

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

MARIANA MANFROI RODRIGUES

**UM ESTUDO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS PARA APLICAÇÃO NA
OTIMIZAÇÃO DE EMBALAGENS**

DOURADOS-MS
2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMATICA – PROFMAT

MARIANA MANFROI RODRIGUES

**UM ESTUDO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS PARA APLICAÇÃO NA
OTIMIZAÇÃO DE EMBALAGENS**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT oferecido pela Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul -UEMS, sob orientação do professor Dr. Alberny Alves Ferreira como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

DOURADOS-MS
2016

R614e Rodrigues, Mariana Manfroi

Um estudo de máximos e mínimos para aplicação na
otimização de embalagens/ Mariana Manfroi Rodrigues. –
Dourados, MS: UEMS, 2016.

44 f.

Dissertação (Mestrado) – Matemática – Universidade
Estadual de Mato Grosso do Sul, 2016.

Orientador: Dr. Alberny Alves Ferreira.

1. Otimização 2. Embalagens 3. Máximos e Mínimos I.
Título

CDD 23.ed. - 515.8

FICHA DE APROVAÇÃO

MARIANA MANFROI RODRIGUES

UM ESTUDO DE MÁXIMOS E MÍNIMOS PARA APLICAÇÃO NA
OTIMIZAÇÃO DE EMBALAGENS

Trabalho de conclusão de curso = TCC do Programa de Pós-Graduação em
Matemática em Rede Nacional, Mestrado Profissional (PROFMAT) da
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul.

Aprovado em: 05/12/2016

Profº Dr.: Albery Alves Ferreira

Profº Dr. Vando Narciso

Profº Dr. Robert Jesús Rodríguez Reyes

DOURADOS-MS
2016

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que me deu força e luz para terminar esta longa e difícil caminhada.

Agradeço aos meus pais, João e Margarete, alicerces em minha vida. Foram eles que me deram a oportunidade de seguir em frente com meus estudos, me deram forças nos momentos de dificuldades e todo apoio necessário durante este período.

Minha avó Helena, uma segunda mãe, está sempre por perto para dar os conselhos mais valiosos que alguém pode oferecer. Também agradeço a minha irmã Daniela e ao meu cunhado Ademir, que tentaram e tentaram me ajudar a escrever, não tiveram muito sucesso, mas tiveram bastante paciência. Aos meus tios e tias, em especial tia Cristina e Tio Paulo, aos primos e primas, à toda minha família.

Aos amigos que conquistei durante o mestrado, todos, sem exceção, tiveram participação na minha formação, mesmo os que nos deixaram pelo caminho, e os que seguiram, mas não conseguiram. Principalmente Lidiane e Simone, pela parceria, pela amizade, pelo companheirismo, pela paciência, pelos puxões de orelha... ao Anderson pelas risadas e também a Juliana pelos dias de estudo antes da qualificação, que foram de grande valor para o nosso sucesso na realização da prova.

Agradeço às amigas da vida, Danielle, Priscila, Jociane e Érika, pois entenderam os momentos de falta durante o curso. Ao amigo e companheiro Willian, que me aturou, me aguentou, momentos de tensão, medo, raiva e choro.

A todos os meus professores, que tiveram paciência de passar um pouco dos seus conhecimentos e experiências, em especial ao professor Alberny, que com sua paciência me orientou ajudando a tornar este sonho realidade. Agradeço ao professor Cosme e a professora Maristela pelo carinho e palavras de apoio nos momentos de abalos. Ao professor Vando e professor Robert que aceitaram participar da banca de defesa deste trabalho. A secretária Adriana que sempre nos auxilia com todo empenho e dedicação.

Não posso esquecer-me de agradecer aos meus alunos, que também me aguentaram nos piores dias, principalmente nos dias que antecederam a qualificação e no período da escrita da dissertação. Aos meus coordenadores Molina e Rogério que me apoiaram me dando suporte para poder estudar.

Enfim, um enorme e sincero OBRIGADA a todos que direta ou indiretamente me ajudaram no meu sucesso.

RESUMO

O presente trabalho é um estudo feito sobre otimização de embalagens utilizando máximos e mínimos de funções. O texto apresenta conceitos de derivadas parciais e os passos para encontrar os pontos críticos das funções para classificá-las em ponto de máximo, ponto de mínimo ou ponto de sela. Apresentamos também o teorema de Weierstrass e o método multiplicadores de Lagrange e para finalizar alguns problemas de máximos e mínimos aplicados na confecção de embalagens a fim de diminuir custos de produção, relacionados à quantidade de material utilizado. Foram explorados quatro exemplos: (1) a caixa comercial de sabão em pó (1 kg de produto e volume de $1928,5 \text{ cm}^3$) foi utilizada a função $A = 2ab + 14a + 14b$ a qual foi resolvida para os mínimos e levou a diminuição da área total do material. (2) a confecção de uma caixa para armazenar 48 latas cilíndricas teve como base a função $A = 72xy + 12xh + 12yh$ (restrição $xy = 48$) a qual resultou em 36 cm x 48 cm, e a altura das latas a serem acomodadas. (3) Caixa para acomodar 512 cm^3 de leite, contendo dois componentes diferentes, função custo $C = 0,1xy + 0,06xz + 0,06yz$ e que resultou nas dimensões $x = y \cong 6,75$ e $z \cong 11,25$. (4) Lata cilíndrica (1000 cm^3) $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, independente do volume, o formato “ótimo” do cilindro é $h = 2r$, e para o volume dado $r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$ e $h = \frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}}$.

Palavras-chave: otimização, embalagens, máximos e mínimos.

ABSTRACT

The present work aims to optimize packaging using functions maximum and minimum. The text presents concepts of partial derivatives and the steps to find the functions critical points to classify them at maximum point, minimum point or saddle point. We also present the Weierstrass theorem and the Lagrange multipliers method to finalize some problems of maximum and minimum applied to packages manufacture in order to reduce production costs. Four examples were explored: (1) commercial laundry soap box (1 kg of product and 1928.5 cm³ volume) was used the function $A = 2ab + 14a + 14b$ solved for the minimums and led to a decrease in material total area. (2) a box to store 48 cylindrical cans, whose function $A = 72xy + 12xh + 12yh$ (restriction $xy = 48$) which resulted in 36 cm x 48 cm, and the height is of the cans accommodated. (3) Box for 512 cm³ of milk, containing two different components, cost function $C = 0,1xy + 0,06xz + 0,06yz$, which resulted in the dimensions $x = y \cong 6,75$ and $z \cong 11,25$. (4) Cylindrical can (1000 cm³) $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, regardless of volume, the cylinder's optimal shape is $h = 2r$, and for the given volume $r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$ and $h = \frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}}$.

Keywords: optimization, packaging, maxima and minima.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Gráfico mostrando os pontos de máximos e mínimos de uma função.	11
Figura 2 - Gráfico descrevendo a função $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$	12
Figura 3 - Gráfico mostrando a função $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$	12
Figura 4 - Gráfico mostrando a função $z = \sin^2 x + 12y^2$	13
Figura 5 - Gráfico da superfície S representando Geometricamente as Derivadas Parciais.	15
Figura 6 - Paraboloide de concavidade voltada para cima.	18
Figura 7 - Paraboloide de concavidade voltada para baixo.	18
Figura 8 - Paraboloide hiperbólico mostrando o Ponto de Sela.	19
Figura 9 - Gráfico de $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$	20
Figura 10 - Gráfico da função $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$	21
Figura 11 - Gráfico mostrando o retângulo $D = \{x, y \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$	22
Figura 12 - Gráfico mostrando a função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$	24
Figura 13 - Paraboloide da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ e cuja projeção é o círculo de restrição $x^2 + y^2 = 1$	27
Figura 14 - Caixa antiga de Sabão em Pó.	31
Figura 15 - Nova caixa de Sabão em Pó.	32
Figura 16 - Esboço mostrando dimensões genéricas possíveis para a caixa de sabão em pó.	33
Figura 17 - Esquema mostrando o formato da caixa de papelão.	35

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	9
2. MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS	11
2.1 DERIVAS PARCIAIS	13
2.1.1 Derivadas Parciais de Funções de Duas Variáveis.....	13
2.1.2 Interpretação Geométrica das Derivadas Parciais.....	15
2.1.3 Derivadas Parciais de Funções com Mais de Duas Variáveis.....	16
2.2 PONTOS CRÍTICO DE UMA FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS	16
2.2.1 Teste da derivada de Primeira Ordem para Valores de Extremos Locais.....	16
2.2.2 Uma Interpretação Geométrica Envolvendo Pontos Críticos de uma Função $z = f(x, y)$	17
2.2.3 Condição Suficiente para um Ponto Crítico ser Extremante Local.....	19
3. TEOREMA DE WEIERSTRASS	22
4. MULTIPLICADOR DE LAGRANGE.....	25
5. PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO	31
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	41
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	43

1. INTRODUÇÃO

Em praticamente todos os ramos industriais, as embalagens possuem um papel crucial na apresentação do produto ao consumidor final. São desenvolvidas, em setores específicos da empresa, para acomodar o produto e tem funções diversas, dentre elas: aumentar o tempo de vida de prateleira de um produto perecível, ter uma apresentação atrativa, utilizar materiais resistentes, ter um design que possibilite melhor armazenamento e transporte, entre outras. Este ramo da indústria é primordial, principalmente por ser um dos fatores da escolha do consumidor pelo produto, além de ser responsável por transmitir uma mensagem de qualidade e comprometimento da empresa com valores sociais.

O processo de otimização destas embalagens, no que diz respeito à capacidade de armazenamento *versus* economia de material, é muito utilizado nas indústrias de todo ramo para que se consiga fazer embalagens de forma que contemplem a quantidade de produto que se pretende armazenar e, ao mesmo tempo, confeccioná-la de maneira que o custo com material e transporte fique o menor possível. Para isto, são usadas funções específicas que partem desta necessidade para um determinado volume de produto, desenvolvendo os cálculos para encontrar a dimensão “ótima” da embalagem, desta forma lança-se mão de alguns conceitos de Cálculo Diferencial e Integral.

O principal foco deste estudo é utilizar os mínimos e máximos de funções de área, com restrição de volume, para minimizar a utilização de material com a produção de embalagens, a partir de exemplos comerciais. Ressalta-se que este trabalho explora uma importante ferramenta para seu desenvolvimento, sendo a diminuição dos custos um dos fatores que leva a escolha de suas dimensões.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira:

Segundo Capítulo: realizará a apresentação dos conceitos de máximos e mínimos, e para isto foi realizado um levantamento bibliográfico sobre derivadas parciais e pontos críticos de funções, que são de extrema importância para a realização dos cálculos utilizados nos exemplos das embalagens comerciais.

Terceiro Capítulo: versará sobre o Teorema de Weierstrass, o qual auxilia nos cálculos quando se trata de uma função contínua em um conjunto fechado e limitado.

Quarto Capítulo: apresentará o principal método utilizado quando a função possui alguma restrição “Os Multiplicadores de Lagrange”.

Quinto Capítulo: a partir de todo o estudo realizado, serão mostrados alguns problemas quanto a otimização do tamanho de embalagens e com a realização dos cálculos para que se obtenha as dimensões “ótimas” dos exemplos dados.

2. MÁXIMOS E MÍNIMOS DE FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Definição: uma função de duas variáveis tem um **máximo local** em (a, b) se $f(x, y) \leq f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b) . O número $f(a, b)$ é chamado **valor máximo local**. Se $f(x, y) \geq f(a, b)$ quando (x, y) está próximo de (a, b) , então $f(a, b)$ é um **valor mínimo local**. (STEWART, 2007)

f terá um **máximo absoluto** ou um **mínimo absoluto** se, para todos os pontos (x, y) do domínio de f , denotado por $D(f)$, estas inequações forem válidas.

Observando a figura 1, um máximo local pode ser comparado com o pico da montanha, e um mínimo local com um vale. Os pontos de máximo e mínimo da função podem ser chamados de pontos extremantes (locais ou globais).

Figura 1 - Gráfico mostrando os pontos de máximos e mínimos de uma função.

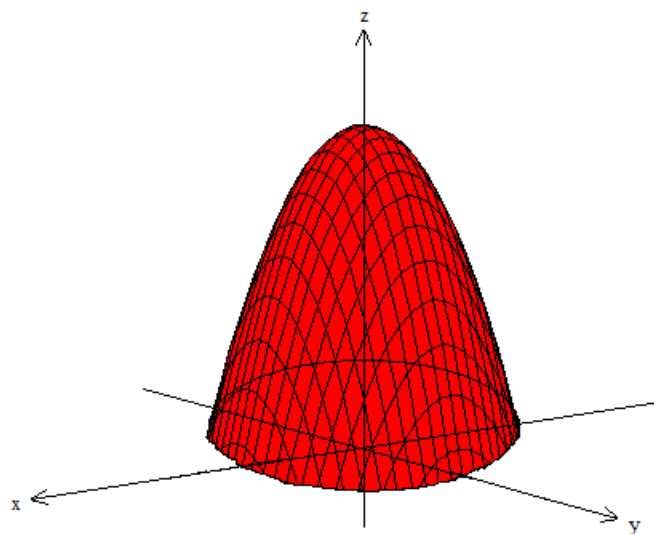


Fonte: THOMAS, 2009

Exemplo 1 (FLEMMING, 2007) - *Ponto de máximo de uma função:* na função $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ (Figura 2), o ponto $(0, 0)$ é um ponto de máximo absoluto ou global de f , pois, para todo $(x, y) \in D(f)$, $4 - x^2 - y^2 \leq f(0, 0)$ ou $4 - x^2 - y^2 \leq 4$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Ou seja, o valor máximo de $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ é $f(0, 0) = 4$

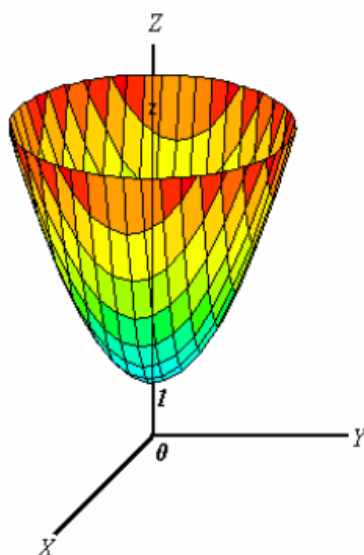
Figura 2 - Gráfico descrevendo a função $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$.



Fonte: Próprio autor, 2016

Exemplo 2 (FLEMMING, 2007) - *Ponto de mínimo de uma função*: na função $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$ (Figura 3), o ponto $(0, 0)$ é um ponto de mínimo absoluto ou global dessa função, pois, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $1 + x^2 + y^2 \geq f(0, 0)$ ou $1 + x^2 + y^2 \geq 1$. Desta forma $f(0, 0) = 1$ é o valor mínimo dessa função.

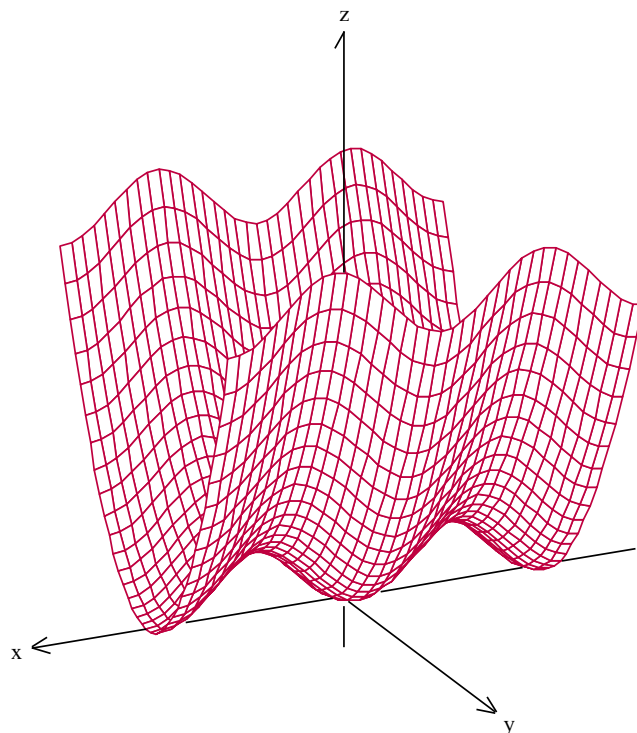
Figura 3 - Gráfico mostrando a função $f(x, y) = 1 + x^2 + y^2$.



Fonte: Selhorst, 2016

Exemplo 3 (FLEMMING, 2007): No gráfico da função $z = \text{sen}^2 x + \frac{1}{2}y^2$ (Figura 4) pode ser verificado a existência de infinitos pontos de mínimos locais no domínio de z , isto é, em R^2 .

Figura 4 - Gráfico mostrando a função $z = \text{sen}^2 x + \frac{1}{2}y^2$.



Fonte: Próprio autor, 2016

Para encontrar estes pontos de máximo local e mínimo local, devemos encontrar os pontos que o gráfico tem a reta tangente horizontal. Assim como nas funções de uma variável, encontram-se estes pontos utilizando o teste da derivada de primeira ordem.

2.1 DERIVAS PARCIAIS

2.1.1 Derivadas Parciais de Funções de Duas Variáveis

Definição (FLEMMING, 2007): Sejam $f: A \subseteq R^2 \rightarrow R$, $z = f(x, y)$ uma função de duas variáveis e $(x_0, y_0) \in A$. Fixado $y = y_0$, podemos considerar a função $g(x) =$

$f(x, y_0)$. A derivada de g no ponto $x = x_0$, denominada *derivada parcial* de f em relação a x no ponto (x_0, y_0) , denotada por $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \quad (2.1)$$

ou

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad (2.2)$$

se o limite existir.

Analogamente, a *derivada parcial* de f em relação a y no ponto (x_0, y_0) é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} \quad (2.3)$$

Exemplo 4 (GUIDORIZZI, 2011): Seja $f(x, y) = 2xy - 4y$. Calcule:

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$

Solução: devemos olhar o y como constante e derivar em relação a x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - 4y) = 2y \quad (2.4)$$

b) $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$

Solução: devemos olhar o x como constante e derivar em relação a y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - 4y) = 2x - 4 \quad (2.5)$$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$

Solução: como $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2y$, então $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2.1 = 2$

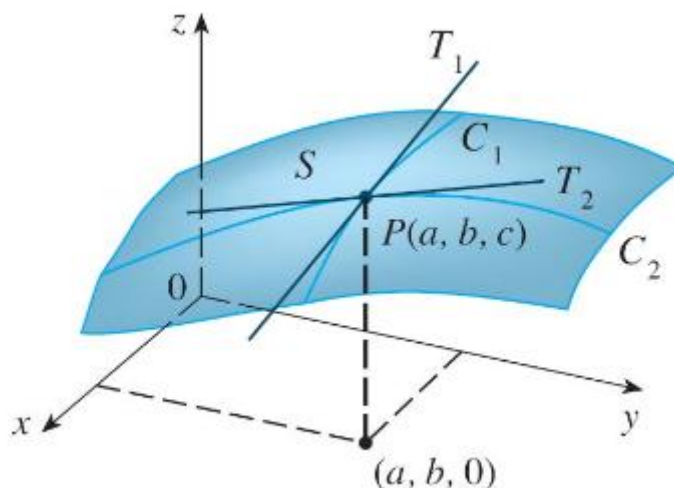
$$d) \frac{\partial f}{\partial y}(-1,1)$$

Solução: como $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x - 4$, então $\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 2 \cdot (-1) - 4 = -2 - 4 = -6$

2.1.2 Interpretação Geométrica das Derivadas Parciais

Sabendo que $z = f(x,y)$ representa uma superfície S (Figura 5), então $f(a,b) = c$ é o ponto $P(a,b,c)$ pertencente a superfície S . Fixando $y = b$, restringimos nossa atenção à curva C_1 na qual o plano vertical $y = b$ intercepta S . Logo C_1 é o corte de S no plano $y = b$. Da mesma forma, o plano vertical $x = a$ intercepta S na curva C_2 . As curvas C_1 e C_2 passam pelo ponto P .

Figura 5 - Gráfico da superfície S representando Geometricamente as Derivadas Parciais.



Fonte: STEWART, 2007

A curva C_1 é o gráfico da função $g(x) = f(x,b)$, de modo que a inclinação da tangente T_1 em P é $g'(a) = f_x(a,b)$. A curva C_2 é o gráfico da função $G(y) = f(a,y)$, de modo que a inclinação da tangente T_2 em P é $G'(b) = f_y(a,b)$.

Sendo assim, as derivadas parciais $f_x(a,b)$ e $f_y(a,b)$ podem ser interpretadas geometricamente como as inclinações das retas tangentes em $P(a,b,c)$ aos traços C_1 e C_2 de S nos planos $y = b$ e $x = a$. Ou seja, $f_x(a,b)$ é a inclinação da superfície na direção x em (a,b) e $f_y(a,b)$ a inclinação da superfície na direção y em (a,b) .

2.1.3 Derivadas Parciais de Funções com Mais de Duas Variáveis

As definições de derivadas parciais de funções de mais de duas variáveis independentes são parecidas com as definições para funções de duas variáveis. Por exemplo, se f é uma função de três variáveis x , y e z , então sua derivada parcial em relação a x é definida como

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} \quad (2.6)$$

se o limite existir, e pode ser encontrada, olhando-se y e z como constantes e diferenciando-se $f(x, y, z)$ com relação a x .

Se $w = f(x, y, z)$, então $f_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ pode ser interpretada como a taxa de variação de w em relação a x quando y e z são mantidos fixos. Porém, não pode ser interpretada geometricamente pois o gráfico de f pertence ao espaço de quatro dimensões.

2.2 PONTOS CRÍTICO DE UMA FUNÇÃO DE DUAS VARIÁVEIS

2.2.1 Teste da derivada de Primeira Ordem para Valores de Extremos Locais

Proposição: Se $f(x, y)$ tiver um valor de máximo ou de mínimo local em um ponto interior (a, b) do seu domínio e se as derivadas parciais de primeira ordem existirem lá, então $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$.

Prova: Se f tem um valor extremo local em (a, b) , então a função $g(x) = f(x, b)$ tem um valor extremo local em $x = a$. Assim sendo $g'(a) = 0$. Agora, $g'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$; portanto $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$. Um argumento similar com a função $h(y) = f(a, y)$ mostra que $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$. ■

Se substituirmos os valores $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$ na equação

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) - (z - f(a, b)) = 0 \quad (2.7)$$

para o plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ em (a, b) , a equação se reduz a

$$0 \cdot (x - a) + 0 \cdot (y - b) - z + f(a, b) = 0 \quad (2.8)$$

ou

$$z = f(a, b) \quad (2.9)$$

Portanto, a superfície tem de fato um plano tangente horizontal em um extremo local, desde que exista um plano tangente lá.

Definição: Seja $z = f(x, y)$ definida em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Um ponto $(x_0, y_0) \in U$ é um *ponto crítico* de f se as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ são iguais a zero ou se f não é diferenciável em $(x_0, y_0) \in U$.

Geometricamente, os pontos críticos de uma função $z = f(x, y)$ pode ser interpretado como os pontos em que seu gráfico não tem plano tangente ou o plano tangente é horizontal.

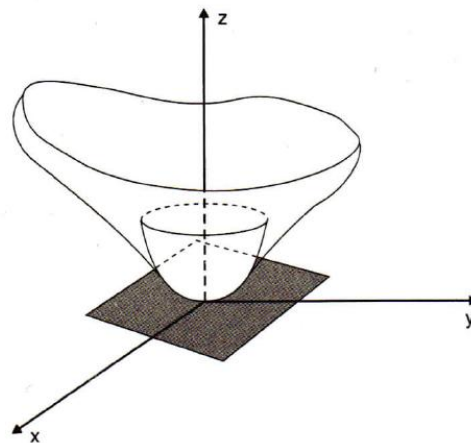
Um ponto crítico nem sempre é extremante. Neste caso, o ponto crítico é chamado de ponto de sela.

2.2.2 Uma Interpretação Geométrica Envolvendo Pontos Críticos de uma Função $z = f(x, y)$

- PONTO DE MÍNIMO RELATIVO OU LOCAL

Quando, de uma função $z = f(x, y)$, o parabolóide que dá uma melhor aproximação é um parabolóide elítico, de concavidade voltada para cima, conforme mostrado na Figura 6 (FLEMMING, 2007).

Figura 6 - Paraboloide de concavidade voltada para cima.

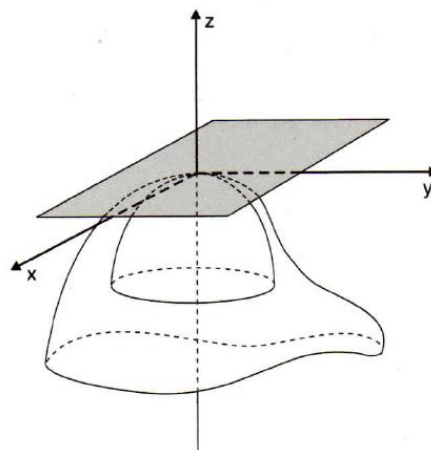


Fonte: Flemming, 2007

- PONTO DE MÁXIMO RELATIVO OU LOCAL

Quando, de uma função $z = f(x, y)$, o parabolóide que dá melhor aproximação é um parabolóide elítico de concavidade voltada para baixo, como mostrado na Figura 7 (FLEMMING, 2007).

Figura 7 - Paraboloide de concavidade voltada para baixo.

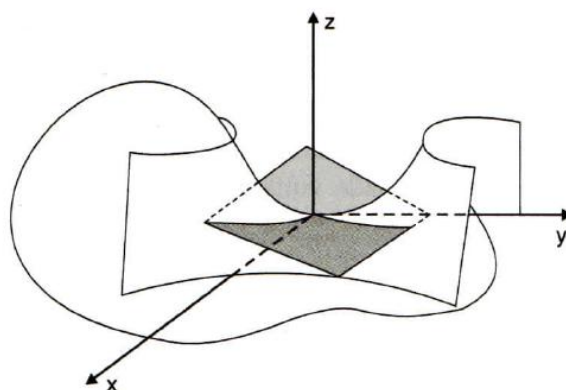


Fonte: Flemming, 2007

- PONTO DE SELA

Quando, de uma função $z = f(x, y)$, o parabolóide que dá melhor aproximação é um parabolóide hiperbólico, como mostrado na Figura 8 (FLEMMING, 2007).

Figura 8 - Parabolóide hiperbólico mostrando o Ponto de Sela.



Fonte: Flemming, 2007

2.2.3 Condição Suficiente para um Ponto Crítico ser Extremante Local

Proposição: Seja $z = f(x, y)$ uma função cujas derivadas parciais de 1ª e 2ª ordem são contínuas em um conjunto aberto que contém (x_0, y_0) e suponhamos que (x_0, y_0) seja um ponto crítico de f . Seja $H(x, y)$ o determinante

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{vmatrix} \quad (2.10)$$

Temos:

- Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, então (x_0, y_0) é um ponto de mínimo local de f ;
- Se $H(x_0, y_0) > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) é um ponto de máximo local de f ;
- Se $H(x_0, y_0) < 0$, então (x_0, y_0) não é extremante local. Nesse caso, (x_0, y_0) é um ponto de sela.
- Se $H(x_0, y_0) = 0$, nada se pode afirmar.

Exemplo 5 (ANTON, 2007): Localize todos os extremos relativos e pontos de sela de $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$. A função f está representada na Figura 9.

Solução: Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6x - 2y$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 2y - 8$, os pontos críticos de f satisfazem as equações

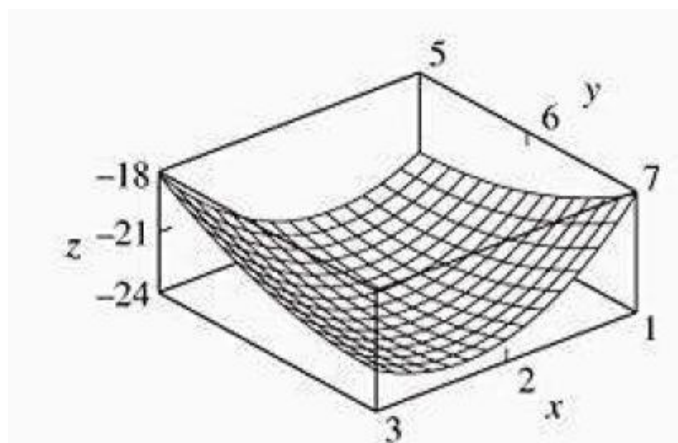
$$\begin{cases} 6x - 2y = 0 & (2.11) \\ -2x + 2y = 8 & (2.12) \end{cases}$$

Resolvendo-as para x e y , obtemos $x = 2$ e $y = 6$, logo $(2, 6)$ é o único ponto crítico. Sabendo que as derivadas de segunda ordem $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -2$, no ponto $(2, 6)$ temos que

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8$$

Como $H(2, 6) = 8 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, 6) = 6 > 0$ então $(2, 6)$ é um ponto de mínimo local de f .

Figura 9 - Gráfico de $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$



Fonte: ANTON, 2007

Exemplo 6 (GUIDORIZZI, 2011): Seja $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$ (Figura 10). Temos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2 - 3$, então os pontos críticos de f satisfazem a equação:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 & (2.13) \\ 3y^2 - 3 = 0 & (2.14) \end{cases}$$

sendo assim, $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$. Logo, os pontos críticos de f são: $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$.

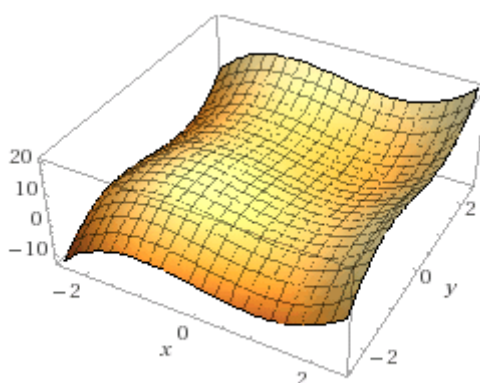
Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0$, então:

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{vmatrix} = 36xy$$

Analisando os pontos críticos:

- $H(1,1) = 36 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 6 > 0$, então $(1,1)$ é ponto de mínimo local de f ;
- $H(1,-1) = -36 < 0$, então $(1,-1)$ não será extremante local, logo será ponto de sela;
- $H(-1,1) = -36 < 0$, então $(-1,1)$ também será ponto de sela;
- $H(-1,-1) = 36 > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = -6 < 0$, então $(-1,-1)$ será ponto de máximo local.

Figura 10 - Gráfico da função $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$



Fonte: Próprio autor, 2016

3. TEOREMA DE WEIERSTRASS

Teorema 1 (GUIDORIZZI, 2011): Se $f(x, y)$ for contínua no compacto A , então existirão pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em A tais que, para todo (x, y) em A ,

$$f(x_1, y_1) \leq f(x, y) \leq f(x_2, y_2) \quad (3.1)$$

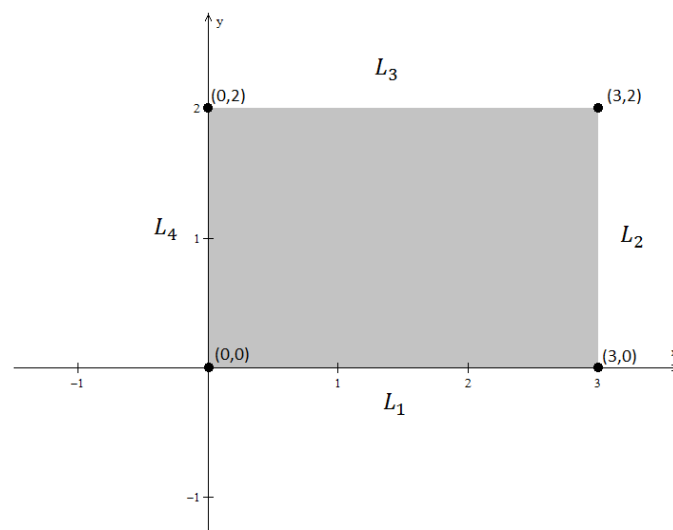
Ou seja, se f for contínua no compacto A , então f assumirá em A valor máximo e valor mínimo.

Segundo STEWART (2007), para determinar um máximo ou mínimo absolutos de uma função contínua f em um conjunto fechado e limitado A :

- Determine os valores de f nos pontos críticos de f no interior de A ;
- Estabeleça os valores extremos de f na fronteira de A ;
- O maior desses valores é o valor de máximos absoluto e o menor desses valores é o valor de mínimo absoluto.

Exemplo 1 (STEWART, 2007): Determine os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$ (Figura 12) no retângulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$ (Figura 11)

Figura 11 - Gráfico mostrando o retângulo $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$.



Fonte: Próprio autor, 2016

Solução: Como f é um polinômio então é contínua no retângulo fechado e limitado D e o Teorema de Weierstrass garante que existem tanto o máximo absoluto quanto o mínimo absoluto.

- Calculando primeiramente os pontos críticos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x - 2y \quad (3.2)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2x + 2 \quad (3.3)$$

resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 2 = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

$x = 1$ e $y = 1$. Logo o ponto $(1,1)$ é o único ponto crítico existente e

$$f(1,1) = 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1 - 2 + 2 = 1 \quad (3.5)$$

- Olhando para os valores de f na fronteira de D :

Para o segmento de reta L_1 , $y = 0$ e $f(x, 0) = x^2$. Como $0 \leq x \leq 3$, isto corresponde a uma função crescente de x que tem valor mínimo em $f(0,0) = 0$ e máximo $f(3,0) = 9$.

Para o segmento de reta L_2 , $x = 3$ e $f(3, y) = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot y + 2y = 9 - 4y$. Como $0 \leq y \leq 2$, isto corresponde a uma função decrescente de y , logo seu máximo é $f(3,0) = 9$ e o mínimo $f(3,2) = 9 - 4 \cdot 2 = 1$.

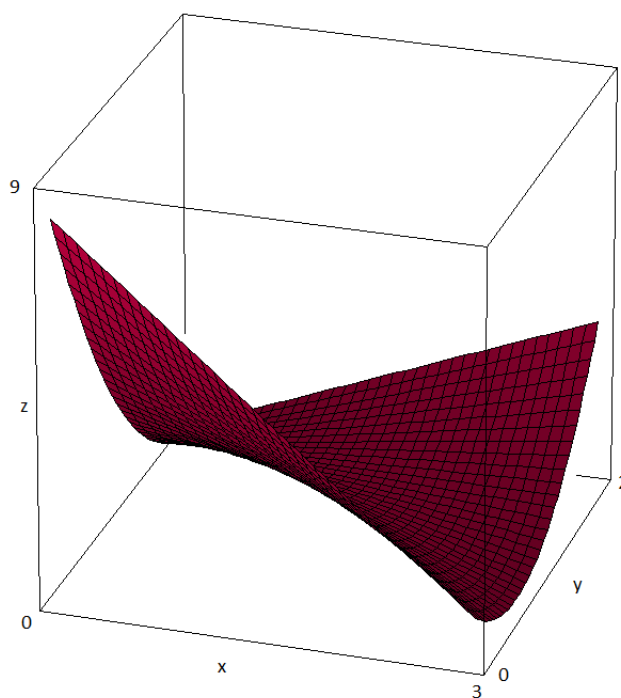
Para o segmento de reta L_3 , $y = 2$ e $f(x, 2) = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot 2 = x^2 - 4x + 4$. Como $0 \leq x \leq 3$ e observando que $f(x, 2) = (x - 2)^2$, então o mínimo valor dessa função é $f(2,2) = 0$ e o máximo valor dessa função é $f(0,2) = (-2)^2 = 4$.

Para o segmento de reta L_4 , $x = 0$ e $f(0, y) = 2y$. Como $0 \leq y \leq 2$ o valor máximo será $f(0,2) = 4$ e o valor mínimo será $f(0,0) = 0$.

Portanto, depois de analisar os quatro segmentos de retas na fronteira, o valor mínimo de f é 0 e o máximo, 9.

- Comparando esses valores encontrados com o valor de $f(1,1) = 1$ no ponto crítico, pode-se concluir que o ponto máximo absoluto de f em D é $f(3,0) = 9$, e o valor mínimo absoluto é $f(0,0) = f(2,2) = 0$.

Figura 12 - Gráfico mostrando a função $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y$.



Fonte: Próprio autor, 2016

4. MULTIPLICADOR DE LAGRANGE

Multiplicadores de Lagrange é um método para maximizar e minimizar uma função sujeita a restrições sobre as variáveis. Esse método ajuda a resolver certos problemas de otimização que são difíceis ou impossíveis de resolver usando os métodos já estudados.

Proposição (FLEMMING, 2007):

Seja $f(x, y)$ diferenciável em um conjunto aberto U . Seja $g(x, y)$ uma função com derivadas parciais contínuas em U tal que $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$ para todo $(x, y) \in V$, onde $V = \{(x, y) \in U \mid g(x, y) = 0\}$. Uma condição necessária para que $(x_0, y_0) \in V$ seja extremante local de f em V é que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0) \quad (4.1)$$

para algum número real λ .

Ou seja, os pontos de mínimos ou de máximos condicionados devem satisfazer as equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \quad (4.3)$$

$$g(x, y) = 0 \quad (4.4)$$

O número λ que satisfaz o sistema de equações acima é chamado de **Multiplicador de Lagrange**.

Deve-se então, definir a função de três variáveis

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y) \quad (4.5)$$

Problemas que envolvam funções de três variáveis e uma restrição consistem em definir a função lagrangeana

$$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) \quad (4.6)$$

Exemplo 1 (STWEART, 2007): Determine os valores extremos da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ no círculo $x^2 + y^2 = 1$

Solução: Neste exemplo, deve-se calcular os valores extremos de f sujeita à restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

Então, a função lagrangeana para este problema é dada por

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - \lambda(x^2 + y^2 - 1) \quad (4.7)$$

Derivando L em relação às variáveis x e y , é gerado o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x = 2x\lambda & (4.8) \\ 4y = 2y\lambda & (4.9) \\ x^2 + y^2 = 1 & (4.10) \end{cases}$$

De (4.8) é possível observar que $x = 0$ ou $\lambda = 1$:

- Se $x = 0$, então de (4.10) conclui-se que $y = \pm 1$;
- Se $\lambda = 1$, então (4.9) fornece que $y = 0$ e, assim, de (3), $x = \pm 1$.

Desta forma, os valores extremos possíveis de f são os pontos $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(-1, 0)$. Calculando f nesses quatro pontos:

$$f(0, 1) = 2 \quad (4.11)$$

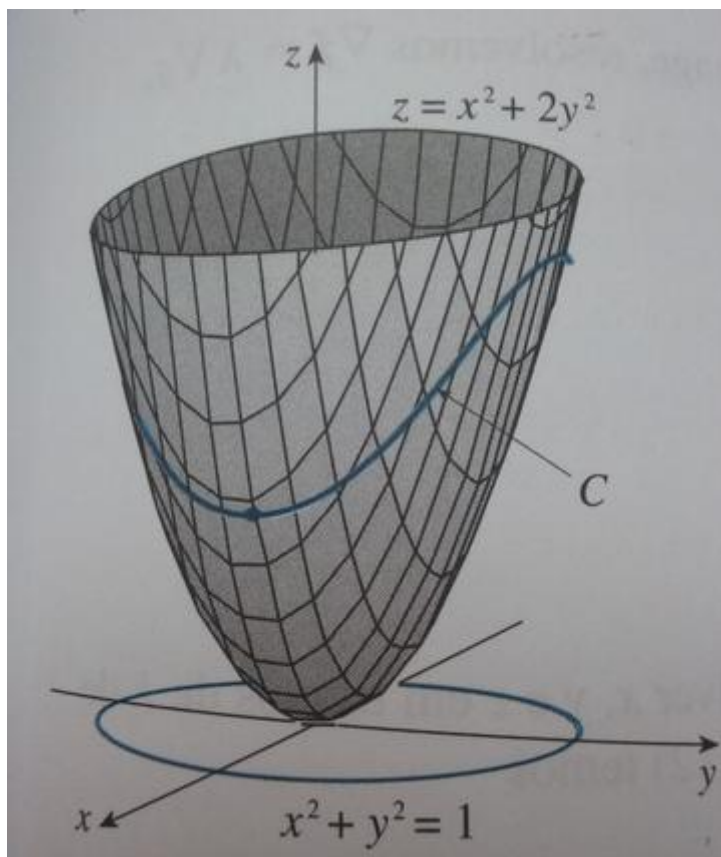
$$f(0, -1) = 2 \quad (4.12)$$

$$f(1, 0) = 1 \quad (4.13)$$

$$f(-1, 0) = 1 \quad (4.14)$$

Portanto, o valor máximo de f no círculo $x^2 + y^2 = 1$ é $f(0, \pm 1) = 2$ e o valor mínimo é $f(\pm 1, 0) = 1$. Analisando a Figura 13, verifica-se estes valores são razoáveis.

Figura 13 - Parabolóide da função $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ e cuja projeção é o círculo de restrição $x^2 + y^2 = 1$.



Fonte: STEWART, 2007

Exemplo 2 (STEWART, 2007): Uma caixa retangular sem tampa é feita de $12m^2$ de papelão. Determine o volume máximo dessa caixa.

Solução: Sejam x , y e z o comprimento, a largura e a altura, respectivamente, da caixa em metros. Ou seja, o volume $V = xyz$ deve ser o maior possível. A área total da caixa é a função

$$g(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy = 12 \quad (4.15)$$

A função lagrangeana, para esse problema, é dada por

$$L(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(2xz + 2yz + xy - 12) \quad (4.16)$$

Derivando L em relação às variáveis x , y e z gera-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} yz = \lambda(2z + y) & (4.17) \\ xz = \lambda(2z + x) & (4.18) \\ xy = \lambda(2x + 2y) & (4.19) \\ 2xz + 2yz + xy = 12 & (4.20) \end{cases}$$

Multiplicando (4.17) por x , (4.18) por y e (4.19) por z , os lados esquerdos dessas equações ficam idênticos:

$$\begin{cases} xyz = \lambda(2xz + xy) & (4.21) \\ xyz = \lambda(2yz + xy) & (4.22) \\ xyz = \lambda(2xz + 2yz) & (4.23) \end{cases}$$

Observa-se que $\lambda \neq 0$ pois $\lambda = 0$ implicaria que $yz = xz = xy = 0$ de (4.17), (4.18) e (4.19) e isso contradiz (4.20). Logo, de (4.21) e (4.22):

$$\begin{aligned} 2xz + xy &= 2yz + 2y \\ 2xz &= 2yz \\ xz &= yz \\ x &= y \end{aligned}$$

De (4.22) e (4.23):

$$\begin{aligned} 2yz + xy &= 2xz + 2yz \\ xy &= 2xz \\ y &= 2z \end{aligned}$$

Substituindo $x = y = 2z$ em (4.20):

$$\begin{aligned} 4z^2 + 4z^2 + 4z^2 &= 12 \\ 12z^2 &= 12 \\ z^2 &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

Como x , y e z são positivos, então $z = 1$, $x = 2$ e $y = 2$.

Exemplo 3: Usando uma folha de papel medindo 30cm por 40cm, deseja-se construir um cilindro circular reto, inclusive a tampa e o fundo. Qual o cilindro de maior volume possível de ser construído?

Solução: Levando-se em consideração o papel fornecido para a construção do cilindro, sabe-se que esse cilindro pode ter uma área total de $30 * 40 = 1200\text{cm}^2$.

Ou seja, a área A do cilindro será

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 1200 \quad (4.24)$$

Sabendo ainda que a fórmula do volume do cilindro é a área da base vezes a altura, $V = \pi r^2 h$, obtém-se a função lagrangeana

$$L(r, h, \lambda) = \pi r^2 h - \lambda(2\pi r^2 + 2\pi r h - 1200) \quad (4.25)$$

Calculando as derivadas parciais de L , resulta-se no seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2\pi r h - \lambda(4\pi r + 2\pi h) = 0 & (4.26) \\ \pi r^2 - \lambda(2\pi r) = 0 & (4.27) \end{cases}$$

Trabalhando com a equação (4.27):

$$\pi r^2 = 2\lambda\pi r$$

$$r^2 = 2\lambda r$$

$$r = 2\lambda$$

Substituindo $r = 2\lambda$ na equação (4.26):

$$2\pi r h = \lambda(4\pi r + 2\pi h)$$

$$4\pi\lambda h = \lambda(8\pi\lambda + 2\pi h)$$

$$4\pi h = 8\pi\lambda + 2\pi h$$

$$2h = 4\lambda + h$$

$$h = 4\lambda$$

$$h = 2.2\lambda = 2r$$

Sendo assim, $h = 2r$

Com a equação (4.24), substituindo h , é possível encontrar o raio e a altura para ter o maior volume possível.

$$2\pi r^2 + 2\pi r h = 1200$$

$$2\pi r^2 + 4\pi r^2 = 1200$$

$$6\pi r^2 = 1200$$

$$r = \sqrt{\frac{200}{\pi}}$$

e, conseqüentemente,

$$h = 2\sqrt{\frac{200}{\pi}}$$

Logo, com esses valores encontrados de r e h será possível construir o cilindro de maior volume possível com a folha de papel dada.

5. PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

A otimização é utilizada, por exemplo, para minimizar custos. Além disso, ela tem várias aplicações em diferentes áreas do conhecimento humano, até mesmo para determinar a velocidade mínima que um foguete deve estar para que escape da ação gravitacional da Terra. Ou seja, é o processo da busca pelo condição ótima, por uma solução que forneça o máximo de benefício.

Um problema de otimização visa procurar os valores extremos de uma função, ou seja, o valor máximo ou o valor mínimo de uma função.

De acordo com Mundim, o princípio básico de otimização já era conhecido a séculos atrás pelos romanos e pode ser expresso pelos seguintes dizeres: “*De dōbus malis, minus est semper eligendum*”, que quer dizer: de dois males, escolha o menor.

Exemplo 1 - Embalagens de Caixa de Sabão em Pó

Antigamente, as caixas de sabão em pó já possuíam o formato de um paralelepípedo, porém mais estreito e alto. Segundo QUINTANILHA, foi a Unilever® que teve a brilhante e simples ideia de mudar o formato da caixa, ela continuou sendo um paralelepípedo, porém com um formato mais “gordinho” e mais baixo.

A embalagem antiga (Figura 14) tinha as seguintes dimensões: 4,8cm x 16,8 cm x 24cm.

Figura 14 - Caixa antiga de Sabão em Pó.



Fonte: imagem retirada da internet

Fazendo o cálculo de volume e área total:

Volume: $1935,36 \text{ cm}^3$

Área total:

- Área lateral: $4,8 * 24 = 115,2\text{cm}^2$, como são duas áreas laterais, $2 * 115,2 = 230,4\text{cm}^2$
- Área da base: $4,8 * 16,8 = 80,64\text{cm}^2$, também são duas bases, a de cima e a de baixo, logo $2 * 80,64 = 161,28\text{cm}^2$
- Área da face: $16,8 * 24 = 403,2\text{cm}^2$, somando a face da frente com a face de trás que são iguais, $403,2 * 2 = 806,4\text{cm}^2$

Somando uma área total de $230,4 + 161,28 + 806,4 = 1198,08\text{cm}^2$

A embalagem nova (Figura 15) possui as dimensões $19\text{cm} \times 7\text{cm} \times 14,5\text{cm}$.

Figura 15 - Nova caixa de Sabão em Pó.



Fonte: imagem retirada da internet

Realizando os mesmos cálculos feitos com a embalagem antiga:

Volume: $1928,5\text{cm}^3$

Área total:

- Área lateral: $7 * 14,5 = 101,5\text{cm}^2$. Como são duas áreas laterais, $2 * 101,5 = 203\text{cm}^2$.
- Área da base: $7 * 19 = 133\text{cm}^2$, também são duas bases, a de cima e a de baixo, logo $2 * 133 = 266\text{cm}^2$

- Área da face: $19 * 14,5 = 275,5\text{cm}^2$, somando a face da frente com a face de trás, que são iguais, $275,5 * 2 = 551\text{cm}^2$

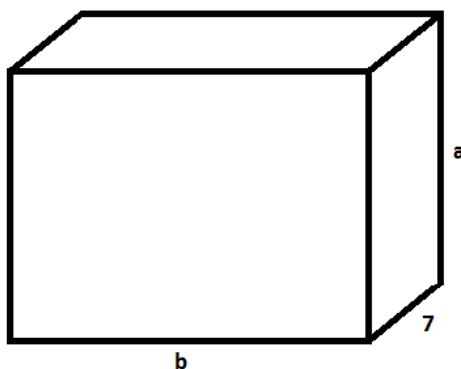
Somando assim, uma área total de $203 + 266 + 551 = 1020 \text{ cm}^2$.

Como pode ser visto pelos cálculos, a nova embalagem possui um volume um pouco menos, porém suficiente para caber 1kg do produto. A área da embalagem nova é menor que a embalagem antiga, o que resulta num menor custo de produção visto que será necessário menos papelão para produzir a nova caixa.

Vale lembrar que o paralelepípedo que possui menor área superficial com o maior volume é o cubo, porém este formato não é interessante para o mercado já que fica difícil o manuseio da caixa.

Pode-se analisar este problema para ver se seria possível diminuir ainda mais a quantidade de papelão utilizado na fabricação da embalagem mantendo o mesmo volume. Sabe-se que o cubo teria a menor área, sendo assim, será fixado a largura da caixa em 7cm, conforme mostrado na Figura 16, pois parece ser uma largura adequada para o manuseio.

Figura 16 - Esboço mostrando dimensões genéricas possíveis para a caixa de sabão em pó.



Fonte: Próprio autor, 2016

Considerando o volume da caixa igual a $1928,5\text{cm}^3$ e $V = 7ab$, logo $1928,5 = 7ab$. Sendo assim, $a = \frac{1928,5}{7b}$.

A área superficial da caixa será:

- Área da face: ab , sendo a face da frente e a face de trás iguais, então $2ab$;
- Área lateral: $7a$, como são duas laterais iguais, $2 * 7a = 14a$

- Área da base: $7b$, sendo a base de baixo e a de cima iguais, $2 * 7b = 14b$

Portanto, a área total A da caixa será

$$A = 2ab + 14a + 14b. \quad (5.1)$$

Substituindo a em A :

$$A(b) = 2 \frac{1728,5}{7} + 14 \frac{1728,5}{7b} + 14b \quad (5.2)$$

$$A(b) = \frac{3857}{7} + \frac{3857}{b} + 14b \quad (5.3)$$

Com a primeira derivada, encontra-se o ponto crítico de A :

$$A'(b) = -\frac{3857}{b^2} + 14 = 0 \quad (5.4)$$

$$14b^2 = 3857$$

$$b \cong \pm 16,6$$

Calculando a segunda derivada:

$$A''(b) = \frac{7714}{b^3} \quad (5.5)$$

Como $A''(16,6) > 0$ e $A''(-16,6) < 0$, conclui-se que $c \cong 16,6$ é o valor mínimo da função $A(c)$, então

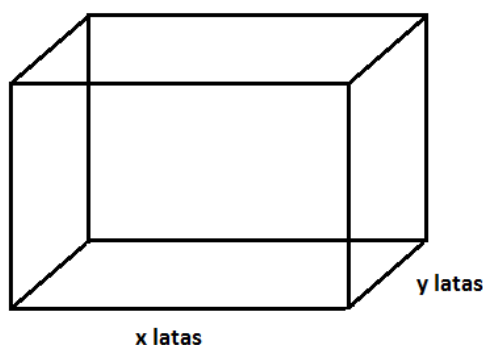
$$A(16,6) = \frac{3857}{7} + \frac{3857}{16,6} + 14 * 16,6 \cong 16,6$$

Portanto, para que haja ainda mais economia na confecção da caixa do sabão em pó e ainda assim continue viável seu manuseio, as dimensões da caixa poderiam ser $7 \times 16,6 \times 16,6$.

Exemplo 2: Uma empresa precisa guardar 48 latas cilíndricas iguais em uma caixa de papelão no formato de um paralelepípedo. Sabendo que cada lata possui um diâmetro de 6cm e que a altura da caixa deve ser igual a altura das latas, quais as dimensões que a caixa deve ter para que gaste o mínimo de material possível?

Solução: Considerando x o número de latas que cabem no comprimento da caixa e y o número de latas que cabem na largura da caixa, conforme mostrado na Figura 17, e sabendo que cada lata tem 6cm de diâmetro, então o comprimento da caixa é $6x$ cm e a largura $6y$ cm.

Figura 17 - Esquema mostrando o formato da caixa de papelão.



Fonte: próprio autor, 2016

Como o fabricante quer colocar 48 latas na caixa, então vale a equação

$$xy = 48 \quad (5.6)$$

Considerando a altura da caixa h , a equação que calcula a área da caixa é dada por

$$A = 6x \cdot 6y \cdot 2 + 6x \cdot h \cdot 2 + 6y \cdot h \cdot 2 \quad (5.7)$$

$$A = 72xy + 12xh + 12yh \quad (5.8)$$

Ou seja, deve-se calcular essa área lembrando de que tem a restrição do número de latas $xy = 48$. Com estes dados pode-se montar a equação lagrangeana:

$$L(x, y, \lambda) = 72xy + 12xh + 12yh - \lambda(xy - 48) \quad (5.9)$$

Calculando as derivadas parciais de L e igualando a zero, resulta no seguinte sistema:

$$\begin{cases} 72y + 12h - y\lambda = 0 & (5.10) \\ 72x + 12h - x\lambda = 0 & (5.11) \end{cases}$$

Uma maneira de resolver este sistema é isolando $12h$ nas equações (5.10) e (5.11):

$$\begin{cases} 12h = y\lambda - 72y & (5.12) \\ 12h = x\lambda - 72x & (5.13) \end{cases}$$

ou seja,

$$y\lambda - 72y = x\lambda - 72x \quad (5.14)$$

$$y(\lambda - 72) = x(\lambda - 72) \quad (5.15)$$

$$y = \frac{x(\lambda - 72)}{(\lambda - 72)} \quad (5.16)$$

$$y = x \quad (5.17)$$

Como $y = x$ e $xy = 48$, então:

$$x^2 = 48 \quad (5.18)$$

$$x \cong 6,93 \quad (5.19)$$

e, de acordo com os cálculos, y também seria aproximadamente 6,93 mas, analisando a situação, x e y devem ser valores inteiros pois representam um número de latas. Sendo assim, consideremos $x = 6$ latas:

$$xy = 48 \quad (5.20)$$

$$6y = 48 \quad (5.21)$$

$$y = 8 \quad (5.22)$$

Portanto, para que haja uma economia de material na fabricação da caixa, ela deve conter 6 latas no comprimento e 8 latas na largura. Como cada lata tem 6cm de diâmetro, as dimensões da caixa devem ser:

Comprimento: $6 * 6 = 36\text{cm}$

Largura: $8 * 6 = 48\text{cm}$

Altura: a mesma altura da lata.

Exemplo 3: Uma empresa precisa projetar uma caixa retangular de leite com largura x , comprimento y e altura z , que contenha 512cm^3 de leite. Os lados da caixa custam 3 centavos/ cm^2 e o topo e o fundo custam 5 centavos/ cm^2 . Quais seriam as dimensões da caixa ideal para que minimizem o custo total? Qual é esse custo?

Solução: Conforme os dados do problema e por se tratar de uma caixa retangular, então:

$$V = xyz = 512 \quad (5.23)$$

e a função que queremos minimizar

$$C = 2xy0,05 + 2xz0,03 + 2yz0,03 \quad (5.24)$$

$$C = 0,1xy + 0,06xz + 0,06yz \quad (5.25)$$

Chegando a equação lagrangeana:

$$L(x, y, z, \lambda) = 0,1x + 0,06xz + 0,06yz - \lambda(xyz - 512) \quad (5.26)$$

Calculando as derivadas parciais de L , encontra-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 0,1y + 0,06z = \lambda yz & (5.27) \\ 0,1x + 0,06z = \lambda xz & (5.28) \\ 0,06x + 0,06y = \lambda xy & (5.29) \end{cases}$$

Sabe-se que x , y e z são diferentes de zero, então dividindo (5.27) por yz , (5.28) por xz e (5.29) por xy temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{0,1}{z} + \frac{0,06}{y} = \lambda \\ \frac{0,1}{z} + \frac{0,06}{x} = \lambda \\ \frac{0,06}{y} + \frac{0,06}{x} = \lambda \end{array} \right. \quad (5.30)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{0,1}{z} + \frac{0,06}{y} = \lambda \\ \frac{0,1}{z} + \frac{0,06}{x} = \lambda \end{array} \right. \quad (5.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{0,06}{y} + \frac{0,06}{x} = \lambda \end{array} \right. \quad (5.32)$$

De (5.30) e (5.31)

$$\frac{0,1}{z} + \frac{0,06}{y} = \frac{0,1}{z} + \frac{0,06}{x} \quad (5.33)$$

$$\frac{0,06}{y} = \frac{0,06}{x} \quad (5.34)$$

$$x = y \quad (5.35)$$

De (5.30) e (5.32)

$$\frac{0,1}{z} + \frac{0,06}{y} = \frac{0,06}{y} + \frac{0,06}{x} \quad (5.36)$$

$$\frac{0,1}{z} = \frac{0,06}{x} \quad (5.37)$$

$$0,1x = 0,06z \quad (5.38)$$

$$x = 0,6z \quad (5.39)$$

Sabendo que o Volume V (5.23) é 512, então

$$xyz = 0,6z \cdot 0,6z \cdot z \quad (5.40)$$

$$0,36z^3 = 512 \quad (5.41)$$

$$z \cong 11,25 \quad (5.42)$$

De (5.39) e (5.35)

$$x = 0,6 \cdot 11,25 \quad (5.43)$$

$$x \cong 6,75 \quad (5.44)$$

$$y \cong 6,75 \quad (5.45)$$

Exemplo 4: As latas cilíndricas são utilizadas por diversas indústrias para comercializar seus produtos, como por exemplo leite condensado, leite em pó, extrato de tomate, entre outros. Uma lata cilíndrica fechada deve conter 1 litro (1000cm^3) de líquido. Como poderíamos escolher a altura e o raio para minimizar a quantidade de material usado na confecção desta lata?

Solução: Sendo 1000cm^3 o volume então

$$V = \pi r^2 h = 1000 \quad (5.46)$$

E a função que queremos minimizar é

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad (5.47)$$

Sendo assim, a função lagrangeana abaixo

$$L(r, h, \lambda) = 2\pi r^2 + 2\pi r h - \lambda(\pi r^2 h - 1000) \quad (5.48)$$

Calculando as derivadas parciais de L, temos o sistema abaixo para resolver:

$$\begin{cases} 4\pi r + 2\pi h = \lambda(2\pi r h) \\ 2\pi r = \lambda(\pi r^2) \end{cases} \quad (5.49)$$

$$(5.50)$$

Isolando $\lambda\pi r$ em (5.53) e (5.54):

$$2\pi = \lambda\pi r \quad (5.51)$$

$$\frac{2\pi r}{h} + \pi = \lambda\pi r \quad (5.52)$$

$$2\pi = \frac{2\pi r}{h} + \pi \quad (5.53)$$

$$\frac{2r}{h} + 1 = 2 \quad (5.54)$$

$$2r + h = 2h \quad (5.55)$$

$$h = 2r \quad (5.56)$$

Como o problema pede o valor do raio e da altura, então de (5.40) temos:

$$\pi r^2 2r = 1000 \quad (5.57)$$

$$2\pi r^3 = 1000 \quad (5.58)$$

$$r^3 = \frac{1000}{2\pi} \quad (5.59)$$

$$r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}} \quad (5.60)$$

E como $h = 2r$, então

$$h = \frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}} \quad (5.61)$$

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho surgiu da ideia de estudar sobre a otimização de custos, com material, de embalagens por meio de máximos e mínimos de funções de várias variáveis. Para isto fez-se necessário realizar primeiramente um estudo sobre derivadas parciais. Com este trabalho abordou-se apenas a relação do custo com a diminuição de matéria prima necessária, sem levar em consideração outros fatores.

A partir dos 4 exemplos, incluindo um comercial, é possível concluir que:

A caixa comercial de sabão em pó, que acomoda a quantidade de 1 kg de produto, possui dimensões anatômicas (facilidade no manuseio por parte do consumidor) cujo volume estimado foi de $1928,5 \text{ cm}^3$. Com base nisto, utilizou-se a função $A = 2ab + 14a + 14b$ a qual foi resolvida para os mínimos, levando-se em consideração a mesma condição anatômica, ou seja, largura de 7 cm, causou uma diminuição da área total do material utilizado na embalagem. Comparando-se a uma antiga embalagem do mesmo produto (mesma fabricante) isto dá cerca de 30% de redução.

O exemplo hipotético da confecção de uma caixa para armazenar 48 latas cilíndricas teve como base a função $A = 72xy + 12xh + 12yh$, tendo como restrição $xy = 48$, a qual resultou nos seguintes parâmetros: comprimento de 36 cm, largura de 48 cm, sendo que a altura fica restrita a mesma das latas a serem acomodadas.

Com relação a fabricação de uma caixa para acomodar 512 cm^3 de leite, cujos componentes são de dois materiais diferentes e com custos diferentes, foi levada em consideração a função $C = 0,1xy + 0,06xz + 0,06yz$ a qual resultou nas dimensões $x = y \cong 6,75$ e $z \cong 11,25$.

Por fim, a confecção de uma lata cilíndrica para armazenar 1000 cm^3 de produto, foi minimizada a função $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, na qual independente do volume, o formato “ótimo” do cilindro é $h = 2r$, e para o volume dado $r = \frac{10}{\sqrt[3]{2\pi}}$ e $h = \frac{20}{\sqrt[3]{2\pi}}$.

Além da resolução destas funções, também são levados em considerações pela indústria outros fatores, tais como mão de obra e energia para a fabricação, praticidade no manuseio pelo consumidor, aparência e design na prateleira comercial, entre outros.

Cabe ressaltar que todos estes exemplos foram feitos com base na redução de custos relacionados unicamente à quantidade de material utilizado (área), sendo este um importante passo para iniciar a pesquisa da embalagem que mais se adequa a necessidade da indústria, pois diminuindo a área de material necessário, para acomodar o mesmo volume de produto, haverá um impacto no custo final da embalagem.

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. **Cálculo**. Vol. 2. Porto Alegre: Bookman, 2007.

BATISTUS, Dayse Regina. **Máximos e Mínimos de funções de várias variáveis**. Disponível em http://www.pb.utfpr.edu.br/daysebatistus/maximos_minimos_donizetti.pdf. Acesso em novembro de 2016.

BOTTA, Vanessa. **Painel III: Embalagens e RPM nas aulas de cálculo**. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, edição 81. Disponível em <http://www.rpm.org.br/cdrpm/81/4.html>. Acesso em outubro de 2016.

BRITO, Edgar Alberto de. **A procura das melhores soluções: Otimização na Engenharia**. Disponível em <http://www.unimep.br/~edgbrito/DISCIPLINA/Aulas/aula07.pdf>. Acesso em outubro de 2016.

FLEMMING, Diva; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo B: Funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e a de superfície**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. Vol 2. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

MUNDIM, Kleber C.; DELAVY, Vilma C. T. **Otimização Global de Processos Usando o Método Generalized Simulated Annealing**. *Processos Químicos*, Goiânia, v.4, n.2, ano2, julho/dezembro 2008. Disponível em https://www.agencia.cnptia.embrapa.br/Repositorio/processosquimicos+_042008_000gdhgywfi02wx5ok0rofsmqf20pljg.pdf. Acesso em outubro de 2016.

QUINTANILHA, L. **O valor de uma ideia simples**. Disponível em http://planetasustentavel.abril.com.br/noticia/desenvolvimento/conteudo_265842.shtml. Acesso em setembro de 2016.

ROCKENBACH, Maurício. **Um estudo sobre aplicação do cálculo diferencial e integral de funções de uma variável associado à otimização de embalagens**. 2010. Trabalho de Conclusão de Curso (licenciatura em matemática) – Departamento de Matemática, Universidade do Estado de Mato Grosso. Sinop. Disponível em <https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=dW5lbWF0LW5ldC5icnxzaWV0Y29ufGd4OjlyODg0MDhiZDJhOGVmNzI>. Acesso em setembro de 2016.

SOUZA, Débora Vieira D; FONSECA, Rogério Ferreira D. **A abordagem de noções de cálculo diferencial e integral por meio da aprendizagem baseada em problemas**. In: ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática, 2016, São Paulo. Pôster.

STEWART, James. **Cálculo**. Vol. 2. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

THOMAS, George B. **Cálculo**. Vol. 2. São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2009.