UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE NOVA ANDRADINA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

OTÁVIO IGNACIO DE CASTRO

EQUAÇÃO DO 2º GRAU: AS CONTRIBUIÇÕES NA EVOLUÇÃO DO CONHECIMENTO ALGÉBRICO E O ENFOQUE DADO A ELA EM LIVROS DIDÁTICOS

Orientador Prof. Dr. José Felice

NOVA ANDRADINA-MS
2012

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL

UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE NOVA ANDRADINA

CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

OTÁVIO IGNACIO DE CASTRO

EQUAÇÃO DO 2º GRAU: AS CONTRIBUIÇÕES NA EVOLUÇÃO DO CONHECIMENTO ALGÉBRICO E O ENFOQUE DADO A ELA EM LIVROS DIDÁTICOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Unidade Universitária de Nova Andradina-UEMS, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador Prof. Dr. José Felice

NOVA ANDRADINA-MS

2012

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Felice (orientador) UEMS/NA

Profa. Me Luciana Kemie Nakayama UEMS/NA

Prof. Esp. Marcel Messias Gonçalves UEMS/NA

AGRADECIMENTOS

Deus em primeiro lugar, pois sem sua benção não conseguiria chegar até onde cheguei. A minha família que sempre esteve ao meu lado mesmo nos momentos difíceis dessa minha trajetória e aos meus amigos que sempre estiveram me apoiando nessa jornada.

DEDICATÓRIA

Este trabalho dedico a todos que estiveram presentes em minha vida nesse período, mas especialmente a meu querido e falecido pai José Mário Gomes de Castro que sempre me aconselhou a estudar cada vez mais para que eu tivesse um futuro melhor. Muito obrigado pai.

RESUMO

Este trabalho tem a intenção de estudar como foi à evolução da equação do segundo grau e como ela é abordada em alguns livros didáticos utilizados nas escolas de Nova Andradina-MS. Nos dias atuais muitos alunos conseguem resolver as equações do segundo grau com muita facilidade, mas eles têm pouco conhecimento de quanto tempo os estudiosos levaram para construir um modelo que pudesse resolver essas equações com facilidade e que houve muitos estudos e muitas contribuições para a existência da fórmula resolutiva na qual auxilia em qualquer tipo de equação do segundo grau. Assim organizamos esse estudo para mostrar como a equação foi se desenvolvendo em diversas partes do mundo, até a descoberta da fórmula resolutiva e depois mostrar como as equações do segundo grau são abordadas nos livros didáticos e verificar se os autores dos livros utilizam a história como ferramenta de explicação. O fato é que a história da matemática proporciona observar o avanço nos conceitos da Álgebra e a busca dos matemáticos em solucionar problema que envolve a Equação do Segundo Grau como ferramenta para resolvê-los. No final desse estudo entendemos que os livros didáticos devem dispor de fatos históricos para mostrar o grande desafio que era solucionar um problema de equação quadrática sem dispor de modelos.

Palavras-Chave: Problemas de álgebra. Equação do segundo grau. História da matemática.

SUMÁRIO

Introdução

Iniciei meu percurso como estudante aos 5 anos de idade, minha primeira escola foi uma escola da cidade de Nova Andradina chamada Mundo da Criança, foi nessa escola que dei meus primeiros passos na minha vida de estudante, foi um ano maravilhoso onde consegui aprender muito com minha professora.

Logo depois que terminei o pré na escola Mundo da Criança fui então estudar na escola Irman Ribeiro de Nova Andradina, tive uma ótima professora, e foi a partir daí que comecei a me dedicar aos estudos e começa a despontar um grande interesse e apreço pela disciplina de matemática.

Neste trabalho não podia deixar de destacar uma pessoa que me ajudou muito na minha vida escolar, que era o patrão da minha avó, ele tomava todos os dias à tabuada e me ensinava riscando o chão com galhos de árvores são fatos marcantes que jamais esquecerei sua contribuição para minha vida.

O primário foi ótimo, já mostrava muita facilidade com a matemática coisa que outros alunos não conseguiam tão facilmente, depois veio a 5ª série, no começo estranhei por que agora eu teria muito mais professores e cada um com sua disciplina, mas com o tempo fui adaptando e não enfrentei dificuldades.

Uma das professoras de matemática que me marcaram muito foi à professora Vera do Irman Ribeiro, sempre tive facilidade com a disciplina, mas ela que me ensinou a gostar de matemática, ensinava de maneira fantástica e cada vez mais foi me apegando à matemática.

Na 7ª série fui estudar na Escola Estadual Nair Palácio de Souza na qual eu ficaria até o 2° ano do ensino médio, tive grande felicidade de estudar com a professora Vera com quem também possuía uma ótima relação e sempre continuei com notas boas principalmente em matemática, nunca tive dificuldades, sempre muito atento ao que o professor ensinava e assim terminei o ensino fundamental.

No ensino médio tudo continuou normal sempre continuei estudando muito por que sabia que através do estudo eu conseguiria alcançar meus objetivos que era fazer uma faculdade, tive ótimos professores também no ensino médio, destacando a professora Luciana que possuía uma didática invejável e muito domínio de sala.

No ultimo ano do ensino médio resolvi mudar de escola por até questão de deslocamento, pois a Escola Estadual Austrílio Capilé Castro é mais próxima de minha residência, e no final do ano tinha muitas dúvidas sobre a faculdade que eu iria fazer, foi então que algumas pessoas ligadas a UEMS estavam divulgando o vestibular foi então que vi uma grande chance de fazer um curso superior, pois até então não teria condições de pagar uma particular. Fiz o vestibular para o curso de Licenciatura em Matemática da UEMS e consegui passar na 8° posição e assim começaria mais um novo estágio da minha vida.

O primeiro ano foi realmente sensacional, conheci professores fantásticos e comecei a ter uma visão diferente sobre o que é matemática, meu professor de geometria passava muitos exercícios e gostava que nós resolvêssemos os exercícios na lousa e até registrava através de uma câmera fotográfica ou filmadora e toda turma gostava muito de participar de sua aula.

No restante dos anos da faculdade encontrei muita dificuldade em algumas disciplinas, mas nada que me fizesse desistir do meu objetivo, e com a ajuda de meus amigos de sala na qual fazíamos grupos de estudos para estudar para as provas, consegui ser aprovado em todas as disciplinas e agora estou aqui escrevendo meu TCC para assim terminar esse estágio da minha vida e assim dar inicio a outro.

A intenção de estudo para a realização do Trabalho de Conclusão de Curso se deu pelo desafio em conhecer a evolução do conhecimento humano sobre a álgebra. Considero que o desenvolvimento sobre as equações contribuiu para a evolução dos saberes sobre a álgebra, portanto, o objeto a ser estudado no trabalho será sobre os fatos históricos que envolvem equações do 2° grau.

Dessa forma, a pretensão é de elaborar um trabalho bibliográfico com o objetivo de relatar fatos históricos que podem elucidar o que fazemos atualmente ao abordar equações do 2° grau no planejamento e desenvolvimentos de aulas direcionadas para o ensino básico.

O interesse desse trabalho é sanar minhas dificuldades em entender a evolução dos conhecimentos matemáticos relacionados à álgebra, no entanto, servirá também para aqueles que se interessarem pelo tema.

O estudo que faço procura de forma resumida contar às tentativas que a humanidade de dispôs a fazer no sentido de dar clareza aos conhecimentos matemáticos que utilizamos na atualidade. Metodologicamente, pode-se considerar o trabalho como sendo bibliográfico ou de revisão que segundo Fiorentini et al (2006, p. 71) :

> [...] é a modalidade de estudo que se propõe a realizar análises históricas e /ou revisão de estudos ou processos tendo como material de análise produções culturais garimpados a partir de arquivos ou acervos.

A intenção é extrair desses conjuntos de estudos informações adicionais que permitam compreender a disposição da álgebra como conteúdo do ensino básico dispostos nos livros didáticos.

De acordo com as premissas anteriores este trabalho visa uma reflexão sobre a evolução histórica da álgebra e consequentemente a resolução de equações do 2º Grau.

No Capítulo 1, procuro traçar um panorama histórico do desenvolvimento do conhecimento algébrico e o surgimento da equação do 2º grau e os métodos em que os povos da antiguidade utilizavam para resolver equações do segundo grau como o método da falsa posição, método de completar quadrados entre outros que estão no trabalho.

No Capítulo 2, faço uma análise de três livros didáticos muito utilizados no ensino básico e que são utilizados em Nova Andradina para verificar como os autores têm abordados para os estudantes, a parte histórica da álgebra que seja útil para os alunos compreenderem a equação do 2º grau.

Apresento as considerações finais descrevendo o que aprendi e os fatos importantes que envolvem o tema.

Capitulo 1

Um panorama da evolução histórica da equação do 2°grau.

A intenção em estudar o tema esta relacionada com a utilização desse conhecimento em todos os níveis escolares. As equações do segundo grau nos dias de hoje são consideradas equações simples de se resolver, crianças de 13 anos conseguem resolve-las sem problema, mas quando começou a se desenvolver as primeiras equações não era uma tarefa fácil encontrar a solução da equação do segundo grau.

Na época em que começou a surgir às equações do segundo grau somente os mais brilhantes matemáticos conseguiam resolver esse tipo de desafio, porém para que hoje nós conseguíssemos resolver essas equações com grande facilidade foi necessária à colaboração de vários matemáticos da Antiguidade. Muitos matemáticos nos ajudaram em vários fatores como a descoberta da fórmula resolutiva para qualquer tipo de equação e pelo desenvolvimento da escrita algébrica que foi muito importante para facilitar na hora dos cálculos.

Assim apresentaremos em nosso trabalho toda evolução histórica da resolução da equação do segundo grau, mostrando quais os métodos de resolução utilizados pelos povos da antiguidade e os métodos que propiciou na elaboração da formula que auxilia de forma sistemática essa equação.

1.1-Egito Antigo

Na historia da equação do segundo grau no antigo Egito não é muito conhecido registros de métodos para resolução de problemas, porém existe um papiro matemático egípcio ilustre denominado papiro de Rhind onde traz soluções de equações do segundo grau e primeiro grau, e sua álgebra é bem simples, porém prática. Um método que usavam para solução de equações lineares é a técnica falsa posição. Na qual a solução é encontrada por números tomados aleatoriamente.

Um exemplo no papiro que envolve equações do segundo grau é este logo abaixo:

“a área de um quadrado é 100 e tal quadrado é igual à soma de dois quadrados menores, em que o lado de um é igual a $\frac{3}{4}$ do outro”.

Resolução na escrita algébrica atualmente.

Sejam x e y lados de dois quadrados que satisfazem

$$x^2 + y^2 = 100\ (I)$$

$$4x = 3y\ (II)$$

A equação (II) é satisfeita por $x = 3$ e $y = 4$ então $x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, ou seja, para conseguirmos obter o resultado igual a 100 temos que multiplicar por 4 os dois membros da equação (I) então:

$$4.\ 3^2 + 4^2 \ = 4.25$$

$$36 + 64 = 100$$

Então temos que o valor é $x = 6\ e\ y = 8$, pois temos na equação (I):

$$x^2 + y^2 = 100$$

E o quadrado tirando a raiz de 36 temos resultado igual a 6 e tirando a raiz de 64 temos resultado igual a 8.

Em relação ao nome estranho que é dado a esta regra na qual se procura somente a verdade Humphrey Baker (1568) apud Morgado escreveu:

"A regra de falsidade é assim chamada, não porque ela ensine qualquer fraude ou falsidade, mas porque, por meio de números tomados à sorte, ensina a encontrar o número verdadeiro que é pedido."

No entanto com este artifício da falsa posição não foi possível se estabelecer um conhecimento a respeito das soluções da equação do segundo grau. Não conseguiu formalizar um processo que se direcionasse a descoberta das raízes da equação do segundo grau.

1.2-Babilônia

Por volta de 2000 a.C, o ensino da matemática, disciplina considerada muito difícil começava desde cedo nas escolas, durante dez anos, os filhos de humildes agricultores ou comerciantes estudavam com os filhos dos ricos e poderosos, para se tornarem escribas, por razão de ser esta uma única chance de ganhar uma ascensão social.

Qual era a função de um escriba?

O escriba podia se dedicar-se ao ensino da matemática, propondo para seus alunos problemas matemáticos como esse logo abaixo:

Qual a medida do lado de um terreno no quadrado de área 50?

Hoje, facilmente conseguimos expressar este problema através de uma equação quadrática:

$$x^2 = 50$$

Os escribas não sabiam como representas equações em forma algébrica como nos dias de hoje, mas sabiam que para calcular a área do terreno bastava extrair a raiz quadrada de 50.

Os escribas da Babilônia nunca poderiam imaginar que um dia os matemáticos inventariam os números negativos. Mas é espantosa a precisão dos cálculos efetuados por aqueles escribas para extrair a raiz quadrada positiva de um numero:

Em uma primeira aproximação, selecionavam o numero inteiro cujo quadrado mais se aproxima de 50.

$$\overline{50} = a \leftrightarrow 50 = a^2$$

$$5^2 = 25$$

$$6^2 = 36$$

$$\mathbf{7^2 = 49}$$

$$8^2 = 64$$

Primeira aproximação ***a = 7***

- Dividiam 50 pela primeira aproximação a = 7, até que o quociente ficasse com o dobro de algarismo do divisor.

50 |7
10 7,1
3

- Calculavam a média aritmética entre a primeira aproximação ***a = 7*** e *7,1*

$$\frac{7 + 7{,}1}{2} = 7{,}05$$

Segunda aproximação: ***a = 7,05***

- Dividiam 50 por *a = 7,05*, até que o quociente ficasse com o dobro de algarismo do divisor.

50 |7,05

5000 |705
06500 7,09219

1550

1400

6950

- Calculavam a média aritmética entre a segunda aproximação ***a = 7,05*** e 7,09219.

$$\frac{7{,}05 + 7{,}09219}{2} = 7{,}07105$$

Este é o resultado que os babilônios obtinham há 4000 anos:

$$\overline{50} = 7{,}07105$$

E este é o resultado que um estudante consegue hoje com a máquina de calcular:

$$\overline{50} = 7{,}07105$$

Os registros sobre o estudo da matemática dos babilônios era armazenada em tabletes de argila e o sistema numérico deles era na base 60, claro que não existia somente sobre a equação do segundo grau, mas também de outras áreas da matemática veja um exemplo sobre como era formulada os problemas e a resolução de uma equação do segundo grau pelos babilônios:

Encontre o lado de um quadrado cuja área menos o lado é igual a 870?

De acordo com os dias de hoje podemos escrever essa equação da seguinte forma:

$$x^2 - x = 870$$

A forma de encontrar o valor de x pelos babilônios, temos a seguinte solução, já na base 10 para um melhor entendimento, veja logo abaixo:

Tome a metade de 1..................................0,5

Faça o quadrado dela mesmo.................... $0{,}5^{\ 2} = 0{,}25$

Adicione o valor descoberto a 870............$870 + 0{,}25 = 870{,}25$

Obtemos um quadrado............................... $\overline{870{,}25} = 29{,}5$

O resultado encontrado e somado...............$29{,}5 + 0{,}5 = 30$

com a metade de 1 é exatamente a solução da equação.

A Babilônia como podemos ver conseguia resolver muitas equações do segundo grau, mas ainda não possuía uma fórmula algébrica para se resolver equações do segundo grau, mas os escribas possuíam uma incrível habilidade como neste exercício em que um escriba escreveu numa tabuleta de argila o seguinte problema:

Qual é o lado do quadrado se a área menos o dobro do lado é vinte e quatro?

Na tabuleta em que escreveu o problema o escriba escreveu somente o final da resolução que era:

Tome a metade de dois que é um, e multiplique um por ele mesmo. Some o resultado a vinte e quatro, o que dá vinte e cinco. Isto na verdade é o quadrado de cinco que, somado a metade de dois, vai dar o lado do quadrado, que é igual a seis.

Vale lembrar que todos os cálculos que o escriba fez para resolver o problema eram expressos por palavras.

Nos dias de hoje podemos escrever esse problema na forma algébrica de uma equação do segundo grau que é:

x é o lado do quadrado

x^2 é a área do quadrado então

$x^2 - 2x = 24$ é a equação que demonstra os dados do problema

Para conseguimos ter a solução deste problema vai transforma o primeiro membro num trinômio do quadrado perfeito:

$$x^2 - 2x = 24$$

$$x^2 - 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 24 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 24 + 1$$

$$(x - 1)^2 = 24 + 1$$

Usando a radiciação, que é a operação inversa da potencia então temos:

$$x - 1 = \sqrt{24 + 1}$$

$$x = \sqrt{24 + 1} + 1$$

$$x = \sqrt{24 + \left(\frac{2}{2}\right)^2} + \frac{2}{2}$$

Como podemos ver a matemática nem sempre foi da forma em que se ensina nos livros didáticos, teve todo um processo de desenvolvimento na qual contou com a participação de vários matemáticos, Oscar Guelli (1997) escreveu:

> Desde a Antiguidade, a matemática tem alcançado grandes progressos, que facilitaram os cálculos e possibilitaram resultados rápidos e precisos. No entanto, essa precisão já era obtida pelos matemáticos antigos, que contavam apenas com sua inteligência e intuição. Por isso cada vez mais nos admira a enorme habilidade para calcular dos matemáticos da Antiguidade.

Através destes caminhos feitos pelo excepcional escriba podemos então entender a solução resolvida através de palavras veja:

Tome a metade de dois que é um.............. $x = \sqrt{24 + \left(\frac{2}{2}\right)^2} + \frac{2}{2}$

e multiplique um por ele mesmo............... $x = \sqrt{24 + 1.1} + \frac{2}{2}$

Some o resultado a vinte e quatro............. $x = \sqrt{24 + 1} + \frac{2}{2}$

O que dá vinte e cinco .... $x = \sqrt{25} + \frac{2}{2}$

Isto é na verdade o quadrado de .... $x = 5 + \frac{2}{2}$

cinco

Que somado a metade de dois, ... $x = 6$

vai dar o lado do quadrado que é seis

1.3-Grécia

A primeira vez que se introduziu uma equação do segundo grau na Europa foram aproximadamente 1200 anos depois em relação aos povos babilônios que já conseguiam resolver essas mesmas equações.

Muitos dos conhecimentos matemáticos que o continente europeu desenvolveu devem se muito aos povos egípcios e aos babilônicos, e os primeiros povos a assimilar esses conhecimentos foram os gregos que resolviam as equações do segundo grau de forma geométrica diferente dos outros povos.

Por volta de 306 a.C a Grécia criou um gênio chamado Euclides, que tem grande reputação nos dias de hoje por sistematizar todo conhecimento que tinha até então.Euclides foi criador de os Elementos, que é o maior livro texto de matemática, sem dúvidas um dos marcos de sua vida foi dizer que nem todas as verdades podem ser provadas e que algumas delas devem ser admitidas sem demonstração.

A habilidade em que Euclides possuía era tão grande que era capaz de encontrar soluções para equações do segundo grau somente com uma régua e um compasso, ficando claro que os gregos deram mais preferência a geometria do que a álgebra, uma das causas desse fato é de que os gregos ainda não possuíam um sistema de numeração.

Euclides não fazia cálculos, ele fazia mesmo eram construções geométricas, e o objetivo não era resolver as equações, mas sim descobrir relações entre os elementos geométricos.

Um dos problemas em que Euclides resolve geometricamente tem a seguinte proposição:

“... e se do lado vezes uma constante subtrairmos a área do quadrado, o resultado será uma constante determinada”.

Hoje conseguimos traduzir facilmente o enunciado de Euclides através da equação:

$$ay - y^2 = b$$

Assim podemos resolver equações geometricamente através dos estudos realizados por Euclides, equações como esta abaixo:

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

Podendo ser escrita da seguinte forma

$$5y - y^2 = 4$$

- Devemos traçar um segmento $\overline{AB}$ com comprimento igual a 5,neste tipo de solução o comprimento sempre terá o valor do coeficiente numérico de *x*.

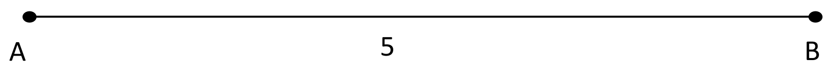

Figura: 1
Fonte : O autor

- Dividiremos o seguimento $\overline{AB}$ ao meio.

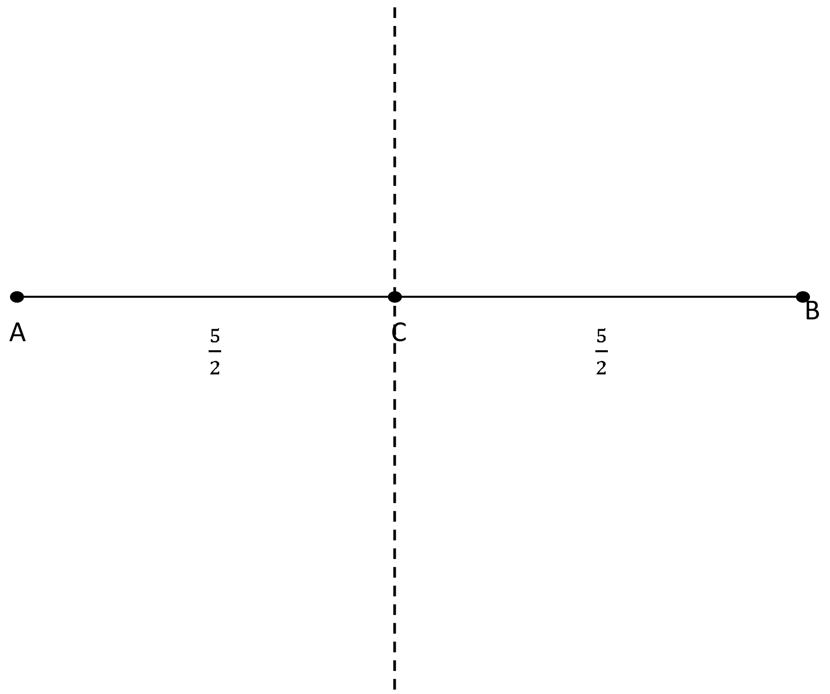

Figura: 2
Fonte: O autor

- Iremos traçar um segmento $\overline{CP}$ perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ e seu comprimento é igual à raiz quadrada do termo livre da equação: $\sqrt{4} = 2$.

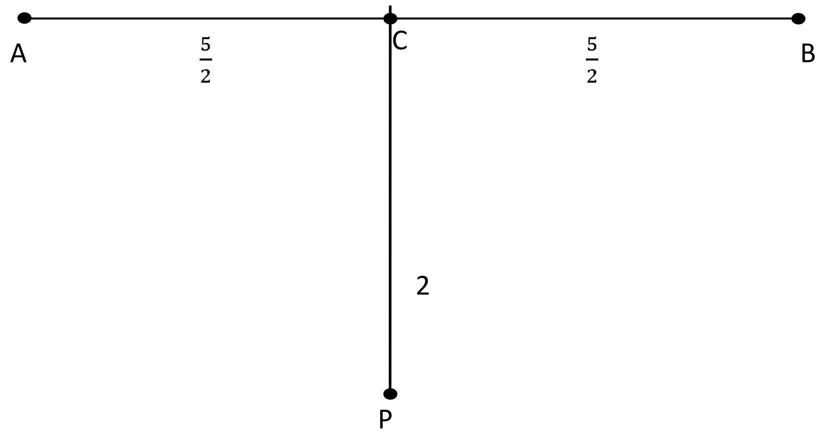

Figura: 3
Fonte: O autor

- Desenhamos então uma circunferência de centro P com a medida do raio igual ao segmento $\overline{CB}$, e a circunferência se intercepta com o segmento $\overline{AB}$ no ponto D.

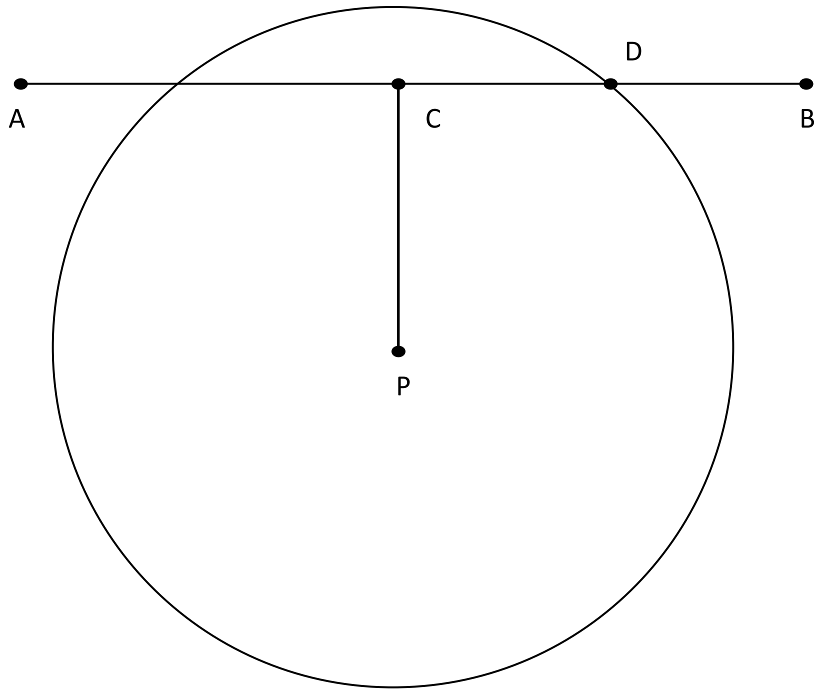

Figura: 4
Fonte: O autor

- Assim conseguimos construir o retângulo ABEF, tal que DB = BE.

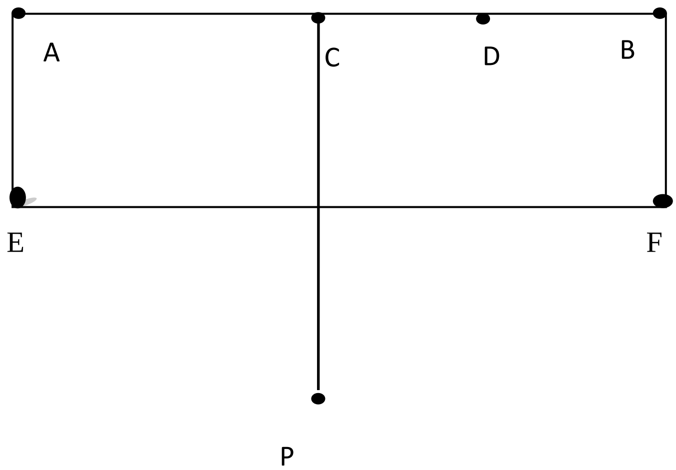

Figura: 5
Fonte: O autor

- Temos então um quadrado DBEG. Como mostra a figura 6:

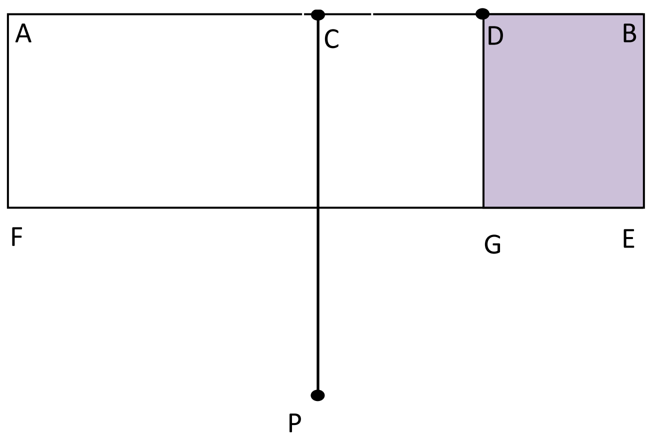

Figura: 6
Fonte: O autor

- A área do quadrado DBEG é dada por $(y)^2$, sendo y_1 o comprimento de um lado do quadrado DBEG e o valor de seu comprimento é o resultado de uma raiz da equação $5x - x^2 = 4$.

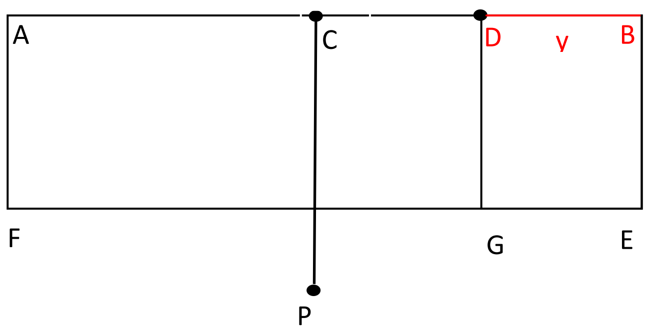

Figura: 7
Fonte: O autor

- Ao afirmar que o segmento $\overline{DB}$ é uma raiz da equação, fica muito difícil entender por que a resolução de Euclides seja verdadeira, mas o teorema de Pitágoras nos ajuda a entender veja:
  Iremos unir os pontos D e P, assim obetmos um triângulo retângulo CPD:

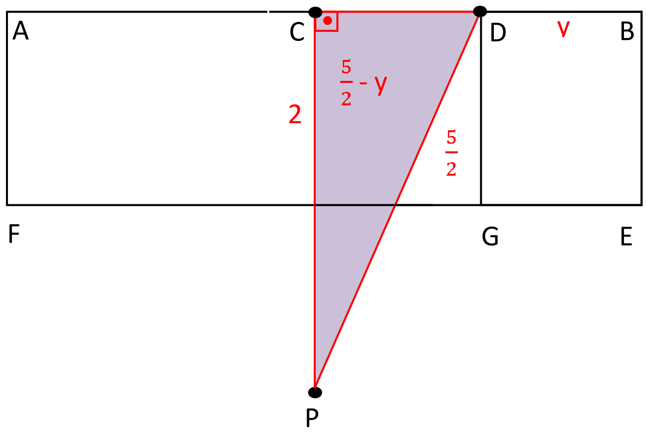

Figura: 8
Fonte: O autor

$$CP = 2 \quad DP = \frac{5}{2} \quad CD = \frac{5}{2} - y$$

- Aplicando Pitágoras neste triângulo CPD temos:

$$DP^{\,2} = CP^{\,2} + (CD)^2$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 = 2^2 + \left(\frac{5}{2} - y\right)^2$$

$$\frac{25}{4} = 4 + \frac{25}{4} - 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot y + y^2$$

$$0 = 4 - 5y + y^2$$

$$5y - y^2 = 4$$

Portanto podemos afirmar que y é uma raiz da equação $5y - y^2 = 4$.

Porém até 830 d.C, nenhum matemático havia descoberto alguma forma de se resolver qualquer tipo de equação do segundo grau. Em um trecho de seu livro o autor Oscar Guelli (1997) diz:

"Os antigos matemáticos da babilônia sabiam resolver algumas equaçoes do 2° grau, sem se preocupar em explicar o método que utilizavam. Os gregos por muito tempo preferiram a geometria á álgebra."

1.4-Hindu

Os hindus foram povos que desenvolveu estudos sobre as equações do segundo grau e que foi de grande ajuda para assim conseguir obter uma formula resolutiva. Um dos grandes feitos desse povo foi inserir os números negativos nos coeficientes das equações do segundo grau e o número zero como um elemento utilizado para o calculo que até então não havia sido utilizado por nenhum povo. Matemáticos que contribuíram para a matemática hindu tiveram como nomes principais Ãryabhata, Brahmagupta, Bhãskara I, e Bhãskara II.

Ãryabhata ficou conhecido por Ãryabhata I, além de matemático ficou conhecido por ser também astrônomo escreveu um tratado que contêm 118 versos que são divididos em quatro partes, alguns tratados envolve equação do segundo grau, mas não possui nenhuma forma para as soluções.

Mais um matemático e astrônomo foi Brahmagupta que em relação à equação do segundo grau conseguiu atingir um estudo mais completo do que Ãryabhata um dos fatos que o deixou famoso foi dele ser o primeiro matemático a inserir os números negativos e o zero como elemento de cálculo, além de usar o zero como o elemento de separação dos números negativos e positivos.

Em relação à equação do segundo grau conseguiu desenvolver um estudo mais organizado e completo para equações do tipo $ax^2 + bx = c$

Segundo Nobre (2003) a solução dada por esse matemático hindu foi:

- A soma multiplicada pelo coeficiente quadrado, você adiciona o quadrado da metade do coeficiente da incógnita x

$$x^2 = ac + {\frac{b}{2}}^2$$

- Em seguida toma a raiz quadrada;

$$x = \sqrt{ac + {\frac{b}{2}}^2}$$

- A metade do coeficiente da incógnita é subtraída;

$$x = \sqrt{ac + {\frac{b}{2}}^2} - \frac{b}{2}$$

- E finalmente divide pelo coeficiente do quadrado;

$$x = \frac{\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a}$$

- Desenvolvendo a equação acima temos

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}$$

> “É interessante observar que, já nessa época, havia plena consciência de que os números negativos não são quadrados, e de que os números de raízes de uma equação do 2º grau pode ser 0, 1 e 2. Bramagupta afirma que o quadrado de negativo e positivo é positivo e de zero é zero.” (Pitombeira, 2004, p 23).

Após alguns anos surge um matemático hindu aluno de Brahmagupta que muita coisa não se sabe, mas que ficou conhecido como Bhaskara I e que realizou estudos sobre o tratado de Aryabhata e reescreveu de forma descritiva os versos que estavam contidos nela.

Na Índia surgiu no século XII o matemático e astrônomo, Bhaskara II ficou conhecido historicamente por grandes feitos que fizesse no que diz a respeito sobre equação do segundo grau, sua obra foi dividida em 4 partes dedicadas não somente a matemática mas também a astronomia que são: Lilavati sobre aritmética, Bijaganita sobre a álgebra, Goladhyaya sobre o globo celeste e Grahaganita sobre a matemática dos planetas.

Bhaskara em um dos seus livros resolve muitos problemas parecidos com este:

Um capital de 100 foi emprestado a uma certa taxa de juro ao ano. O juro obtido após um ano foi aplicado durante mais um ano. Se o juro total é de 75, qual é a taxa de juro?

Traduzindo para a linguagem matemática dos dias de hoje teremos que a resposta deste problema é a raiz da equação

$$x^2 + 100x - 7500 = 0$$

Como sabemos os matemáticos da época não escreviam as equações dessa forma, os matemáticos Hindus tinham formulado uma seguinte regra:

“Calcule a metade do capital ao quadrado, acrescente-a ao produto do juro total pelo capital, extraia a raiz quadrada e logo diminua a metade do capital”.

A regra na qual os matemáticos hindus utilizavam para resolver seus problemas podem ser traduzido da seguinte forma:

$$x = \frac{\sqrt{\frac{b}{2}^{2} - ac} - \frac{b}{2}}{a}$$

Resolvendo este problema através deste método e observando o a que esta acontecendo vejamos:

Calcule a metade do capital ao quadrado, $.x = \sqrt{\frac{100}{2}^{2} - c} - \frac{b}{2}$

Acrescente ao produto do juro total pelo capital $x = \sqrt{2500 + 7500} - \frac{b}{2}$

Extraia a raiz quadrada $x = 100 - \frac{b}{2}$

E logo diminua a metade do capital $x = 100 - \frac{100}{2} = 50$

Apesar de vários séculos nenhum matemático havia conseguido encontrar a fórmula resolutiva para qualquer tipo de equação do segundo grau apenas encontravam métodos para resolver alguns tipos de equações do segundo grau, e tendo nessa época brilhantes matemáticos, mas até o momento nenhum conseguira encontrar tal solução. Oscar Guelli em um trecho de seu livro diz:

> Mesmo com todo o seu talento, Bhaskara não pode dar o passo fundamental no desenvolvimento das equações: a descoberta da sua fórmula.Para isso foi preciso um novo modo, que transformou a álgebra num ramo independente da matemática, desvinculada dos problemas de medidas, juros, seguros etc.

Vimos que os antigos matemáticos seguiam a seguinte regra que é traduzida assim:

$$x = \frac{\sqrt{\frac{b}{2}^{2} - ac} - \frac{b}{2}}{a}$$

Os hindus não conseguiram encontrar a solução geral para equação do segundo grau, mas sem duvida deram um passo fundamental para que isso acontecesse vejamos que mesmo expressada em palavras, esse método corresponde à fórmula geral de hoje:

$$x = \frac{\sqrt{\frac{b}{2}^{2} - ac} - \frac{b}{2}}{a}$$

$$x = \frac{\sqrt{\frac{b^2}{4} - ac} - \frac{b}{2}}{a}$$

$$x = \frac{\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4}} - \frac{b}{2}}{a}$$

$$x = \frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{2} - \frac{b}{2}}{a}$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Como vimos os matemáticos hindus somente passaram a utilizar coeficientes negativos nas equações, mas ainda não conheciam os valores negativos por isso somente a raiz positiva na fórmula.

No entanto na Índia se destacou um matemático chamado Sridhara que foi que anunciou uma regra geral para se resolver equações do segundo grau, fato reconhecido pelo próprio Bhaskara II que publicou como era feito esse método que é:

> "Multiplique ambos os lados da equação por uma quantidade igual a quatro vezes o coeficiente quadrado da incógnita; adicione a ambos os lados de uma quantidade igual o quadrado do coeficiente da incógnita; então extraia a raiz quadrada."(Pitombeira, 2004,p.25)

Seguindo o que Bhaskara II cita na equação $ax^2 + bx = c$ temos então

- Multiplique ambos os lados da equação por uma quantidade igual a quatro vezes o coeficiente quadrado da incógnita:

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac$$

- Adicione a ambos os lados de uma quantidade igual o quadrado do coeficiente da incógnita;

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 + 4ac$$

- Então extraia a raiz quadrada;

$$2ax + b = \sqrt{b^2 + 4ac}$$

Conseguimos então sair de uma equação polinomial de grau 2 para uma equação polinomial de grau 1 que já era conhecida sua resolução.

1.5-Árabes

Já vimos como que eram resolvidas as equações do segundo grau pelos povos egípcios, babilônicos, gregos e hindus. Continuaremos então estudando um outro povo que se dedicou muito ao estudo da matemática e das equações do segundo grau que foram os povos árabes.

Segundo Pitombeira (2004) os árabes assimilaram a matemática dos gregos e fizeram progressos em varias áreas, como por exemplo, em trigonometria, nas equações algébricas e em pesquisas do quinto postulado de Euclides.Um matemático árabe que se destacou e teve grande importância para o desenvolvimento das equações do segundo grau foi al-Khowarizmi (780-850).

al-Khowarizmi foi um grande matemático árabe, sobre sua vida pessoal não se tem muito conhecimento, o que se pode dizer é que há indícios que sua família era de uma região ao sul do mar Aral em uma região de domínio árabe. Em 809 o rei al-Mamun queria que a cidade de Bagdá se tornasse o maior centro cientifico do mundo, nessa tentativa al-Mamun contratou grandes sábios e entre eles estava al-Khowarizmi.

Foi então nessa época em que passou em Bagdá, al-Khowarizmi conseguiu escrever sua maior obra o livro Hisab al-jabr wa-al-muqabalah. Neste livro foi encontrado com muita clareza como resolver equações do segundo grau, um dos fatos curiosos é que o nome do livro al-jabr foi que deu origem à palavra álgebra.

Assim como outros matemáticos al-Khowarizmi não usava nenhum símbolo para expressar as equações quadráticas, ele se utilizava de palavras para determinar as equações por exemplo x^2 era chamado de quadrado, x era raiz e os termos independente eram chamado de números. Uma equação do tipo $2x^2 = 5x$ al-Khowarizmi as expressava assim:

“Se o quadrado junto com dois é igual a cinco raízes, digam-me, quanto vale uma raiz?”

Um dos métodos em que al-Khowarizmi resolve as equações do segundo grau no seu livro al-jabr consistia em completar quadrados que incide em formar um trinômio do quadrado perfeito. Seja a equação $x^2 + 10x = 39$ resolvida por al-Khowarizmi à solução segundo Pitombeira (2004) é:

> tome a metade do numero de raízes, o que neste exemplo igual a cinco. Isso você multiplica por ele próprio; o produto é vinte e cinco.Adicione isso a trinta e nove; a soma é sessenta e quatro. Agora, tome a raiz disso, que é oito e subtraia dela a metade do numero de raízes, que é cinco. O resultado é três. Isso é a raiz do quadrado que você procurava; o quadrado é nove. (Pitombeira,2004,p.26).

O procedimento em que al-Khowarizmi usa para encontrar a solução da equação consiste em escrever a seguinte fórmula nos dias de hoje e lembrando que os árabes não utilizavam esses símbolos.

$$x = \sqrt{\frac{b}{2}^{2} + c} - \frac{b}{2}$$

Assim podemos verificar se a solução em forma algébrica condiz com o método utilizado por al-Khowarizmi:

- Tome a metade do número das raízes; o que neste exemplo é igual a cinco;

$$x = \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

$$x = \sqrt{(5)^2 + c} - \frac{b}{2}$$

- Isso você multiplica por ele próprio; o produto é vinte e cinco;

$$x = \sqrt{25 + c} - \frac{b}{2}$$

- Adicione isso a trinta e nove; a soma é igual a sessenta e quatro;

$$x = \sqrt{25 + 39} - \frac{b}{2}$$

$$x = \sqrt{64} - \frac{b}{2}$$

- Agora, tome a raiz disso, que é oito e subtraia dela a metade do numero de raízes, que é cinco;

$$x = 8 - \frac{b}{2}$$

$$x = 8 - \frac{10}{2}$$

$$x = 8 - 5$$

- O resultado é três;

$$x = 3$$

Portanto o método em que al-Khowarizmi usa para encontrar a solução da equação é totalmente compatível com a solução algébrica apresentada lembrando que essa equação tem dois resultado e um por ser negativo não foi usado pois al-Khowarizmi não conhecia os números negativos.

al-Khowarizmi sem dúvidas foi um brilhante matemático e realmente fez grandes transformações no estudo da álgebra, além de resolver equações do segundo grau somente através de palavras, ele fez grandes progressos, mostrou como resolver equações do segundo grau geometricamente, se inspirando na Álgebra Geométrica de Euclides.

al-Khowarizmi resolveu a equação $x^2 + 10x = 39$ através do método geométrico em que desenvolveu para encontrar solução de equações desse tipo, o resultado foi $x = 3$, vejamos então o método aplicado por al-Khowarizmi para a solução dessa equação.

- O primeiro passo foi desenhar um quadrado de lado x na qual o que representa o x^2:

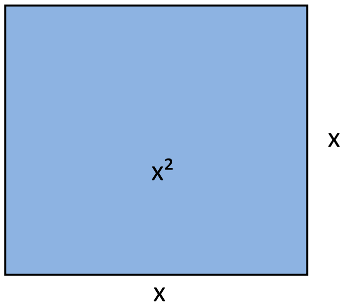

Figura: 9
Fonte: O autor

- Logo depois ele desenhou um retângulo na qual representa o termo $10x$ com lado 10 e x:

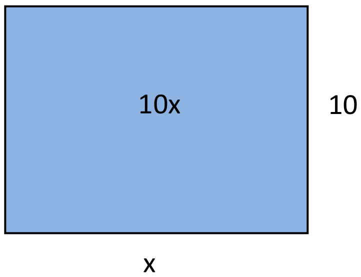

Figura: 10
Fonte: O autor

- Assim al-Khowarizmi logo depois teve uma ideia surpreendente que foi dividir esse retângulo em quatro retângulo de áreas idênticas:

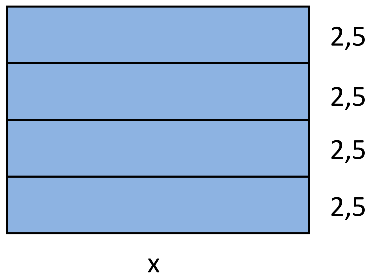

Figura: 11
Fonte: O autor

- Então al-Khowarizmi encaixou esses quatro retângulos em cada lado do quadrado de área x^2:

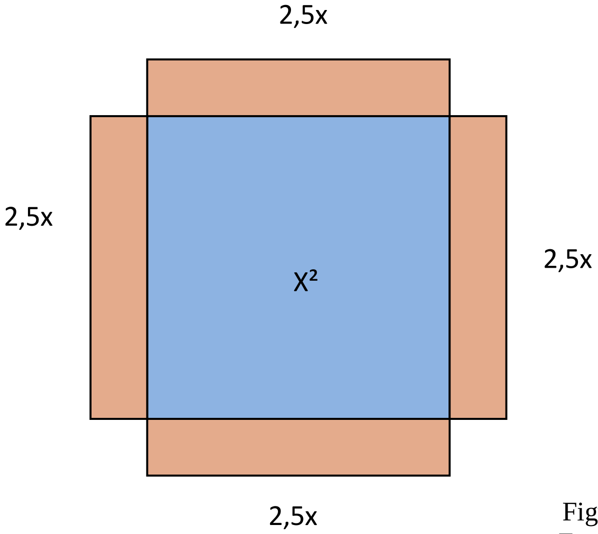

Figura: 12
Fonte: O autor

- Assim al-Khowarizmi pode verificar que a figura era exatamente $x^2 + 10x$, portanto ele concluiu que a medida da área dessa figura era igual a 39. Logo depois ele completou o restante da figura com quatro quadrados de medidas 2,5 de lado, assim formando um quadrado maior. Veja abaixo:

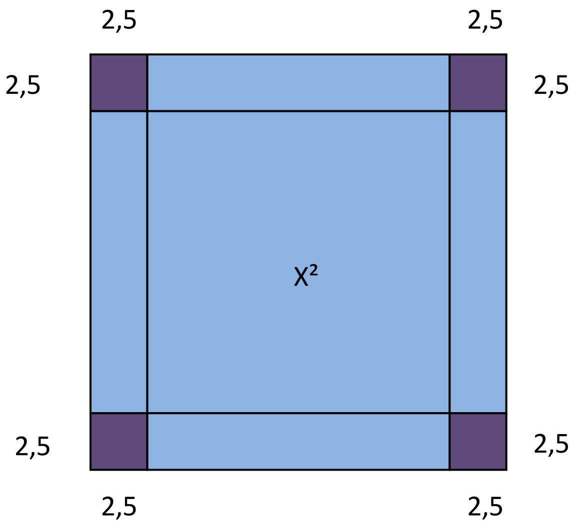

Figura: 13
Fonte: O autor

Como foi então completados quatro quadrados de lado 2,5 então podemos dizer que a área da figura teve um acréscimo:

$$39 + 4.(2{,}5 \,.\, 2{,}5)$$

$$39 + 4 \,.\, 6{,}25$$

$$39 + 25 = 64$$

Assim temos que a área da figura agora é 64 e como vimos na figura anterior que a nova figura é um quadrado então podemos dizer que o lado desse novo quadrado é 8 . veja abaixo:

$$\overline{64} = 8$$

Depois de todo esse desenvolvimento al-Khowarizmi então conseguiu encontrar a solução da equação que é 3. Veja:

$$2{,}5 + 2{,}5 + x = 8$$

$$x + 5 = 8$$

$$x = 3$$

Mesmo com todos esses estudos e avanços ainda não havia descoberto a fórmula resolutiva para qualquer tipo de equação do segundo grau e al-Khowarizmi se inspirou muito nos gregos para esse tipo de solução. Refatti e Bisognin diz:

> A contribuição de al-Khowarizmi, como de muitos matemáticos de diversas épocas, não conseguiu expressar as equações totalmente em símbolos, mas ficou a evidência de que os árabes inspiravam se nos matemáticos gregos. Apesar de algumas demonstrações geométricas apresentarem alguns detalhes diferentes dos gregos. (Refatti e Bisognin,2005,p.11).

1.6-A descoberta da fórmula para resolução de equações do segundo grau

A fórmula para se calcular uma equação do segundo grau teve uma grande contribuição de Viéte, pois este teve papel importante no surgimento da álgebra simbólica, pois ele que iniciou a representar por símbolos os problemas que eram expressos em palavras e por isso ficou conhecido como “O Pai da Álgebra”.

François Viéte não foi o único a criar a álgebra simbólica, ele se apoiou em muitos trabalhos de outros matemáticos da antiguidade, com isso outros matemáticos que foram surgindo se basearam em sua obra como Descartes que conseguiu aperfeiçoar sua álgebra e com isso as palavras que eram escritas começaram a dar lugar aos símbolos que é usado atualmente.

Logo abaixo estão algumas equações e como que elas começaram a ser representadas por Viéte:

Descartes	Viéte
$x + 9 = 12$	$A\ p\ 9\ é\ igual\ a\ 12$
$2x - 8 = 0$	$A2\ m\ 8\ é\ igual\ a\ 0$
$x^2 - 2x = 0$	$A\ área\ m\ A2\ é\ igual\ a\ 0$
$x^2 - 5x + 6 = 0$	$A\ área\ m\ A5\ p\ 6\ é\ igual\ a\ 0$

Tabela: 1
Fonte: O autor

Com as contribuições que vários matemáticos deram ao surgimento da álgebra simbólica então podemos deduzir a fórmula geral para resolver equações do segundo grau.

Dado então que uma equação do segundo grau é do tipo $ax^2 + bx + c = 0 \; com \; a \neq 0$ então iremos demonstrar a sua fórmula geral.

Demonstração:

- Dividiremos toda a equação por **a:**

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

- Subtraia $\frac{c}{a}$ de ambos os membros da equação assim temos:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

- Acrescente $(\frac{b}{2a})^2$ em ambos os membros da equação assim temos um trinômio do quadrado perfeito no primeiro membro veja:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a}$$

- Fazendo o m.m.c no segundo membro temos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

- Extraindo a raiz em ambos os membros temos:

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Subtraindo $\frac{b}{2a}$ ambos os lado temos :

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Portanto essa é a fórmula geral para resolução de equações do 2° grau que aqui no Brasil é conhecida como fórmula de Bháskara, nos dias de hoje qualquer estudante consegue resolver equações do segundo grau, algo que somente os mais brilhantes matemáticos da antiguidade conseguiam. Com relação à descoberta da fórmula Oscar Guelli diz:

> Não foi um único povo, nem uma única pessoa que inventou a fórmula da equação do segundo grau. Trabalhando essas propriedades, matemáticos de várias regiões do Velho Mundo, quase que simultaneamente, acabaram deduzindo uma fórmula única, que tornou possível a resolução de qualquer equação do segundo grau. (Oscar Guelli, 1997, p.40)

Capítulo 2

Análise de Livros Didáticos

Estamos realizando uma análise em três livros didáticos do 9° ano do ensino fundamental para observar como o conteúdo de equação do segundo grau é abordado e se os autores utilizam de fatores históricos para explicar aos alunos de onde veio, para que serve e qual a importância de estar estudando essa matéria que é tão conhecida no Brasil e no mundo.

Vimos que nos livros os autores usam muito o contexto histórico principalmente métodos para solução que não seja pela fórmula resolutiva o que enriquece muito o conhecimento do aluno e o ajuda a desenvolver seu raciocínio.

Assim veremos que o professor possui material e métodos diferentes para explicar a seus alunos o sentido de equação do segundo grau e ele não precisa estar preso somente no livro na qual a escola esta usando e pode buscar alternativas para conseguir mostrar que é capaz de fazer diferente dos outros.

2.1- Análise do Livro "Vontade de Saber Matemática"

Este livro é de autoria de Joamir Roberto de Souza e Patrícia Rosana Moreno Pataro, Joamir é professor graduado em matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL), Especialista em Estatística pela Universidade Estadual de Londrina e professor da rede pública de ensino.

Patrícia Rosana Moreno Pataro, professora graduada em matemática pela Universidade Estadual de Londrina (UEL) e especialista em Estatística pela Universidade Estadual de Londrina (UEL).

Neste livro a equação do segundo grau é abordada inicialmente com uma situação problema na qual o problema diz o seguinte:

"Henrique cercou com tela um terreno em forma de quadrado cuja área é 169 m^2.". Quantos metros de tela, no mínimo, Henrique utilizou?"

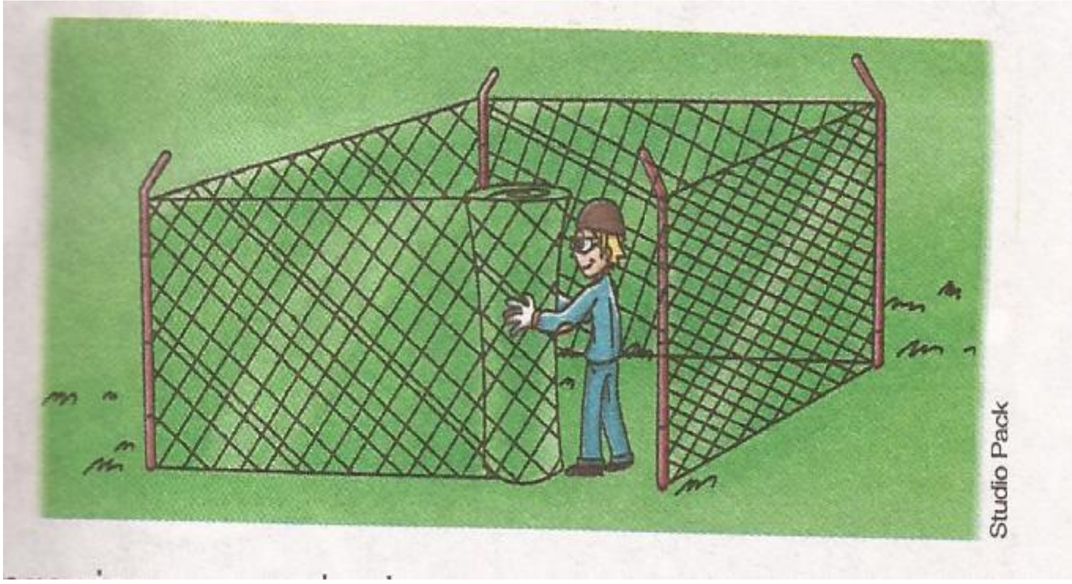

Figura: 14
Fonte: Souza & Pataro

Assim podemos descrever o problema para a forma algébrica da seguinte forma:

$$x.x = 169$$

Calculando temos que a solução desse problema é ± 13 como se trata de unidade de medida, logo a solução será somente +13, por definição de quadrado que possui quatro lados iguais então será necessário no mínimo 52 m de tela para cercar todo o terreno.

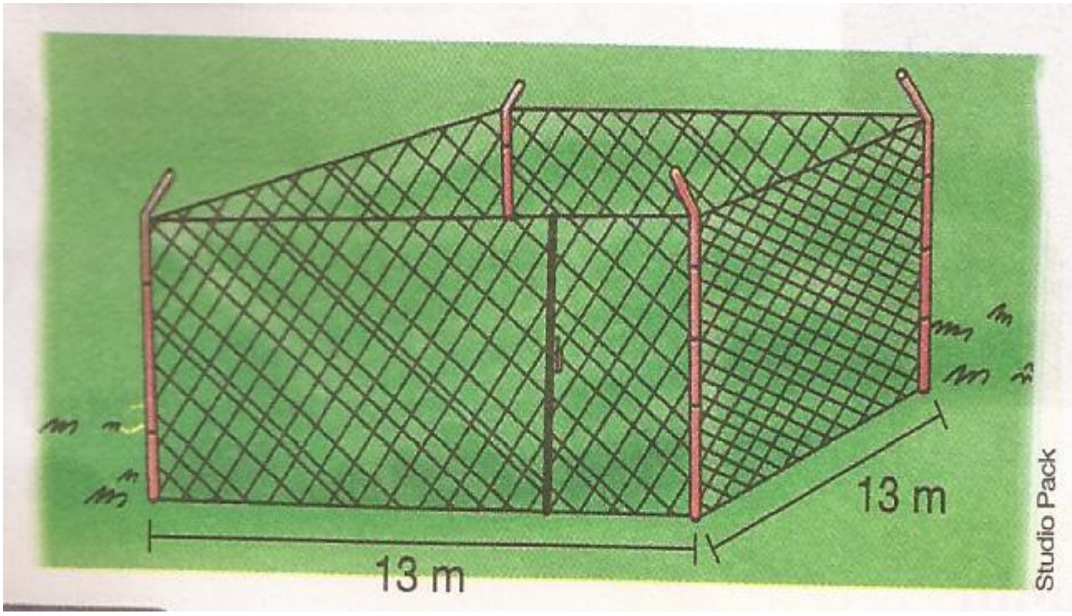

Figura: 15
Fonte: Souza & Pataro

Em seguida o autor traz como resolver equações do segundo grau incompletas e logo depois disso ele mostra como resolver as equações do segundo grau completa. Inicialmente o autor utilizou de fatos históricos para abordar o tema, o método em que ele utilizou foi do

Árabe al-Khowarizmi o famoso método de completar quadrados que é trazido da seguinte forma:

"Calcular as raízes da equação $x^2 + 8x + 7 = 0$"

No livro é tratado da seguinte forma, como no primeiro membro não é um trinômio do quadrado perfeito então isolaremos o termo independente e acrescentaremos 16 em cada membro da equação que é um valor que satisfaz a condição de trinômio assim obtemos a equação:

$$x^2 + 8x + 16 = 9$$

$$(x + 4)^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9} - 4$$

Então o conjunto solução da equação do segundo grau é -1 e -7.

Representando o processo geometricamente como é abordado no livro podemos ver que realmente trata do método de al-Khowarizmi veja:

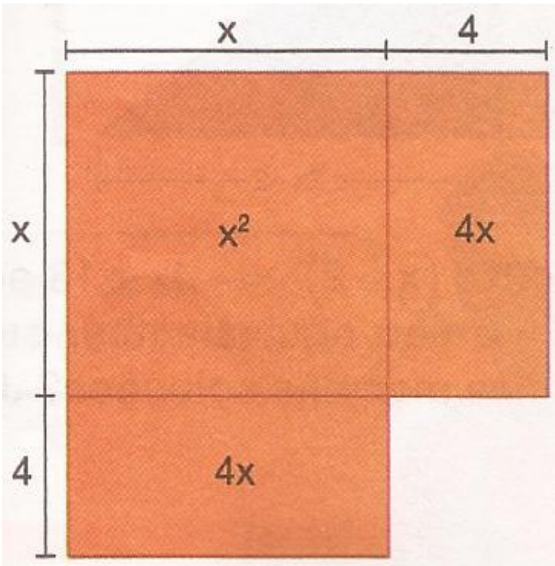

Figura: 16
Fonte: Souza & Pataro

Assim temos que falta acrescentar um quadrado de lado 4 para que a figura se torne um quadrado então fazendo isso temos um quadrado veja na figura 17 e 18:

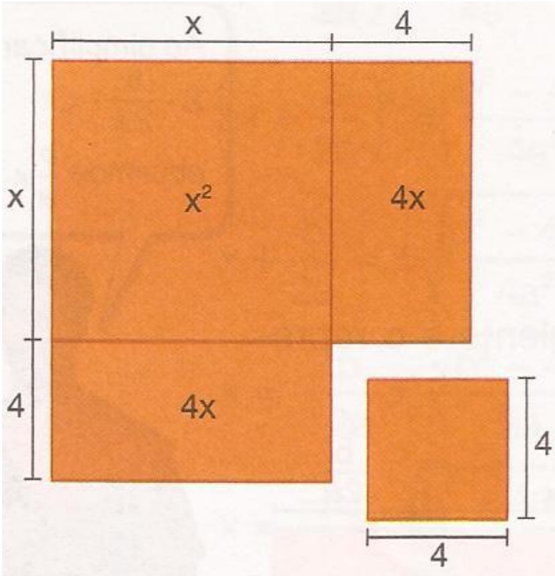

Figura: 17
Fonte: Souza & Pataro

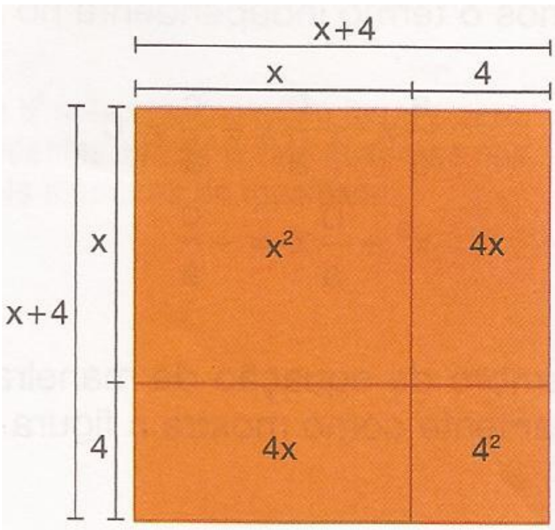

Figura: 18
Fonte: Souza & Pataro

O autor traz a solução da equação no método de al-Khowarizmi, mas esqueceu de observar que no método de completar quadrados não pode ficar negativo, pois em $x^2 + 8x = -7$ não tem como representar geometricamente uma medida negativa, mas você consegue encontrar a solução, todavia, esse método não seria o mais adequado para esse tipo de equação, o que mais se adequava a essa resolução poderia ser sim o método de completar quadrados, mas só resolvendo pelo método algébrico.

Como a matemática nas escolas esta sendo abordada de uma forma diferente saindo do abstrato e trazendo ela para o concreto, vale ressaltar que o autor trouxe um pouco desse novo método aplicado nas escolas e utilizou de recursos históricos que aconteceram milhares de anos atrás pra tentar dar um significado de equações para os alunos.

Logo depois de explicar através do método de completar quadrados geometricamente o autor traz como fazer a dedução da formula resolutiva através do método de completar quadrados, porém ele deduz a fórmula resolutiva da mesma forma que esta no tópico 2.6 veja:

- Dividiremos toda a equação por **a:**

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

- Subtraia $\frac{c}{a}$ de ambos os membros da equação assim temos:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} - \frac{c}{a} = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

- Acrescente $(\frac{b}{2a})^2$ em ambos os membros da equação assim temos um trinômio do quadrado perfeito no primeiro membro veja:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a}$$

- Fazendo o m.m.c no segundo membro temos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2}$$

- Extraindo a raiz em ambos os membros temos:

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Subtraindo $\frac{b}{2a}$ ambos os lado temos:

$$x + \frac{b}{2a} - \frac{b}{2a} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2.2-Análise do livro “Matemática”

Este livro é de autoria de Edwaldo Bianchini que é Licenciado em Ciências pela Universidade da Associação de Ensino de Ribeirão Preto, com Habilitação em Matemática pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do Sagrado Coração de Jesus, Bauru (SP). Professor de matemática da rede pública de ensino do estado de São Paulo, no ensino fundamental e médio, por 25 anos.

Inicialmente o livro aborda a equação do segundo grau transcrevendo que é uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ com $a \neq 0$, ou seja, o livro antes de mais nada já impõe uma condição fundamental para que se possa ter uma equação do segundo grau.

Depois dessa abordagem inicial ele mostra como resolver equações do segundo grau incompletas como as equações do tipo $ax^2 + bx = 0$ e $ax^2 + c = 0$.

Logo depois de resolver todos esses tipos de equações o autor mostra como resolver equações completas o que corresponde a equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, porém, antes de mostrar a fórmula resolutiva o autor traz um pouco da história da equação do segundo grau.

O texto explica que as equações eram resolvidas pelos babilônicos por volta de 1800 a.C onde eles utilizavam o método de completar quadrados que foi um método também utilizado pelos matemáticos hindus da antiguidade, veja a tabua babilônica que contem 24 problemas de equações do segundo grau.

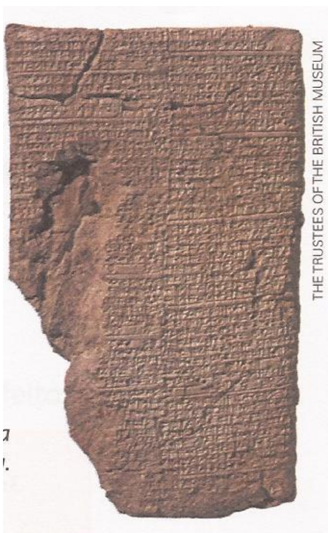

Figura: 19
Fonte: Bianchini

Depois de registrar um pouco da história da equação do segundo grau o autor nos mostra como resolver a equação do segundo grau usando o método babilônico e representando geometricamente para fazer um paralelo entre álgebra e geometria, vejamos a equação $x^2 + 4x - 21 = 0$

- Somando 21 em ambos os membros temos:

$$x^2 + 4x - 21 + 21 = 0 + 21$$

$$x^2 + 4x = 21$$

- Logo podemos obsevar que o primeiro membro não é um trinômio do quadrado perfeito, então temos que acrescentar algum valor para que o primeiro membro se torne um trinômio, veja a figura 20:

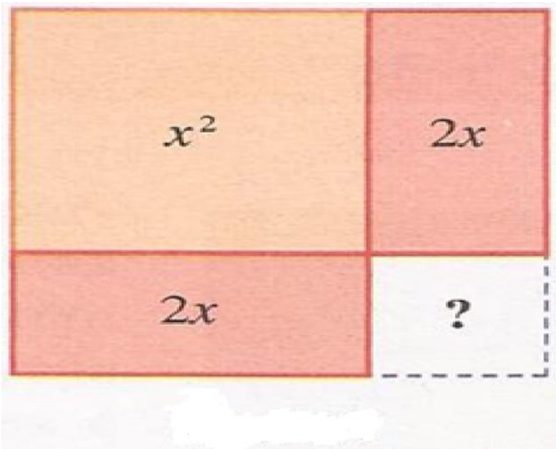

Figura: 20
Fonte: Bianchini

- Assim podemos observar que para se obtiver um quadrado na figura 1 temos que acrescentar um quadrado de lado 2 ou seja devemos acrescentar 4 em ambos os membros da equação para se obtiver um trinômio do quadrado perfeito então termos:

$$x^2 + 4x + 4 = 21 + 4$$

$$x^2 + 4x + 4 = 25$$

- Geometricamente corresponde a figura 21:

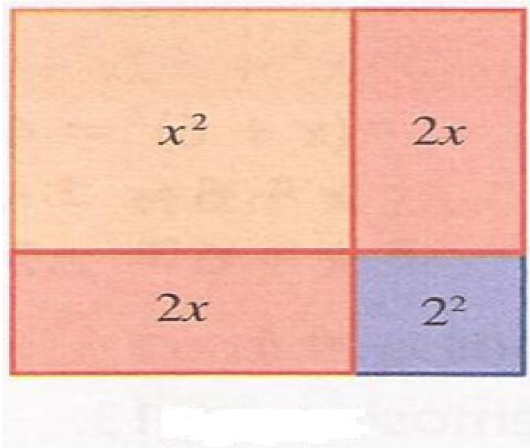

Figura: 21
Fonte: Bianchini

- Depois de conseguimos transformar o primeiro membro da equação em trinômio do quadrado perfeito conseguimos encontrar as raízes da equação então:

$$(x + 2)^2 = 25$$

$$x + 2 = \pm\sqrt{25}$$

$$x + 2 = \pm 5$$

- Para $x + 2 = 5$ temos $x = 3$
- Para $x + 2 = -5$ temos $x = -7$

Logo depois o autor deduz a fórmula resolutiva da equação do segundo grau através da forma $ax^2 + bx + c = 0$ da seguinte maneira:

- Primeiramente devemos isolar o coeficiente independente assim temos:

$$ax^2 + bx = -c$$

- Multiplicamos em ambos os membros da equação por $4a$:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

- Adicionamos b^2 em ambos os lado da equação:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

- Fatoramos o 1° membro temos:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

- Subtraindo b em ambos os lados temos:

$$2ax + b - b = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

- Dividindo por $2a$ ambos os membros da equação conseguimos obter a fórmula resolutiva veja:

$$\frac{2ax}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Assim o autor conseguiu mostrar a fórmula resolutiva para equação do segundo grau mostrando detalhadamente cada passo da demonstração.

Devemos também colocar em evidencia que neste livro o autor utiliza de fatores históricos para mostrar ao aluno que antes da fórmula resolutiva teve todo um processo por milhares de anos para que hoje ele consiga resolver essas equações com mais praticidade e o autor utiliza os fatores históricos dos principais povos que nos ajudaram que foram os Babilônicos, Hindus e Árabes.

2.3- Análise do livro “Matemática Ideias e Desafios”

Este livro é de autoria de Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga, Iracema Mori é Bacharel e licenciada em Matemática pela USP, professora e assessora de Matemática.

Dulce Satiko é licenciada em Matemática pela USP, professora e assessora em Matemática e é membro do Centro de Educação Matemática.

Neste livro a equação do segundo grau é abordada inicialmente com os autores contando um pouco sobre as contribuições que al-Khowarizmi teve nas resoluções de equações do segundo grau e explicando o método que ele desenvolveu no século IX usando área de quadrados e retângulos que ficou conhecido como método de completar quadrados.

As autoras escolheram a equação $x^2 + 10x = 39$ para representar o método em que al-Khowarizmi utilizava, por coincidência é a mesma equação apresentada no capitulo 2 no tópico 2.5

- Representação geométrica de x^2:

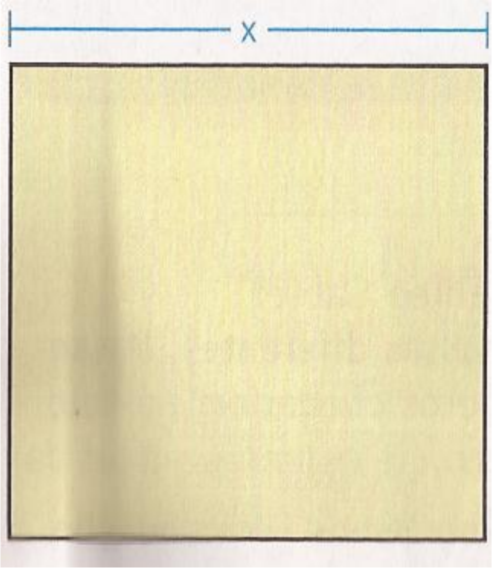

Figura: 22
Fonte: Bianchini

- Representação geométrica de $10x$:

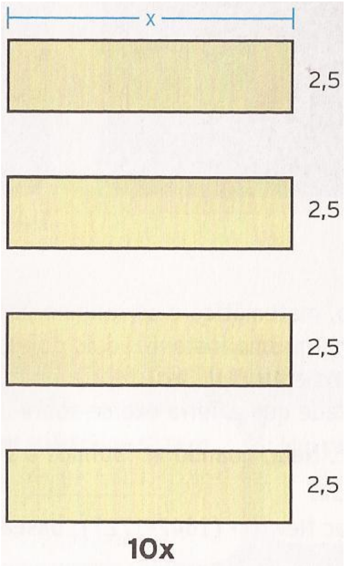

Figura: 23
Fonte: Mori & Onaga

- Representação geométrica de 39:

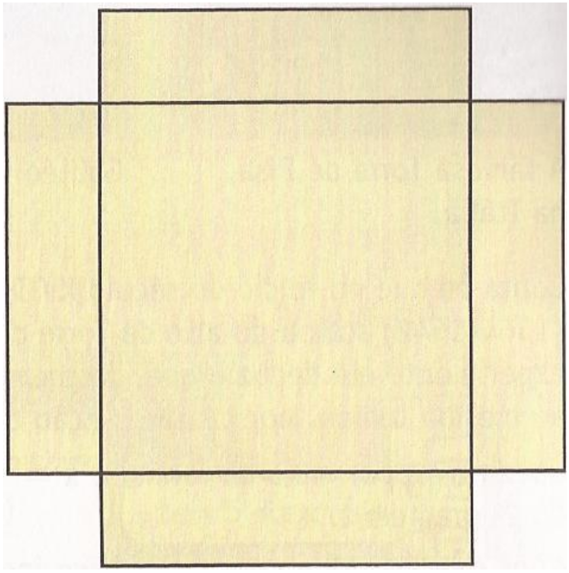

Figura: 24
Fonte: Mori & Onaga

Assim temos o método que al-Khowarizmi resolvia as equações do segundo grau representada geometricamente, mas as autoras não mostram como aplicar o método de completar quadrados e nem mostra a solução da equação.

Logo depois as autoras explicam que existem dois tipos de equações do segundo grau as que são incompletas e as completas as incompletas são as que têm $b = 0$ ou $c = 0$ e as completas todos os coeficientes possui valores diferentes de zero.

Posteriormente as autoras explicam como resolver equações do segundo grau por meio da fatoração e ela mostra um exemplo para um melhor entendimento do aluno, assim ela pede para resolver a equação $4x^2 - 4x + 1 = 9$ veja:

- Primeiramente podemos observar que no primeiro membro trata-se de um trinômio do quadrado perfeito, logo ela pode ser fatorada:

$$(2x - 1)^2 = 9$$

- Aplicando raiz quadrada em ambos os membros da equação temos:

$$\sqrt{(2x - 1)^2} = \pm\sqrt{9}$$

$$2x - 1 = \pm\sqrt{9}$$

$$2x - 1 = \pm 3$$

- Portanto $2x - 1 = 3$ ou $2x - 1 = -3$ logo podemos afirmar que o conjunto solução da equação é -1 e 2.

Em seguida as autoras faz um relato da história de Bhaskara e diz que ele viveu no século XII e foi um importante matemático e que se destacou por vários escritos sobre aritmética, álgebra e entre outros. Dentre os escritos estavam fórmula resolutiva para equação do segundo grau que no Brasil é conhecida como fórmula de Bhaskara e a autora antes de mostrar a fórmula ela deduz, porém a dedução é a mesma do tópico 3.1.

Podemos observar que nesse livro as autoras utilizam os fatores históricos para apresentar a equação do segundo grau diferentemente de alguns livros que já mostram a fórmula resolutiva sem explicar para o aluno o significado e as origens desses contextos.

Isso que dificulta na hora a aprendizagem do aluno, pois ele esta resolvendo algo que está correto, mas não faz nenhum sentido pra ele, então podemos ver que nos três livros tem opções de como trabalhar a equação do segundo grau de outras formas sem ser a tradicional, assim podemos concluir que tudo depende do professor.

Considerações Finais

Podemos ver que a história da matemática nos proporcionou a observar um avanço nos conceitos de equações do segundo grau e a grande procura dos matemáticos em solucionar o problema.

Vimos que os babilônicos resolviam as equações através da álgebra e não utilizavam da geometria para solucionar seus problemas, já os gregos ao contrário dos babilônicos resolviam seus problemas através da geometria e de mais complicada compreensão.

Os árabes foram os povos que conseguiram utilizar as duas formas de soluções, ele conseguiram contribuir tanto na álgebra quanto na geometria, logo depois disso outros matemáticos conseguiram melhorar o procedimento usado pelos árabes, como o desenvolvimento da álgebra simbólica.

Conseguimos observar também que a história da matemática especificando equações do segundo grau também se encontra nos livros didáticos utilizados pelos alunos da rede pública e basta ao professor trabalhar essa história de maneira prática. Assim os alunos poderão observar que para ele conseguir resolver as equações com facilidade teve todo um processo de estudo dos matemáticos da antiguidade.

Assim podemos ver que as equações do segundo grau foram cada vez mais se aperfeiçoando através da necessidade dos povos da antiguidade e pela busca de solucionar problemas, e que a história é uma grande ferramenta para professores, porém, não é empregada nas escolas da rede pública.

Vimos no trabalho que existiram muitos métodos antes de se chegar à fórmula resolutiva da equação do segundo grau, mas o método que mais se aborda nos livros didáticos é o método de completar quadrados até por ser bem mais simples de se visualizar geometricamente.

Podemos destacar então que os livros trazem contextos importantes para que os alunos possam estudar basta o professor trabalhar as situações para poder interagir com os estudantes e poder vivenciar o percurso histórico que levou os matemáticos na construção dos modelos que são utilizados. Essa vivência poderá tornar a compreensão dos conceitos da álgebra mais significativos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BIANCHINI.Edwaldo. **Matemática.** São Paulo, SP: Moderna, 2006.

[2] FRAGOSO, Wagner da Cunha. **Uma Abordagem Histórica da Equação do 2º Grau**. RPM.
n. 43. p. 20 a 25. 2000. Disponível em:
<http://200.189.113.123/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/veiculos_de_comunicacao/RPM/RPM43/RPM43_04.PDF > acesso em: 01/08/2012.

[3] GUELLI,Oscar. **CONTANDO A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA: História da Equação do Segundo Grau**. São Paulo,SP: ÁTICA ,1997.

[4] JAKUBOVIC, José & IMENES,Luiz Marcio Pereira & LELLIS, Marcelo Cestari Terra. **Pra que serve matemática? Equação do 2° grau**. São Paulo, SP: Atual, 1992.

[5] MORGADO,José. **Equações do 2° Grau ou Equações Quadráticas**. Centro de Matemática Universidade do Porto. Disponível em:
< http://www.ipv.pt/millenium/16_ect1.htm> acesso em : 23/06/2012

[6] MORI,Iracema & ONAGA,Dulce Satiko. **Matemática: ideias e desafios**. São Paulo, SP: Saraiva, 2009.

[7] OLIVEIRA, Ana Teresa. **A relação Álgebra/Geometria no estudo da equação do 2º grau**.
Revista da Associação de Professores de Matemática. Nº.76. Jan/Fev/2004. Disponível em:
<http://www.presencapedagogica.com.br/site/sistema/as/enviados/PP39.pdf> acesso em: 04/05/2012.

[8] PITOMBEIRA, João Bosco. **Revisitando Uma Velha Conhecida**. Departamento de Matemática. PUC-Rio. p.1 a 41.Disponível em:
<http://pt.scribd.com/doc/11057002/A-Historia-da-Equacao-de-2-grau> acesso em: 21/07/2012.

[9] REFATTI,Liliane Rose & BISOGNIN,Eleni. **Aspectos Históricos e Geométricos da Equação Quadrática**. Ciências Naturais e Tecnológicas p.79-95, 2005. Disponível em :
<http://sites.unifra.br/Portals/36/tecnologicas/2005/Aspectos.pdf> acesso em: 25/07/2012.

[10] SAMPAIO, João C.V. **O Ensino da Álgebra Elementar Através da sua História**. Universidade Federal de São Carlos. P.1-15.Disponivel em:
<www.dm.ufscar.br> acesso em: 15/07/2012.

[11] SOUZA, Joamir Roberto de & PATARO. Patrícia Rosana Moreno. **Vontade de saber matemática**. São Paulo, SP: FTD, 2009.