Aplicabilidade de Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem

Guilherme Vieira Aragão

Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Unidade Universitária de Nova Andradina

Curso de Matemática/ Licenciatura Plena

Orientadora: Ma. **Luciana Kemie Nakayama**

Nova Andradina- MS

2012

Aplicabilidade de Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem

Guilherme Vieira Aragão

Trabalho de Conclusão de curso, do curso de Matemática/ Licenciatura, turno noturno, da Universidade Estadual de Mato grosso do Sul, orientado pela professora Luciana Kemie Nakayama.

Nova Andradina- MS

2012

Aplicabilidade de Equação Diferencial Ordinária de Primeira Ordem

Guilherme Vieira Aragão

Trabalho de conclusão de curso submetido ao corpo docente da unidade universitária de Nova Andradina da Universidade Estadual de Mato grosso do Sul-UEMS-MS, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Luciana Kemie Nakayama- UEMS ....
(Orientadora)

Prof. Lucineide K. Nakayama de Andrade- UNESPAR/FAFIPA ....

Prof. Pedro Flávio S. Othechar- UEMS ....

Nova Andradina

2012

Ora, a fé é o firme fundamento das coisas que se esperam e a prova das coisas que não se veem. Porque por ela os antigos alcançaram bom testemunho. Pela fé entendemos que os mundos foram criados pela palavra de Deus; de modo que o visível não foi feito daquilo que se vê. HEBREUS 11:1-3, Bíblia Sagrada.

Agradecimento

Primeiramente agradeço a Deus pela força e saúde que Ele tem dado a mim para concluir mais esta etapa de minha vida. Agradeço especialmente a minha orientadora Professora Luciana Kemie Nakayama pela sua atenção e paciência durante este período de estudos. Agradeço também, aos Professores do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - Unidade de Nova Andradina, que tanto me ajudaram ao longo desses anos, na construção e desenvolvimento de todo meu conhecimento matemático. Agradeço à minha classe, que levo dela, grandes parceiros, amigos para vida toda. E finalizando agradeço a minha família pelo incentivo e compreensão durante esse período de ausência em nossas reuniões familiares.

RESUMO

Este trabalho apresenta métodos de resolução de equações diferenciais de primeira ordem de variáveis separáveis, equações lineares, equações exatas e de Bernoulli, bem como aplicações em varias áreas do conhecimento, como a engenharia, a física, a economia, ciências biológicas, entre outras.
Palavras-Chave : Equação diferencial, equação linear, equação exata, equação de Bernoulli e aplicações.

ABSTRACT

This paper presents methods for solving differential equations of first order variables separable, linear equations, exact equations and Bernoulli, as well as applications in various areas of knowledge such as engineering, physics, economics, life sciences, among others.
Keywords: Differential equation, linear equation, exact equation, Bernoulli's equation and applications.

Índice

Introdução

Este trabalho tem por objetivo mostrar aplicações das equações diferenciais ordinárias (E.D.O.) de primeira ordem através de exemplos práticos. Além disso, trazendo um pequeno resumo histórico das equações diferenciais iniciado com Leonhard Euler, que obviamente não foi o único a tratar deste tema. Grandes outros nomes surgem com contribuições notáveis no desenvolvimento da matemática, como é o caso de Fermat, Newton, Leibniz, entre outros.

O campo das equações diferenciais é muito amplo e ainda hoje bastante explorado por matemáticos que estudam a área de análise, como o espanhol Enrique Zuazua, o matemático Francês Roberto Triggiani e Irena Lasiecka também francesa.

Mostraremos a parte inicial do trabalho com equações diferenciais partindo dos métodos de solução de E.D.O de primeira ordem, iniciando com as equações de variáveis separáveis. Posteriormente os métodos de resolução de equações exatas, lineares e de Bernoulli, além do teorema de Existência e Unicidade para uma E.D.O. de primeira ordem.

Fechamos este trabalho de conclusão de curso com aplicações das equações diferenciais ordinárias por meio de exemplos resolvidos dentro de diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, na física, na economia, na engenharia e na própria matemática que vem mostrar na prática ouso dos conceitos tratados nos primeiros cursos de cálculo de um acadêmico de matemática.

Capítulo 1

Um breve histórico das Equações Diferencias

Após um longo período de congelamento do pensamento humano proporcionado pela igreja e suas inquisições, a Europa volta a produzir matemática em um período que é considerado por muitos historiadores como século de ouro, onde à recordes de produções e descobertas matemáticas.

Dois grandes nomes podemos destacar dentre tantos outros, Sir Isaac Newton (1643-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716), considerado por muitos como "pais"do cálculo, importante ferramenta de auxílio em várias áreas das ciências exatas. A história conta-nos que Newton e Leibniz desenvolveram suas descobertas em trabalhos totalmente independentes e quase que simultâneo. O Cálculo auxilia em vários conceitos e definições na matemática, química, física clássica, física moderna e economia e tem inicialmente três operações-base, ou seja, possui áreas iniciais como o cálculo de limites, o cálculo de derivadas de funções e a integral de diferenciais.

As equações diferenciais, apresentada neste trabalho, é o coração do cálculo, um dos mais importantes ramos da matemática nestes últimos 300 anos. Um dos mais importantes nomes deste assunto é Leonhard Euler. É certo que outros matemáticos também contribuíram para desenvolver as ideias que estão envolvidas no conceito de equação diferencial tanto antes de Euler quanto depois para desenvolver e refinar suas ideias. Podemos citar Fermat, Newton e Leibniz que ao desenvolver e compreender o conceito de derivadas deram os primeiros passos para que elas aparecessem vinculadas a equações.

Com o teorema fundamental do cálculo foi possível solucionar as equações de variáveis separáveis tais equações foram estudadas por Jacques Bernoulli e generalizadas por Leibniz.

Bernoulli no início do século XVIII estudou cuidadosamente e escreveu equações diferenciais para o movimento planetário, usando os princípios de gravidade e momento desenvolvidos por Newton. As equações diferenciais estavam diretamente ligadas com outros tipos de matemática e ciências para resolver problemas aplicados nas diversas áreas do conhecimento. Bernoulli chegou a estudar os casos da equação de Ricatti.

Na mesma época, Taylor usou séries para resolver equações diferenciais. Contudo, o desenvolvimento de Taylor de diferenças finitas começou um novo ramo da matemática intimamente relacionado com as equações diferenciais. Muitos outros matemáticos tinham construído diversas técnicas para analisar e resolver variedades de equações diferenciais. Porém, muitas equações ainda eram desconhecidas em propriedades e métodos de resolução. Neste início de estudos, as equações diferenciais trouxeram progresso considerável, mas não havia uma teoria formal para casos gerais.

Em grande parte dos casos, técnicas de soluções iludiram os estudiosos que por 50 anos perseguiram este assunto, quando Leonhard Euler entra no estudo das equações diferenciais. Como já citado, Euler teve o benefício dos trabalhos anteriores, mas a chave para seu entendimento era seu conhecimento e percepção que ele havia desenvolvido no que diz respeito às funções. Rapidamente descobriu que as funções eram a chave para entender equações diferenciais e desenvolver métodos para suas resoluções. Foi o primeiro a compreender as propriedades das diversas funções exponenciais, logarítmicas, trigonométricas e muitas outras. Euler também desenvolveu várias funções novas baseadas em soluções em séries de tipos especiais de equações diferenciais, suas técnicas foram fundamentais para desenvolver este assunto.

Depois de Euler vieram muitos especialistas que refinaram ou estenderam muitas das ideias de originais. D'Alembert, aplicou equações diferenciais parciais em física. Lagrange, que desenvolveu mais teoria e estendeu os resultados na mecânica. Laplace, e seu trabalho sobre a estabilidade do sistema solar levou a grandes avanços. Legendre, aplicou as equações diferenciais no movimento de projéteis, trabalhou com resistência do ar e velocidades iniciais. Lacroix, que trabalhou em avanços nas equações diferenciais parciais e incorporou muitos dos avanços. Fourier e sua pesquisa ao estudo da difusão de calor e à solução de equações diferenciais. Charles

Babbage, que usou diferenças finitas para aproximar soluções de equações. Gauss, que usou equações diferenciais para melhorar as teorias das órbitas planetárias e gravitação. Cauchy aplicou equações diferenciais para modelar a propagação de ondas sobre a superfície de um líquido. Estes, entre tantos outros, contribuiram em larga escala com o desenvolvimento do cálculo e principalmente das equações diferenciais que hoje é aplicada de diversas formas, em diversas áreas do conhecimento científico desenvolvido até o presente século.

Capítulo 2

Alguns métodos de resolução de uma E.D.O. de primeira ordem

Durante anos, muitos matemáticos se esforçaram para resolver diversos tipos particulares de equações. Por isso, há vários métodos de solução; o que funciona para um tipo de equação de primeira ordem não se aplica necessariamente a outros tipos de equação. Embora consideremos diversos métodos de solução para equação diferencial, centralizamos nossa atenção em alguns destes, que necessários nas aplicações.

2.1 Variáveis Separáveis

Na resolução de uma equação diferencial, frequentemente será usado a integração por partes, frações parciais ou possíveis substituições. Se $g(x)$ é uma função contínua dada, então a equação de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{2.1}$$

Podendo ser resolvida por integração. A solução para (2.1) é

$$y = \int g(x)dx + c\,.$$

A equação (2.1), bem como o seu método de resolução, é apenas um caso especial de equação diferencial ordinária de primeira ordem.

Definição 2.1. ***Equação Separável:*** *uma equação diferencial da forma*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

é chamada ***separável*** *ou tem* ***variáveis separáveis****.*

Observe que uma equação separável pode ser escrita como

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \tag{2.2}$$

fica claro que (2.2) se reduz a (2.1) quando $h(y) = 1$.

Agora, se $y = f(x)$ denota uma solução para (2.2), temos

$$h(f(x))f'(x) = g(x)$$

logo,

$$\int h(f(x))f'(x)dx = \int g(x)dx + c. \tag{2.3}$$

Mas $dy = f'(x)dx$, assim (2.3) é o mesmo que

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c. \tag{2.4}$$

A equação (2.4) indica o procedimento na resolução para equações diferenciais separáveis. Uma família a um parâmetro de soluções (ver figura 2.1) é obtida integrando ambos os lados de $h(y)dy = g(x)dx$. Como é percebido, não se usa duas constantes de integração em uma equação separável pois,

$$\begin{aligned}\int h(y)dy + c_1 &= \int g(x)dx + c_2\\ \int h(y)dy &= \int g(x)dx + c_2 - c_1\\ \int h(y)dy &= \int g(x)dx + c\end{aligned}$$

em que c é totalmente arbitrário dentro dos $\mathbb{R}$. Ver referência [6].

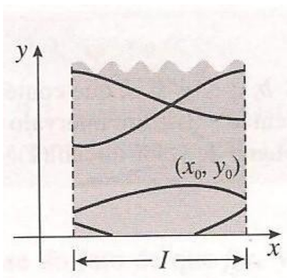

Figura 2.1: Soluções de uma equação diferencial Ordinárias de Primeira ordem. Fonte: Zill, Dennis. G; CULLEN, Michael.R. **Equações Diferenciais.** Volume 1. 3 ed. São Paulo: Makron Books, 2005.

2.2 Equações Exatas

Mesmo que a equação $ydx+xdy = 0$ seja separável, é possível ver que ela também é equivalente à diferencial do produto entre x e y, isto é, $ydx + xdy = d(xy) = 0$. Por integração, obtemos a solução implícita $x.y = c$.

Se $z = f(x, y)$ é uma função com derivadas parciais contínuas em uma região R do plano xy, então sua $diferencial\ total$ é

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \tag{2.5}$$

Agora, se $f(x, y) = c$, segue-se de (2.5) que

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0. \tag{2.6}$$

Ou seja, dada uma família de curvas $f(x, y) = c$, podemos gerar uma equação diferencial de primeira ordem através do cálculo da diferencial total.

Definição 2.2. ***Equação Exata:*** *uma expressão diferencial na forma*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

é uma ***diferencial exata*** *em uma região R do plano xy se ela corresponde à diferencial total de alguma função $f(x, y)$. Uma equação diferencial na forma*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

é chamada de uma ***equação exata*** *se a expressão do lado esquerdo é uma diferencial exata.*

Teorema 2.1. ***Critério para uma Diferencial Exata:***

Sejam $M(x, y)$ e $N(x, y)$ funções contínuas com derivadas parciais contínuas em uma região retangular R definida por $a < x < b$, $c < y < d$. Então, uma condição necessária e sufiiente para que ***M(x,y)dx + N(x,y)dy*** *seja uma diferencial exata* *é*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2.7}$$

Demonstração: Suponha que $M(x,y)$ e $N(x,y)$ tenham derivadas parciais de primeira ordem contínuas em todo plano (x,y). Agora, se a expressão $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ é exata, existe alguma função f tal que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

para todo (x,y) em $\mathbb{R}^2$. Logo,

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad , \quad N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

e

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\right] = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

A igualdade das derivadas parciais mistas é uma consequência da continuidade das derivadas parciais de primeira ordem de $M(x,y)$ e $N(x,y)$.

A prova da suficiência do teorema, consiste em mostrar a que existe uma função f tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$, que leva a um procedimento básico na resolução para equações exatas. Ver referência [6].

$\square$

2.3 Equações Lineares

Definimos a forma geral para uma equação diferencial linear de ordem n como,

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x) = g(x).$$

Vale lembrar, que a linearidade significa que todos os coeficientes são funções de x somente, e que y e todas suas derivadas são elevadas à primeira potência. Quando $n = 1$, obtemos uma equação linear de primeira ordem.

Definição 2.3. *Uma equação diferencial na forma*

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \;\;, \;\; \textit{para todo } a_1(x) \neq 0$$

é chamada de ***equação diferencial linear****.*

Encontramos a forma mais útil da equação linear dividindo-a pelo coeficiente $a_1(x)$, restando

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \tag{2.8}$$

onde $P(x) = \dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$ e $f(x) = \dfrac{g(x)}{a_1(x)}$.

Fator de Integração: Usando diferenciais e supondo que a equação (2.8) tenha uma solução, podemos escrevê-la como

$$dy + [P(x)y - f(x)]dx = 0. \tag{2.9}$$

Se a equação (2.9) é exata, já sabemos resolver. Caso contrário iremos transformá-la em uma equação exata através do fator integrante.

Equações lineares possuem a propriedade através da qual podemos encontrar uma função $\mu(x)$ em que

$$\mu(x)dy + \mu(x)[P(x)y - f(x)]dx = 0 \tag{2.10}$$

é uma equação diferencial exata. De fato, pelo Teorema (2.1) a equação (2.10) é uma equação exata se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\mu(x) &= \frac{\partial}{\partial x}\mu(x)[P(x)y - f(x)]dx \qquad (2.11) \\ \frac{d\mu}{dy} &= \mu P(x). \end{aligned}$$

Esta é uma equação separável em que podemos determinar $\mu(x)$. Temos

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{\mu} &= P(x) \\ \ln|\mu| &= \int P(x)dx \\ \mu(x) &= e^{\int P(x)dx}. \qquad (2.12) \end{aligned}$$

A função $\mu(x)$ definida em (2.12) é um **fator integrante** para a equação linear. Vale observar que (2.10) é ainda uma equação diferencial exata mesmo quando $f(x) = 0$ pois $f(x)$ não tem papel algum na determinação de $\mu(x)$, pois em (2.11) $(\partial/\partial y)\mu(x)f(x) = 0$. Logo,

$$e^{\int P(x)dx}dy + e^{\int P(x)dx}[P(x)y - f(x)]dx$$

e

$$e^{\int P(x)dx}dy + e^{\int P(x)dx}P(x)ydx$$

são diferenciais exatas. Escrevendo (2.10) na forma

$$e^{\int P(x)dx}dy + e^{\int P(x)dx}P(x)ydx = e^{\int P(x)dx}f(x)dx$$

e podemos escrevê-la como

$$d[e^{\int P(x)dx}y] = e^{\int P(x)dx}f(x)dx.$$

Integrando a última equação, temos

$$e^{\int P(x)dx}y = \int e^{\int P(x)dx}f(x)dx + c.$$

Dividindo ambos os lados da igualdade por $e^{\int P(x)dx}$ temos

$$y = e^{-\int P(x)dx}\int e^{\int P(x)dx}f(x)dx + ce^{-\int P(x)dx}. \tag{2.13}$$

Assim dizemos que se (2.8) tiver uma solução, ela deverá ser da forma (2.13). Ver referência [6].

2.4 Equação de Bernoulli

Uma das três clássicas diferenciais, a equação de Bernoulli [1] dá-se por,

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n\,, \tag{2.14}$$

em que n é um número real qualquer. Para $n = 0$ e $n = 1$ a equação (2.14) é linear em y. Agora, se $y \neq 0$, (2.14) pode ser escrita como

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = f(x). \tag{2.15}$$

[1] Jacques Bernoulli (1654-1705) Os Bernoullis foram uma família suíça de acadêmicos cujas contribuições à matemática, física, astronomia e história datam do século XVI ao século XX. Jacques, o primeiro dos dois filhos do patriarca Jacques Bernoulli, deu várias contribuições ao cálculo e à probabilidade. Originalmente, a segunda das duas divisões principais do cálculo era chamada de *calculus summatorius*. Em 1696, por sugestão de Jacques Bernoulli (filho), este nome foi mudado para *calculus integralis*, como é conhecido atualmente.

Se fizermos $w = y^{1-n}\,,\ n \neq 0\,,\ n \neq 1$, então

$$\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

Com essa substituição, temos que (2.15) transforma-se na equação linear

$$\frac{dw}{dx} + (1-n)P(x)w = (1-n)f(x). \tag{2.16}$$

Resolvendo (2.16) e depois fazendo $y^{1-n} = w$, obtemos uma solução para (2.14). Ver referência [6]

2.5 Existência e Unicidade para Problema de Valor Inicial

2.5.1 Preliminares

Problema de Valor Inicial (PVI)

Estamos interessados em resolver uma equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y)$$

sujeita à condição inicial $y(x_0) = y_0$, em que x_0 é um número no intervali I e y_0, é um número real arbitrário.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} & = & f(t,y) \\ y(t_0) & = & y_0 \end{cases} \tag{2.17}$$

Na figura abaixo 2.2 vemos a solução da equação sujeita a condição inicial dada no problema (2.17).

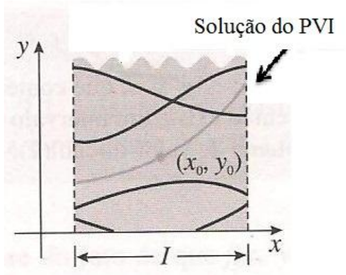

Figura 2.2: Soluções de um problema de valor inicial (PVI).
Fonte: Zill, Dennis. G; CULLEN, Michael.R. **Equações Diferenciais.** Volume 1. 3 ed. São Paulo: Makron Books, 2005.

Demonstraremos a seguir o teorema que garante a existência e a unicidade de solução para o problema (2.17).

Lema 2.1. *Se* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *é contínua no retângulo*

$$R = (t, y) \in \mathbb{R}^2 | \alpha < t < \beta \, ; \, \delta < y < \gamma$$

então existe uma constante positiva (a) tal que

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq a|y - z| \ ,$$

para $\alpha < t < \beta$ *e* $\delta < y, z < \gamma$.

Demonstração*:* *Seja t fixo, tal que* $\alpha < t < \beta$*. Pelo Teorema do Valor Médio, dados y e z com* $\delta < y, z < \gamma$ *existe* ξ *entre y e z tal que*

$$f(t, y) - f(t, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi)(y - z). \tag{2.18}$$

Seja $a = \max_{\gamma < \omega < \delta} \left| \dfrac{\partial f}{\partial y}(t, \omega) \right|$*. Tomando-se o módulo da equação (2.18), obtemos*

$$|f(t, y) - f(t, z)| = \left| \frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi) \right| |y - z| \leq a|y - z|.$$

$\square$

Lema 2.2. *Se* $f(t,y)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *são contínuas no retângulo*

$$R = (t,y) \in \mathbb{R}^2 | \alpha < t < \beta\,;\, \gamma < y < \delta$$

e a *e* b *são constantes positivas tais que*

$$|f(t,y)| \leq b,\;\; |f(t,y) - f(t,z)| \leq a|y-z|,$$

para $\alpha < t < \beta$ *e* $\delta < y, z < \gamma$*. então existem* α' *e* β' *com* $\alpha \leq \alpha' < t_0 < \beta' \leq \beta$ *tais que a sequência*

$$y_0(t) = y_0, \quad y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f[s, y_{n-1}(s)]ds,\; para\; n = \;1,\;2,\;...$$

satisfaz $\delta < y_n(t) < \gamma$ *sempre que* $\alpha' < t < \beta'$.

Demonstração*:*

Seja α' *o máximo entre* α*, o valor de* $t < t_0$ *tal que* $\dfrac{b}{a}(e^{a|t-t_o|} - 1) = \gamma$ *e o valor de* $t < t_o$ *tal que* $-\dfrac{b}{a}(e^{a|t-t_o|} - 1) = \delta$*. Seja* β' *o mínimo entre* β*, o valor de* $t > t_o$ *tal que* $\dfrac{b}{a}(e^{a|t-t_o|} - 1) = \gamma$ *e o valor de* $t > t_o$ *tal que* $-\dfrac{b}{a}(e^{a|t-t_o|} - 1) = \delta$*.*

Vamos mostrar, por indução que

$$|y_n(t) - y_0| \leq \frac{b}{a}(e^{a|t-t_o|} - 1),\; para\; \alpha' < t < \beta'$$

e assim que $\delta < y_n(t) < \gamma$*, para* $\alpha' < t < \beta'$*.*

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_0| &\leq b|t - t_0| \\ &\leq b\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}|t-t_o|^n}{n!} = \frac{b}{a}(e^{a|t-t_o|} - 1). \end{aligned}$$

Vamos supor, por indução, que

$$\begin{aligned} |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| &\leq a^{n-2} b \frac{|t-t_o|^{n-1}}{(n-1)!} \\ |y_k(t) - y_0| &\leq \frac{b}{a}(e^{a|t-t_0|} - 1). \end{aligned}$$

para $k = 1, 2, ..., n-1$ *e* $\alpha' < t < \beta'$ *e assim que* $\delta < y_k(t) < \gamma$, *para* $k = 1, 2, ..., n-1$ *e* $\alpha' < t < \beta'$. *Então*

$$|y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq a^{n-2} b \frac{|t-t_o|^n}{n!}$$

e assim

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_0| &\leq \sum_{k=1}^{n} |y_k(t) - y_{k-1}(t)| \\ &\leq b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}|t-t_o|^n}{n!} = \frac{b}{a}(e^{a|t-t_o|} - 1). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2. ***Existência e Unicidade:***

Considere o problema de valor inicial (2.17). Se $f(t, y)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *são contínuas no retângulo*

$$R = [(t, y) \in \mathbb{R}^2 | \alpha < t < \beta \,;\, \delta < y < \gamma] \ \ \textit{contendo } (t_o, y_0),$$

então o problema (2.17) tem uma única solução em um intervalo t_0.

Demonstração*:*

(a) Existência. *Vamos definir a sequencia de funções* $y_n(t)$ *por*

$$y_0(t) = y_0, \quad y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds, \ \textit{para } n = \ 1, \ 2, \ ...$$

Como $f(t,y)$ *é contínua no retângulo R, existe uma constante positiva* b *limitado, tal que*

$$|f(t,y)| \leq b, \ \ para \ (t,y) \in \mathbb{R}.$$

assim

$$|y_1(t) - y_0| \leq b|t - t_o| \ , \ para \ \alpha < t < \beta.$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *é contínua no retângulo R, pelo lema (2.1) existe uma constante positivaa tal que*

$$|f(t,y) - f(t,z)| \leq a|y - z|, \ para \ \alpha < t < \beta \ e \ \delta < y, z < \gamma$$

assim,

$$\begin{aligned}
|y_2(t) - y_1(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f[s, y_1(s)] - f[s, y_0(s)]| ds \\
&\leq a \int_{t_0}^{t} |y_1(s) - y_0| ds \leq ab \int_{t_0}^{t} |s - t_0| ds = ab \frac{|t - t_0|^2}{2}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|y_3(t) - y_2(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} f[s, y_2(s)] - f[s, y_1(s)] ds \\
&= a \int_{t_0}^{t} |y_2(s) - y_1| ds \leq a^2 b \int_{t_0}^{t} \frac{|s - t_0|^2}{2} ds = a^2 b \frac{|t - t_0|^3}{6}.
\end{aligned}$$

Vamos Supor por indução, que

$$|y_{n-1}(t) - y_{n-2}| \leq a^{n-2} b \frac{|t - t_0|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Então

$$\begin{aligned} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} f[s, y_{n-1}(s)] - f[s, y_{n-2}(s)] ds \\ &\leq a \int_{t_0}^{t} |y_{n-1}(s) - y_{n-2}(s)| ds \\ &\leq a \int_{t_0}^{t} a^{n-2} b \frac{|s - t_0|^{n-1}}{(n-1)!} ds = a^{n-1} b \frac{|t - t_0|^n}{n!}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Estas desigualdades são validas para $\alpha \leq \alpha' < t < \beta' \leq \beta$ em que α' e β' são tais que $\delta < y_n(t) < \gamma$ sempre que $\alpha' < t < \beta'$.

Segue então de (2.19) que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n(t) - y_{n-1}(t)| \leq b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}(\beta - \alpha)^n}{n!}$$

o que é convergente. Como

$$y_n(t) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (y_k(t) - y_{k-1}(t)),$$

então $y_n(t)$ é convergente. Seja

$$y(t) = \lim_{n \to \infty} y_n(t).$$

Como

$$|y_m(t) - y_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |y_k(t) - y_{k-1}(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!},$$

então passando o limite quando m tende a infinito, obtemos

$$|y(t) - y_n(t)| \leq b \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!}. \tag{2.20}$$

Logo dado um $\epsilon > 0$, para n suficientemente grande, $|y(t) - y_n(t)| \leq \frac{\epsilon}{3}$, para $\alpha' < t < \beta'$.

Assim $y(t)$ é contínua, pois dado um $\epsilon > 0$, para s suficientemente próximo de t, temos que $|y_n(t) - y_n(s)| < \dfrac{\epsilon}{3}$ e para n suficientemente grande $|y(t) - y_n(t)| < \dfrac{\epsilon}{3}$ e $|y(s) - y_n(s)| < \dfrac{\epsilon}{3}$, o que implica

$$|y(t) - y(s)| \leq |y(t) - y_n(t)| + |y_n(t) - y_n(s)| + |y_n(t) - y(s)| < \epsilon\,.$$

Além disso $\alpha' < t < \beta'$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds = \int_{t_0}^{t} f(s, \lim_{n\to\infty} y_n(s))ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds\,,$$

pois, por (2.20), temos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds - \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds\right| &\leq \int_{t_0}^{t} f(s, y_n(s))ds - f(s, y(s))ds\\ &\leq a\int_{t_0}^{t} |y_n(s) - y(s)|ds\\ &\leq ab(t - t_0)\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a^{k-1}(\beta - \alpha)^k}{k!}.\end{aligned}$$

que tende a zero quando n tende ao infinito. Portanto

$$\begin{aligned}y(t) &= \lim_{n\to\infty} y_n(t) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, y_{n-1}(s))ds\\ &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \lim_{n\to\infty} y_{n-1}(s))ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds. \qquad (2.21)\end{aligned}$$

Derivando (2.21) em relação a t, obtemos $y(t)$, que é a solução do problema de valor inicial (2.17).

(b) Unicidade. *Vamos supor que $y(t)$ e $z(t)$ sejam soluções do problema de valor inicial. Seja*

$$u(t) = \int_{t_0}^{t} |y(s) - z(s)|ds\ .$$

Assim como

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} y'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds$$
$$z(t) = \int_{t_0}^{t} z'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, z(s))ds$$

então

$$\begin{aligned} u'(s) &= |y(t) - z(t)| \le \int_{t_0}^{t} |y'(s) - z'(s)|ds \\ &= \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))|ds \le a \int_{t_0}^{t} |y(s) - z(s)|ds \end{aligned}$$

ou seja,

$$u'(t) \le au(t).$$

Subtraindo-se $au(t)$ *e multiplicando-se por* e^{-at}*, obtemos*

$$\frac{da}{dt}\left(e^{-at}u(t)\right) \le 0\,,\ \textit{com}\ u(t_0) = 0\,.$$

Isto implica que $e^{-at}u(t) = 0\,(e^{-at} \ge 0)$*, portanto* $u(t) = 0$*, para todo* t*.*

Assim $y(t) = z(t)$*, para todo* t*.* $\square$

2.6 Teorema Fundamental do Cálculo

O teorema a seguir mostra como calcular a integral definida de uma função contínua, desde que possamos encontrar uma antiderivada desta função. Devido à sua importância em estabelecer a relação entre diferenciações e integração, este teorema, descoberto independentemente por *sir* Isaac Newton (1642-1727) na Inglaterra e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) na Alemanha, é chamado de:

Teorema 2.3. ***Teorema Fundamental do Cálculo***

Seja f contínua em $[a, b]$. Então,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

onde F é uma antiderivada qualquer de f, isto é $F'(x) = f(x)$.

Demonstração: Ver referência [4]. $\square$

Capítulo 3

Aplicações de uma E.D.O. de primeira ordem

O questionamento de alguns estudantes de matemática com relação às Equações Diferenciais versa em torno da aplicabilidade dos conceitos aprendidos durante a graduação. O objetivo é resolver alguns desses questionamentos, não somente na matemática, mas também em outras áreas que se utiliza da aplicação de uma EDO, como por exemplo, os físicos, químicos, engenheiros. Porém no intuito de conhecer a aplicabilidade do conteúdo faz-se necessário o estudo mais aprofundado.

3.1 Crescimento e Decrescimento

O problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = kx, \\ \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

em que k é uma constante, ocorre em muitas teorias físicas envolvendo **crescimento** ou **decrescimento**. Por exemplo, em biologia, é frequentemente observado que a taxa de crescimento de certas bactérias é proporcional ao número de bactéria presentes num dado instante. Durante um curto intervalo de tempo, a população de pequenos animais, tais como roedores, pode ser prevista com alto grau de precisão pela solução para (3.1). Em física, um problema de valor inicial como (3.1) proporciona um modelo para o cálculo aproximado da quantidade remanescente de uma substância que está sendo desintegrada através de radioatividade. A equação diferencial em (3.1) pode ainda determinar a temperatura de um corpo em resfriamento. Em química, a quantidade remanescente de uma substância durante certas reações também pode ser descrita por (3.1).

A constante de proporcionalidade k em (3.1) é positiva ou negativa e pode ser determinada pela solução para o problema usando um valor subsequente de x em um instante $t_1 > t_0$.

Exemplo 3.1. *Em uma cultura, há inicialmente N_0 bactérias. Uma hora depois, $t = 1$, o número de bactérias passa a ser $\left(\frac{3}{2}\right) N_0$. Se a taxa de crescimento é proporcional ao número de bactérias presentes, determine o tempo necessário para que o número de bactérias triplique. Ver referência [6].*

Solução:

Primeiro, resolvemos a equação diferencial

$$\frac{dN}{dt} = kN \tag{3.2}$$

com $N(0) = N_0$.

Então, $N(1) = \left(\frac{3}{2}\right) N_0$ para determinar a constante de proporcionalidade k. Agora, (3.2) é separável e linear pois,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{dN} dN &= \int k dt \\ \ln|N| &= k.t + w. \end{aligned}$$

Agora, aplicando a exponencial temos,

$N = e^{kt+w} = e^{kt}.e^{w} = C.e^{kt}$ portanto $N = C.e^{kt}$.

Se $t = 0$, então, $N_0 = C.e^{k.0} = C.e^0 = C$. Como $C = N_0$, então

$$N = N_0.e^{kt} \tag{3.3}$$

para $t = 1$ temos que $\left(\frac{3}{2}\right) N_0$, igualando à (3.3) temos,

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} N_0 &= N_0.e^{k.(1)} \\ \frac{3}{2} &= e^k. \end{aligned}$$

Aplicando propriedades de ln na equação temos,

$$\ln|3/2| = \ln|e|^k \Longrightarrow \ln|3/2| = k.\ln|e| \Longrightarrow \ln|3/2| = k.1$$

$$k = \ln|3/2| \Longrightarrow k = 0,405$$

temos assim o valor da constante de proporcionalidade (k), substituindo k em (3.3) temos

$$N = N_0.e^{0,405(t)}.$$

Para triplicar o número de bactérias basta multiplicar N_0 por 3.

$$3.N_0 = N_0.e^{0,405(t)} \Longrightarrow 3 = e^{0,405(t)}$$

aplicando propriedades de ln na equação temos,

$$\begin{aligned}
\ln|3| &= \ln|e|^{0,405(t)} \\
\ln|3| &= 0,405(t).\ln|e| \\
\ln|3| &= 0,405t \\
t &= \frac{\ln|3|}{0,405} \\
t &= \frac{1,098}{0,405} \\
t &\cong 2,71 \;\; horas.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.2. *A gerencia da Staedtler Office Equipament determinou que a função custo marginal diário associada à produção de apontadores de lápis a bateria é dada por* $C'(x) = 0,000006x^2 - 0,006x + 4$ *onde* $C'(x)$ *é medida em dólares por unidade e* x *denota o número de unidades produzidas. A gerência também determinou que o custo fixo diário envolvido na produção destes apontadores de lápis é de $ 100 dólares. Determine o custo total diário da Staedtle para produzir:*

a)*as primeiras 500 unidades;*

b) *da unidade 201 à unidade 400.*

Ver referência [5].

Solução: (a) *Como* $C'(x)$ *é uma função custo marginal, sua antiderivada* $C(x)$ *é a Função custo total. O custo fixo diário envolvido na produção dos apontadores de lápis é de* $C(0)$ *dólares. Como o custo fixo diário é de $ 100 dólares, temos que* $C(0) = 100$*. Devemos calcular* $C(500)$*. Calcularemos* $C(500) - C(0)$*, a variação líquida da função custo total* $C(x)$ *sobre o intervalo* $[0\,,\,500]$.

Usando o teorema fundamental do cálculo (2.3), deduzimos que

$$
\begin{aligned}
C(500) &= \int_0^{500} C'(x)dx \\
&= \int_0^{500} (0,000006x^2 - 0,006x + 4)dx \\
&= (0,000002x^3 - 0,003x^2 + 4x)\,\Big|_0^{500} \\
&= [0,000002(500)^3 - 0,003(500)^2 + 4(500)] - [0,000002(0)^3 - 0,003(0)^2 + 4(0)] \\
&= 1500.
\end{aligned}
$$

Portanto, $C(500) = 1500 + C(0) = 1500 + 100 = 1600$*, de modo que o custo total diário que a empresa tem ao produzir* 500 *apontadores de lápis é de \$1600 dólares.*

(b) *O custo total diário que a Staedtles tem na produção da unidade 201 à unidade 400 de apontadores de lápis a bateria é dado por*

$$
\begin{aligned}
C(400) - C(200) &= \int_{200}^{400} C'(x)dx \\
&= \int_{200}^{400} (0,000006x^2 - 0,006x + 4)dx \\
&= 0,000002x^3 - 0,003x^2 + 4x\,\Big|_{200}^{400} \\
&= 552
\end{aligned}
$$

ou seja, o valor do custo é de \$ 522 *dólares.*

3.2 O falsificador Van Meegeren

O título de maior falsificador de obras de arte de todos os tempos é dado ao pintor holandês Henricus Antonius Van Meegeren que se especializou em imitar o também holandês Jan Vermeer, um mestre da pintura (1632-1675) que pintou, entre outros, A Dama com brinco de pérolas, a Mona Lisa da Holanda. Em 1937, Van Meegeren terminou o seu Vermeer mais famoso, Os peregrinos de Emaúss. Meegeren teve o cuidado de produzir uma obra que não era muito parecida com o estilo habitual de Vermeer, só se conhecia uma tela religiosa de Vermeer, Cristo na casa de Marta e Maria que foi vendida facilmente pelo fado de que se tinha pouco conhecimento à respeito das obras de Jan Vermeer. Meegeren, vendo o sucesso da sua ideia, não parou, pintou então o A Última Ceia, assinando como Vermeer.

Ao fim da Segunda Guerra Mundial, a Holanda foi retomada pelos aliados que encontraram um destes falsos Vermeers (Cristo e a Adúltera) em uma mina de sal na Áustria. Descobriu-se que o quadro pertencia a Hermann Göring, o número dois do governo nazista. Meegeren foi preso, acusado de traição à pátria. A técnica de Meegeren era apurada, pintava sobre telas envelhecidas de pintores do século XVII, das quais ele raspava a tinta original.

Não satisfeitos, um grupo de cientistas, em 1967, da Carnegie University Mellon deram ênfase ao trabalho de determinar a idade dos quadros pintados por Meegeren. O físico Rutherford descobriu que os átomos de certos elementos radioativos são instáveis, e com o passar do tempo essas substâncias se desintegram. Entendendo que a radioatividade é uma propriedade do átomo, Rutherford mostrou que a radioatividade de uma substância é diretamente proporcional ao número de átomos presentes na mesma.

Assim, se $N(t)$ denota o número de átomos existentes no tempo $t, \dfrac{dN}{dt}$, o número de átomos que se disintegra por unidade de tempo é proporcional a N, assim tem-se

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N. \tag{3.4}$$

A constante positiva λ é conhecida como constante de decaimento radioativo da substância, ou seja, quanto o valor de λ mais rápido a substância decairá. A medida da taxa de desintegração de uma substância é chamada de meia vida, ou seja, tempo que ela se desintegra pela metade da quantidade original. Para calcular a meia vida de uma substância, em função de λ, supõe-se que num tempo t_0, $N(t_0) = N_0$, assim o problema de valor inicial se resolve da forma

$$\begin{aligned} N(t) &= (t_0).e^{-\lambda \int_{t_o}^{t}} = N_0.e^{-\lambda(t-t_o)} \\ \frac{N}{N_0} &= e^{-\lambda(t-t_o)} \Longrightarrow -\lambda(t-t_o) = \ln\left(\frac{N}{N_0}\right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Dessa forma se, $N/N_0 = 1/2$ então

$$(t - t_0) = \ln(2)/\lambda = 0.6931/\lambda. \tag{3.6}$$

Em consequência observamos que a meia vida de uma substância é calculada por ln(2) dividido pela constante de decaimento da mesma. Em todos os casos a constante λ é medida no recíproco da medida do tempo, ou seja, se o tempo for medido em dias λ tem a medida do recíproco de dias, e assim por diante.

Para o caso das pinturas de Megeeren, observamos primeiramente que, todos os pintores por mais de dois mil anos usaram tintas com pequenas quantidades da substância química chumbo 210 (Pb^{210}), e ainda menores de Radio 226 (Ra^{226}).

Vale ressaltar, antes de partirmos para a análise matemática, que Pb^{210} é extraído do chumbo branco e o Ra^{226} é formado por outras substâncias, que ao serem misturadas para obter a tinta, buscam um equilíbrio radioativo, aliás, o decaimento da mistura seria o equilíbrio das meias vidas. Assim sabemos que o tempo de meia vida do (Pb^{210}) é de 22 anos.

Usamos tal informação para calcular a quantidade de chumbo 210 presente numa amostra, em função de uma quantidade original presente na formação. (ver tabela 3.1)

Descrição	Desintegração de Pb^{210}	Desintegração de Ra^{226}
Os Peregrinos de Emmáus	8.5	0.8
Lavagem dos Pés	12.6	0.26
Mulher Lendo Música	10.3	0.3
Mulher Tocando bandolim	8.2	0.17
A Remendeira	1.5	1.4
Mulher Sorridente	5.2	6.0

Tabela 3.1: Pinturas de procedência duvidosa: A desintegração dada em minutos por grama de chumbo branco.
Fonte:

Seja, $y(t)$ a quantidade de Pb^{210} por grama de chumbo branco no tempo t, y_0 a quantidade de Pb^{210} por grama de chumbo branco no tempo de formação t_0, $r(t)$ o número de desintegração do Ra^{226} por minuto e por grama de chumbo branco no tempo t. Se λ é a constante de decaimento do Pb^{210} então

$$\frac{dy}{dx} = -\lambda y + r(t), \quad y(t_0) = y_0.$$

Tendo em vista, neste caso, que interessa apenas o período de 300 anos, supomos que a semi-vida do radio 226 presente na amostra seja constante, pois, seu tempo de meia vida é de 1600 anos. Assim temos que $r(t)$ é uma constante r. Portanto, usando o fator integrante obtemos:

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}.y = re^{\lambda t} \Longrightarrow e^{\lambda t_0}y(t) - e^{\lambda t_0}y_0 = \frac{r}{\lambda}(e^{\lambda t} - e^{\lambda t_0}) \Longrightarrow$$
$$y(t) = \frac{r}{\lambda}(1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + y_0 e^{-\lambda(t-t_0)}. \tag{3.7}$$

Agora, $y(t)$ e r podem ser facilmente medidos assim, se conhecemos y_0, podemos usar a equação (3.7) para calcular $t-t_0$ e determinar a idade da pintura. Consequentemente podemos determinar se a pintura é de Meegeren ou uma pintura originária do século XVII.

Isso pode ser verificado da seguinte forma, se a pintura for datada do século XVII, então a radioatividade do Pb^{210} será quase igual a do Ra^{226}, já se a obra for moderna, então a radioatividade do Pb^{210} será bem maior que a do Ra^{226}. Vamos assumir que uma pintura é ou muito nova ou tem mais de 300 anos, assim se a pintura Os Peregrinos de Emaúss é realmente uma falsificação, basta observarmos que se λy_0 é muito grande; então supomos $t - t_0 = 300$ em (3.7); assim temos

$$\lambda y_0 = \lambda y(t)e^{300\lambda} - r(e^{300\lambda} - 1). \tag{3.8}$$

Para avaliar λy_0, temos que calcular a taxa de desintegração do chumbo 210, $\lambda y(t)$, a taxa de desintegração r do radio 226 e, o valor de $e^{300\lambda}$. Haja vista que, a taxa de desintegração do polônio 210 (Po^{210}), após alguns anos, é igual a do Pb^{210} e é mais fácil de ser medido, podemos assim substituir os respectivos valores, como proposto na Tabela (3.1) Para calcular $e^{300\lambda}$, observamos que $\lambda = \dfrac{\ln(2)}{22}$ e obtemos:

$$e^{300\lambda} = e^{300\lambda.\frac{\ln(2)}{22}} = 2^{\frac{150}{11}}.$$

Recorrendo a Tabela 3.1, agora avaliamos λy_0 a partir da equação (3.8), no quadro.

Os Peregrinos de Emmáus.

$$\lambda y_0 = (8.5)2^{\frac{150}{11}} - 0.8(2^{\frac{150}{11}} - 1) = 98050.$$

O mesmo pode ser feito para outros quadros citados na tabela;

Lavagem de pés

$$\lambda y_0 = (12.6)2^{\frac{150}{11}} - 0.26(2^{\frac{150}{11}} - 1) = 157134.1.$$

Mulher lendo música

$$\lambda y_0 = (10.3)2^{\frac{150}{11}} - 0.3(2^{\frac{150}{11}} - 1) = 127337.2.$$

Mulher tocando bandolim

$$\lambda y_0 = (8.2)2^{\frac{150}{11}} - 0.17(2^{\frac{150}{11}} - 1) = 102251.7.$$

A Rendeira

$$\lambda y_0 = (1.5)2^{\frac{150}{11}} - 1.4(2^{\frac{150}{11}} - 1) = 1274.7.$$

Mulher sorridente

$$\lambda y_0 = (5.2)2^{\frac{150}{11}} - 6(2^{\frac{150}{11}} - 1) = 10181.$$

Podemos observar que as obras, Peregrinos de Emmáus, Lavagem de pés, Mulher lendo música e Mulher tocando bandolim são falsificações modernas de Veermer, entretanto, as obras, A Rendeira e Mulher sorridente não são falsificações de Veermer, como afirmavam os especialistas. Ver referência [3].

3.3 Determinação do Instante da Morte

Na investigação de um homicídio ou morte acidental é muitas vezes importante estimar o instante da morte. Vamos descrever uma forma matemática a partir de observações sabe-se a temperatura superficial de um corpo se altera com uma taxa proporcional à diferença de temperatura entre a do corpo e a temperatura das vizinhanças (temperatura ambiente).

É o que se conhece como lei de resfriamento de Newton. Assim, se $\theta(t)$ for a temperatura do corpo num instante t, e se T é a temperatura constante do ambiente, então θ deve obedecer à equação diferencial,

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = -k[\theta(t) - T] \tag{3.9}$$

onde $k > 0$ é a constante de proporcionalidade. Temos que $\theta(t) - T > 0$. Ver referência [7].

Exemplo 3.3. *Supondo que em um instante $t = 0$ descobre-se um cadáver e que a sua temperatura é medida e igual a θ_0. Admitindo que no instante da morte t_m a temperatura fosse θ_m igual à temperatura normal de 37^oC se (3.9) é válida para modular a situação, basta determinarmos t_m.*

Solução:

$$\begin{cases} \theta' + K\theta &= KT \\ \theta(0) &= \theta_0. \end{cases}$$

Usando os conceitos de equação linear, temos que

$$\theta(t) = e^{-\int p(t)dt}\left[\int q(t).e^{\int p(t)dt}dt + C\right]$$

$$\begin{aligned} p(t) &= k \\ q(x) &= kT \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta(t) &= e^{-kt}\left[\int kT.e^{kt}dt + C\right] \\ \theta(t) &= e^{-kt}\left[kT\frac{e^{kt}}{k} + C\right] \\ \theta(t) &= T + Ce^{-kt}. \end{aligned}$$

Tomando o instante $t = 0$ *temos que* $\theta(0) = \theta_0$, *assim,*

$$\begin{aligned} \theta(0) &= T + C.e^{-k.0} \\ \theta(0) &= T + C = \theta_0 \\ C &= \theta_0 - T \end{aligned}$$

$$\theta = \mathbf{T} + (\theta_\mathbf{0} - \mathbf{T}).\mathbf{e}^{-\mathbf{kt}}.$$

Podemos determinar k *mediante a uma segunda medida da temperatura do corpo num instante* t_1, *suponhamos que* $\theta = \theta_1$ *quando* $t = t_1$

$$\theta_1 = \theta t_1 = T + (\theta_0 - T).e^{-kt_1}$$

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= T + (\theta_0 - T).e^{-kt_1} \\
\theta_1 - T &= (\theta_0 - T).e^{-kt_1} \\
e^{-kt_1} &= \frac{(\theta_1 - T)}{(\theta_0 - T)} \\
\ln(e^{-kt_1}) &= \ln\left(\frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T}\right) \\
-kt_1 &= \ln\left(\frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T}\right) \\
k &= \frac{-1}{t_1}\ \ln\left(\frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T}\right). \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Usando θ_m *como temperatura da morte e* t_m *o instante da morte, temos que*

$$\begin{aligned}
\theta_m &= \theta(t_m) = T + (\theta_0 - T).e^{-kt_m} \\
\theta_m &= T + (\theta_0 n - T).e^{-kt_m} \\
e^{-kt_m} &= \frac{(\theta_m - T)}{(\theta_0 - T)} \\
\ln(e^{-kt_m}) &= \ln\left(\frac{\theta_m - T}{\theta_0 - T}\right) \\
-kt_m &= \ln\left(\frac{\theta_m - T}{\theta_0 - T}\right) \\
t_m &= \frac{-1}{k} \ln\left(\frac{\theta_m - T}{\theta_0 - T}\right) \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

por (3.10) definimos o valor de k*.*

Vamos admitir que a temperatura do corpo fosse $29,4^oC$ *no instante da desco-*

berta e $23,3^oC$ *duas horas depois a temperatura ambiente é de* 20^oC*.*

- $\theta(0) = 29,4^oC = \theta_0$
- $\theta(2) = 23,3^oC = \theta_1$
- $t_1 = 2$
- $T = 20^oC$
- $\theta_m = 37^oC.$

Aplicando os dados em acima em (3.10), temos

$$\begin{aligned} k &= \frac{-1}{t_1} \ln\left(\frac{\theta_1 - T}{\theta_0 - T}\right) \\ k &= \frac{-1}{2} \ln\left(\frac{23,3-20}{29,4-20}\right) \\ k &\cong 0,5234. \end{aligned}$$

Substituindo o valor de k *em (3.11) temos*

$$\begin{aligned} t_m &= \frac{-1}{k} \ln\left(\frac{\theta_m - T}{\theta_0 - T}\right) \\ t_m &= \frac{-1}{0,5234} \ln\left(\frac{37-30}{29,4-20}\right) \\ t_m &= -1,129. \end{aligned}$$

Assim pode-se concluir que o instante da morte nas condições anteriores, dá-se em aproximadamente à 1 *hora a traz.*

3.4 Dinâmica Populacional

Chama-se dinâmica populacional à disciplina que estuda as variações na abundância das populações de seres vivos, estes conceitos são importantes para compreender o que ocorre em diversos meios para que se mantenham em equilíbrio. Para avaliar o desenvolvimento de uma população, é preciso conhecer certos atributos que lhe são característicos, como a taxa de natalidade, a taxa de mortalidade, a taxa de imigração, a taxa de emigração, entre outros fatores.

Utilizando-se dos conceitos das equações diferenciais ordinárias, em especial a equação de Bernoulli, podemos calcular alguns desses fatores como vamos abordar no exemplo a seguir.

Exemplo 3.4. *Em uma cidade com população fixa de P pessoas, a taxa de variação do número N de pessoas que contraíram certa doença é proporcional ao produto número de pessoas que tem a doença pelo número de pessoas que não tem. Ver referência [1].*

Solução: *Escrevendo uma E.D.O como modelo para a situação temos:*

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= K.N.(P-N) \\ \frac{dN}{dt} &= K.N.P - K.N^2 \\ \frac{dN}{dt} - K.N.P &= -K.N^2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Percebemos claramente que (3.12) trata-se de uma equação de Bernoulli. Resolvendo, $\mu = N^{1-n}$, tomando $n = 2$ temos que

$$\begin{aligned} \mu &= N^{1-2} \\ \mu &= N^{-1} \\ \mu &= \frac{1}{N}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Calculando a derivada de μ temos

$$\mu' = -N^{-2}.N'.$$

Dividindo ambos os lados da equação (3.12) por N^2, temos que

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt}.N^{-2} - K.P.N^{-1} &= -K \\ N'.N^{-2} - K.P.N^{-1} &= -K. \end{aligned}$$

Utilizando (3.13) e sua derivada, temos

$$-\mu' - K.P.\mu = -K$$

Assim, temos uma equação linear. Resolvendo temos que

$$\begin{aligned} p(t) &= k.p \\ q(t) &= k. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \mu &= e^{-\int p(t)dt}\left[\int q(t).e^{\int p(t)dt}\ dt + C\right] \\ \mu &= e^{-\int k.p\ dt}\left[\int k.e^{\int k.p\ dt}\ dt + C\right] \\ \mu &= e^{-k.p.t}\left[\int k.e^{k.p.}\ dt + C\right] \\ \mu &= e^{-k.p.t}\left[\frac{k.e^{k.p.t}}{k.p} + C\right] \\ \mu &= e^{-k.p.t}\left[\frac{e^{k.p.t}}{p} + C\right] \\ \mu &= \frac{1}{p} + C.e^{-k.p.t}. \end{aligned}$$

Na equação (3.13) podemos reescrevê-la como $\frac{1}{\mu}$, portanto temos que

$$N = \frac{1}{\frac{1}{p} + C.e^{-k.p.t}}.$$

Uma solução geral para esta situação.

Considerações Finais

Ao finalizar o trabalho foi possível perceber como a matemática pode ser utilizada em diversas áreas, contrariando os discursos de muitos acadêmicos e de pessoas leigas que afirmam que a matemática não é aplicada. Claro que os modelos de equações estudados são algumas aplicações desta ciência, mas não deixa de ilustrar a quão ela é importante.

Com o problema da determinação da hora da morte mesmo que simplificado podemos ver a aplicação da matemática no dia a dia dos profissionais legistas e a forma magnífica que duas ciências físicas e matemática estão ligadas.

Foi possível perceber que o campo das equações diferenciais é vasto e é necessário muito estudo para compreende-lás, mas os primeiros passos já foram dados com as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Bibliografia

[1] Boyce, W. E. e Di Prima, R. C., **Equações Diferenciais e Problemas de Valores de Contorno**. São Paulo: LTC, 1994.

[2] Diniz, Geraldo Lucio. **História das Equações Diferenciais**.Universidade Federal de Mato Grosso. Disponível em: http://www.ufmt.br/icet/matematica/geraldo/histed.htm. Acesso em: 19 ago. 2012.

[3] Silva, Elias Campos da. **Equações Diferenciais Ordinárias em Alguns Contextos Históricos e Reais**. 2011. 67 f. Trabalho de conclusão de curso-Universidade Federal de São Carlos, São Carlos,2011. Disponível em: http://www.dm.ufscar.br/profs/tcc/trabalhos/2011-1/282448.pdf. Acesso em: 19 ago. 2012.

[4] Guidorizzi, Hamilton Luiz. **NOME DO LIVRO**. Rio de Janeiro: LTC, 2001

[5] Tan, S.T. **Matemática Aplicada à Administração e Economia**.5 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2001.

[6] Zill, Dennis. G; CULLEN, Michael.R. **Equações Diferenciais.** Volume 1.3 ed. São Paulo: Makron Books, 2005.

[7] FOGAL, Marcelo Luiz de Freitas. **Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações**. 1999. In: VII REUNIÃO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA FEIS. Universidade Estadual de São Paulo campus de Ilha Solteira, 1999. Disponível em: http://www.ebah.com.br/content/ABAAAAUCYAC/equacoes-diferenciais-ordinarias-aplicacoes. Acesso em: 02 dez.2012.