Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul

PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO- PROPP

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

LUIZ PEREIRA NASCIMENTO JUNIOR

A Importância da Matemática Financeira no Ensino Médio

Dissertação de Mestrado

Dourados/MS

11 de Março de 2017

LUIZ PEREIRA NASCIMENTO JUNIOR

A Importância da Matemática Financeira no Ensino Médio

Dissertação submetida como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre, pelo Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT junto PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO- PROPP da Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul

Orientador: Prof. Phd. Cosme E. Rubio Mercedes

Dourados/MS

11 de Março de 2017

LUIZ PEREIRA NASCIMENTO JUNIOR

A IMPORTÂNCIA DA MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós Graduação – Mestrado Profissional em Matemática - (PROFMAT), da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre, sob orientação do Professor PhD Cosme E. Rubio Mercedes.

Local, ____ de ____________ de ______.

BANCA EXAMINADORA

____

Professor Cosme E. Rubio Mercedes, PhD. (UEMS)
Presidente da Banca – Orientador

____

Professor Rildo Pinheiro Nascimento , Me. (UEMS)
1º Avaliador – Membro Efetivo

____

Professor Robert Jesus Rodriguez Reyes, Dr. (UFGD)
2º Avaliador – Membro Efetivo

Dedico este trabalho ao Senhor Jesus, "Porque Dele e por Ele, e para Ele, são todas as coisas. . . " $_{Rm 11.36}$

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao Senhor Jesus, que através do seu Espírito "tem recompensado aquele que O agrada com sabedoria" $_{Ec.2.26}$ e estendo estes agradecimentos a todos os que contribuíram com a realização desse trabalho, especialmente:

- à minha esposa Glaura e aos meus filhos Larissa, Jade, Lucas e Nathanael pelo apoio, compreensão e força em todos os momentos;

- aos meus pais Luiz e Leonora, que não tiveram oportunidade de estudo, mas os seus sonhos estenderam-se a mim através de palavras de conforto e encorajamento. Meu êxito será o deles também;

- ao Prof. Phd. Cosme, meu orientador. Agradeço pelas dicas importantes e pela orientação no desenvolvimento desse trabalho;

- aos professores do Programa de Pós-graduação, Mestrado Profissional em Matemática, da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, pela partilha do conhecimento através das disciplinas oferecidas no decorrer do curso;

- aos amigos e amigas do PROFMAT, pelas inúmeras contribuições durante os estudos e pelos longos períodos que passamos nos dedicando ao curso, independentemente de dia, hora ou lugar.

- à CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo apoio financeiro, sem o qual não haveria a menor possibilidade de conclusão desse trabalho.

“Proclamo Jesus como filho de Deus em nome da ciência. Meu espírito científico, que dá grande valor à relação entre causa e efeito, compromete-me a reconhecer que, se ele não o fosse, eu não mais saberia quem ele é. Mas ele é o filho de Deus. Suas palavras são divinas, sua vida é divina, e foi dito com razão que existem equações morais assim como existem equações matemáticas.”

(Louis Pasteur)

Resumo

Neste trabalho abordamos a Matemática Financeira no Ensino Médio, a realidade do currículo brasileiro e as possibilidades de contextualização utilizando como ponto de apoio a Matemática Crítica. Apresentamos os conceitos matemáticos de sequências, recorrências, progressões aritméticas, progressões geométricas, juros simples, juros composto. Sugerimos uma proposta de trabalho integrando tais conceitos à Matemática Financeira de forma que o estudante do Ensino Médio possa estabelecer conexões entre os mesmos, favorecendo o processo de ensino-aprendizagem , utilizando como ferramenta pedagógica a metodologia de resolução de situações- problema, de forma que os conteúdos se interliguem, articulem e complementem, dando significância às situações apresentadas , colocando o estudante na condição de protagonista na construção de sua aprendizagem.

Palavras-chave: Matemática Financeira; Ensino Médio; Sequências; Progressões; Contextualização.

Abstract

In this Project we approach the Financial Mathematics in High School, the reality of Brazilian curriculum and the possibilities of contextualization using the Critical Mathematics as a point of support. We present the math Mathematics concepts of sequences, recurrences, arithmetic progressions, geometric progressions, simple interest, compound interest. We suggest a proposal of work integrating integrating such concepts into Financial Mathematics so that the student of the High School can establish connections between them, favoring the teaching-learning process, using as pedagogical tool a methodology for solving problem situations, so that the contents interconnect, articulate and complement each other, giving significance to the situations presented, placing the student as a protagonist in the construction of their learning..

Keywords:. Financial Mathematics; Recurrences; Progressions; High School; Contextualization.

Sumário

1 Introdução

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), de 1996, o ensino de Matemática Financeira deve ocorrer em todas as etapas da educação básica. No artigo 27, citam-se as diretrizes da educação básica, em que é destacada a difusão de valores fundamentais ao interesse social, aos direitos e deveres dos cidadãos, de respeito ao bem comum e à ordem democrática. Ações de nosso cotidiano estão diretamente ligadas à Matemática Financeira, daí a sua importância e a necessidade de uma abordagem significativa dos conteúdos à ela relacionados, proporcionando ao estudante uma compreensão dos mecanismos que regem o sistema financeiro, facilitando seu entendimento e propondo aplicações dos conceitos matemáticos que estão envolvidos nas atividades financeiras tais como os cálculos dos juros simples e compostos, os descontos, dando significado a diversos conteúdos importantes da Matemática do Ensino Médio, tais como: Sequência, Recorrência, Progressões Aritméticas e Geométricas, entre outros.

O presente trabalho de conclusão de curso trata dessas informações de forma integrada, passando pelos conceitos e chegando à sequência didática que trata as informações de forma que se conectem e tragam ao estudante a possibilidade de ampliação da compreensão do diálogo que a matemática estabelece em si mesma.

A Matemática Financeira outrora figurava nos antigos currículos de cursos profissionalizantes a área de contabilidade. Com a uma nova mudança ficou em um segundo plano para o atual Ensino Médio, destaque apenas em algumas instituições como suplemento de carga horária, inserida como parte diversificada de um conteúdo. Esse trabalho propõe a sua inserção definitiva na grade curricular do Ensino Médio, visto a importância do tal assunto, nas situações não raras, no cotidiano do brasileiro que precisa diariamente lidar a Matemática Financeira para nos orientarmos na tomada de decisões importantes na nossa vida.

2 Matemática Financeira no Ensino Médio

Observando as sequências didáticas do Ensino Médio, verifica-se que embora a Matemática Financeira seja um assunto importante para o estudante não é tratada de forma profunda e significativa , ficando na superficialidade. Henrique (2008) menciona que é preciso levar em conta que, ao se falar de Matemática Financeira, se consideram contextos em que se envolvem, entre outros assuntos, consumo, trabalho e operações bancárias. Assim, torna-se necessário que se reflita sobre a questão social implícita a cada uma das aplicações, em geral cotidianas, desse conteúdo. De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (lei nº 9394/96), um dos objetivos do Ensino Médio é a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos (BRASIL, 1996, p.12). Também os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) destacam que a Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo e ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo. A disciplina desempenha um papel estrutural, sendo ciência da vida cotidiana, para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas (BRASIL, 2006, p. 40).

De forma concisa, Santos (2005), define o objeto de estudo da Matemática Financeira :

De uma forma simplificada, podemos dizer que a Matemática Financeira é o ramo da Matemática Aplicada que estuda o comportamento do dinheiro no tempo. A Matemática Financeira busca quantificar as transações que ocorrem no universo financeiro levando em conta a variável tempo, ou seja, o valor monetário no tempo (time value money). As principais variáveis envolvidas no processo de quantificação financeira são a taxa de juros, o capital e o tempo. (p. 157).

2.1 Fundamentação Teórica

2.1.1 Sobre o currículo da Matemática Financeira no Ensino Médio

Tendo em vista as diversas transformações ocorridas pelas políticas educacionais, o que se vê hoje em dia é um ensino da Matemática pouco contextualizado, contribuindo para a falta de estímulo dos nossos alunos. De acordo com PINAR (2004) *O currículo, é uma conversa complicada, é altamente abstrato e não raramente está divorciado da sociedade onde vivemos*.

A dicotomia existente entre os conteúdos e a forma como são trabalhados geram sérios problemas de apatia e baixos resultados, o que se nota é um ensino de Matemática pouco contextualizado, que não estimula o estudante. O ensino da Matemática Financeira pode contribuir no sentido de dar significância a tópicos importantes da Matemática, uma vez que está presente no cotidiano das pessoas, se o trabalho desenvolvido em sala de aula fizer essa conexão conteúdo e aplicabilidade, certamente teremos resultados melhores, com maior eficácia e eficiência.

2.1.2 Educação Matemática Crítica

Propor que os estudantes se envolvam com toda a construção do conhecimento e com o processo de ensino-aprendizagem, ou seja, “atribuir aos estudantes uma competência crítica”. Esta é conseguida através do diálogo com o professor, quando conseguem identificar pontos relevantes a serem abordados. Mas, para que a Matemática se torne algo próximo da vida dos estudantes, é preciso que se aproxime da realidade em que vivem, que seja dinâmica, objetiva e reflexiva. Assim, num contexto de Matemática Financeira, a Matemática Crítica assume importância relevante. A proposta é desenvolver estratégias metodológicas baseadas na resolução de problemas.

Na Matemática Financeira, se consideram contextos onde se envolvem, entre outros assuntos, consumo, trabalho, operações bancárias, torna-se necessário que se reflita sobre a questão social implícita a cada uma dessas aplicações, em geral cotidianas, desse conteúdo. A relação professor-aluno possui um papel fundamental nesse processo, principalmente através da comunicação originada das diferentes mídias disponíveis como, entre outras, a escrita, a fala, os e-mails. Neste caso, o professor não deve ser o centralizador do poder, já que ele não é o único a determinar os problemas a serem abordados em sala de aula, sendo então o aluno co-construtor do conhecimento adquirido no processo de ensino e aprendizagem com a direção do professor.

De acordo com Skovsmose (2001), este processo pode ser chamado de Educação Crítica. Nela, os alunos se envolvem com toda a construção do conhecimento e com o processo de ensino- aprendizagem, ou seja, “é atribuída aos estudantes uma competência crítica”. Essa competência, como papel dos alunos, é conseguida através do diálogo com o professor, quando conseguem identificar pontos relevantes a serem abordados no momento em que o professor, de acordo com nossa Metodologia de Ensino, os convoca para uma Plenária em sala de aula. Para Skovsmose, um dos pontos-chave da Educação Crítica não está inserido no processo educacional, pois está relacionado com problemas existentes fora do universo da Educação. Ele acredita que os problemas estudados devem ser relevantes para os alunos e dentro de seus interesses, pois, se não o forem, não será um problema para eles e nem terão o desejo de resolvê-lo. Além disso, se as questões possuírem uma relação próxima “com problemas sociais objetivamente existentes” (SKOVSMOSE, 2001, p.20), a abordagem desses conceitos poderá ser feita levando-se em conta a sociedade em que vivemos.

3 Conceituando

3.1 Sequências

Um conceito intuitivo para sequência é de um conjunto de elementos numéricos que são colocados em uma certa ordem.

Sequência é sucessão, ordenar elementos seguindo um determinado padrão. Elementos dispostos em certa ordem, obedecendo a uma sequência dizemos que esse conjunto corresponde a uma sequencia ou sucessão. Elementos de uma sequencia podem ser de vários tipos:

• O conjunto ordenado (0, 2, 4, 6, 8, 10,. . .) é a sequência de números pares.

• O conjunto ordenado (11, 13, 15, 17, 19) é a sequência de números impares $\geq$ 11 e $\leq$ 19.

• O conjunto ordenado (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19) é uma sequência de números primos.

Cada um desses elementos dos conjuntos que chamamos de sequência é denominado termo. Para todos os efeitos, a representação dos termos de uma sequência é dada por uma letra e um índice que indica a posição do termo na sequência.

O primeiro termo da sequência, pode ser designado por a_1, o segundo termo por a_2, o terceiro termo por a_3 e assim sucessivamente. Também chamamos o n-ésimo, termo conhecido também pela notação definida a_n, de termo geral, que pode representar qualquer termo da sequência. Quando, por exemplo, formos nos referir ao 23º termo e só indicarmos o a_n = 23.

Qualquer elemento que queremos indicar tomamos também por a_n, pois é conhecido principalmente por ser um termo de ordem n. A representação de uma sequência dada por definição é : (a_1, a_2, a_3, a_4, . . . , a_n).

Se uma sequência qualquer possui o último termo dizemos que ela é uma sequência finita. Se essa sequência não possui o último termo, dizemos que é infinita. Veja os exemplos a seguir:

3.1.1 Sequência finitas

Números pares entre 2 e 20 (2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20); Posição relativa dos vinte primeiros colocados numa corrida automobilística (1°, 2°, 3°, 4°, 5°, . . . , 20°).

3.1.2 Sequências infinitas

Números inteiros (. . . -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,. . .); O conjunto entre todos os números primos (2, 3, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, . . .).

Para compreendermos o estudo das progressões geométricas e progressões aritméticas o estudo dos conceitos de sequências é pré requisito fundamental. Usualmente conhecidas como com PA e PG as progressões são sequências numéricas com algumas propriedades específicas e com alguns tratamentos particulares, a identificação e o conhecimento sobre o assunto de sequências e sucessões é uma ferramenta de grande auxílio no estudo de progressões.

Para determinarmos uma sequência numérica precisamos de uma lei de formação.

Exemplo 1. A sequência definida pela lei de formação $a_n = 3n^2 - 2$, $n \in N$, onde n = 1, 2, 3, 4, 5, . . . e an é o termo que ocupa a n-ésima posição na sequência. Por esse motivo, an é chamado de termo geral da sequência.

Utilizando a lei de formação $a_n = 3n^2 - 2$, atribuindo valores para n, encontramos alguns termos da sequência.

- $n = 1 \rightarrow a_1 = 3 \cdot 1^2 - 2 \rightarrow a_1 = 2$
- $n = 2 \rightarrow a_2 = 3 \cdot 2^2 - 2 \rightarrow a_2 = 10$
- $n = 3 \rightarrow a_3 = 3 \cdot 3^2 - 2 \rightarrow a_3 = 25$
- $n = 4 \rightarrow a_4 = 3 \cdot 4^2 - 2 \rightarrow a_4 = 46$

Assim, a sequência formada é (2, 10, 25, 46, . . .)

3.2 Recorrências

Uma sequência é dita recorrente, ou simplesmente "recorrência", quando a partir de um certo termo, todos os termos são dados em função do(s) termo(s) anterior(es).

Resolver uma equação de recorrência é encontrar uma fórmula fechada para a recorrência. Ou seja, encontrar uma expressão que permita determinar cada x_n em função apenas de *n*, sem necessidade de se conhecer os termos anteriores. Essa expressão é dita solução da recorrência.

Seja **R** o conjunto dos números reais e **N** = {0, 1, 2, . . . } o conjunto dos números naturais.

Uma função f:**N**→**R** chama-se sequência (de números reais) e de modo geral indicaremos, uma sequência por seus valores

$$f=(f(0), f(1), f(2), \dots, f(n), \dots).$$

As recorrências podem ser apresentadas dos seguintes modos:

Através de uma expressão de recorrência que, a partir de um certo termo, determina cada próximo termo em função dos anteriores. Por exemplo: Uma sequência cujo primeiro termo é x_1 = 1 e cada termo a partir do segundo é dado por:

$$x_n=2x_{n-1}+3, (x_n)=(1, 5, 13, 29,\dots)$$

Através de uma expressão, ou "fórmula fechada", que associa o termo xn a cada número natural n. Por exemplo:

$$x_n=2n+3, (x_n)=(5, 7, 9, 12,\dots) .$$

A partir de uma mesma recorrência podemos gerar varias sequências distintas. Assim, é necessário que sejam informados os primeiros termos a partir dos quais os demais elementos serão obtidos, para que uma sequência seja descrita numericamente, a partir da relação de recorrência.

Em BOYER (1996), a sequência de Fibonacci foi inspirada num problema que consistia em determinar o número de pares de coelhos que serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês. Desse problema célebre surge à sequência de Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., F_n, ..., onde F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.

As equações de recorrências podem ser classificadas de acordo com a sua ordem, com a homogeneidade e linearidade.

Definição 3.2.1. *A ordem de uma recorrência é a diferença entre o maior e o menor dos índices dos termos de sua equação.*

A equação de recorrência $x_n = \frac{x_{n-3}}{x_{n-4}}$ com n $\geq$ 5, representa uma recorrência de 4^a ordem, haja visto a diferença n-(n-4)=4 .

Definição 3.2.2. *Uma recorrência é dita "homogênea" quando cada termo depende exclusivamente dos anteriores. Em contrapartida, uma recorrência é dita "não-homogênea" quando além de depender dos termos anteriores, cada elemento da sequência também está em função de um termo independente.*

Podemos citar, como exemplos, que a equação x_{n+1}=5x_{n+1}+x_n representa uma recorrência homogênea, ao passo que a equação x_{n+1}=x_n+1 representa uma recorrência não-homogênea.

As recorrências ainda podem ser caracterizadas como lineares e não-lineares.

Definição 3.2.3. *Uma sequência (x_n) possui uma equação de recorrência linear de ordem k se esta escrita na forma.*

$$f_k(n)x_{n+k}+f_{k-1}(n)x_{n+k-1}++f_1(n)x_{n+1}+f_0(n)x_n=h(n)$$

com $f_i(n)$, $0 \leq i \leq k$ e h(n) funções de $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$, $f_k \neq 0$ e $f_0 \neq 0$.

Observe que se h(n) = 0 a recorrência linear é homogênea e, caso contrário, a recorrência é não homogênea.

Pela definição, observemos que as equações $x_{n+1}=nx_{n+2}+3x_n$ e $x_{n+2}=x_n+2n$ representam recorrências lineares.

As equações $x_{n+1} = \frac{x_{n+1}}{x_n}$ e $x_{n+1}=(x_n)^2$ representam recorrências não-lineares.

Definição 3.2.4. Resolver uma equação de recorrência é encontrar uma fórmula fechada para a recorrência. Ou seja, encontrar uma expressão que permita determinar cada xn em função apenas de n, sem necessidade de se conhecer os termos anteriores. Essa expressão é dita solução da recorrência.

3.3 Recorrências lineares de 1ª Ordem

Definição 3.3.1. *Uma recorrência linear de 1^a ordem expressa x_{n+1} em função de x_n, ela será linear se, e somente se, sua equação for da forma:*

$$x_{n+1}=g(n)x_n+h(n), \text{ com } g(n)\neq 0, \forall\ n \in \mathbf{N}$$

Se h(n)=0 temos uma recorrência linear "homogênea" de 1^a ordem e, no caso contrário, se h(n)≠0 temos uma recorrência linear "não-homogênea" de 1^a ordem.

Exemplo 1. Vamos determinar a solução da equação de recorrência linear homogênea de 1^a ordem $a_{n+1} = 2a_n$, com condição inicial $a_1 = 2$ Para escrevermos a_n em função de n, vamos analisar o comportamento da sequência a partir do seu valor inicial. Daí.

$$a_2 = 2 \cdot 2 = 2^2$$

$$a_3 = 2 \cdot a_2 = 2^3$$

$$a_4 = 2 \cdot a_3 = 2^4$$

$$\ldots$$

$$a_n = 2^n$$

é uma possível solução da equação de recorrência.

Exemplo 2. Vejamos como determinar a solução da equação linear de 1^a ordem não homogênea $a_{n+1} = a_n + 2n$, com $a_1 = 1$. Vamos determinar os valores iniciais da sequência.

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = a_1 + 2 \cdot 1 = 1 + 2 = 3$$

$$a_3 = a_2 + 2 \cdot 2 = 3 + 4 = 7$$

$$a_4 = a_3 + 2 \cdot 3 = 7 + 6 = 13$$

De posse dos valores iniciais, podemos escrever:

$$a_2 - a_1 = 2$$

$$a_3 - a_2 = 4$$

$$a_4 - a_3 = 6$$

$$\dots$$

$$a_n - a_{n-1} = 2 \cdot (n - 1)$$

Adicionando as igualdades acima, obtemos:

$$a_n - a_1 = 2 + 4 + 6 + \dots + 2 \cdot (n - 1).$$

Note que $2 + 4 + 6 + \dots + 2 \cdot (n - 1)$ são os termos de uma sequências de números pares, ou ainda uma Progressão Aritmética de razão 2, que será detalhado no proximo capítulo , então:

$$a_n - 1 = \frac{[2+2.(n-1)].(n-1)}{2}.$$

Resultando na solução da equação de recorrente:

$$a_n = n^2 - n + 1.$$

Exemplo 3. Resolver a recorrência: $x_{n+1}=x_n+2^n$, $x_1=1$.

Variando os valores de n, temos:

$$x_2 = x_1 + 2$$

$$x_3 = x_2 + 2^2$$

$$x_4 = x_3 + 2^3$$

$$\dots$$

$$x_n = x_{n+1} + 2^{n+1}$$

que somando, resulta:

$$x_n = x_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n+1})$$

$$x_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n+1}$$

$$x_n = 1.\frac{2^n-1}{2-1}$$

$$x_n = 2^n - 1$$

3.4 Progressões Aritméticas

Segundo (CARVALHO; MORGADO, 2006) uma progressão aritmética é uma sequência de números (a_1, a_2, a_3, a_4, $\dots$, a_n, $\dots$) na qual é constante a diferença entre cada termo a_{n+1} e seu antecedente a_n. Essa diferença constante é chamada de razão e será representada por r.

3.4.1 Fórmula do termo geral de uma PA

No Ensino Médio também podemos perceber a importância de usar a ferramenta da recorrência para resolver problemas do cotidiano, quando são apresentados os conteúdos de Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG) é fácil ver a aplicabilidade desse recurso.

A fórmula do termo geral de uma PA é deduzida da seguinte maneira.

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_2 + r$$

$$a_4 = a_3 + r$$

$$\ldots$$

$$a_n = a_{n-1} + r$$

somando os dois lados da igualdade obtemos:

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n = a_1 + a_1 + r + a_2 + r + a_3 + r + \ldots + a_{n-1} + r$

ou seja:

$$a_n = a_1 + r + r + r + \cdots + r$$

como aparece (n - 1) vezes na soma $a_1 + r + r + r + \cdots + r$, assim temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

que é exatamente a fórmula do termo geral de uma PA.

Veremos que esse argumento pode ser generalizado para equações de recorrência lineares de primeira ordem.

3.4.2 Fórmula da soma dos termos de uma PA

Para deduzirmos a fórmula da soma dos termos de uma PA também vamos usar recorrência, uma vez concebido o conceito desta ferramenta o aluno pode facilmente deduzir suas próprias formulas.

Consideremos a PA finita $(a_1, a_2, a_3, \ldots , a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ e seja a soma de seus termos. Logo temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

como $a_n = a_1 + (n - 1)r$ desta maneira:

$$S_n = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \ldots + (a_1 + (n - 3)r) + (a_1 + (n - 2)r) + (a_1 + (n - 1)r)$$

usando a propriedade comutativa, podemos escrever:

$$S_n = (a_1 + (n - 1)r) + (a_1 + (n - 2)r) + (a_1 + (n - 3)r) + \ldots + (a_1 + 2r) + (a_1 + r) + a_1$$

somando as duas equações, cada termo com seu correspondente, temos:

$$2S_n = a_1 + (a_1 + (n - 1)r) + (a_1 + r) + (a_1 + (n - 2)r) + \ldots + (a_1 + (n - 1)r) + a_1$$

Então:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

como $(a_1 + a_n)$ aparece *n* vezes na equação acima, assim temos:

$$2Sn = (a_1 + a_n)n$$

multiplicando os dois lados da igualdade por $1/2$ obtemos:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

que é exatamente a fórmula da soma dos termos de uma PA.

3.5 Progressões Geométricas

Segundo (CARVALHO; MORGADO, 2013) uma progressão geométrica é uma sequência na qual é constante o quociente de cada termo pelo termo anterior. Esse quociente constante é chamado de razão e é representado pela letra q. A razão da progressão é simplesmente o valor 1 + i, onde i é uma taxa de crescimento constante de cada termo para o seguinte.

3.5.1 Fórmula do termo geral de uma PG

A progressão geométrica é essencial no estudo de matemática financeira, visto que faz parte da sua teoria fundamental. A fórmula do termo geral de uma PG usa-se o argumento generalizado para equações de recorrência lineares de primeira ordem, deduzida da seguinte maneira:

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 \cdot q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q$$

$$a_4 = a_3 \cdot q$$

$$\ldots$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

multiplicando os dois lados da igualdade obtemos:

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \ldots \, a_n = a_1 \cdot a_1 \cdot q \cdot a_2 \cdot q \cdot a_3 \cdot q \ldots \, a_{n-1} \cdot q$$

ou seja:

$$a_n = a_1 \cdot q \cdot q \cdot q \ldots \, q$$

como *q* aparece (n - 1) vezes na multiplicação $a_1 \cdot q \cdot q \cdot q \ldots \, q$, logo temos:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

que é exatamente a fórmula do termo geral de uma PG.

3.5.2 Fórmula da soma dos termos de uma PG

Também é possível deduzir a fórmula da soma dos termos de uma PG através de algumas recorrências.

Consideremos a PG finita (a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n) e seja S_n a soma de seus termos, desta maneira temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

vamos multiplicar os dois membros dessa igualdade pela razão , obtendo:

$$qS_n = a_1 q + a_2 q + a_3 q + \ldots + a_{n-2} q + a_{n-1} q + a_n q$$

ou:

$$qS_n = a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + a_n q$$

fazendo $S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$ menos $qS_n = a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n+a_nq$ temos:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_nq$$

como $a_n = a_1q^{n-1}$, então $a_nq = a_1q^{n-1}q$, daí:

$$S_n(1 - q) = a_1 - a_1q^n$$

isto é:

$$S_n(1 - q) = a_1(1 - q^n)$$

portanto:

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

para $q \neq 1$, que é exatamente a fórmula da soma dos termos de uma PG.

Ou ainda fazendo:

$$qS_n = a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n+a_nq \text{ menos } S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$$

$$qS_n - S_n = a_nq - a_1$$

como $a_n = a_1q^{n-1}$, então $a_nq= a_1q^{n-1}q$:

$$S_n(q - 1) = a_1(q^n - a_1)$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$$

para $q \neq 1$, que é exatamente a fórmula da soma dos termos de uma PG.

3.6 Juros Simples

Faz-se necessário o conhecimento de alguns conceitos da Matemática Financeira para resolver situação-problema doravante apresentada neste trabalho. Para Zani, Wagner e Morgado (1993),

> A operação básica da matemática financeira é a operação de empréstimo. Alguém que dispõe de um capital C (chamado de principal), empresta-o a outrem por um certo período de tempo. Após esse período, ele recebe o seu capital C de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de juro. A soma J + C é chamada de montante e será representada por M. A razão i = J.C , que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e chamada de taxa de juros (ZANI; WAGNER; MORGADO, 1993).

O Capital inicial, chamado de C, ou principal, é o valor monetário que vamos usar para base de cálculo dos juros.

Há de se observar nas taxas de juros o período de tempo. Por exemplo: na taxa 15% ao mês, 15% corresponde a taxa e ao mês refere-se o período de tempo.

O montante é um capital, adicionado a um juro em um determinado tempo. Assim, o prazo é considerado discreto, já que na pratica a menor fração de tempo é 1 dia. Por esse motivo a dotamos a letra como prazo.

Chamamos de juro o pagamento pelo uso do capital por um determinado tempo. Ainda pode ser compreendido como o custo da operação, ou ainda, a renda do capital aplicado.

As pessoas pagam juros porque querem hoje algo que só poderiam comprar no futuro e outras recebem juros como forma de compensação por emprestar seu dinheiro poupado.

3.6.1 Cálculo dos juros simples

No sistema de juros simples, somente o capital inicial rende juros.

Exemplo 1. Joãozinho tem que pagar o aluguel no valor de R$ 850, 00 onde é cobrado juros simples de 8% a.m. se ele pagar em atraso. Qual será o juro se ele pagar o aluguel com atraso de:

a) um mês?

O juro será de J = 850 $\times$ 0,08 $\times$ 1 = R$ 68, 00, isto é, 8% de R$ 850, 00 em 1 mês.

b) dois meses?

Somente o capital inicial rende juros, logo seu valor será J = 850 $\times$ 0,08 $\times$ 2 = R$ 136, 00, isto é, o valor do juro de 2 meses é igual a 2 vezes o juro de 1 mês.

c) três meses?

O juro será de = 850 $\times$ 0,08 $\times$ 3 = R$ 204, 00, isto é, 3 vezes o juro de 1 mês.

A cobrança de juros quando se tem um capital e uma taxa fixada irá variar apenas no tempo, isto é, só irá existir cobrança de juros se houver atraso, logo deduz-se uma fórmula para o cálculo do juro simples que é:

$$J = C \cdot i \cdot n$$

sendo *C* o capital inicial, *i* uma taxa na forma decimal e *n* o prazo na mesma unidade de tempo da taxa.

3.6.2 Cálculo dos juros simples para períodos não inteiros

Em se tratando de uma função linear, $J(n) = C \cdot i \cdot n$, quando o prazo não coincide com o período utiliza-se um prazo proporcional para aplicação dos juros.

Uma regra geral é usar o mês comercial com 30 dias e 360 para o ano nas operações financeiras, ficando assim denominado de juro comercial. No entanto a contagem de dias para a cobrança, e ou pagamento, deve ser feita de forma exata.

Portanto, divide-se o prazo por 30 e tem-se um prazo proporcional quando a taxa for mensal. Se for anual e o prazo em dias, divide-se por 360 para obter a taxa proporcional anual.

Veja um exemplo onde o período da taxa de juros e o prazo de aplicação, não coincidem.

João da Silva, para comprar sua moto, fez um financiamento onde deve pagar o valor de R$ 128,80 no dia 15 de janeiro de 2017. Se o pagamento for feito com atraso, o devedor pagará multa de 2% sobre o valor da prestação e juros simples de 6% ao mês, conforme boleto bancário da figura 1. Supondo que ele pague a dívida no dia **01 de fevereiro de 2017**, de quanto será a multa e o juro?

BANCO DO BRASIL | 001-9 | 00193.95334 30000.000007 00000.027219 3 38770000020000

Local de pagamento: QUALQUER BANCO ATÉ O VENCIMENTO						Vencimento: 15/01/17
Cedente: MOTO K Ltda						Agência/Código cedente: 0012-3/ 987564
Data do documento: 15/01/17	No. documento		Espécie doc.	Aceite	Data process.: 02/01/17	Nosso número: 0272193
Uso do banco	Carteira: 25/625	Espécie: R$	Quantidade		x Valor: 128,80	(=) Valor documento: 128,80

Instruções (Texto de responsabilidade do cedente)

Sr Caixa, após o vencimento cobrar multa de 2% e juros simples de 6% ao mês

TÍTULO SUJEITO A PROTESTO

(-) Desconto / Abatimento
(-) Outras deduções
(+) Mora / Multa
(+) Outros Acréscimos
(=) Valor cobrado

Sacado
Nome: João da Silva
Rua: A, 01, Bairro Bom

Autenticação Mecânica

Figura 1 – Boleto de pagamento da moto

Para resolver esse problema, tem-se alguns passos:

1º) observe a figura 1 para fazer a contagem exata dos dias em atraso: nesse caso não se conta o dia do vencimento, mas se conta o dia do pagamento.

2º) a multa é uma penalidade, logo não importa a quantidade de dias de atraso, calcula-se a multa aplicando o seu percentual sobre o capital (valor da dívida).

multa = $0,02 \cdot 128{,}8 = 2{,}576$ = R$ 2,58

Mês	Nº de dias	Justificativa
janeiro	$31 - 15 = 16$	(nº de dias de janeiro) – (data de vencimento)
fevereiro	1	data do pagamento
Total de dias	17	soma dos dias de janeiro e fevereiro

Figura 2 – Dias em atraso

3º) encontra-se a taxa proporcional diária:

$$i_{mensal}=6\%\text{ a.m. } \therefore\ i_{diria}=6\% \div 30=0{,}2\%\text{ a.d.}$$

4º) calcula-se o juro simples, onde:

C = R$ 128,80

i = 0, 2% a.d.

n = 17 dias

Assim,

$$J = 128{,}8 \cdot 0{,}002 \cdot 17 = 4{,}3792 = \textbf{R\$ 4,38.}$$

3.6.3 Juros Compostos

Nesse regime o valor dos juros de cada período é obtido pela aplicação da taxa de juros sobre o Saldo existente no início período correspondente, popularmente juros sobre juros.

O Mercado Financeiro segue todo ele a lei de juros compostos. Assim todos os papéis de Renda Fixa, Sistema de Habitação, Crediário etc. segue o regime de juros compostos. Para Zani, Wagner e Morgado (1993),

> O regime de juros compostos de taxa i, um principal C_0 transforma-se, em n períodos de tempo, em um montante igual a $C_n=C_0(1+i)^n$. Ou ainda, uma quantia, cujo valor atual é *A*, equivalerá no futuro, depois de n períodos de tempo, a $F = A(1+i)^n$. Essa é a fórmula fundamental da equivalência de capitais: Para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por $(1+i)^n$, e para obter o valor atual, basta dividir o futuro por $(1+i)^n$. (ZANI; WAGNER; MORGADO, 1993).

No regime de juros compostos de taxa i, um principal C_0 transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante $M_n=C_0(1+i)^n$.

3.6.4 Cálculo dos juros compostos

O juro composto é calculado sobre o montante obtido no período anterior. Somente no primeiro período é que os juros são calculados sobre o capital inicial.

Exemplo 1. Qual o montante produzido em 3 meses a uma taxa de 20% a.m., no regime de juros compostos, a partir de um capital inicial de R$ 10.000,00?

I = 0,2 a.m.

n = 3 meses

C_0 = 10000, logo:

$$\text{Aplicando em } M_n=C_0(1+i)^n$$

$$M_n = 10000(1+0{,}2)^3 = 1.780{,}00.$$

Observações:

i) A unidade de medida de tempo n deve ser compatível com a unidade utilizada na taxa de juros;

ii) A taxa de juros deve ser expressa em fração decimal e não em porcentagem.

Exemplo 2. Um capital de R$ 5000,00, aplicado a uma taxa de juros compostos de 4% a.m por um período de cinco meses renderá quanto de juros?

M = ?

C_0 = 5000,00

i = 4% a.m = 0,04

t = 5 meses

Aplicando em $M_n = C_0(1+i)^n$.

M_n = 5000(1 + 0,04)^5 = R$ 6.083,26

J = M – C

J = 6083,26 – 5000,00

J = **R$ 1.083,26**

Conclusão: esta aplicação renderá R$ 1.083,26

4 Integrando a Matemática Financeira aos conceitos abordados

Neste item a proposta é integrar os conceitos acima apresentados no contexto da Matemática Financeira, mostrando a possibilidade de diálogo entre estes, trazendo ao estudante a possibilidade de compreender e aplicar tais conceitos de maneira prática e útil.

Para que isso seja possível, os conteúdos específicos devem ser apresentados de forma articulada, de modo que um determinado conteúdo seja abordado sob o contexto de outro. Assim, os conteúdos estruturantes transitam entre si através destas articulações, contribuindo para um ensino de matemática em que os conceitos se articulam, se intercomunicam e se complementam.(SANTOS,2008).

4.1 A resolução de situações-problema como metodologia de ensino-aprendizagem

O grande objetivo da escola é preparar o aluno para resolver situações problemáticas que ele encontra em seu cotidiano e que encontrará em sua vida adulta. Espera-se que cada área da aprendizagem escolar contribua para esse objetivo (DIAS; MUNIZ; BERTONI, 2008).

A proposta do uso de problemas de Matemática Financeira tem o intuito de fornecer um contexto concreto, no qual o estudante se veja naturalmente inserido, de forma que perceba com facilidade um motivo para se estudar determinados conteúdos. A resolução de problemas como metodologia de ensino da Matemática Financeira, pode fazer com que os conceitos e princípios matemáticos fiquem mais compreensivos para os estudantes uma vez que eles serão elaborados, adquiridos, investigados de maneira ativa e significativa. É a assimilação compreensiva do conteúdo.

Para que o aluno seja capaz de resolver situações problemas o enunciado da mesma deve ser claro, assim o mesmo será capaz de entender e identificar as partes principais da situação. Ensinar a resolver problemas é uma tarefa mais difícil do que ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos. Não é um mecanismo direto de ensino, mas uma variedade de processos de pensamento que precisam ser cuidadosamente desenvolvidos pelo aluno com o apoio e incentivo do professor (DANTE, 1999, p.30).

4.2 Matemática Financeira e Progressão Aritmética

Quando os rendimentos são devidos única e exclusivamente sobre o principal, ao longo dos períodos de tempo a que se referir uma determinada taxa i de juros. O juro gerado em cada período é constante e igual ao capital vezes a taxa. O montante a juros simples evolui segundo uma **progressão aritmética (PA)** cujo primeiro termo é *C* e a razão é *C.i*, isto é, evolui linearmente. Sendo M_n o montante para um determinado período *n*, a soma do capital inicial e os juros auferidos nesse período, a sequência (M_0,M_1,M_2,M_3, ... ,M_n) dos montantes formados, a partir da época 0 (o momento do empréstimo), é obtida, a partir do capital inicial, somando-se sempre a mesma parcela (os juros de cada período unitário). Observe que esse tipo de P.A. é sempre crescente, uma vez que os valores do capital inicial e da taxa são sempre positivos, logo, o seu produto também o será.

Portanto, o montante (***M***) e o juro (***J***), ao fim de n períodos, serão: **M = C.(1 + n.i)** e **J= C.i.n**.

4.2.1 Contextualizando Sequências e PA‘s

Para que o estudante do Ensino Médio possa compreender o que até agora foi abordado é importante aplicar o que se pretende em uma situação do cotidiano, assim, a melhor opção é a resolução de um exercício, que possibilita à ele entender como os conteúdos interagem entre si.

Exemplo 1. Um capital inicial de R$100,00 é aplicado numa instituição financeira à taxa de juros simples de 30% ao mês, ou seja, o valor do capital é alterado a cada mês com um aumento de 30% em relação ao capital inicial. A sequência de valores do capital, a cada mês, forma uma:

Solução: Temos que R$100,00 é o valor do capital inicial. Como, 30% de 100 é $0{,}3 \times 100 = 30$, a sequência de valores (veja a tabela 2) é uma progressão aritmética (sequência linear), pois, cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo anterior somado de um número fixo (que no caso é 30).

Fim do 1º mês	Fim do 2º mês	Fim do 3º mês	E assim por diante
R$ 130,00	R$ 160,00	R$ 190,00	...

Tabela 2: Relação entre P.A. e montante nos juros simples.

Portanto, temos uma Progressão Aritmética de razão (ou diferença) r = 30.

Exemplo 2: Seja a aplicação a juros simples do capital R$ 200,00, à taxa de 5% ao mês, durante 5 meses. Elaborar a seqüência dos montantes formados nesse período.

Resolução: Temos: C = 200, i = 0,05 e n = 5

Os juros para um período unitário é dado por J = Ci = 200 0,05 = 10. Logo, A sequência será formada, somando-se 10, a cada termo anterior, a partir do primeiro, ou seja, ao capital inicial. Dessa forma, a sequência será a seguinte:

(200, 210, 220, 230, 240, 250)

A tabela 3 apresentada a seguir, usa o exemplo anterior para mostrar a relação entre os termos de uma **P. A**. e a sequência dos montantes, generalizando, para um número n de períodos:

a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$	a_{n+1}
200=200+0*10	210=200+1*10	220=200+2*10	230=200+3*10	$\cdots$	200+10^n
$C = M_0$	M_1	M_2	M_3	$\cdots$	M_n

Tabela 3: Relação entre P.A. e montante nos juros simples.

Observe que o n-ésimo termo da sequência dos montantes corresponde ao (n+1)-ésimo termo da P.A. Aplicando-se a fórmula do termo geral da P.A., temos:

$$M_n = a_{n+1} = a_1+[(n+1)-1]r = a_1+nr$$

Substituindo a_1 por *C* e r por *Ci* na fórmula anterior, obtemos:

$$M_n = C+Cin = C(1+in)$$

É fácil observar que esta é a fórmula usada na Matemática Financeira para o cálculo do montante em juros simples.

4.3 Matemática Financeira e Progressão Geométrica

O capital investido ou emprestado será acrescido do rendimento de juros, compondo um novo principal, o qual no período seguinte será acrescido de rendimento de juros, e assim sucessivamente. O Montante a juros compostos evolui segundo uma **progressão geométrica (PG)** cujo primeiro termo é *C* e a razão é *1+i*, isto é, evolui exponencialmente.

Por exemplo, os juros relativos ao terceiro período são obtidos multiplicando-se o montante M_2 do segundo período por *i*. Mas, como o montante M_3 relativo ao terceiro período é a soma do montante do período anterior com os juros relativos a esse período, temos:

$$M_3=M_2+M_2i=M_2(1+i)$$

Generalizando essa situação, para um período n qualquer, obtemos:

$$M_n=M_{n-1}(1+i)$$

O termo $(1+i)^n$ é denominado **fator de acumulação de capital**. Observe que os juros não são constantes, eles variam conforme o período. Logo, o juro acumulado em n períodos, pode ser obtido da seguinte forma:

Como $M = C + J$ e $M = C(1 + i)^n$, então:

$$J=C.(1+i)^n-C=C.[(1+i)^n-1]$$

Ocorrendo a hipótese das taxas serem variáveis, a expressão do montante a juros compostos será:

$$M=C(1+i_1)(1+i_2)\ldots(1+i_n)$$

4.3.1 Contextualizando Sequências e PG's

Entender o princípio de juros compostos não é simples para o estudante do Ensino Médio, como comentado anteriormente é preciso otimizar a contextualização para que se possa estabelecer relações. O Referencial Curricular de forma geral, não favorece que isso aconteça, mas nos exemplos a seguir podemos vislumbrar uma possibilidade.

Exemplo 1. Um capital inicial é aplicado numa instituição financeira à taxa de juros compostos de 30% ao mês. Ou seja, o valor do capital aplicado é alterado a cada mês com um aumento de 30% em relação ao mês anterior. A sequência de valores do capital, a cada mês, forma uma:

Solução: Pela Matemática Financeira, aumentar um valor em 30% é o mesmo que multiplicar este valor por 1,3. Seja R$100,00 o capital inicial. A sequência de valores (veja a tabela 4) é uma progressão geométrica (sequência exponencial), pois, cada termo, a partir segundo, é igual ao termo anterior multiplicado por um número fixo (que no caso é 1,3).

Fim do 1º mês	**Fim do 2º mês**	**Fim do 3º mês**	**E assim por diante**
R$ 130,00	R$ 169,00	R$ 219,70	...

Tabela 4: Relação entre P.G. e montante nos juros compostos.

Portanto, temos uma Progressão Geométrica de razão (ou diferença) q = 1,3.

Exemplo 2: Escrever a sequência dos montantes Mn para uma aplicação de R$ 200,00 a juros compostos de 5% ao mês, durante 5 meses.

Resolução: Temos: C = 200, i = 0,05, 1+ i = 1,05 e n = 5

A sequência que se obtém, com valores aproximados (em alguns casos), é a seguinte:

(200; 210; 220,05; 231,52; 243,10)

A tabela 5 mostra a correlação entre a fórmula do termo geral de uma progressão geométrica e esta sequência:

a_1	a_2	a_3	a_4	...	a_{n+1}
200=200*1,05^0	210=200*1,05^1	220,5=200*1,05^2	231,5=200*1,05^3	...	200*1,05^n
$C = M_0$	M_1	M_2	M_3	...	M_n

Tabela 5: Relação entre P.G. e montante nos juros compostos

Também aqui ocorre a relação $M_n = a_{n+1}$. Usando-se a fórmula do termo geral da P.G., temos:

$$M_n=a_{n+1}=a_nq^{[(n+1)-1]} =a_1q^n$$

Por outro lado, substituindo a_1 por C e q por 1+ i na fórmula anterior, obtemos:

$$M_n=C(1+i)^n$$

É fácil observar que esta é a fórmula usada na Matemática Financeira para se calcular o montante no regime de capitalização a juros compostos.

4.4 Matemática Financeira e Séries

Seja (a_n) uma sequência infinita. A soma infinita $\Sigma_{n=n_0}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ é chamada série numérica infinita de termo geral an. Se somarmos apenas os n primeiros termos desta série, teremos o que chamamos de soma parcial $S_n = \Sigma_{k=1}^{n} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n.$.

Definida a série mostraremos ao estudante do Ensino Médio a co-relação com o conteúdo de juros compostos com exercícios aplicado no cotidiano, onde, por exemplo, lidam com compras parceladas sem saber os juros embutido, ou ainda, numa tentativa de resgate de parcelas há vencer qual o procedimento correto a se fazer.

Teorema: No regime de juros compostos de taxa i, um principal C_0 transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante $C_n = C_0\ (1 + i)^n$.

No fundo, só há um único problema de Matemática Financeira: deslocar quantias no tempo.

Um outro modo de interpretar o teorema citado, é que uma quantia, hoje igual a C_0, transformar-se-á, depois de n períodos de tempo, em uma quantia igual a $C_0(1 + i)^n$. Isto é, uma quantia, cujo valor atual é A, equivalerá no futuro, depois de n períodos de tempo, a $F = A(1 + i)^n$.

Essa é a fórmula fundamental da equivalência de capitais: Para obter o valor futuro, basta multiplicar o atual por $(1 + i)^n$. Para obter o valor atual, basta dividir o valor futuro por $(1 + i)^n$, (CARVALHO; MORGADO, 2013).

4.4.1 Contextualizando Séries de Pagamentos

Embora pareça complexo para um estudante do Ensino Médio tal compreensão do conteúdo, é possível que a partir da contextualização ele consiga assimilar a proposta. Veja os exemplos a seguir:

Exemplo 1. Pedro tomou um empréstimo de 300 reais, a juros de 15% ao mês. Dois meses após, Pedro pagou 150 reais e, um mês após esse pagamento, Pedro liquidou seu débito. Qual o valor desse último pagamento?

Solução: Os esquemas de pagamento desenhados na figura 3 abaixo são equivalentes. Logo, 300 reais, na data 0, tem o mesmo valor de 150 reais dois meses após, mais um pagamento igual a P, na data 3.

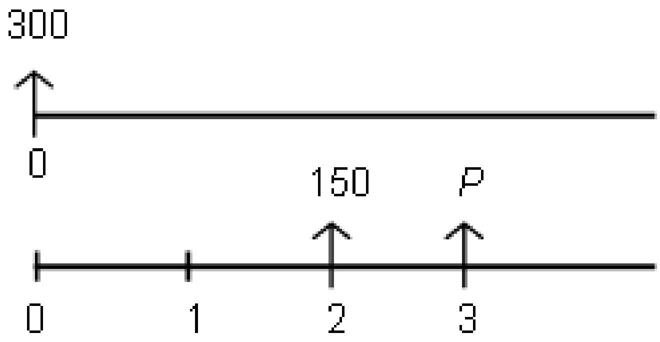

Figura 3 – Séries

Igualando os valores, na mesma época (0, por exemplo), dos pagamentos nos dois esquemas, obtemos

$$300 = \frac{150}{(1+0,15)^2} + \frac{P}{(1+0,15)^3}$$

Daí, P = 283,76. O último pagamento foi de R$ 283,76.

Exemplo 2. José tem três opções de pagamento na compra de vestuário:

a) À vista, com 10% de desconto.

b) Em duas prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira um mês após a compra.

c) Em três prestações mensais iguais, sem desconto, vencendo a primeira no ato da compra.

Qual a melhor opção para José, se o dinheiro vale, para ele, 5% ao mês?

Fixando o preço em 300, temos os três esquemas, representado na figura 4 abaixo

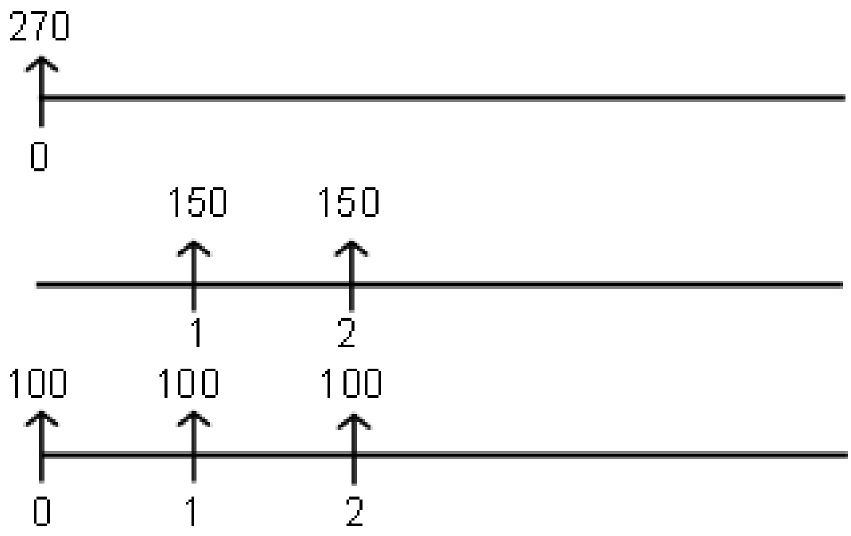

Figura 4 – Séries

Comparando os valores na época 0, obtemos:

$$V_1 = 270,00$$

$$V_2 = \frac{150}{1{,}05} + \frac{150}{1{,}05} \cong 278,91$$

$$V_3 = 100 + \frac{100}{1{,}05} + \frac{100}{1{,}05} \cong 285,94$$

A melhor alternativa pra José é compra à vista e a pior é a compra em três prestações.

Exemplo 3. João tem duas opções de pagamento na compra de um televisor:

i) três prestações mensais de R$ 160,00;

ii) sete prestações mensais de R$ 70,00 cada.

Em ambos os casos, a primeira prestação é paga no ato da compra. Se o dinheiro vale 2% ao mês para João, qual a melhor opção que João possui?

Solução: Para comparar, determinaremos o valor dos dois conjuntos de pagamentos na mesma época, por exemplo na época 2. Os esquemas de pagamento, representado na figura 5, são:

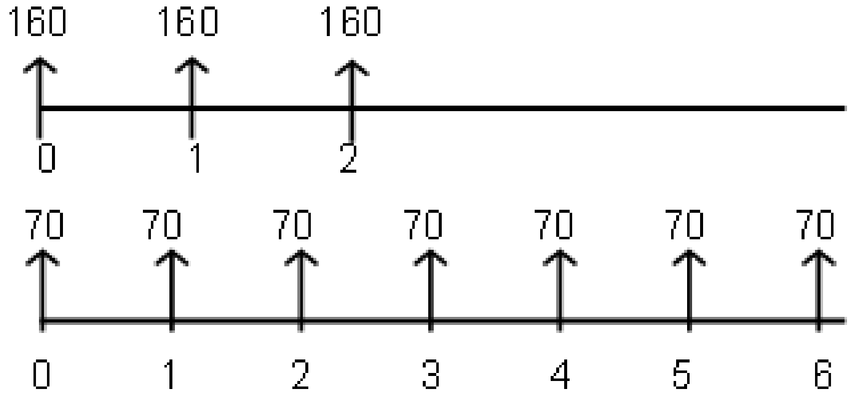

Figura 5 – Séries

Para comparar, determinaremos o valor dos dois conjuntos de pagamentos na mesma época. Por exemplo, na época 2, temos.

$$V_i = 160(1+0,02)^2 + 160(1+0,02)^1 + 160 = 489,66$$

$$V_{ii} = 70(1+0,02)^2 + 70(1+0,02) + 70 + \frac{70}{(1+0,02)} + \frac{70}{(1+0,02)^2} + \frac{70}{(1+0,02)^3} + \frac{70}{(1+0,02)^4}$$

$$V_{ii} = 480,77$$

João deve preferir o pagamento em seis prestações. É um absurdo achar que o primeiro esquema é melhor pois o total pago é de R$ 489,66 ao passo que no segundo esquema o total pago é de R$ 480,77.

4.5 Taxas Equivalentes

Segundo (CARVALHO; MORGADO, 2013) se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo é igual a i, a taxa de juros relativamente a n períodos de tempo é I tal que 1 + I = (1 +i)^n.

Basta Calcular quanto valerá no futuro, depois de n períodos de tempo, um principal igual a *A*. Se usamos a taxa *i*, devemos avançar 1 período de tempo. Logo,

A(1 + I)^1 = A(1 + i)^n e 1 + I = (1 + i)^n.

Mais uma vez, aplicando a metodologia de resolução de problemas, podemos trazer para o estudante do Ensino Médio a aplicabilidade em situações do cotidiano.

Exemplo 1. A taxa anual de juros equivalente a 12% ao mês é I tal que 1 + I = (1 + 0,12)^{12}. Daí, I = 1,12^{12} – 1 = 2,90 = 290%.

Exemplo 2. A taxa mensal de juros equivalentes a 40% ao ano é i tal que 1 + 0,40 = (1 + i)^{12}. Daí, 1 + i = 1,4$^{1/12}$ e i = 1,4$^{1/12}$ – 1= 0,0284 = 2,84%.

Um (péssimo) hábito em Matemática Financeira é o de anunciar taxas proporcionais como se fossem equivalentes, taxas como 12% ao mês e 144% ao ano são chamadas de taxas proporcionais, pois a razão entre elas é igual à razão dos períodos aos quais elas se referem. *Taxas proporcionais nãos são equivalentes.*

Exemplo 3. Sandra investe seu dinheiro a juros de 6% ao ano com capitalização mensal. Qual a taxa anual de juros à qual está investindo o capital de Sandra?

Na realidade o dinheiro de Sandra esta investido a juros de taxa i = 6% $\div$ 12 = 0,5% ao mês. A taxa anual equivalente é I tal que 1 + I = (1 + 0,005)^{12}. Daí, I = 1,005^{12} – 1 = 0,0617 = 6,17% ao ano.

4.6 Séries Uniformes

Segundo Lima, Carvalho, Wagner, Morgado (2010) uma lista de quantias, referidas a épocas diversas, é chamada de série ou anuidade ou, ainda, renda certa. Se esses pagamentos forem iguais a igualmente espaçados no tempo, a série diz-se uniforme.

O Valor atual (isto é, o valor da série uma unidade, de tempo antes do primeiro pagamento) de uma série uniforme de *n* pagamentos iguais a *P* (valor de cada prestação), é, sendo *i* a taxa de juros, igual a A(valor da série uma unidade de tempo antes do primeiro pagamento):

$$A = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + ... + \frac{P}{(1+i)^n}$$

Que é a soma de n termos de uma progressão geométrica. Temos

$$S_n = a_1\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{P}{1+i}.\frac{1-(\frac{1}{1+i})^n}{1-\frac{1}{1+i}} = A$$

$$A = P.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

Veja a seguir uma forma contextualizada para abordar esse conceito:

Exemplo 1. Um bem, cujo preço à vista é R$ 1.200,00, é vendido em 8 prestações mensais iguais, postecipadas (isto é, a primeira é paga um mês após a compra). Se os juros são de 8% ao mês, determine o valor das prestações.

Temos A = 1 200, n = 8, i = 0,08. Aplicando a formula, $A = P.\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, obtemos:

$$1200 = P.\frac{1-(1+0{,}08)^{-8}}{0{,}08} = P = 1200.\frac{0{,}08}{1-1{,}08^{-8}} = 208,82.$$

As prestações são de R$ 208,82.

5 Conclusão

Este trabalho procurou estabelecer uma relação entre a Matemática Financeira e outros conteúdos estruturantes da Matemática, bem como aplicações possíveis no ambiente escolar do Ensino Médio. As atividades apresentadas apontaram as possibilidades de sequências didáticas e metodológicas que levem o estudante a uma compreensão da relação entre currículo e o cotidiano.

No capítulo 2 discorremos sobre a matemática financeira na realidade do currículo brasileiro da matemática para o Ensino Médio, abordando questões que apontam para a necessidade de aulas e propostas que integrem as diversas possibilidades de interação com o estudante, possibilitando a ele uma postura crítica e participativa.

No capítulo 3 abordamos todos os conceitos matemáticos necessários ao atendimento da proposta, exemplificando e dando base para a proposta as ser apresentada no capítulo subsequente.

No capítulo 4, temos a proposta de interação e contextualização da matemática financeira, tendo como base a recorrência. A apresentação de atividades que envolvem situações do cotidiano é fator facilitador para que o estudante se aproxime e aproprie dos conteúdos matemáticos ali elencados, não é simplesmente uma fórmula, e sim, a apresentação de uma situação real que o leva a estabelecer, construir conexões.

Considerando o princípio de que a educação escolar deve ser agente transformador do estudante, contextualizando o objeto de estudo com aplicações em situações reais significativas, visando contribuir para o exercício da cidadania, no sentido de que os indivíduos envolvidos possam gerir seus recursos de forma proficiente, esperamos com este trabalho venha cooperar para que o ensino da Matemática Financeira no Ensino Médio seja mais crítico e profícuo, levando à efetivação de uma ideia tão defendida pelos educadores matemáticos, que é a contextualização dos conteúdos matemáticos.

6 Referências

HENRIQUE, P. H. Matemática Financeira – Um Enfoque da Resolução de Problemas Como Metodologia de Ensino e Aprendizagem. 2008. Dissertação Mestrado. Universidade Estadual Paulista.

CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. de O.; Lima, L.E.; Wagner, E. A Matemática do Ensino Médio,volume 2, Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

CARVALHO, P. C. P.; MORGADO, A. C. de O. Matemática discreta, coleção profmat. Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

SANTOS, G. L. C. Educação financeira: a matemática financeira sob nova perspectiva. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista.

ALRO, H. SKOVSMOSE, O. (2006) Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática. São Paulo: Autêntica.

BOYER, CARL B.; História da Matemática. 2a edição. São Paulo: Edgard Blucher,1996.

ZANI, S. C.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. Progressões e matemática financeira. Rio de Janeiro: SBM, 1993.

BIEMBERGUT, MARIA SALLET; HEIN, NELSON. Modelagem matemática no ensino. 5a edição.
São Paulo: Contexto,2013

DANTE, LUIZ ROBERTO. Matemática. Contexto e Aplicações. Vol. II. São Paulo: Ática, 1999.