

Tópicos de Mecânica Analítica e Aplicações

Cristina da Silva Costa Cauz

Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Unidade Universitária de Nova Andradina
Curso de Matemática/ Licenciatura Plena

Orientador: **Luiz Oreste Cauz**

Nova Andradina- MS

2012

Tópicos de Mecânica Analítica e Aplicações

Cristina da Silva Costa Cauz

Trabalho de Conclusão de curso, do curso de Matemática/ Licenciatura, turno noturno, da Universidade Estadual de Mato grosso do Sul, orientado pelo professor Luiz Orete Cauz.

Tópicos de Mecânica Analítica e Aplicações

Cristina da Silva Costa Cauz

Trabalho de conclusão de curso submetido ao corpo docente da unidade universitária de Nova Andradina da Universidade Estadual de Mato grosso do Sul- UEMS-MS, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Wilson Barbosa da Costa - UEMS

(Co-orientador)

Prof. Msc. Luciana Kemie Nakayama - UEMS

Prof. Pedro Flavio Silva Othechar - UEMS

À minha família.
Aos meus amigos.
Dedico.

Agradecimentos

A Deus, por tudo.

À minha família que sempre me apoiou.

Aos meus professores de graduação.

Em especial ao meu orientador, amigo e marido o Prof^o MSc Luiz Oreste Cauz pelo incentivo e paciência e a minha filha Gabriella que esteve ao meu lado nesta fase final de minha graduação.

E por fim, agradeço a todos que de forma direta ou indireta contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho apresentamos a modelagem matemática de dois sistemas mecânico vibrantes, um conhecido como *Vibrador Centrífugo* e outro como *Pêndulo Mecânico Não-Ideal*. O sistema chamado de Vibrador Centrífugo é composto por um motor de potência limitada que gira duas pequenas massas desbalanceadas e, estas são sincronizadas anti-fase por um sistemas de engrenagens. Além disso, uma mola fixa a uma base ao solo sustenta o motor. O Pêndulo Mecânico Não-Ideal é composto por um motor de potência limitada que está fixo a uma base que pode deslizar horizontalmente sobre uma superfície plana, uma mola conectando o motor a uma parede rígida e um pêndulo fixo á base.

Palavras-chave: vibrador centrífugo, pêndulo mecânico não-ideal, fundamentos matemáticos de mecânica.

Sumário

Lista de Figuras	ix
Introdução	1
1 Fundamentos Matemáticos de Mecânica	4
1.1 Princípios de Mecânica Newtoniana	4
1.1.1 Mecânica de uma Partícula - Leis de Movimento de Newton	4
1.1.2 Mecânica de um Sistema de Partículas	8
1.1.3 Vínculos	12
1.1.4 Deslocamentos Virtuais	15
1.2 Mecânica Lagrangeana	16
1.2.1 Princípio de D'Alembert	16
1.2.2 Graus de Liberdade	18
1.2.3 Coordenadas Generalizadas	18
1.2.4 Forças Generalizadas	22
1.2.5 Forças Conservativas e não Conservativas	23
1.2.6 Energia Potencial	25
1.2.7 Equações de Lagrange	26
1.3 Mecânica Hamiltoniana	31
1.3.1 Equações de Movimento	31
2 Modelagem de Problemas Mecânicos	34
2.1 O Vibrador Centrífugo	34
2.2 O Pêndulo Mecânico Não-Ideal	37
2.2.1 Equações Lagrangeanas	37

2.2.2	Equações Hamiltonianas	41
	Considerações Finais	45
	Referências Bibliográficas	46

Lista de Figuras

1.1	Disco rolando sem deslizar em um plano horizontal	14
2.1	Vibrador Centrífugo	34
2.2	Pêndulo mecânico não-ideal	38

Introdução

A modelagem matemática de um sistema dinâmico é dada por um conjunto de equações que representam a dinâmica do sistema com precisão ou, pelo menos, de forma bastante aceitável.

A dinâmica de muitos sistemas, sejam eles mecânicos, elétricos, térmicos, econômicos, biológicos etc., pode ser descrita em termos de equações diferenciais. Tais equações diferenciais podem ser obtidas utilizando-se as leis da física que governam um sistema particular, como por exemplo as leis de Newton.

Uma vez obtido um modelo matemático de um sistema, várias ferramentas analíticas e de computador podem ser usadas para fins de análise.

A análise dinâmica é de importância para o pesquisador, contudo, deve-se estar prevenido sobre as limitações de análises lineares, quando lidar-se com sistemas dinâmicos, submetidos a grandes deslocamentos ou vibrações. Estes sistemas dinâmicos devem ser modelados, matematicamente, de forma a levar em conta as não-linearidades quer elas sejam provenientes de natureza geométrica ou física do problema.

Sabe-se da literatura corrente [3] que as análises estritamente lineares não são capazes de detectarem a presença de fenômenos ligados à instabilidade do problema estudado. De um modo bastante geral, as análises restritas a fenômenos lineares podem também conduzir a resultados equivocados, do ponto de vista quantitativo, mesmo no caso em que não ocorram instabilidade no fenômeno estudado. Torna-se importante, saber em que situações deve-se abandonar o estudo linear, bem como saber como desenvolver e utilizar os métodos da análise não-linear.

Outro assunto importante, é o estudo de vibrações mecânicas e, estas, estão presentes em muitas situações de nossa vida, tais como:

- quando sentimos o movimento oscilante da suspensão de nosso carro;
- quando sentimos nos pés, as vibrações produzidas pela passagem de um ônibus passando nas proximidades;
- quando ouvimos uma música, estamos sentindo as vibrações acústicas.

Todas essas situações, que notamos intuitivamente, são fenômenos físicos onde ocorre transferência de energia mecânica de uma natureza para outra. Os exemplos citados, anteriormente, apresentam as seguintes naturezas de energia:

- na suspensão do carro, a mola está relacionada à energia potencial elástica de deformação do material da mola e o amortecedor é o dissipador (transformador) de energia mecânica para energia térmica, verificada pelo aquecimento do óleo do amortecedor;
- as rodas do ônibus apoiadas no solo transmitem energia potencial elástica até nossos pés na forma de vibrações;
- a música é a transmissão de ondas de pressão no ar (pressão acústica), que percebemos através de vibrações mecânicas em nosso sistema auditivo.

Este trabalho, tem como objetivo a modelagem matemática de dois sistemas mecânicos vibrantes, um conhecido como *Vibrador Centrífugo* [5] e outro como *Pêndulo Mecânico Não-Ideal* [1].

Neste sentido, o capítulo 1 foi desenvolvido com o propósito de dar uma fundamentação matemática de mecânica de forma que os sistemas citados anteriormente possam ser facilmente modelados matematicamente. Neste capítulo estudamos os princípios de mecânica newtoniana, mecânica lagrangeana e hamiltoniana [2, 6, 7].

No capítulo 2, apresentamos as equações de movimento dos sistemas *vibrador centrífugo* e *pêndulo mecânico não-ideal*. Para o sistema *vibrador centrífugo*, apresentamos as equações de movimento via formalismo de Lagrange, enquanto que para o sistema *pêndulo mecânico não-ideal* apresentamos de duas formas, uma usando o formalismo de Lagrange e outra o formalismo de Hamilton. Estes formalismos trazem vantagens do ponto de vista de modelagem e de análise das equações de movimento quando comparado com o formalismo

newtoniano, visto que, as equações de Newton levam em conta coordenadas vetoriais para descrever posição, velocidade e aceleração enquanto que nos formalismos de Lagrange e Hamilton trabalham-se com coordenadas quaisquer.

Capítulo 1

Fundamentos Matemáticos de Mecânica

1.1 Princípios de Mecânica Newtoniana

1.1.1 Mecânica de uma Partícula - Leis de Movimento de Newton

Considere uma partícula cuja posição é representada por um vetor \vec{r} com uma origem dada. Então, o vetor velocidade \vec{v} , é dado por

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$$

O momento linear \vec{p} de uma partícula é definido com o produto da massa da partícula m pela velocidade

$$\vec{p} = m\vec{v} \tag{1.1}$$

Primeira Lei de Newton: *Um corpo permanece em estado de repouso ou se movimenta com velocidade uniforme ao longo de uma reta, a menos que esteja sujeito a uma força externa.*

Segunda Lei de Newton: *Em qualquer referencial inercial o movimento de uma*

partícula é regido pela equação

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

onde \vec{a} é a aceleração da partícula e \vec{F} a força total a que ela está sujeita.

Sabendo que a aceleração de uma partícula é dada por

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \ddot{\vec{r}}$$

então, a segunda lei de Newton pode ser escrita como

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d(\vec{v})}{dt} \quad (1.2)$$

Usando a equação (1.2) podemos reescrever matematicamente a primeira lei de Newton como

Se $\vec{F} = 0$, então $\vec{v} = \text{const.}$

Terceira Lei de Newton: *As forças exercidas por dois corpos, entre si, são iguais em grandeza, possuem a mesma direção e sentidos opostos (Lei de ação e reação),*

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

O esquema fundamentado sobre as leis de Newton pode ser chamado de “Mecânica Newtoniana”, ou “Mecânica Clássica (Vetorial)”, uma vez que emprega quantidades como força, velocidade, etc..., que são de caráter vetorial.

Muitas conclusões importantes de mecânica podem ser expressas na forma de teoremas de conservação.

Teorema 1.1 (Conservação do Momento Linear de uma Partícula). *Se a força total \vec{F} , é zero, então $\dot{\vec{p}} = 0$, e o momento linear é conservado.*

O momento angular de uma partícula, denotado por \vec{L} , é definido como

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (1.3)$$

onde \vec{r} é o vetor posição da partícula com uma extremidade na origem. Note que a ordem dos fatores em $\vec{r} \times \vec{p}$ é importante, pois \times é produto vetorial. Define-se também o momento da força ou Torque como

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} \quad (1.4)$$

Usando-se a equação (1.3), conjuntamente com a equação (1.1), obtém-se

$$\dot{\vec{L}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt}$$

Como $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$ segue que

$$\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (1.5)$$

Por outro lado, da usando-se a equação (1.4), conjuntamente com a equação (1.2) obtém-se

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} \quad (1.6)$$

Agora, comparando-se as equações (1.5) e (1.6) obtém-se

$$\vec{N} = \dot{\vec{L}}$$

Teorema 1.2 (Conservação do Momento Angular de uma Partícula). *Se o torque total, \vec{N} , é zero, então $\dot{\vec{L}} = 0$, e o momento angular \vec{L} é conservado.*

Considere agora, o trabalho W , de uma força externa \vec{F} sobre uma partícula para

ir de um ponto 1 até um ponto 2. Define-se este trabalho por

$$W_{12} = \int_1^2 F \cdot ds \quad (1.7)$$

Para uma massa constante, a integral (1.7) reduz-se a

$$\int_1^2 F \cdot ds = m \int_1^2 \frac{dv}{dt} \cdot v dt = \frac{m}{2} \int_1^2 \frac{d(v^2)}{dt} dt$$

e portanto

$$W_{12} = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2).$$

A quantidade escalar $m\frac{v^2}{2}$ é chamada de energia cinética de uma partícula e denotada por T . Logo,

$$W_{12} = T_2 - T_1. \quad (1.8)$$

Se o trabalho da força \vec{F} é o mesmo usando diferentes caminhos entre os pontos 1 e 2, então o sistema é dito conservativo. Como consequência deste sistema, se uma partícula é deslocada de 1 até 2 e retornada a 1 por diferentes caminhos, o trabalho nesse circuito fechado é zero, isto é,

$$\oint F \cdot ds = 0.$$

Da análise vetorial¹ [4], uma condição necessária e suficiente para que W_{12} seja independente do caminho é que \vec{F} seja o gradiente de alguma função escalar de posição

$$\vec{F} = -\nabla V(r)$$

¹Para um melhor entendimento do assunto, consulte o livro Advanced Calculus de W. Kaplan.

onde V é chamado de potencial, ou energia potencial. E, ainda

$$Fds = -dV.$$

Para um sistema conservativo, o trabalho é

$$W_{12} = V_1 - V_2. \quad (1.9)$$

Combinando as equações (1.9) com (1.8) tem-se

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2.$$

Podemos então enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1.3 (Conservação da Energia de uma Partícula). *Se as forças que agem sobre uma partícula são conservativas, então a energia total da partícula $T + V$ é conservada.*

1.1.2 Mecânica de um Sistema de Partículas

Considere um sistema de pontos materiais (partículas), que consiste de N partículas livres em um espaço $R^3 = E^3$. Então, de acordo com as três leis de Newton, o movimento do sistema é descrito pela solução de N equações vetoriais do tipo

$$\vec{F}_k = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^e = \frac{d}{dt}(m_k \vec{v}_k) = m_k \ddot{\vec{r}}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (1.10)$$

onde \vec{F}_k^e é a força externa total exercida sobre a partícula k e \vec{F}_k^i é a soma das forças internas exercidas sobre a partícula k pelas outras $N - 1$ partículas pertencentes ao sistema.

Como cada \vec{r}_k consiste de 3 coordenadas (x, y, z) , ou seja, $\vec{r}_k = \vec{r}_k(x, y, z)$, então existirão $3N$ equações da forma

$$F = \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i) = m_i \ddot{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, 3N$$

onde, a posição de cada partícula é fixada pelas 3 coordenadas.

Para determinarmos o movimento do sistema de N partículas livres é necessário especificar as componentes da força e os valores iniciais (condições de contorno), ou seja:

$$x_i(t_0) \text{ e } \dot{x}_i(t_0) \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Se $\vec{p}_k = m_k \vec{v}_k$ for o momento linear da k -ésima partícula pode-se escrever as equações (1.10) na forma

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \vec{F}_k^i + \vec{F}_k^e, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (1.11)$$

Somando, em relação a todas as partículas, os membros à esquerda e à direita das equações (1.11), obtém-se

$$\sum_{k=1}^N \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^N \vec{p}_k = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^i + \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^e. \quad (1.12)$$

De acordo com o observado em (1.10) tem-se

$$\vec{F}_k^i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \vec{F}_{j \rightarrow k}^i$$

onde $\vec{F}_{j \rightarrow k}^i$ é a força exercida sobre a partícula k devido à partícula j . Portanto,

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}_k^i = \sum_{k=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \vec{F}_{j \rightarrow k}^i. \quad (1.13)$$

Agora, pela terceira lei de Newton (princípio da ação e reação), as forças internas $\vec{F}_{j \rightarrow k}^i$ se cancelam aos pares, isto é,

$$\vec{F}_{j \rightarrow k}^i = -\vec{F}_{k \rightarrow j}^i. \quad (1.14)$$

Usando-se (1.14) na expansão dos somatórios do lado direito de (1.13) obtém-se

$$\sum_{k=1}^N \vec{F}_k^i = 0,$$

e, portanto, (1.12) reduz-se a

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{k=1}^N \frac{d\vec{p}_k}{dt} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^e = \vec{F},$$

onde $\vec{P} = \sum_{k=1}^N \vec{p}_k$ é o momento linear total do sistema de partículas e $\vec{F} = \sum_{k=1}^N \vec{F}_k^e$ é a força externa total.

Podemos então enunciar o teorema da conservação do momento linear para um sistema de partículas.

Teorema 1.4 (Conservação do Momento Linear para um Sistema de Partículas). *O momento linear total \vec{P} é constante, quando não existem forças externas agindo sobre o sistema.*

Para cada partícula k , o momento angular $L = M_k$ em relação à origem das coordenadas é definido como

$$\vec{M}_k = \vec{r}_k \times \vec{p}_k = \vec{r}_k \times m_k \dot{\vec{r}}_k. \quad (1.15)$$

Usando-se a equação (1.15) e a segunda lei de Newton tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{M}_k) &= \frac{d}{dt}(\vec{r}_k \times m_k \dot{\vec{r}}_k) \\ &= \frac{d\vec{r}_k}{dt} \times m_k \dot{\vec{r}}_k + \vec{r}_k \times \frac{d}{dt}(m_k \dot{\vec{r}}_k) \\ &= \dot{\vec{r}}_k \times m_k \dot{\vec{r}}_k + \vec{r}_k \times \frac{d}{dt}(m_k \dot{\vec{r}}_k) \\ &= \vec{r}_k \times \frac{d}{dt}(m_k \dot{\vec{r}}_k) \\ &= \vec{r}_k \times m_k \ddot{\vec{r}}_k \\ &= \vec{r}_k \times \vec{F}_k \end{aligned} \quad (1.16)$$

pois $\dot{\vec{r}}_k \times m_k \dot{\vec{r}}_k = 0$.

Somando, em relação a todas as partículas, os membros à esquerda e à direita de

(1.16), obtém-se

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_k \vec{M}_k \right) = \sum_k \frac{d}{dt} (\vec{M}_k) = \sum_k \vec{r}_k \times \vec{F}_k \quad (1.17)$$

onde $\vec{M} = \sum_k \vec{M}_k$ é o momento angular total do sistema de partículas.

O cancelamento dos efeitos devido às forças internas ocorre novamente, ou seja, dirigidas ao longo das retas que unem as partículas.

Considerando forças externas agindo sobre o sistema (1.17), podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1.5 (Conservação do Momento Angular Total). *Se o momento total das forças externas que agem sobre um sistema de partículas é zero, então M é constante e portanto o momento de partículas é conservado.*

Considere agora, o trabalho W_{12} de todas as forças do sistema de uma configuração inicial 1, até uma configuração final 2, isto é,

$$W_{12} = \sum_s \int_1^2 F_s dr_s = \sum_s \int_1^2 F_s^{(e)} dr_s + \sum_{s,j (s \neq j)} \int_1^2 F_{s \rightarrow j}^{(i)} dr_s \quad (1.18)$$

Usando-se as equações de (1.14) e de (1.18) temos

$$\begin{aligned} W_{12} &= \sum_s \int_1^2 F_s dr_s \\ &= \sum_s \int_1^2 m_s \dot{v}_s \underbrace{v_s dt}_{dr_s} \\ &= \sum_s \int_1^2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_s v_s^2 \right) dt \\ &= \left(\sum_s \frac{1}{2} m_s v_s^2 \right) \Big|_1^2 \end{aligned}$$

Note que $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_s v_s^2 \right) = \frac{1}{2} m_s^2 v_s \dot{v}_s = m_s v_s \dot{v}_s$.

Portanto, o trabalho W_{12} pode ser escrito como a diferença entre a energia cinética final e a inicial, isto é,

$$W_{12} = T_2 - T_1 \quad (1.19)$$

onde T , é a energia total do sistema

$$T = \frac{1}{2} \sum_s m_s v_s^2.$$

Se $\sum_{s=1}^N F_s d\vec{r}_s$ puder ser escrito como uma diferencial exata $-dV(r)$, teremos

$$\sum_{s=1}^N F_s d\vec{r}_s = -dV(r)$$

onde $V = V(r)$ uma função de coordenadas que depende apenas da posição inicial e final.

As componentes das forças serão dadas, então por:

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad i = 1, 2, 3, \quad r = r(x, y, z),$$

e neste caso, o trabalho independeria das trajetórias percorridas pelas partículas, dependeria apenas de sua posição inicial e final. Tais sistemas são ditos conservativos. Então

$$\sum_s \int_1^2 F_s dr_s = -\sum_{s=1}^N \int_1^2 dV = V(1) - V(2) = V_1 - V_2. \quad (1.20)$$

Agora, comparando as equações (1.20) e (1.19), temos:

$$V_1 + T_1 = V_2 + T_2 \quad (1.21)$$

A equação (1.21) nos diz que a energia total $E = T + V$ do sistema é conservada.

1.1.3 Vínculos

Restrições de natureza geométrica ou cinemática que limitam *a priori* o movimento de um determinado sistema mecânico são chamados de *vínculos*. Consideremos alguns exemplos simples a seguir:

Exemplo 1.1. (*Partícula restrita a uma superfície fixa*). Seja $r = (x, y, z)$ o vetor posição da partícula relativamente a um sistema de coordenadas cartesianas em relação ao qual a superfície

permanece fixa. Então x, y, z não são variáveis independentes mas devem satisfazer

$$f(r) \equiv f(x, y, z) = 0$$

onde $f(r) = 0$ é a equação da superfície. Se, por exemplo, a superfície for uma esfera centrada na origem,

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2,$$

onde R é o raio da esfera.

Exemplo 1.2 (Partícula restrita a uma superfície móvel ou deformável). Neste caso as variáveis x, y, z obedecem à equação

$$f(r, t) \equiv f(x, y, z, t) = 0. \quad (1.22)$$

A dependência temporal explícita indica a mudança da forma ou localização da superfície no decorrer do tempo.

Os vínculos discutidos nos exemplos acima são ditos *holônomos*. Se $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ são coordenadas arbitrárias usadas para descrever a configuração de um sistema mecânico, um vínculo é chamado de holônomo quando pode ser expresso por uma equação da forma

$$f(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N, t) = 0. \quad (1.23)$$

Vínculos que não podem ser expressos como (1.23) são ditos não-holônomos.

Exemplo 1.3. A imposição de que moléculas de um gás permaneçam no interior de um recipiente é descrita por desigualdades: se o recipiente é uma caixa de aresta a, b, c temos $0 < x_i < a$, $0 < y_i < b$, $0 < z_i < c$, onde $r_i = (x_i, y_i, z_i)$ é o vetor posição da i -ésima molécula (tratada como partícula puntiforme)

Ocorrem com frequência, especialmente na dinâmica de corpos rígidos, vínculos

representáveis por equações envolvendo velocidades, isto é, equações diferenciais da forma

$$g(\xi_1, \dots, \xi_N, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_N, t) = 0. \quad (1.24)$$

Exemplo 1.4 (Cilindro rolando sem deslizar ao longo de uma linha reta). *Se x é a posição do centro de massa do cilindro e ϕ o ângulo de rotação em torno do centro de massa, a condição de rolar sem deslizar representa-se por*

$$\dot{x} = R\dot{\phi} \quad (1.25)$$

onde R é o raio do cilindro.

Exemplo 1.5 (Disco vertical rolando sem deslizar num plano horizontal). *Sejam (x, y) a posição do centro do disco, θ o ângulo do seu eixo de simetria com o eixo x , e ϕ o ângulo de rotação do disco em torno do referido eixo de simetria (figura 1.1). Se v é a velocidade do centro de massa, o disco rola sem deslizar desde que $v = R\dot{\phi}$. Notando que $\dot{x} \equiv v_x = v \sin \theta$ e $\dot{y} \equiv v_y = -v \cos \theta$, somos conduzidos às equações*

$$\begin{cases} \dot{x} - R\dot{\phi} \sin \theta = 0 \\ \dot{y} - R\dot{\phi} \cos \theta = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

que exprimem matematicamente a condição de rolamento sem deslizamento.

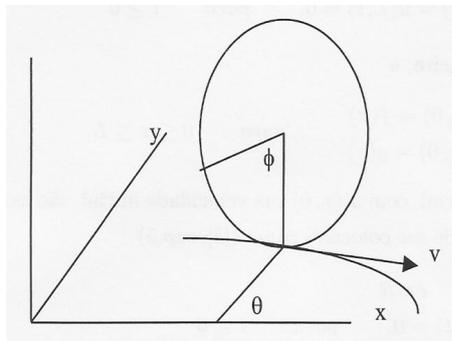


Figura 1.1: Disco rolando sem deslizar em um plano horizontal

As equações (1.25) e (1.26) são exatamente da forma (1.24). Em geral, vínculos deste tipo não podem ser reduzidos por uma integração à forma (1.23) e, conseqüentemente

não são holônomos [2, 6, 7]. Se um vínculo originalmente expresso na forma (1.24) puder ser reduzido por integração à forma (1.23), ele será dito holônomo. Por exemplo, o vínculo (1.25) é holônomo porque equivale a $x - R\phi = 0$, que tem a forma (1.23).² No entanto, vínculos diferenciais do tipo (1.24) raramente são integráveis.

1.1.4 Deslocamentos Virtuais

Para um sistema mecânico sujeito a vínculos, num dado instante t há uma infinidade de configurações possíveis, isto é, consistentes com os vínculos. Os deslocamentos infinitesimais de cada partícula que levam de uma configuração possível outra infinitesimalmente próxima são chamados de *deslocamentos virtuais*. Mais precisamente, dado um sistema de N partículas, os deslocamentos virtuais δr_i , $i = 1, 2, \dots, N$, são deslocamentos infinitesimais das posições r_1, r_2, \dots, r_N realizados instantaneamente e com propriedade de serem compatíveis com os vínculos. *Em suma, as características definidoras dos deslocamentos virtuais são:*

i) eles são infinitesimais;

ii) ocorrem num instante t fixo;

iii) não violam os vínculos.

Exemplo 1.6. *(Partícula restrita a uma superfície móvel) Seja (1.22) a equação da superfície. Um deslocamento virtual deve ser consistente com o vínculo, isto é, o ponto r e ponto deslocado $r + \delta r$ devem pertencer à superfície no instante t . Temos*

$$f(r + \delta r, t) = 0 \Rightarrow f(r, t) + \nabla f \cdot \delta r = 0 \Rightarrow \nabla f \cdot \delta r = 0.$$

Como ∇f é perpendicular à superfície no instante t , o deslocamento virtual δr é tangente à superfície nesse instante.

²A constante de integração pode ser feita igual a zero por uma escolha adequada da posição ou do ângulo no instante inicial.

1.2 Mecânica Lagrangeana

Uma das abordagens para montar as equações do movimento de um sistema, que é chamada de *mecânica vetorial* é baseada diretamente nas leis de Newton e trabalha com grandezas vetoriais, como força e quantidade de movimento. Este caminho considera separadamente as forças vinculares, embora tais forças possam não ser de interesse.

Uma outra abordagem, é atribuída a Joseph Louis Lagrange (1736-1813) e é chamada de *mecânica analítica*. Esta abordagem considera o sistema como um todo, formulando o problema da mecânica a partir de duas quantidades escalares fundamentais: a energia cinética e a energia potencial. As restrições cinemáticas do movimento são levadas em conta, sem que sejam necessário o cálculo das forças que as mantêm. A introdução de coordenadas generalizadas no lugar de coordenadas físicas torna a formulação mais versátil e as equações de movimentos são obtidas de uma forma padronizada, independente do particular sistema de coordenadas utilizado.

Como passo intermediário para chegar à formulação de Lagrange, iremos discutir o chamado princípio de D'Alembert, que constitui um método de escrever as equações de movimento de um sistema exclusivamente em termos das forças aplicadas, e para cuja dedução será explorado o fato de que o trabalho virtual das forças de vínculo é nulo [2, 6].

1.2.1 Princípio de D'Alembert

Consideremos inicialmente um sistema de partículas em equilíbrio. Neste caso $F_i = 0$ e, quaisquer que sejam os deslocamentos virtuais δr_i , tem-se

$$\sum_i F_i \cdot \delta r_i = 0. \quad (1.27)$$

Fazendo a decomposição de (1.27) temos

$$\sum_i F_i^{(a)} \cdot \delta r_i + \sum_i f_i \cdot \delta r_i = 0$$

em que $F_i^{(a)}$ são as forças aplicadas e f_i são as forças de vínculos.

Se hipoteticamente considerarmos o trabalho das forças vinculares nulo, temos,

$$\sum_i F_i^{(a)} \cdot \delta r_i = 0 \quad (1.28)$$

que sintetizamos como o “*Princípio do Trabalho Virtual*”.

“*A condição necessária e suficiente para o equilíbrio estático de um sistema inicialmente em repouso cujas forças vinculares não realizam trabalho é que seja nulo o trabalho virtual realizado pelas forças aplicadas durante deslocamentos virtuais arbitrários*”.

Estamos interessados agora na dinâmica, que pode ser formalmente reduzida à estática escrevendo a segunda lei de Newton na forma $F_i - \dot{p}_i = 0$ (onde $p_i = m_i \dot{r}_i$.), que segundo a interpretação de D’Alembert, cada partícula do sistema encontra-se em “equilíbrio” sob uma força resultante que é a soma da força real com uma “força efetiva invertida” igual a $-\dot{p}_i$.

Feito as considerações acima, podemos em lugar (1.27) escrever a equação

$$\sum_i (F_i - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i = 0. \quad (1.29)$$

que é obviamente verdadeira qualquer que sejam os deslocamentos virtuais δr_i .

Utilizando agora a decomposição da força em força aplicada e força de vínculo, escrevemos (1.29) da seguinte forma

$$\sum_i (F_i^{(a)} - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i + \sum_i f_i \cdot \delta r_i = 0.$$

Como o trabalho virtual das forças de vínculos $\sum_i f_i \cdot \delta r_i = 0$, temos

$$\sum_i (F_i^{(a)} - \dot{p}_i) \cdot \delta r_i = 0$$

que é conhecido *princípio de D’Alembert*, que simplifica a análise, quando usado, de uma variedade muito ampla de problemas de Mecânica.

1.2.2 Graus de Liberdade

A posição ocupada no espaço por uma partícula em movimento é perfeitamente descrita pelas três coordenadas cartesianas (x, y, z) . Se o seu movimento é livre, as três coordenadas são independentes, pois a partícula pode ocupar qualquer ponto do espaço. Diz-se, nesse caso, que a partícula possui três *graus de liberdade*, cada um correspondente a uma das coordenadas independentes.

Considere, o caso de uma partícula que é obrigada a se mover sobre uma esfera de centro (x_0, y_0, z_0) e raio R . Nesse caso as coordenadas da partícula não são mais independentes, pois estão vinculadas pela condição:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Se, em vez de coordenadas cartesianas, for usado coordenadas esféricas teremos (r, θ, ϕ) , pois a condição de que o movimento esteja confinado à superfície da esfera obriga que $r = R$ e, portanto, r não é uma variável. Diz, nesse caso, que a partícula possui dois graus de liberdade.

O número de graus de liberdade de um sistema de partículas é o número de coordenadas usadas para descrever a sua configuração menos o número de condições independentes de vínculo. Se a posição de um sistema é descrita usando um conjunto de n coordenadas e há m equações independentes vinculando essas coordenadas, então o sistema possui $n - m$ graus de liberdade.

Para definir completamente a posição de um sistema com 5 graus de liberdade, será necessário 5 variáveis independentes.

É importante mencionar que o número de graus de liberdade é uma característica do sistema e não depende de um particular conjunto de coordenadas adotado para descrever sua configuração.

1.2.3 Coordenadas Generalizadas

A aplicação direta das leis de Newton em sistemas mecânicos resulta num conjunto de equações de movimento, em termos de coordenadas cartesianas de cada uma das partículas

que compõe o sistema. Se existe N partículas, a posição do sistema, em cada instante, está perfeitamente determinada por um conjunto de $3N$ números x_i, y_i, z_i . Em muitos casos, este não é o sistema de coordenadas mais conveniente para se resolver o problema ou descrever o movimento do sistema. Por exemplo, no problema do movimento de uma partícula sob a ação de uma força central, verifica-se que é conveniente introduzir coordenadas polares na descrição do movimento da partícula no plano. O motivo desta escolha se dá pois, neste caso, pode-se expressar a força em coordenadas polares de maneira mais simples.

Existe um número infinito de sistemas de coordenadas que representam a configuração de um sistema. Alguns desses conjuntos podem não ter um significado geométrico aparente, mas, como representam a posição do sistema, podem ser considerados coordenadas em um sentido mais amplo. Qualquer conjunto de números que é utilizado para representar a posição do sistema é um conjunto de **coordenadas generalizadas**.

Nos problemas em que é necessário usar coordenadas generalizadas, podem-se escrever as equações de movimento de Newton, em termos de coordenadas cartesianas e, então, transformá-las em coordenadas generalizadas. No entanto, seria desejável e conveniente um método geral que estabelecesse diretamente as equações de movimento em termos de um conjunto de coordenadas generalizadas apropriadas. Além disso, seriam desejáveis também métodos gerais para escrever, e talvez resolver, as equações do movimento em termos de qualquer sistema de coordenadas. Tal método foi criado por Lagrange.

Quando se quer falar sobre um sistema físico, descrito por um sistema de coordenadas generalizadas, sem especificar por enquanto quais são estas coordenadas, designa-se usualmente cada coordenada q com um índice numérico. Um conjunto de n coordenadas generalizadas seria, então escrito como q_1, q_2, \dots, q_n . Logo uma partícula que se mova no plano poderá ser escrita por duas coordenadas q_1 e q_2 , que em casos especiais, podem ser coordenadas cartesianas x e y , ou coordenadas polares r e θ , ou qualquer outra apropriada. Uma partícula que se mova no espaço poderá ser descrita por 3 coordenadas, que podem ser as cartesianas x , y e z , esféricas r , θ e φ , cilíndricas ρ , z e φ , ou em geral, q_1 , q_2 e q_3 .

A configuração de um sistema de N partículas pode ser especificado pelas $3N$ coordenadas cartesianas $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$ de suas partículas, ou por qualquer conjunto de $3N$ coordenadas generalizadas q_1, q_2, \dots, q_{3N} . Para cada configuração do sistema, as

coordenadas generalizadas devem ter um conjunto definido de valores, além disso, as coordenadas q_1, q_2, \dots, q_{3N} serão funções das coordenadas cartesianas e, possivelmente, do tempo.

Assim

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 = q_1(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n; t) \\ q_2 = q_2(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n; t) \\ \vdots \\ q_{3N} = q_{3N}(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n; t) \end{array} \right. \quad (1.30)$$

Como as coordenadas q_1, q_2, \dots, q_{3N} especificam a configuração do sistema, deve ser possível expressar as coordenadas cartesianas em termos das coordenadas generalizadas, isto é,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1(q_1, q_2, \dots, q_{3n}; t) \\ y_1 = y_1(q_1, q_2, \dots, q_{3n}; t) \\ z_1 = z_1(q_1, q_2, \dots, q_{3n}; t) \\ \vdots \\ x_N = x_N(q_1, q_2, \dots, q_{3n}; t) \\ y_N = y_N(q_1, q_2, \dots, q_{3n}; t) \\ z_N = z_N(q_1, q_2, \dots, q_{3n}; t) \end{array} \right. \quad (1.31)$$

No caso das coordenadas generalizadas dadas em (1.30) não conduziram às coordenadas cartesianas dadas em (1.31) então as equações (1.30) não definem um conjunto de coordenadas generalizadas. A condição matemática para que esta solução seja possível é que o determinante Jacobiano de (1.30) seja diferente de *zero* em todos os pontos, isto é,

$$\frac{\partial(q_1, q_2, \dots, q_{3N})}{\partial(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(q_1)}{\partial(x_1)} & \frac{\partial(q_1)}{\partial(y_1)} & \dots & \frac{\partial(q_1)}{\partial(z_N)} \\ \frac{\partial(q_2)}{\partial(x_1)} & \frac{\partial(q_2)}{\partial(y_1)} & \dots & \frac{\partial(q_2)}{\partial(z_N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial(q_{3N})}{\partial(x_1)} & \frac{\partial(q_{3N})}{\partial(y_1)} & \dots & \frac{\partial(q_{3N})}{\partial(z_N)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Praticamente, em todos os casos de interesse, ficará evidente, a partir das definições geométricas das coordenadas generalizadas, se elas são ou não um conjunto legítimo de coordenadas.

Exemplo 1.7. *As equações*

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \\ \theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} = \operatorname{sen}^{-1} \left[\frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right] = \cos^{-1} \left[\frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \end{cases}$$

relacionam as coordenadas polares r e θ de uma partícula no plano com as coordenadas cartesianas x e y , pois

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial(x)}{\partial(r)} & \frac{\partial(x)}{\partial(\theta)} \\ \frac{\partial(y)}{\partial(r)} & \frac{\partial(y)}{\partial(\theta)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \operatorname{sen}^2 \theta = r \neq 0.$$

Quando se escreve as equações de movimento de um sistema de partículas usando coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_{3N} , a derivada em relação ao tempo \dot{q}_k , de uma coordenada q_k qualquer, é denominada de *velocidade generalizada* associada a esta coordenada.

1.2.4 Forças Generalizadas

Considere um sistema de partículas cujas posições são especificadas pelas coordenadas cartesianas x_1, x_2, \dots, x_k . Se as forças F_1, F_2, \dots, F_k são aplicadas às coordenadas correspondentes e elas atuam na direção positiva em cada caso, então de acordo com a equação (1.28) o trabalho virtual δW dessas forças em um deslocamento virtual arbitrário é

$$\delta W = \sum_{j=1}^k F_j \delta x_j. \quad (1.32)$$

Suponha, agora, que as coordenadas x_1, x_2, \dots, x_k estão relacionadas com as coordenadas generalizadas na forma das equações (1.31). Então, usando estas equações obtemos

$$dx_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial x_j}{\partial t} dt, \quad j = 1, 2, \dots, k \quad (1.33)$$

em que os coeficientes $\frac{\partial x_j}{\partial q_i}$ são funções dos q_i e do tempo t .

Considerando um deslocamento virtual δ em (1.33), isto é, substituindo os diferenciais d por δ , e lembrando que $\delta t = 0$, pois os deslocamentos virtuais se processam instantaneamente, obtemos

$$\delta x_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i, \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (1.34)$$

Substituindo a equação (1.34) na equação (1.32) temos

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} \delta q_i \\ &= \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \end{aligned} \quad (1.35)$$

onde Q_i é denominada de *força generalizada* associada à coordenada generalizada q_i , e é definida por

$$Q_i = \sum_{j=1}^k F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Note que as expressões para o trabalho virtual dadas pelas equações (1.32) e (1.35) tem a mesma forma matemática.

1.2.5 Forças Conservativas e não Conservativas

Primeiramente, procuremos distinguir esses dois tipos de forças, as conservativas e as não conservativas. A fim de tornar clara a distinção, consideraremos um exemplo de cada tipo.

Se uma bola é atirada verticalmente para cima, no ar, sua velocidade e consequentemente sua energia cinética, decresce continuamente até se anular no ponto mais alto de sua trajetória. Em seguida, o sentido do movimento da bola se inverte e a sua velocidade e energia cinética crescem continuamente até que ela retorne ao solo. Desprezando a resistência do ar, a bola retorna à posição inicial com a mesma velocidade e energia cinética que possui no instante da partida; somente o sentido do movimento foi alterado. Neste caso, a bola perde energia cinética durante uma parte do seu movimento, mas recupera-a totalmente durante a outra parte, quando retorna ao seu ponto de partida. Interpretamos a energia cinética de um corpo como sua capacidade de realizar trabalho em virtude de seu movimento. É claro que em uma trajetória fechada (uma trajetória é dita fechada quando a posição final do móvel coincide com a posição inicial) a capacidade da bola realizar trabalho permanece a mesma (ela foi conservada). Forças que causam este único efeito são chamadas de *conservativas*.

Se, entretanto, um corpo, sujeito à ação de uma força, retorna à sua posição inicial com maior ou menor quantidade de energia cinética do que ele possuía inicialmente, a sua capacidade de realizar trabalho foi modificada. Diremos então que tal força é *não conservativa*. A força de atrito é não conservativa. Quando uma bola é atirada para cima, no ar, levando em conta a resistência oferecida ao movimento por este fluido, constatamos que a bola retorna à sua posição inicial com menos energia cinética do que tinha antes, naquele ponto. A resistência oposta pelo ar ao movimento da bola quer esta esteja subindo ou descendo, diminui a velocidade que ela teria em qualquer posição se não houvesse tal resistência. Na trajetória fechada a bola perde energia cinética.

Podemos definir força conservativa sob outro ponto de vista, diferente daquele do trabalho realizado pela força. Se não há variação de energia cinética de um corpo, o trabalho

realizado sobre ele pelo resultante das forças deve ser zero, isto é,

$$W = \Delta T = 0.$$

No exemplo da bola arremessada, a resultante das forças que agem sobre ela (desprezando a resistência do ar) é a gravidade. O trabalho negativo realizado pela força da gravidade sobre a bola durante a subida foi igual, mas de sinal oposto ao trabalho positivo realizado pela mesma força de gravidade quando a bola retornava à sua posição inicial. Portanto, o trabalho total realizado pela força da gravidade na trajetória fechada é nulo. Semelhantemente, se ocorre uma variação de energia cinética o trabalho realizado pela resultante das forças não é nulo. A força de atrito, por exemplo, opõe-se ao movimento da bola quando ela está subindo ou caindo e realiza um trabalho total negativo ao longo de toda a trajetória, reduzindo sempre a sua energia cinética.

As trajetórias podem ser absolutamente quaisquer, desde que tenham sempre os mesmos pontos como extremos, obteremos o mesmo resultado em qualquer hipótese, desde que a força seja conservativa. Por um raciocínio semelhante, fica claro que, se o mesmo trabalho é realizado ao ir-se de um dado ponto a outro, independentemente da trajetória, então, numa trajetória fechada na qual dois caminhos são percorridos em sentidos opostos, o trabalho total deverá ser nulo. Desta forma chegamos a outra definição equivalente de forças conservativas e não conservativas:

Uma força é conservativa se o trabalho realizado por ela sobre um corpo que se move entre dois pontos dados depende somente destes pontos e não da trajetória percorrida. Uma força é não conservativa se o trabalho realizado por esta força sobre um corpo nas condições anteriores depende da trajetória entre estes pontos.

As duas definições de força conservativa dadas acima são equivalentes. A conveniência decidirá qual a definição a ser usada. A condição da trajetória fechada pode ser usada para mostrar claramente que a energia é conservada quando agem forças conservativas. Para desenvolver a idéia de energia potencial, entretanto, é preferível considerar-se a independência da trajetória.

1.2.6 Energia Potencial

O trabalho realizado por uma força conservativa depende somente dos pontos inicial e final do movimento; nunca, da trajetória seguida entre eles. Tal força pode depender unicamente da posição do ponto material. Não dependerá da velocidade ou do tempo, por exemplo.

Consideremos o caso do movimento em linha reta. O trabalho realizado pela força resultante F para deslocar um corpo é igual à variação de energia cinética do mesmo, ou seja,

$$\int_{x_0}^x F dx = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (1.36)$$

Numa dimensão, todas as forças que dependem somente da posição são conservativas. Se F depende somente de x a energia cinética do corpo depende unicamente da posição. Em diferentes posições ao longo da trajetória a energia cinética pode ser diferente, porém, num ponto particular a energia cinética será sempre a mesma. O exemplo da bola arremessada verticalmente para cima, no ar (sem resistência do ar), ilustra este ponto.

O decréscimo de energia de movimento (energia cinética) está associado a um aumento da energia de posição (energia potencial). Se V representa a energia potencial, então a relação

$$\Delta T = -\Delta V \quad (1.37)$$

exprime o fato de que qualquer variação na energia cinética está associada a uma variação oposta na energia potencial. Além disso,

$$\Delta T = \int_{x_0}^x F dx. \quad (1.38)$$

Comparando as equações (1.37) e (1.38) temos

$$\Delta V = - \int_{x_0}^x F dx = \int_x^{x_0} F dx.$$

Podemos então escrever

$$V(x) - V(x_0) = \int_x^{x_0} F dx. \quad (1.39)$$

A variação de energia potencial é o trabalho realizado pela força quando o ponto material se desloca de x para um ponto de referência x_0 .

Agora, usando as equações (1.36) e (1.39) obtemos

$$V(x) - V(x_0) = \int_x^{x_0} F dx = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv^2,$$

ou melhor,

$$V(x) + \frac{1}{2}mv^2 = V(x_0) + \frac{1}{2}mv_0^2. \quad (1.40)$$

Observe que a força e a aceleração foram eliminadas da equação (1.40). Apenas a posição e a velocidade permanecem. O segundo membro depende somente da posição inicial x_0 e da velocidade inicial v_0 que tem valores definidos e é, portanto, constante durante o movimento. Esta constante é chamada *energia mecânica total* E . Obtemos então a *Lei da energia Cinética, acrescida de energia Potencial*, isto é,

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = T + V = E.$$

Esta lei é válida somente quando a força resultante é conservativa.

1.2.7 Equações de Lagrange

Sistemas Conservativos

Segundo Newton, um sistema de N partículas possui um conjunto de $3N$ equações de movimento da forma

$$F_i = \frac{d}{dt}(m_i \dot{x}_i), \quad i = 1, 2, \dots, 3N. \quad (1.41)$$

A energia cinética deste sistema é definida como

$$T = \sum_{j=1}^{3N} \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2. \quad (1.42)$$

Comparando as equações de (1.41) e (1.42) obtemos

$$F_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right), \quad (1.43)$$

pois

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \sum_{j=1}^{3N} \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 = \frac{1}{2} m_1 \frac{\partial \dot{x}_1^2}{\partial \dot{x}_i} + \frac{1}{2} m_2 \frac{\partial \dot{x}_2^2}{\partial \dot{x}_i} + \cdots + \frac{1}{2} m_i \frac{\partial \dot{x}_i^2}{\partial \dot{x}_i} + \cdots + \frac{1}{2} m_{3N} \frac{\partial \dot{x}_{3N}^2}{\partial \dot{x}_i} = m_i \dot{x}_i.$$

Como $F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}$, pois o sistema é conservativo, então podemos escrever (1.43), segundo Lagrange, da seguinte forma

$$-\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right). \quad (1.44)$$

Usando as coordenadas generalizadas

$$q_i = q_i(x_1, x_2, \dots, x_{3N}, t), \quad i = 1, 2, \dots, 3N \quad (1.45)$$

temos

$$T = \sum_{j=1}^{3N} \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{1}{2} m_j \frac{\partial \dot{x}_j^2}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j,k=1}^{3N} \frac{1}{2} m_j \frac{\partial \dot{x}_j^2}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{1}{2} m_j 2 \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.46)$$

Portanto,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.47)$$

Em (1.46) foi usado o fato de que

$$\sum_{k=1}^{3N} \frac{\partial \dot{x}_j^2}{\partial \dot{x}_k} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 2\dot{x}_j, & j = k \end{cases}$$

Utilizando a relação inversa de (1.45)

$$x_j = x_j(q_1, q_2, \dots, q_{3N}, t)$$

temos

$$\dot{x}_k = \frac{dx_k}{dt} = \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) + \frac{\partial x_k}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial x_k}{\partial q_i}, \text{ para um certo } i \text{ fixo.}$$

Então (1.47) pode ser reescrito como

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}.$$

e portanto

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_j \left[m_j \ddot{x}_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + m_j \dot{x}_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \right]. \quad (1.48)$$

Como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) = \sum_k \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \dot{q}_k + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) \frac{dt}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_k \frac{\partial x_k}{\partial q_i} \dot{q}_k + \frac{\partial x_j}{\partial t} \right)$$

então

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_j}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}. \quad (1.49)$$

Agora, usando a equação (1.49) em (1.48) obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \sum_j \left[F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} \right] = \sum_j \left[F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i} + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right], \quad (1.50)$$

pois

$$\begin{aligned}
T = \sum_{j=1}^{3N} \frac{1}{2} m_j \dot{x}_j^2 &\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{1}{2} m_j \frac{\partial \dot{x}_j^2}{\partial q_i} = \sum_{j,k=1}^{3N} \frac{1}{2} m_j \frac{\partial \dot{x}_j^2}{\partial \dot{x}_k} \frac{\partial \dot{x}_k}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3N} \frac{1}{2} m_j 2 \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i} \\
&\Rightarrow \frac{\partial T}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^{3N} m_j \dot{x}_j \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial q_i}
\end{aligned}$$

Os termos $\sum_j F_j \frac{\partial x_j}{\partial q_i}$ na equação (1.50) são denotados por Q_i e denominados de componentes das forças generalizadas. Portanto,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \quad (1.51)$$

Se o sistema for conservativo temos que $F_j = -\frac{\partial V}{\partial x_j}$ então

$$Q_i = -\sum_j \frac{\partial V}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial q_i} = -\frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (1.52)$$

Usando a equação (1.52) podemos reescrever a equação (1.51) da seguinte forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (1.53)$$

A relação (1.53) se difere da relação (1.44) apenas pelo termo $\frac{\partial T}{\partial q_i}$. Este termo é nulo quando o sistema de coordenadas é cartesiano.

Derivando parcialmente a função $\mathcal{L} = T - V$ em relação à \dot{q}_i temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \quad (\text{pois } \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} = 0). \quad (1.54)$$

A função \mathcal{L} definida acima é denominada de função de Lagrange ou, simplesmente de lagrangeana. Note que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$. Além disso, a quantidade de momento generalizado p_i é definido como

$$p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}. \quad (1.55)$$

Derivando a equação (1.54) em relação ao tempo e, comparando com a equação

(1.53), obtemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

ou melhor,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}. \quad (1.56)$$

A equação dada em (1.56) é conhecida como *equação de movimento de Lagrange*.

Sistemas não conservativos

Se o sistema não for conservativo, então F_j não pode ser da forma $F_j = -\frac{\partial V}{\partial x_j}$ onde V é a energia potencial.

Então suponha que exista um potencial M , a que chamamos de *Potencial Efetivo ou Virtual* tal que

$$\mathcal{L} = T - M \quad \text{onde} \quad M \neq \int \sum_j F_j dx_j. \quad (1.57)$$

Queremos encontrar Q_i de modo que a equação $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$ seja satisfeita com $\mathcal{L} = T - M$.

De (1.57) temos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i} \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad (1.58)$$

Usando a equação (1.51), podemos reescrever a equação (1.58) como

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i} \right)$$

Portanto, se

$$Q_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i} \right) = -\frac{\partial M}{\partial q_i} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial M}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}.$$

Podemos então enunciar o seguinte teorema:

Teorema 1.6. *Para um sistema não conservativo de N partículas, é válida a equação de Lagrange dada em (1.56), desde que exista um potencial efetivo M ($M = T - \mathcal{L}$) e uma força generalizada Q_i , tal que $Q_i - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i} \right) = -\frac{\partial M}{\partial q_i}$.*

1.3 Mecânica Hamiltoniana

1.3.1 Equações de Movimento

Sabemos que $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i, t)$ onde \mathcal{L} é a função de Lagrange. Então

$$d\mathcal{L} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathcal{L}}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right)$$

Usando a equação de Lagrange (1.56) é a regra da derivação do produto, temos

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{d}{dt} \left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L} \right) \quad (1.59)$$

Se em (1.59) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$ então $\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}$ é constante e, portanto, usando (1.55) podemos escrever

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} = K$$

onde k é uma constante.

A função Hamiltoniana, ou simplesmente Hamiltoniana, é denotada por \mathcal{H} e definida como

$$\mathcal{H} = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L} \quad (1.60)$$

Usando a definição de momento generalizado (1.55), observamos que a Hamiltoniana depende apenas do momento p_i , da coordenada generalizada q_i e do tempo t , isto é,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(q_i, p_i, t).$$

Logo

$$d\mathcal{H} = \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \right). \quad (1.61)$$

Usando a função Hamiltoniana (1.60), temos

$$d\mathcal{H} = \sum_i p_i dq_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - d\mathcal{L} \quad (1.62)$$

em que

$$d\mathcal{L} = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt.$$

Agora, usando a equação de Lagrange (1.56) e o momento generalizado (1.55), isto é,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \text{ e } p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$$

temos

$$d\mathcal{L} = \sum_i \dot{p}_i dq_i + \sum_i p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt, \quad (1.63)$$

pois

$$\dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}.$$

Substituindo (1.63) em (1.62) temos

$$d\mathcal{H} = \sum_i (-\dot{p}_i dq_i) + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt. \quad (1.64)$$

Comparando (1.61) com (1.64) obtemos

$$\sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \dot{p}_i \right) dq_i + \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \dot{q}_i \right) dp_i + \sum_i \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \right) dt = 0. \quad (1.65)$$

Como os termos infinitesimais dq_i , dp_i e dt são independentes, temos que a solução da equação (1.65) é dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} + \dot{p}_i = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \dot{q}_i = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$$

isto é,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (1.66)$$

As equações dadas por (1.66) representam a fórmula de Hamilton para descrever o movimento, chamadas de *equações do movimento de Hamilton*.

Capítulo 2

Modelagem de Problemas Mecânicos

2.1 O Vibrador Centrífugo

Oscilações excitadas pela rotação de uma massa desbalanceada é um tipo comum de oscilações forçadas em sistemas mecânicos. Consideremos um sistema oscilante simples deste tipo conhecido como *Vibrador Centrífugo*. Este sistema vibrante é composto por um motor *DC* (motor de corrente contínua) com potência limitada e uma mola que sustenta o motor. O motor gira duas pequenas massas desbalanceadas m_2 e m_3 , que são sincronizadas anti-fase, por meio um sistemas de engrenagens (figura 2.1).

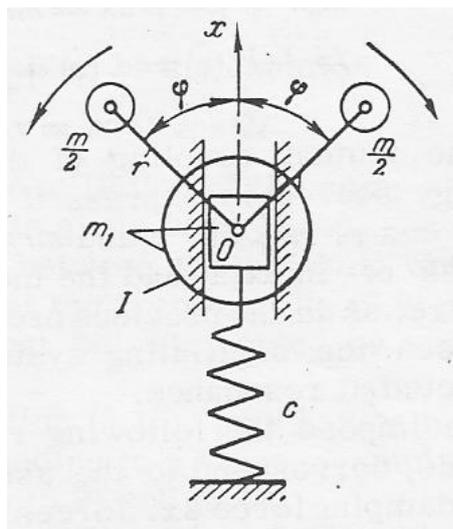


Figura 2.1: Vibrador Centrífugo

Sejam m_0 a massa do motor, r o raio de rotação das pequenas massas desbalanceadas e suponha que $m_2 = m_3 = \frac{m}{2}$. Além disso, denotemos por x o deslocamento vertical do motor

e por φ o deslocamento angular das pequenas massas desbalanceadas. Observe que neste esquema o motor não possui deslocamentos laterais.

Agora, introduzindo as coordenadas x_2 e z_2 como sendo respectivamente as posições vertical e horizontal da massa m_2 e x_3 e z_3 como sendo respectivamente as posições vertical e horizontal da massa m_3 , temos as seguintes relações

$$\begin{aligned}x_2 &= x + r \cos \varphi \text{ e } z_2 = r \operatorname{sen} \varphi \\x_3 &= x + r \cos \varphi \text{ e } z_3 = -r \operatorname{sen} \varphi\end{aligned}\tag{2.1}$$

Usando-se as relações (2.1) obtemos as velocidades generalizadas dadas pelas seguintes formas

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= \dot{x} - r\dot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi \text{ e } \dot{z}_2 = r\dot{\varphi} \cos \varphi \\ \dot{x}_3 &= \dot{x} - r\dot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi \text{ e } \dot{z}_3 = -r\dot{\varphi} \cos \varphi\end{aligned}\tag{2.2}$$

Assim, usando-se as equações dadas em (2.2), podemos escrever a energia cinética desse sistema na forma

$$T = \frac{1}{2} \left[m_0 \dot{x}^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{m}{2} (\dot{x}_2^2 + \dot{z}_2^2) + J\dot{\varphi}^2 \right]\tag{2.3}$$

onde J é o momento de inércia da parte giratória do motor.

Substituindo as velocidades das massas dadas pelas equações (2.2) na equação (2.3), reescrevemos a energia cinética T em termos do raio r e das variáveis x e φ , ou seja

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \left\{ m_0 \dot{x}^2 + \frac{m}{2} [(\dot{x} - r\dot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi)^2 + (r\dot{\varphi} \cos \varphi)^2 + (\dot{x} - r\dot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi)^2 + (-r\dot{\varphi} \cos \varphi)^2] + J\dot{\varphi}^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ m_0 \dot{x}^2 + \frac{m}{2} [2(\dot{x} - r\dot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi)^2 + 2r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi] + J\dot{\varphi}^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} [m_0 \dot{x}^2 + m(\dot{x}^2 - 2r\dot{x}\dot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi) + J\dot{\varphi}^2] \\ &= \frac{1}{2} [m_0 \dot{x}^2 + m(\dot{x}^2 - 2r\dot{x}\dot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2) + J\dot{\varphi}^2] \\ &= \frac{1}{2} [m_1 \dot{x}^2 + m(-2r\dot{x}\dot{\varphi} \operatorname{sen} \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2) + J\dot{\varphi}^2]\end{aligned}\tag{2.4}$$

onde $m_1 = m_0 + m$ é massa total do sistema.

A energia potencial do sistema é dada por $V = U - W_c$, onde $U = \frac{1}{2} c x^2$ é a energia

de deformação da mola, e $W_c = -mgr \cos \varphi$ denota o trabalho das forças conservativas (peso). Assim a energia potencial V é escrita como

$$V = \frac{1}{2}cx^2 + mgr \cos \varphi. \quad (2.5)$$

Portanto, depois de obtidas as energias cinética T e potencial V , respectivamente pelas equações (2.4) e (2.5), escrevemos a lagrangeana \mathcal{L} do sistema como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [m_1 \dot{x}^2 + m(-2r\dot{x}\dot{\varphi} \sin \varphi + r^2 \dot{\varphi}^2) + J\dot{\varphi}^2] - \frac{1}{2}cx^2 - mgr \cos \varphi. \quad (2.6)$$

Assim, as equações de movimento de Lagrange para o sistema será

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\beta \dot{x} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = M(\dot{\varphi}) \end{cases} \quad (2.7)$$

onde $\beta \dot{x}$ é uma força linear de resistência ao movimento oscilatório, e $M(\dot{\varphi})$ é uma função que define as características do torque resultante gerado pelo motor.

Substituindo a lagrangeana dada pela equação (2.6) nas derivadas parciais $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}$ e $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}$ da equação (2.7) obtemos

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = m_1 \ddot{x} - mr\ddot{\varphi} \sin \varphi - mr\dot{\varphi}^2 \cos \varphi \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = -mr\ddot{x} \sin \varphi - mr\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi + I\ddot{\varphi} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -cx \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -mr\dot{x}\dot{\varphi} \cos \varphi + mgr \sin \varphi \end{cases} \quad (2.8)$$

onde $I = J + mr^2$ é o momento de inércia total do sistema.

Assim, usando-se as equações dadas em (2.8) nas equações de (2.7) obtemos

$$\begin{cases} m_1\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = mr\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + mr\ddot{\varphi}\sin\varphi \\ I\ddot{\varphi} = M(\dot{\varphi}) + mr\ddot{x}\sin\varphi + mgr\sin\varphi \end{cases}$$

que é as equações de movimento do sistema (figura 2.1).

2.2 O Pêndulo Mecânico Não-Ideal

Consideremos um sistema vibrante com três graus de liberdade composto por um bloco de massa m_1 e um motor *DC* (motor de corrente contínua) o qual está fixo ao bloco e este pode deslizar horizontalmente sobre uma base. Uma mola com não linearidade cúbica é presa a uma parede e ao bloco. Além disso, um pêndulo de comprimento L o qual possui uma massa m_3 fixa à extremidade livre do pêndulo é conectado ao bloco. O motor *DC* gira uma pequena massa desbalanceada m_2 a qual provoca oscilações no pêndulo. Estas oscilações do pêndulo tem por finalidade “controlar” as vibrações da massa m_1 do bloco queimando energia em forma de oscilações. O motor *DC* tem potência limitada, e então o sistema dinâmico torna-se não-ideal, pois o comportamento do motor é afetado pelo comportamento do bloco e do pêndulo. Este sistema mecânico é conhecido como Pêndulo Mecânico Não-Ideal (figura 2.2). Apresentaremos a seguir as equações de movimento do sistema de duas formas, um utilizando o formalismo lagrangeano, e outra, o formalismo hamiltoniano.

2.2.1 Equações Lagrangeanas

Denotemos por x o deslocamento horizontal do bloco de massa m_1 , por φ o deslocamento angular da pequena massa m_2 e por θ a oscilação angular do pêndulo. Definindo as coordenadas y_1 e z_1 como sendo respectivamente as posições horizontal e vertical bloco de massa m_1 , y_2 e z_2 respectivamente as posições horizontal e vertical da massa m_2 e, y_3 e z_3 respectivamente as posições horizontal e vertical da massa m_3 , temos as seguintes coordenadas

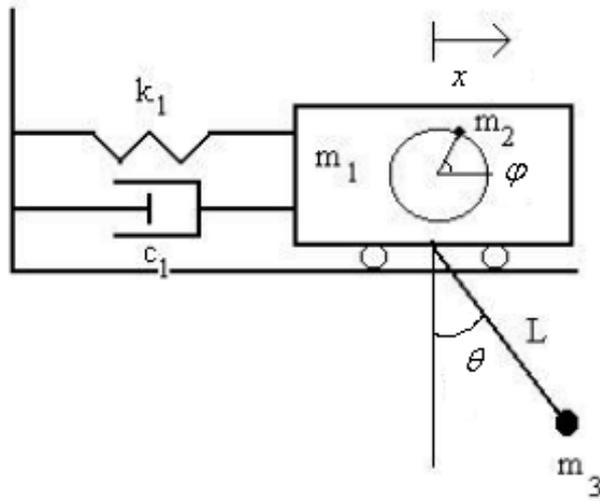


Figura 2.2: Pêndulo mecânico não-ideal

generalizadas das massas:

$$\begin{aligned}
 y_1 &= \bar{y}_1 + x \\
 z_1 &= \bar{z}_1 \\
 y_2 &= \bar{y}_2 + x + R \cos \varphi \\
 z_2 &= \bar{z}_2 + R \sin \varphi \\
 y_3 &= \bar{y}_3 + x + L \sin \theta \\
 z_3 &= \bar{z}_3 - L(1 - \cos \theta)
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Usando-se as equações (2.9) obtemos as velocidades generalizadas:

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= \dot{x} \\
 \dot{z}_1 &= 0 \\
 \dot{y}_2 &= \dot{x} - R\dot{\varphi} \sin \varphi \\
 \dot{z}_2 &= R\dot{\varphi} \cos \varphi \\
 \dot{y}_3 &= \dot{x} + L\dot{\theta} \cos \theta \\
 \dot{z}_3 &= -L\dot{\theta} \sin \theta
 \end{aligned} \tag{2.10}$$

Em termos de coordenadas generalizadas, podemos escrever a energia cinética desse sistema na forma

$$T = \frac{1}{2} [m_1(\dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + m_2(\dot{y}_2^2 + \dot{z}_2^2) + J_2\dot{\varphi}^2 + m_3(\dot{y}_3^2 + \dot{z}_3^2)] \tag{2.11}$$

onde J_2 é o momento de inércia da parte giratória do motor.

Substituindo as velocidades dadas pelas equações de (2.10) na equação (2.11), reescremos a energia cinética em termos do raio R , do comprimento do pêndulo L e das variáveis x , φ e θ , ou seja

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\{m_1\dot{x}^2 + m_2[(\dot{x} - R\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + (R\dot{\varphi}\cos\varphi)^2] + J_2\dot{\varphi}^2 + m_3[(\dot{x} + L\dot{\theta}\cos\theta)^2 + (-L\dot{\theta}\sin\theta)^2]\} \\ T &= \frac{1}{2}[m_1\dot{x}^2 + m_2(\dot{x}^2 - 2R\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + R^2\dot{\varphi}^2) + J_2\dot{\varphi}^2 + m_3(\dot{x}^2 + 2L\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + L^2\dot{\theta}^2)] \\ T &= \frac{1}{2}[m_0\dot{x}^2 + m_2(-2R\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + R^2\dot{\varphi}^2) + J_2\dot{\varphi}^2 + m_3(2L\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + L^2\dot{\theta}^2)] \end{aligned}$$

onde $m_0 = m_1 + m_2 + m_3$ é a massa do sistema.

A energia potencial total do sistema é dada por $V = U - W_c$, onde $U = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{4}k_3x^4$ é a energia de deformação da mola, e $W_c = -g[m_2R\sin\varphi + m_3L(1 - \cos\theta)]$ denota o trabalho das forças conservativas (peso). O termo $\frac{1}{4}k_3x^4$ que aparece em U determina uma característica de não linearidade do tipo *Duffing*¹, e a constante g em V denota a aceleração da gravidade. Assim a energia potencial V é escrita como

$$V = \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{4}k_3x^4 + g[m_2R\sin\varphi + m_3L(1 - \cos\theta)].$$

Portanto, usando o formalismo de Lagrange e as energias cinética T e potencial V , podemos escrever a Lagrangeana \mathcal{L} do sistema Pêndulo Mecânico Não-Ideal como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}[m_0\dot{x}^2 + m_2(-2R\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + R^2\dot{\varphi}^2) + J_2\dot{\varphi}^2 + m_3(2L\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + L^2\dot{\theta}^2)] \\ &- \left\{ \frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{4}k_3x^4 + g[m_2R\sin\varphi + m_3L(1 - \cos\theta)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Assim, as equações de movimento de Lagrange do sistema são

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -c_1\dot{x} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = M(\dot{\varphi}) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -c_3\dot{\theta} \end{cases} \quad (2.13)$$

onde $-c_1\dot{x}$ é uma força linear de resistência ao movimento oscilatório do bloco, $M(\dot{\varphi})$ é o torque

¹Um estudo sobre as equações de *Duffing* pode ser encontrado em [3]

líquido gerado pelo motor e $-c_3\dot{\theta}$ é a força de amortecimento do pêndulo.

Derivando parcialmente a lagrangeana \mathcal{L} em relação às variáveis x , \dot{x} , φ , $\dot{\varphi}$, θ e $\dot{\theta}$ obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -k_1x - k_3x^3$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m_0\dot{x} - m_2R\dot{\varphi}\text{sen}\varphi + m_3L\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m_2R\cos\varphi(\dot{x}\dot{\varphi} + g)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = -m_2R\dot{x}\text{sen}\varphi + (J_2 + m_2R^2)\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -m_3L\text{sen}\theta(\dot{x}\dot{\theta} + g)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m_3L\dot{x}\cos\theta + m_3L^2\dot{\theta}$$

Mais ainda,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) = m_0\ddot{x} - m_2R(\ddot{\varphi}\text{sen}\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) + m_3L(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\text{sen}\theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = -m_2R(\ddot{x}\text{sen}\varphi + \dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi) + (J_2 + m_2R^2)\ddot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = m_3L(\ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\text{sen}\theta) + m_3L^2\ddot{\theta}$$

Assim, as equações Lagrangeanas de movimento para o sistema é

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0\ddot{x} + c_1\dot{x} + k_1x + k_3x^3 = m_2R(\ddot{\varphi}\text{sen}\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi) - m_3L(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\text{sen}\theta) \\ (J_2 + m_2R^2)\ddot{\varphi} = m_2R\ddot{x}\text{sen}\varphi + M(\dot{\varphi}) - m_2gR\cos\varphi \\ m_3L^2\ddot{\theta} + c_3\dot{\theta} = -m_3L\ddot{x}\cos\theta - m_3gL\text{sen}\theta \end{array} \right.$$

Note que os termos do lado esquerdo do sistema anterior definem um acoplamento entre motor, bloco e pêndulo.

2.2.2 Equações Hamiltonianas

Considere os momentos generalizados P_x , P_φ e P_θ os quais são definidos em termos das velocidades \dot{x} , $\dot{\varphi}$ e $\dot{\theta}$ pelas relações

$$P_x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}, \quad P_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \quad \text{e} \quad P_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \quad (2.14)$$

onde $\mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi}, \theta, \dot{\theta})$ é a lagrangeana do sistema dada por (2.12). Usando os momentos generalizados dados em (2.14) e a lagrangeana (2.12) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, \varphi, \theta, P_x, P_\varphi, P_\theta) &= \dot{x}P_x + \dot{\varphi}P_\varphi + \dot{\theta}P_\theta - \frac{1}{2}[m_0\dot{x}^2 + m_2(-2R\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + R^2\dot{\varphi}^2) \\ &+ J_2\dot{\varphi}^2 + m_3(2L\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + L^2\dot{\theta}^2)] + \left\{\frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{4}k_3x^4 \right. \\ &+ \left. g[m_2R\sin\varphi + m_3L(1 - \cos\theta)]\right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Agora, usando-se as definições de momento e da Lagrangeana dadas respectivamente por (2.14) e (2.12) obtemos

$$\begin{cases} P_x &= m_0\dot{x} - m_2R\dot{\varphi}\sin\varphi + m_3L\dot{\theta}\cos\theta \\ P_\varphi &= -m_2R\dot{x}\sin\varphi + (J_2 + m_2R^2)\dot{\varphi} \\ P_\theta &= m_3L\dot{x}\cos\theta + m_3L^2\dot{\theta} \end{cases} \quad (2.16)$$

Substituindo as equações de (2.16) em (2.15) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, \varphi, \theta, P_x, P_\varphi, P_\theta) &= \frac{\dot{x}P_x + \dot{\varphi}P_\varphi + \dot{\theta}P_\theta}{2} + \left\{\frac{1}{2}k_1x^2 + \frac{1}{4}k_3x^4 \right. \\ &+ \left. g[m_2R\sin\varphi + m_3L(1 - \cos\theta)]\right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Isolando \dot{x} , $\dot{\varphi}$ e $\dot{\theta}$ em (2.16) obtemos

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \left\{ \frac{J_2 + m_2 R^2}{(m_0 - m_3 \cos^2 \theta)(J_2 + m_2 R^2) - (m_2 R \sin \varphi)^2} \right\} P_x \\ & + \left\{ \frac{m_2 R \sin \varphi}{(m_0 - m_3 \cos^2 \theta)(J_2 + m_2 R^2) - (m_2 R \sin \varphi)^2} \right\} P_\varphi \\ & - \left\{ \frac{(J_2 + m_2 R^2) \cos \theta}{L[(m_0 - m_3 \cos^2 \theta)(J_2 + m_2 R^2) - (m_2 R \sin \varphi)^2]} \right\} P_\theta \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi} = & \left\{ \frac{m_2 R \sin \varphi}{(m_0 - m_3 \cos^2 \theta)(J_2 + m_2 R^2) - (m_2 R \sin \varphi)^2} \right\} P_x \\ & + \left\{ \frac{1}{J_2 + m_2 R^2} + \frac{(m_2 R \sin \varphi)^2}{(J_2 + m_2 R^2)[(m_0 - m_3 \cos^2 \theta)(J_2 + m_2 R^2) - (m_2 R \sin \varphi)^2]} \right\} P_\varphi \\ & - \left\{ \frac{m_2 R \sin \varphi \cos \theta}{L[(m_0 - m_3 \cos^2 \theta)(J_2 + m_2 R^2) - (m_2 R \sin \varphi)^2]} \right\} P_\theta \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = & - \left\{ \frac{(J_2 + m_2 R^2) \cos \theta}{L[(m_0 - m_3 \cos^2 \theta)(J_2 + m_2 R^2) - (m_2 R \sin \varphi)^2]} \right\} P_x \\ & - \left\{ \frac{m_2 R \sin \varphi \cos \theta}{L[(m_0 - m_3 \cos^2 \theta)(J_2 + m_2 R^2) - (m_2 R \sin \varphi)^2]} \right\} P_\varphi \\ & + \left\{ \frac{1}{m_3 L^2} + \frac{(J_2 + m_2 R^2) \cos^2 \theta}{L^2[(m_0 - m_3 \cos^2 \theta)(J_2 + m_2 R^2) - (m_2 R \sin \varphi)^2]} \right\} P_\theta \end{aligned} \quad (2.20)$$

Assim, substituindo as equações (2.18), (2.19) e (2.20) na Hamiltoniana (2.17) obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \left(\frac{J_2 + m_2 R^2}{(m_0 - m_3 \cos^2 \theta)(J_2 + m_2 R^2) - (m_2 R \sin \varphi)^2} \right) P_x^2 \\ & + \left(\frac{1}{J_2 + m_2 R^2} + \frac{(m_2 R \sin \varphi)^2}{(J_2 + m_2 R^2)[(m_0 - m_3 \cos^2 \theta)(J_2 + m_2 R^2) - (m_2 R \sin \varphi)^2]} \right) P_\varphi^2 \\ & + \left(\frac{1}{m_3 L^2} + \frac{(J_2 + m_2 R^2) \cos^2 \theta}{L^2[(m_0 - m_3 \cos^2 \theta)(J_2 + m_2 R^2) - (m_2 R \sin \varphi)^2]} \right) P_\theta^2 \\ & + \left(\frac{2m_2 R \sin \varphi}{(m_0 - m_3 \cos^2 \theta)(J_2 + m_2 R^2) - (m_2 R \sin \varphi)^2} \right) P_x P_\varphi \\ & - \left(\frac{2(J_2 + m_2 R^2) \cos \theta}{L[(m_0 - m_3 \cos^2 \theta)(J_2 + m_2 R^2) - (m_2 R \sin \varphi)^2]} \right) P_x P_\theta \\ & - \left(\frac{2m_2 R \sin \varphi \cos \theta}{L[(m_0 - m_3 \cos^2 \theta)(J_2 + m_2 R^2) - (m_2 R \sin \varphi)^2]} \right) P_\varphi P_\theta \\ & + \left\{ \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{4} k_3 x^4 + g[m_2 R \sin \varphi + m_3 L(1 - \cos \theta)] \right\} \end{aligned} \quad (2.21)$$

A fim de obter as equações de Hamilton para este problema, consideramos a função Hamiltoniana $\mathcal{H}(x, \varphi, \theta, P_x, P_\varphi, P_\theta) = P_x \dot{x} + P_\varphi \dot{\varphi} + P_\theta \dot{\theta} - \mathcal{L}(x, \varphi, \theta, \dot{x}, \dot{\varphi}, \dot{\theta})$ e assim, diferenciando-

a obtemos

$$d\mathcal{H} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_x}dP_x + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_\varphi}dP_\varphi + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_\theta}dP_\theta + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}dx + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi}d\varphi + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta}d\theta, \quad (2.22)$$

$$d\mathcal{H} = (dP_x)\dot{x} + P_x(d\dot{x}) + (dP_\varphi)\dot{\varphi} + P_\varphi(d\dot{\varphi}) + (dP_\theta)\dot{\theta} + P_\theta(d\dot{\theta}) - d\mathcal{L} \quad (2.23)$$

onde

$$d\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x}dx + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}d\varphi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}}d\dot{x} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}d\dot{\varphi} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}}d\dot{\theta} \quad (2.24)$$

Além disso, usando as equações dadas pelas equações (2.13) temos

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} = \dot{P}_x + c_1\dot{x}; \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = \dot{P}_\varphi - M(\dot{\varphi}); \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = \dot{P}_\theta + c_3\dot{\theta} \quad (2.25)$$

onde

$$\dot{P}_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} \right); \quad \dot{P}_\varphi = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} \right); \quad \dot{P}_\theta = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} \right)$$

Deste modo, comparando as equações (2.22) e (2.23) e usando conjuntamente as equações (2.24) e (2.25) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_x}dP_x + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_\varphi}dP_\varphi + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_\theta}dP_\theta + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}dx + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi}d\varphi + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta}d\theta &= (dP_x)\dot{x} + P_x(d\dot{x}) + (dP_\varphi)\dot{\varphi} + P_\varphi(d\dot{\varphi}) \\ &+ (dP_\theta)\dot{\theta} + P_\theta(d\dot{\theta}) - (\dot{P}_x + c_1\dot{x})dx - (\dot{P}_\varphi - M(\dot{\varphi}))d\varphi - (\dot{P}_\theta + c_3\dot{\theta})d\theta - P_x(d\dot{x}) - P_\varphi(d\dot{\varphi}) - P_\theta(d\dot{\theta}) \end{aligned}$$

Rearranjando os termos da equação anterior adequadamente obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_x} - \dot{x} \right) dP_x + \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_\varphi} - \dot{\varphi} \right) dP_\varphi + \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial P_\theta} - \dot{\theta} \right) dP_\theta + \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} + \dot{P}_x + c_1\dot{x} \right) dx \\ + \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi} + \dot{P}_\varphi - M(\dot{\varphi}) \right) d\varphi + \left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta} + \dot{P}_\theta + c_3\dot{\theta} \right) d\theta = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Portanto, das equações (2.26) obtemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_x} \\ \dot{P}_x = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} - c_1 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_x} \\ \dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\varphi} \\ \dot{P}_\varphi = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} + M \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\theta} \right) \\ \dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\theta} \\ \dot{P}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} - c_3 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P_\theta} \end{array} \right.$$

que são as equações Hamiltonianas de movimento do sistema Pêndulo Mecânico Não-Ideal com mola não-linear sendo a Hamiltoniana \mathcal{H} dada pela equação (2.21).

Considerações Finais

Após os estudos analítico de mecânica, nota-se que os formalismos de Lagrange e de Hamilton trazem vantagens do ponto de vista de modelagem quando comparado com o formalismo newtoniano, visto que, as equações de Newton levam em conta coordenadas vetoriais para descrever posição, velocidade e aceleração enquanto que nos formalismos de Lagrange e Hamilton trabalham-se com coordenadas generalizadas. Além disso, após a modelagem matemática dos sistemas que foram objetivos deste trabalho, nota-se que as equações de Hamilton podem trazer vantagens do ponto de vista computacional, visto que são equações de primeira ordem e existem diversos programas que integram numericamente sistemas de primeira ordem.

Por fim, uma proposta de estudos futuros baseados nestes dois sistemas vibrantes é um estudo analítico de suas equações de movimento, utilizando-se para isto a teoria clássica de sistemas dinâmicos e a implementação numérico-computacional para comparar os resultados analíticos e numéricos.

Referências Bibliográficas

- [1] Dias A. O. & Tsuchida M. 2002. **Dinâmica do Sistema Pêndulo Mecânico Não-Ideal nas Principais Ressonâncias**. Anais do I Congresso Temático de Dinâmica, Controle e Aplicação. São José do Rio Preto, SP.
- [2] Goldstein H., Poole C. & Safko J. 2002. **Classical Mechanics, 3rd ed.**. San Francisco, Ed. Addison Wesley, 638p.
- [3] Guckenheimer J. & Holmes P. ano. **Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields**. New York, Ed. Springer-Verlag, 484p.
- [4] Kaplan W. O. 1969. **Advanced Calculus, 5rd ed.**. Michigan, Ed. Pearson, 736p.
- [5] Kononenko V. O. 1969. **Vibrating Systems with a Limited Power Supply**. London, Ed. Iliffe Books Ltd, 236p.
- [6] Meirovitch L. 1970. **Methods of Analytical Dynamics**. New York, Ed. McGraw-Hill, 524p.
- [7] Symon K. R. A. 1996. **Mecânica**. Rio de Janeiro, Editora Campus, 684p.