = b+a, \ \forall a, b, \in \mathbb{Q}$(comutativa).

De fato, se $a = a = \dfrac{m}{n} \ \ b = \dfrac{r}{s} \ \ b = \dfrac{r}{s}$ com $m, n, r, s, \ \in \mathbb{Z}$.

$a+b = \dfrac{m}{n} + \dfrac{r}{s} = \dfrac{m+r}{n+s}$

como os $\mathbb{Z}$ é comutativo, então temos que:

$a+b = \dfrac{r+m}{s+n} = \dfrac{m}{n} = b+a.$

a$_3$) Existe elemento: é a classe de equivalência $\dfrac{0}{1} = \dfrac{0}{2} = ...$, que indicamos por 0 apenas. De fato

$$\frac{m}{n} + \frac{0}{1} = \frac{m.1+0.n}{n.1} = \frac{m.1}{n.1} = \frac{m}{n}$$

para todo $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

a$_4$**)** Todo $a \in \mathbb{Q}$ admite simétrico aditivo (oposto) em $\mathbb{Q}$: se $a = \dfrac{m}{n}$, então $-a = \dfrac{-m}{n}$, pois:

$$\frac{m}{n} + \frac{-m}{n} = \frac{mn+(-m)n}{nn} = \frac{0}{nn} = 0.$$

Usaremos a notação $\mathbb{Q}^* = \{a \in \mathbb{Q} | \, a \neq 0\}$.

Definição 4.2. *Se a, $b \in \mathbb{Q}$, denomina-se diferença entre a e b e indica-se por $a-b$, o seguinte elemento de $\mathbb{Q}$:*

$$a-b = a+(-b).$$

Como $(-b) \in \mathbb{Q}$, para todo $b \in \mathbb{Q}$, então $(a,b) \ \rightarrow \ a-b$ é uma operação sobre $\mathbb{Q}$, à qual chamamos subtração em $\mathbb{Q}$.

4.2 Multiplicação em $\mathbb{Q}$

Definição 4.3. *Chamamos produto de* $a = \dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ *por* $b = \dfrac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ *o elemento*

$$ab = a\,.\,b = \frac{mr}{ns} \in \mathbb{Q}$$

o qual, pode-se mostrar (tal como foi feito para a soma em 3.1*), não depende das particulares representações tomadas para* a *e* b*.*

A multiplicação em $\mathbb{Q}$ *é a operação definida por*

$$(a, b) \;\to\; ab$$

para quaisquer $a,\ b \in \mathbb{Q}$*.*

Valem as seguintes propriedades:

$\mathbf{m}_1$) $a(bc) = (ab)c,\ \forall a,\ b,\ c \in \mathbb{Q}$ (associativa).

De fato, se $a = \dfrac{m}{n}\ \ b = \dfrac{r}{s}\ \ c = \dfrac{p}{q}$ com $m, n, r, s, p, q, \in \mathbb{Z}$.

$a(bc) = \dfrac{m}{n}\left(\dfrac{r}{s}\dfrac{p}{q}\right) = \dfrac{m}{n}\left(\dfrac{rp}{sq}\right) = \dfrac{m(rp)}{n(sq)}$

como os $\mathbb{Z}$ é associativo, então temos que:

$a(bc) = \dfrac{(mr)p}{(ns)q} = \left(\dfrac{mr}{ns}\right)\dfrac{p}{q} = (ab)c.$

$\mathbf{m}_2$) $ab = ba,\ \forall a,\ b, \in \mathbb{Q}$ (comutativa).

De fato, se $a = \dfrac{m}{n}\ \ b = \dfrac{r}{s}\ \ b = \dfrac{r}{s}$ com $m, n, r, s, \in \mathbb{Z}$.

$ab = \dfrac{m}{n}\dfrac{r}{s} = \dfrac{mr}{ns}$

como os $\mathbb{Z}$ é comutativo, então temos que:

$ab = \dfrac{rm}{sn} = \dfrac{m}{n} = ba.$

$\mathbf{m}_3$) Existe elemento neutro: é a classe que indicamos simplismente por 1. De fato:

$$\frac{m}{n}.\frac{1}{1} = \frac{m.1}{n.1} = \frac{m}{n}$$

para todo $\dfrac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.

$\mathbf{m}_4$) Todo $a \in \mathbb{Q},\ a \neq 0$, admite simétrico multiplicativo (inverso): se

$$a = \frac{m}{n}$$

então $m \neq 0$ e daí $\dfrac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ e portanto

$$\frac{m}{n}.\frac{n}{m} = \frac{mn}{nm} = 1$$

Indicando por a^{-1}, como é usual, o inverso de a, então:

$$a = \frac{m}{n},\ a \neq 0 \ \rightarrow\ a^{-1} = \frac{n}{m}.$$

4.3 Relação de ordem em $\mathbb{Q}$

Seja $a = \dfrac{m}{n}, \in \mathbb{Q}$.Como $a = \dfrac{m}{n} = \dfrac{-m}{-n}$ pois $m(-n) = n(-m$, então sempre podemos considerar, para todo $a \in \mathbb{Q}$, uma representação em que o denominador seja maior que zero (em $\mathbb{Z}$).

Por exemplo:

$$\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3} \text{ e } \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}.$$

Definição 4.4. *Sejam a e b elementos de $\mathbb{Q}$ e tomemos, para cada um deles, uma representacão $a = \dfrac{m}{n}$ e $b = \dfrac{r}{s}$ em que o denominador seja estritamente positivo.*

Nessas condicões, diz-se que a é maior ou igual a b, e escreve-se $a \leq b$, se $ms \leq nr$ (obviamente esta última relação é considerada em $\mathbb{Z}$. Equivalentemente pode-se dizer b é maior que ou igual a a anotar $b \geq a$. Com as mesmas hipóteses, se $ms < nr$, diz-se que a é menor que b (notação: $a < b$) ou que b é maior que a (a notação: $b > a$).

Por exemplo:

$\frac{-2}{3} < \frac{1}{4}$ porque $-8 < 3$

$\frac{5}{6} > \frac{4}{5}$ porque $25 < 24$

Pode se mostrar que a definição 5 não depende dos pares ordenados eventualmente escolhidos para expressar a e .

Um elemento $a = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ onde $n > 0$, se diz positivos se $a \geq 0$. Lembrando que $0 = \frac{0}{1}$, então:

$$a \geq 0 \iff \frac{m}{n} \geq \frac{0}{1} \iff m \geq 0$$

Quando $a > 0$, o que equivale (supondo como sempre $n > 0$) a $m > 0$, a se diz estritamente positivo. Se $a \leq 0\,(\iff m \leq 0$ se $n > 0)$, diz-se que a negativo e se $a < 0\,(\iff m < 0$ se $n > 0)$, então o elemento a é chamado estritamente negativo.

Exemplo 4.1. *Sejam a, b, $\in \mathbb{Q}$. Mostremos que se $a > b$, então existe $h \in \mathbb{Q}$, $h > 0$, de maneira que $a = b + h$.*

De fato, suponhamos $a = \frac{r}{s}$ e $b = \frac{t}{s}$,onde $s > 0$. Como

$$\frac{r}{s} > \frac{t}{s}$$

então $r > t$(em $\mathbb{Z}$) e, portanto, existe $n \in \mathbb{Z}$, $n > 0$, de modo que $r = t + n$.

Daí

$$\frac{r}{s} = \frac{t+n}{s} = \frac{t}{s} + \frac{n}{s}$$

onde

$$h = \frac{n}{s} > 0.$$

pois $n > 0$.

Mostraremos a seguir que $\leq$, conforme definição 4.4, é uma relação de ordem total sobre $\mathbb{Q}$, compatível com adição e a multiplicação definidas em 3.1 e 3.2. Para tanto admitiremos que todos os denominadores que intervirem nos enuciados das propriedades sejam inteiros estritamente positivos.

O$_1$) $\dfrac{m}{n} \leq \dfrac{m}{n}$ (reflexiva).

Evidente, pois $mn \leq nm$.

O$_2$) $\dfrac{m}{n} \leq \dfrac{r}{s}$ e $\dfrac{r}{s} \leq \dfrac{m}{n} \;\Rightarrow\; \dfrac{m}{n} = \dfrac{r}{s}$ (anti-simétrica).

como $ms \leq nr$ e $rn \leq sm$ (em $\mathbb{Z}$, então $ms = nr$. Logo:

$$\frac{m}{n} = \frac{r}{s}.$$

Demonstração: Ver seção 3.4 propriedade O_2. □

O$_3$) $\dfrac{m}{n} \leq \dfrac{r}{s}$ e $\dfrac{r}{s} \leq \dfrac{p}{q} \;\Rightarrow\; \dfrac{m}{n} \leq \dfrac{p}{q}$ (transitiva).

De fato, como $ms \leq nr$ e $rq \leq sp$, multiplicando a primeira dessas relações por $q > 0$ e segunda por $n > 0$:

$$msq \leq nrq \;\text{ e }\; rqn \leq spn$$

Daí, usando a transitividade de $\leq$ em $\mathbb{Z}$,

$$msq \leq spn$$

E, uma vez que $s > 0$,pode-se comcluir que

$$mq \leq pn$$

Logo:

$$\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}.$$

O$_4$) $\frac{m}{n} \leq \frac{r}{s}$ ou $\frac{r}{s} \leq \frac{m}{n}$.

Evidente,pois em $\mathbb{Z}$: $ms \leq nr$ ou $nr \leq ms$.

Demonstração: Ver seção 3.4 propriedade O_4. $\square$

4.4 Imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ como particulares números racionais

Consideremos o número $2 \in \mathbb{Z}$ e o elemento

$$\frac{8}{4} = \{(2,1); (-2,-1); (4,2); (-4,-2); ...\}.$$

por exemplo. É de se esperar, tendo em vista o objetivo da construção de $\mathbb{Q}$, que taís elementos possam ser identificados.

Seja $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ definida por:

$$f(m) = \frac{m}{1}, \forall m \in \mathbb{Z}$$

para quaisquer essa aplicação vale o seguinte:

- $f(m) = f(n) \Rightarrow \frac{m}{1} = \frac{n}{1} \Rightarrow m = n$ e, portanto, f é injetora.
- Para quaisquer $m, n, \in \mathbb{Z}$:

$$f(m + n) = \frac{m + n}{1} = \frac{m}{1} + \frac{n}{1} = f(m) + f(n).$$

- Para quaisquer $m, n, \in \mathbb{Z}$:

$$f(mn) = \frac{mn}{1} = \frac{m}{1}.\frac{n}{1} = f(m)f(n).$$

- Se $m \leq n$, então:

$$f(m) = \frac{m}{1} \leq \frac{n}{1} = f(n).$$

Essa propriedades de $f$significam que a imagem de $\mathbb{Z}$ por f, ou seja

$$Im(f) = \left\{\frac{m}{1} | m \in \mathbb{Z}\right\}$$

pode ser vista como uma cópia de $\mathbb{Z}$. Devido a esse fato cada inteiro m se confunde com sua imagem $\frac{m}{1}$(ou seja, $m = \frac{m}{1}$) e portanto $\mathbb{Z}$ passa a ser identificado com $Im(f)$. Como $Im(f) \subset \mathbb{Q}$, então $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Levando em conta que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, pode-se concluir que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. A função f é chamada função imersão de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$.

Considerações Finais

Ao final do presente trabalho, pode-se concluir que a necessidade de contar, enumerar e quantificar as coisas surgiu desde o inicio das primeiras civilizações. Os números não foram concebidos de uma forma abstrata, como a ideia formal que temos hoje, e sim algo concreto e visível.

Vimos o exemplo de muitos povos antigos que contavam suas armas, seus suplementos, seus rebanhos e até mesmo seus soldados que fora para alguma batalha através de comparações feita com pedras, talho feito em ossos de animais, frutos e outros tantos artifícios. Outros povos usaram partes do corpo para enumerar ou representar alguma quantidade , cada parte do corpo representava um número, e através da contagem dos dedos das mãos foi que surgiu a base dez, usada por nós até os dias de hoje.

Ao fazer a construção formal dos números, verificou-se que apesar da natureza dos números serem distintas eles estão interligados, um conjunto é formado apartir do outro, através de relacões de equivalência e classes de equivalências, pode ser dito que um está contido no outro de maneira formal usando a função imersão que em álgebra vemos como homomorfismo.

Bibliografia

[1] Boyer,Carl Benjamin. **História da Matemática.** 2 ed. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher LTDA, 1996.

[2] Domingues, Hygino Hugueros. **Fundamentos da Aritmética.** 2 ed. São Paulo: Atual, 1991.

[3] Domingues, Hygino Hugueros, Iezzi, Gelson. **Álgebra Moderna.** 2 ed. São Paulo: Atual, 1982.

[4] Ferreira, Jamil. **A construção dos Números, coleção textos universitários**. 2 ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de matemática,2001.

[5] Ifrah, Georges. **Os Números: História de uma Grande Invensão.** 10 ed. Tradução Stella Maria de Freitas Senra. São Paulo: Globo, 2001.