UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE CASSILÂNDIA
CURSO DE MATEMÁTICA

EQUAÇÕES DO 2° GRAU: Suas resoluções ao longo do tempo visando o Ensino Fundamental

DAGOBERTO GOMES MORAIS

Cassilândia
2016

DAGOBERTO GOMES MORAIS

EQUAÇÕES DO 2° GRAU: Suas resoluções ao longo do tempo visando o Ensino Fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso Apresentado à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS como requisito parcial, para obtenção do nível de graduando em Matemática Licenciatura sob orientação do Prof. Me. Valmir Ancelmo Dias.

Cassilândia
2016

M825e Morais, Dagoberto Gomes
Equação do 2° grau: suas resoluções ao longo do tempo visando o ensino fundamental / Dagoberto Gomes Morais. Cassilândia, MS: UEMS, 2016.
41p.; 30 cm.

Monografia (Graduação) – Licenciatura em Matemática – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2016.
Orientador: Prof. MSc. Valmir Ancelmo Dias.

1.História da matemática 2.Equações do 2° grau 3.Resoluções de problemas I. Título.

CDD 23.ed. 510.9

DAGOBERTO GOMES MORAIS

EQUAÇÕES DO 2° GRAU: Suas resoluções ao longo do tempo visando o Ensino Fundamental

Trabalho de Conclusão de Curso Apresentado à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS como requisito parcial, para obtenção do nível de graduando em Matemática Licenciatura sob orientação do Prof. Me. Valmir Ancelmo Dias.

BANCA EXAMINADORA

____
Prof. Me. Valmir Ancelmo Dias
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – Orientador

____
Prof. Me. Adilson Lelis Nunes Júnior
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – Examinador

____
Prof. Me. Eder Pereira Neves
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – Examinador

Cassilândia, ____/___/_______/

DEDICATÓRIA

Dedico, primeiramente a Deus, e em seguida aos meus pais e a todos que me apoiaram.

AGRADECIMENTOS

A meus pais, pois se não tivesse sido eles, pela insistência e dedicação para concluir o curso de licenciatura às vezes não estaria aqui.

Aos meus amigos(as), em especial a minha namorada, Amanda Karolyna, pelo apoio que me deu no andamento do curso.

Ao meu orientador Prof. Me. Valmir Ancelmo Dias, que com o conhecimento transmitido, tornou possível a conclusão deste trabalho.

A todos os professores que contribuíram com a minha formação um muitíssimo obrigado.

Enfim, a todos que de alguma forma colaboraram com a conclusão dessa etapa.

O progresso e aperfeiçoamento da matemática estão intimamente ligados à prosperidade do Estado.

Napoleão I

RESUMO

Neste trabalho de conclusão de curso, através de pesquisa bibliográfica, serão abordados alguns aspectos significativos do desenvolvimento histórico das equações do 2° grau e algumas aplicações compatíveis ao Ensino Fundamental. Pretendemos, com isso, ressaltar a importância de estudar equações do 2° grau mais profundamente, trazendo novas abordagens além das contidas no livro didático, proporcionando assim um interesse maior dos alunos e, por sua vez, melhorando o seu aprendizado.

PALAVRAS-CHAVE: História da matemática; Equações do 2° grau; Resoluções de problemas.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Dentre as dificuldades que cada aluno possui, na matemática abordada do Ensino Fundamental, figuram as Equações do 2° grau, introduzidas no 9° ano.

As Equações do 2° grau possuem diversas aplicações no nosso cotidiano. A História da Matemática nos mostra maneiras diferentes de algumas civilizações resolverem essas equações, as quais, em grande parte, não são vistas nas escolas, pois não consta nos livros didáticos. Daí a motivação para a escolha do tema **EQUAÇÕES DO 2° GRAU: Suas resoluções ao longo do tempo visando o Ensino Fundamental**, para o desenvolvimento desse Trabalho de Conclusão de Curso.

O nosso trabalho tem como objetivo, através de pesquisa bibliográfica, abordar vários aspectos históricos das resoluções das Equações do 2° grau, definição, propriedades e algumas aplicações compatíveis ao Ensino Fundamental, visando ressaltar a importância de incluir algumas dessas abordagens neste nível de ensino.

Com isto, organizamos este trabalho em capítulos. No Capítulo 1 (item 2), a partir da História da Matemática mostraremos como as civilizações ao longo do tempo resolviam as equações do 2° grau e como foi evoluindo com o passar dos tempos. Visto que há indícios históricos de que algumas civilizações se apropriaram dos conhecimentos de outras ou que apenas melhoraram o que já havia sido feito anteriormente.

Por fim, no Capítulo 2 (item 3), apresentamos uma observação do livro “Vontade de Saber Matemática”, 9° ano do Ensino Fundamental, para mostrar como é exposto o conteúdo Equações do 2° grau pelo autor, e observar se tem alguma relação com as abordagens históricas elencadas no capítulo anterior.

2 A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E AS RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DO 2° GRAU

Os fatos históricos relatados neste capítulo serão embasados em Boyer (1999, p. 6 a 233) e Eves (2008, p. 58 a 389). Apenas serão referenciadas citações diretas dessas fontes ou citações de outras fontes.

Inicialmente, quando se fala em História da Matemática, o pensamento é levado às civilizações antigas. As equações do 2º grau foram conhecidas pelos Egípcios, Babilônios, Gregos, Hindus, Chineses, Árabes e Europeus, tendo seu primeiro registro com os Babilônios, que tinham uma Álgebra bem desenvolvida e conseguiam resolver seus problemas por métodos semelhantes que conhecemos hoje denominado método de completar quadrados.

A seguir, será relatada a forma com que cada civilização resolvia as equações quadráticas; mas, não vai ser feito um relato cronológico, pois segundo historiadores, não tem como afirmar ao certo a cronologia de tais fatos. Então, será citada cada civilização, na ordem que aparece acima no texto.

2.1 As resoluções da Equação do 2° Grau segundo os Egípcios

> Sesóstris ... repartiu o solo do Egito entre seus habitantes... Se o rio levava qualquer parte do lote de um homem ... o rei mandava pessoas para examinar, e determinar por medida a extensão exata da perda ... Por esse costume, eu creio, é que a geometria veio a ser conhecida no Egito, de onde passou para a Grécia. (HERÓDOTO, apud BOYER, 1999, p. 6)

A civilização Egípcia teve início por volta do ano 4000 a. C., se desenvolveu em uma extensa faixa de terra ao lado do rio Nilo. A grande maioria destas terras erram férteis, devido às cheias periódicas do rio, onde era depositada uma rica camada de húmus em suas margens.

Por ser fértil este solo nas margens do rio, por sua vez, era propício à agricultura. Os Egípcios para proteger as casas das inundações, construíram barragens e canais de irrigações, que serviam também para levar a água do rio às regiões mais distantes. A civilização Egípcia passou por vários períodos importantes, mas todos de mesmo aspecto social e econômico, assim como matemático e científico.

O Egito depois do século XII a.C., sofreu sucessivas invasões por povos diferentes. Apenas por volta do ano 30 a.C., que o Egito foi tomado pelos Romanos, trazendo assim uma grande ruptura da civilização Egípcia com sua cultura. Fazendo com que alguns ramos da ciência tivessem grandes avanços, como a astronomia, a matemática e a medicina.

Os sacerdotes Egípcios tinham um grande conhecimento na medicina, como por exemplo, a prática da mumificação e também os procedimentos médicos encontrados em alguns papiros. Além disso, os sacerdotes faziam cálculos matemáticos para determinar, por exemplo, quando iriam ocorrer as cheias no rio Nilo, para saber a época certa para as atividades agrícolas, eles faziam esses cálculos se orientando através das estrelas, assim, podendo determinar quando ia ocorrer tal fato, posteriormente baseando se nesses cálculos, construíram um calendário com 12 meses de 30 dias cada um.

Mas, somente no século XVIII, que foram encontradas evidências mais importantes no ponto de vista do conhecimento matemático dos Egípcios, dentre essas evidências têm-se vários papiros. Sendo os de mais destaques: o papiro de Kahun, de Berlim, de Moscou e o papiro de Rhind. Nesses papiros traziam vários problemas e coleções matemáticas.

Os Egípcios desenvolveram uma técnica para resolver equações do 1º grau, conhecida como “método de falsa posição”, (A regra da falsidade, assim chamada, não porque ela ensine qualquer fraude ou falsidade, mas porque por meio de números tomados à sorte, ensina a encontrar o número verdadeiro que é pedido.); este método encontra registrado nos papiros de Moscou e Rhind, entre outros papiros.

Porém, no Egito não foi encontrado nenhum registro oficial da resolução de equações do 2° grau, mas, eles desenvolveram um método similar ao método da falsa posição, conhecido como “dupla falsa” para equações simultâneas do tipo $x^2 + y^2 = k$ e $y = ax$, com k e a números positivos.

Exemplo 1: A soma das áreas de dois quadrados é 100. O triplo do lado de um deles é o quadruplo do lado do outro. Encontre os lados desse quadrado. (Exemplo retirado do papiro de Berlim).

Solução:

Morgado (1999) traz uma solução para este problema, resolvida pelo método da falsa posição, que seria a seguinte:

Em simbologia atual seja o sistema de equações que representa o problema,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ 4x = 3y \end{cases}$$

O procedimento adotado era o seguinte:

Observe que a equação é satisfeita por $x = 3$ e $y = 4$.

Substituindo x e y por estes valores, na primeira equação obtém se

$x^2 + y^2 = 3^2 + 4^2 = 25$. Assim para obter a soma 100, bastaria multiplicar os valores de x e y por 2, isto é, bastaria fazer $x = 2 \cdot 3 = 6$ e $y = 2 \cdot 4 = 8$; então resulta em: $x^2 + y^2 = 6^2 + 8^2 = 100$. Logo os lados procurados seriam 6 e 8.

Pedroso (2010), em um artigo publicado diz:

Em simbologia atual seja o sistema de equações que representa o problema,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \dfrac{4}{3}x \end{cases}$$

O procedimento para a resolução do problema era:

1. Tome $x = 3$,então, $y = 4$;
2. Assim, $3^2 + 4^2 = 25. (25 \neq 100)$.
3. $\sqrt{25} = 5, \sqrt{100} = 10$;
4. $10 \div 5 = 2$
5. Os lados são respectivamente $2 \cdot 3 = 6 \; e \; 4 \cdot 2 = 8$.

Portanto os lados procurados são respectivamente 6 e 8, assim como Morgado (1999), mostrou em sua solução citada anteriormente.

2.2 As resoluções da equação do 2° Grau segundo os Babilônios da Mesopotâmia

Mesopotâmia é a região do Oriente médio localizada entre os rios Tigres e Eufrates, região onde hoje está situado o Iraque e a Síria. A palavra Mesopotâmia vem do grego e significa “terra entre rios”.

Como a Mesopotâmia tinha abundância de água e solos férteis, acabou atraindo diversos povos para aquela região, assim formando a Mesopotâmia. Esses povos que formaram a civilização Mesopotâmica eram compostos pelos Acádios, Amorritas (Antigos babilônios), Caldeus e Hititas, que lutavam pela posse das terras produtivas.

Por causa da sua posição geográfica, a Mesopotâmia sempre foi mais vulnerável a invasões, ao contrário da civilização Egípcia. Essas duas civilizações se desenvolveram no mesmo período, segundo historiadores, porém, foi um desenvolvimento separado, sem nenhuma delas saber as informações da outra.

A matemática mesopotâmica teve um grande desenvolvimento por parte dos sacerdotes. Assim, como os Egípcios, os babilônios tiveram a Matemática e outras ciências extremamente voltadas para a prática, para facilitar o cálculo do calendário, as colheitas, organização de obras e cobranças de impostos.

Os babilônios tinha uma maior facilidade que os Egípcios para efetuar cálculos. Eles tinham técnicas para equação quadrática e bi quadrática, além de possuírem fórmulas para calcular áreas de figuras planas simples e fórmulas para o cálculo do volume de sólidos simples.

Os babilônios possuíam um sistema de numeração posicional bem desenvolvido, com base 60, visto que os divisores naturais de 60 são 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 e 60, o que facilitava o cálculo com frações.

Através de pesquisas arqueólogas no fim do século XIX e na primeira metade do século XX, foi um marco importante na avaliação da qualidade da matemática praticada na Mesopotâmia, mostrando claramente que esta era muito mais desenvolvida que a matemática Egípcia. Entre os vários tabletes de argilas, que hoje se encontram em museus da Europa entre outros, existem algumas que tratam de equações do 2º grau.

Um tablete típico que nos traz o seguinte problema, aqui formulado no nosso sistema de numeração decimal, para simplificar os cálculos, é o seguinte:

Exemplo 1: Achar o lado de um quadrado se sua área menos seu lado é igual a 870.

Solução:

Chamando o lado por x, este problema se traduz hoje, na linguagem simbólica algébrica, na equação $x^2 - x = 870$.

Sendo uma equação do tipo $x^2 - px = q$, com p e q positivos, tem uma raiz positiva, dada por $\frac{p}{q}$.

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2} \qquad \text{(A)}$$

Porém os babilônios não dispunham desta formula algébrica, mas o processo que seguiu é inteiramente equivalente a aplica-la, com efeito, a resolução registrada no tablete é a seguinte:

Tome a metade de 1 (coeficiente de x), que é $\frac{1}{2}$, e multiplique por ela mesmo $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\right)$, some isto a 870 (termo independente), $\frac{1}{4} + 870 = \frac{3481}{4}$, em seguida tire a raiz quadrada $\sqrt{\frac{3481}{4}} = \frac{59}{2} = 29{,}5$, que obtém um quadrado de lado medindo 29,5 unidade de medidas, cujo lado somado à metade de 1, dá 30, o lado do quadrado procurado.

Deste exemplo podemos observar que seria o mesmo que aplicar a fórmula (A), e podemos notar também que a formulação do problema pelos babilônios, mostra a ausência de simbolismo algébricos em sua matemática.

Exemplo 2: Adicionei sete vezes o lado de meu quadrado a onze vezes a superfície que é igual à $\frac{25}{4}$.

Solução:

Chamando o lado do quadrado de x, este problema seria escrito hoje, em notação algébrica moderna, como:

$$11x^2 + 7x = \frac{25}{4}.$$

Sabemos que a solução da equação $ax^2 + bx - c = 0$, com c positivo, é dada por:

$$\frac{\sqrt{b^2+4ac}-b}{2} = \frac{1}{a}\cdot\left(\sqrt{\frac{b^2}{4} + ac} - \frac{b}{c}\right) \qquad \text{(B)}$$

Neste caso, $b = 7$ e $a = 11$.

O procedimento indicado pelo escriba é:

1. Escreva 7 e 11, multiplique 11 por $\frac{25}{4} = \frac{275}{4}$;
2. Divida 7 em duas partes, $\frac{7}{2}$;
3. Multiplique $\frac{7}{2}$ por ele mesmo, $\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{2} = \frac{49}{4}$;
4. Some $\frac{49}{4}$ à $\frac{275}{4} = \frac{324}{4}$, tire a raiz de $\frac{324}{4}$, $\sqrt{\frac{324}{4}} = \frac{18}{2} = 9$. Isto é o quadrado de 9.
5. Subtraia $\frac{7}{2}$ de 9; $\frac{7}{2} - 9 = \frac{11}{2}$.

O que devemos fazer com11 que fornece $\frac{11}{2}$? Sendo $\frac{1}{2}$ seu quociente, ou seja o lado do quadrado é $\frac{1}{2}$.

Em outro tablete, uma equação do tipo $ax^2 + bx = c$ é multiplicada por a, obtendo $(ax)^2 + a(bx) = ac$. Esta equação na incógnita $y = ax$ é então resolvida. Este é um dos primeiros casos registrados de uma mudança de variáveis.

Em muitos tabletes, uma equação da forma $x^2 + q = px$, com p e q positivos, é dada sob a forma de sistema equivalente,

$$\begin{cases} x + y = p \\ xy = q \end{cases}$$

A orientação dos babilônios para resolver o sistema consistia no seguinte:

Tomar a metade de p: $\frac{p}{2} = \frac{x+y}{2}$

Quadrar o resultado: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$

Subtrair q do resultado obtido:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy = \frac{x^2 + y^2 + 2xy - 4xy}{4} = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

Tomar a raiz quadrada do resultado obtido: $\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{x-y}{2}$

Somar o resultado obtido pela a metade de p:

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \frac{p}{2} = \frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

O resultado obtido é um dos números desejados e o outro é a diferença deste para p ;

$$p - x = (x + y) - x = y$$

Note que os números procurados são:

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

, e

$$y = p - \left(\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = \frac{p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

O que refere a fórmula que é utilizada hoje para resolver a equação

$$x^2 - px = q.$$

Exemplo 3: Resolva a equação quadrática $x^2 - 5x + 6 = 0$ pelo método babilônio.

Solução:

Primeiramente colocar a equação sob a forma $x^2 + 6 = 5x$, onde $p = 5$ e $q = 6$.

Pois bem uma das raízes é,

$$x = \frac{p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$
$$x = \frac{5 + \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2}$$
$$x = 3$$

E a outra raiz é;

$$y = p - x$$
$$= 5 - 3$$
$$y = 2$$

Este método indicado para a solução de equações quadrática era preciso, pois os babilônios não trabalhavam com números negativos e nem raízes negativas, pois não existiam ainda na sua aritmética.

> Até os tempos modernos não havia, ideia de resolver uma equação quadrática da forma $x^2 + px + q = 0$, onde p e q eram positivos, pois a equação não tem raiz positiva. Por isso as equações quadráticas ... foram classificadas em três tipos, $x^2 + px = q$, $x^2 = px + q$ e $x^2 + q = px$. (BOYER, 1999, p.22)

De fato a matemática babilônica estava mais à frente da egípcia, pelo fato das invasões que a Mesopotâmia sofreu ao longo do tempo, teve contato com diversos povos e conhecimentos diferentes. A Mesopotâmia também teve papel de destaque no desenvolvimento da matemática do povo grego.

2.3 As resoluções da Equação do 2° Grau segundo os Gregos

A civilização grega desenvolveu no sul da Europa, em uma região de relevo acidentado e de litoral cheio de ilhas. Foi formada por volta do século XX a. C. ao século XII a. C., por invasões de Aqueus, Jônios, Eólios e Dórios.

A revolução matemática dos gregos consiste de uma ideia muito simples, enquanto os egípcios e babilônios perguntavam: Como? Os gregos indagavam o como e o porquê?

> Pela primeira vez na matemática, como em outros campos, o homem começou a formular questões fundamentais como “Por que os ângulos da base de um triangulo isósceles são iguais? ... Os processos empíricos do Oriente Médio, suficientes o

> bastante para responder questões na forma de como, não mais bastavam para as indagações mais cientificas na forma de porquê. (EVES, 2008, p.94.)

Desta forma a matemática que era prática, passou a ter seu conhecimento voltado para conceituação, teoremas e axiomas.

Fazendo assim com que o caráter da matemática grega seja diferente da matemática babilônia e egípcia. Os gregos transformaram os conhecimentos destas duas civilizações em um corpo de resultados bem estruturado no qual à argumentação matemática é feita através de demonstrações matemáticas.

> A história grega pode ser recuada até o segundo milênio a.C., quando, como invasores iletrados vindo do norte, abriram caminho até o mar ... Supõe-se que alguns rudimentos de cálculo viajaram pela mesma rota, mas as partes da matemática sacerdotal podem ter permanecido restritas a seus domínios ... Logo, porém ... estudiosos gregos se dirigiram aos centros da cultura no Egito e Babilônia. Ali entraram em contato com a matemática pré-helênica, mas não estavam dispostos a apenas receber antigas tradições, e apropriaram tão completamente do assunto que logo ele tomou forma drasticamente diferente. (BOYER, 1999, p. 30)

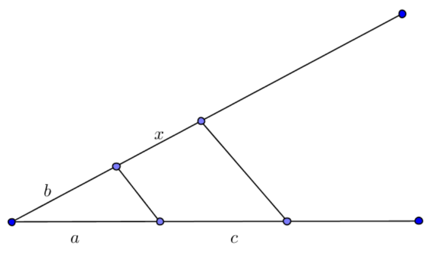
Esta transformação da Matemática deu origem a Matemática Moderna, que nasceu dentro do racionalismo jônico (crescente), começou com Tales de Mileto (um dos “sete sábios” da Antiguidade), na primeira metade do século VI a.C.

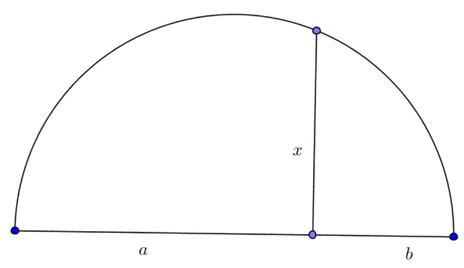
Quanto às equações do 2º grau, o método utilizado para resolver as equações pelos gregos, dava, geralmente, por construção geométrica.

A seguir, segundo EVES (2008, p. 110), o método das proporções permite a construção de um segmento de reta x dado por $a{:}\,b = c{:}\,x$ ou por $a{:}\,x = x{:}\,b$, onde a, b, c , são segmentos de reta dados. Isto é, o método das proporções fornece solução geométrica das equações.

$$ax = bc \text{ e } x^2 = ab$$

Figura I: *Método das proporções*





Fonte: Eves 2008, p. 110.

A proposição 44 do livro I dos Elementos de Euclides resolve a construção da seguinte maneira: Aplicar um dado segmento de reta AB em um paralelogramo de área dada e ângulos de base dados.

Considerando o caso particular, onde os ângulos da base são retos de modo que o paralelogramo seja um retângulo. Chamando o comprimento do segmento de reta AB por a, e a altura do retângulo por x e a dimensões de um retângulo de área igual à do retângulo aplicado por b e c. Então, temos

$$ax = bc \text{ ou ainda, } x = \frac{bc}{a}.$$

Agora explicando o método de aplicação de área, considere um segmento de reta AB e um paralelogramo $AQRS$ cujo lado AQ está contido na semirreta $\overrightarrow{AB}$, Se Q não coincide com B, tome C de modo que $QBCR$ seja um paralelogramo. Quando Q está entre A e B, diz-se que o paralelogramo $AQRS$ está aplicado ao segmento AB, ficando aquém pelo paralelogramo $QBCR$, quando Q coincide com B, diz-se que o paralelogramo $AQRS$ está aplicado no segmento AB, quando Q está no prolongamento de AB diz-se que o paralelogramo $AQRS$ está aplicado ao segmento AB, excedendo pelo paralelogramo $QBCR$.

A proposição 28 do livro VI dos Elementos resolve a construção da seguinte maneira: Aplicar a um dado seguimento de reta AB um paralelogramo $AQRS$ de área igual a uma dada figura retilínea F, e ficando aquém por um paralelogramo $QBCR$ semelhante a um paralelogramo dado, não excedendo a área de F a do paralelogramo descrito sobre metade de AB e semelhante a deficiência $QBCR$. Considerando o caso particular onde o paralelogramo é um quadrado. Chame o comprimento de AB por a, a base AQ do paralelogramo aplicado (um retângulo) por x e o lado de um quadrado F, de área igual à do retângulo aplicado, por b. Então,

$$x(a - x) = b^2 = x^2 - ax + b^2 = 0$$

A proposição 29 do livro VI dos Elementos resolve a construção da seguinte maneira também: Aplicar a um lado segmento de reta AB um paralelogramo $AQRS$ de área igual a uma figura retilínea F, e excedendo por um paralelogramo $QBCR$ semelhante a um paralelogramo dado. Considere o caso particular, onde o paralelogramo dado é um quadrado. Denote o comprimento de AB por a, a base AQ do paralelogramo aplicado (retângulo) por x e o lado de um quadrado F de área igual ao retângulo aplicado por b. Então,

$$x(x - a) = b^2 = x^2 - ax - b^2 = 0$$

Segue assim que a Proposição 44 do livro I fornece uma solução geométrica da equação linear $ax = bc$ e as proposições 28 e 29 do livro VI fornecem soluções geométricas de equações quadráticas $x^2 - ax + b^2 = 0$ e $x^2 - ax - b^2 = 0$, respectivamente.

Já segundo Morgado (1999), em seu trabalho *Millenium*, fala que nos elementos de Euclides, ensina-se a resolver o mesmo problema da seguinte forma:

“Dividir um segmento de recta em duas partes tais que o rectângulo contido pelo segmento dado e uma das partes seja igual ao quadrado da outra parte”.

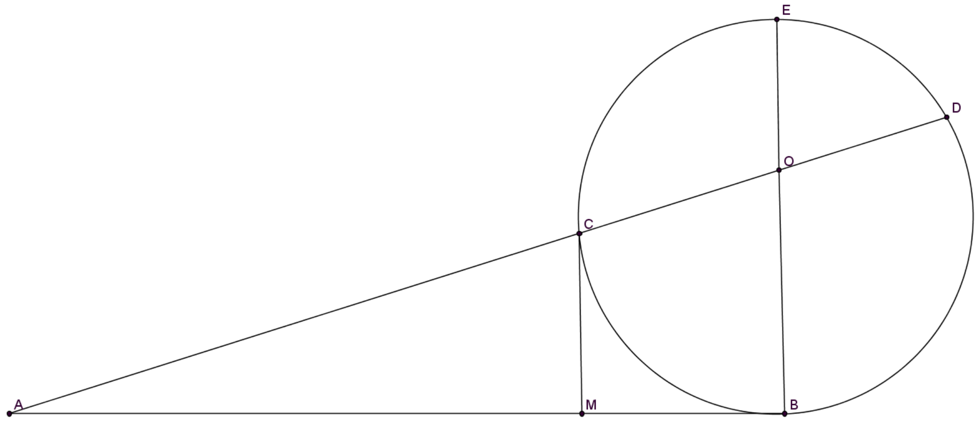
Solução:

Resolve-se este problema, solucionando a equação $a(a - x) = x^2$, onde a é o segmento dado. A equação pode ser escrita sob a forma $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, trata-se de dividir o segmento a em média e extrema razão.

Seja AB o segmento dado e consideremos a circunferência tangente a AB em B e cujo raio é $\frac{a}{2}$.

A reta definida por A e pelo centro O da circunferência encontra a circunferência nos pontos C e D.

Figura II:



Fonte: Morgado, 1999, Milleniun.

O arco da circunferência de centro A e raio AC encontra AB no ponto M. As partes perdidas são precisamente AM e MB e tem-se $\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{AB}$.

Com efeito, tem se $a^2 = (a + x)x$, onde a e x designa, respectivamente, o comprimento de AM (o quadrado da tangente é igual ao produto da secante pela sua parte externa) e da desigualdade $a^2 = (a + x)x$, resulta $a(a - x) = x^2$, quer dizer, a parte
$a - x$ é igual ao quadrado da outra parte, já que $a - (a - x) = x$.

A igualdade $a^2 = (a + x)x$ resulta imediatamente da aplicação do teorema de Pitágoras ao triangulo retângulo ABO. Assim tem-se $AB^2 + BO^2 = OA^2$, isto é,

$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$, onde $a^2 = x^2 + ax = x(a + x)$, o que se pretendia.

Neste mesmo trabalho, Morgado (1999) traz outra solução geométrica de uma equação quadrática:

Suponhamos agora que queremos resolver a seguinte equação $x^2 + px = q$.

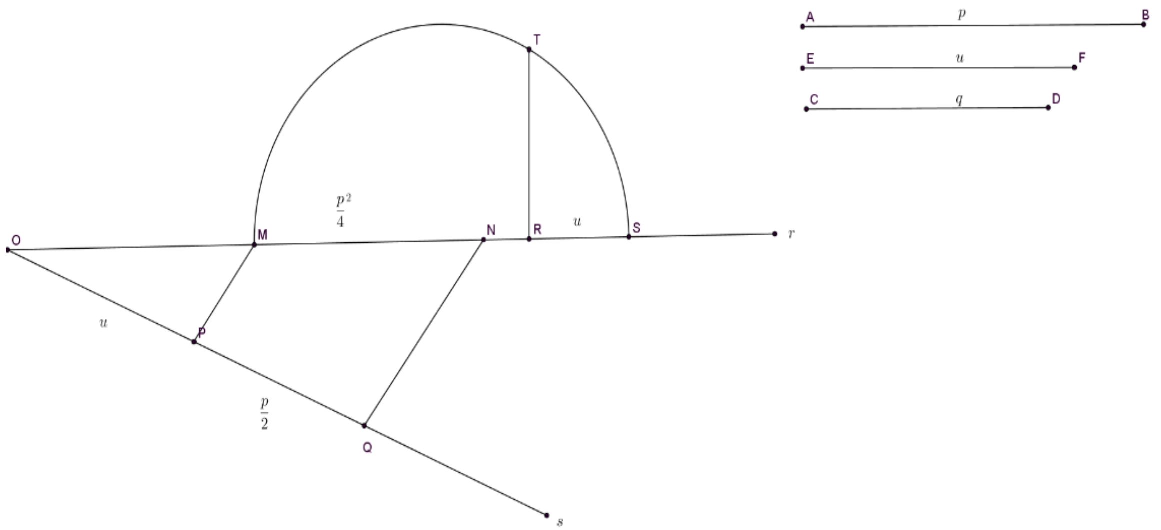
Solução:

Esta equação é, evidentemente, a equação

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + q.$$

Então, para resolver a equação, basta construir $\frac{p^2}{4} + q$, extrair-lhe a raiz quadrada e subtrair-lhe, em seguida, $\frac{p}{2}$.

Figura III: *Solução geométrica, segundo Morgado*



Fonte: Morgado, 1999, Millenium.

Comecemos por considerar duas retas r e s, concorrentes em O, e sobre r, um ponto M tal que $OM = \frac{p}{2}$, sendo p o comprimento do segmento AB relativamente ao segmento indicado $EF = u$, e consideremos sobre os dois pontos P e Q,
tais que $OP = u$ e $PQ = \frac{p}{2}$. Unamos P e M e conduzimos por Q uma paralela a PM, seja N o ponto de intersecção dessa paralela com r.

Tem-se $\frac{OP}{OM} = \frac{PQ}{MN}$ e, portanto, $MN = \frac{OM - PQ}{OP} = \frac{p^2}{4}$.

Consideremos agora o ponto R, de r, tal que:

$$MR = MN + NR = \frac{p^2}{4} + q.$$

Trata-se de extrairmos a raiz quadrada de $\frac{p^2}{4} + q$.

Para isso, marquemos sobre r o ponto S tal que RS tenha comprimento u e R fique entre M e S.

Consideremos uma semicircunferência δ, de diâmetro MS e seja T o ponto de encontro dessa semicircunferência com a perpendicular a r conduzida por R. Por um teorema conhecido da Geometria Elementar (a altura de um triangulo retângulo relativa à hipotenusa é o meio proporcional dos segmentos que o seu pé determina na hipotenusa), conclui-se que RT é preciosamente a raiz quadrada de $\frac{p^2}{4} + q$.

Para obter x, basta determinar o valor de $RT - \frac{p}{2}$.

2.4 As resoluções da Equação do 2° Grau segundo os Hindus

Escavações arqueológicas em Mohenjo Daro fornecem evidências de uma civilização muito antiga e de alta cultura na Índia. Creditam que já existia desde a época em que eram construídas as pirâmides egípcias, mas não existem documentos matemáticos dos indianos dessa época. Mais tarde o país foi ocupado pelos Arianos, que introduziram o chamado sistema de castas, atrasando assim o desenvolvimento dos indianos, e também desenvolveram a literatura sânscrita.

A Índia tinha como política, várias cidades pequenas desunidas, o que tornava mais fácil as invasões de seu território. E como sempre os invasores se impunham como classe dominante, evitando a miscigenação com o povo indiano.

Os arianos durante o tempo que ali estavam desenvolveram o hinduísmo, combinação de religião, filosofia e estrutura social.

O hinduísmo é um conjunto de crenças e leis que baseava em três ideias principais: culto a um grande número de deuses, transmigração da alma e o sistema de castas que dividia rigidamente a sociedade indiana em cinco grupos: Brahmara (sacerdotes), Kshatriya (guerreiros), Vaisya (comerciantes e artesões) e os Sudra (camponeses).

Por volta do ano 320 a. C., Chandragupta Mauria, unificou os pequenos estados indianos e criou o Império Mauriano, seguido pelo seu neto Açoka. No ano 185 a. C., o império Mauriano entrou em decadência e começou a ficar dividido novamente em pequenos estados.

Dentro deste período a Índia obteve um grande desenvolvimento cultural, isto até o ano 200 d. C. Por volta de 320 d. C., a Índia foi novamente unificada por Chandragupta I, dando origem ao império dos Grupta.

No século VIII, os árabes invadiram a Índia, introduzindo o islamismo na Índia. E durante o século anterior (VII) a Índia foi invadida também pelos ingleses.

A matemática hindu por sua vez, exibia surpreendente independência em seu trabalho matemático, e raramente se referia a seus predecessores. A Índia, assim como o Egito, tinha seus "esticadores de cordas", e as noções geométricas tomaram a forma de um corpo de conhecimentos conhecido como os "Sulvasutras" ou "regras de corda", Sulva refere-se à cordas utilizadas para medidas, e sutra um livro de regras.

Existem três versões, todas em verso, da obra os Sulvasutras. A mais conhecida tem o nome de Apastamba. Nesta versão, da mesma época de Pitágoras, encontra regras para a construção de ângulos retos por meio de termas de cordas cujos comprimentos formam triadas pitagóricas como 5, 11 e 13, ou, 8, 15e 17. Onde essas triadas eram encontradas na antiga regra babilônica, mostrando que teve influência Mesopotâmica nos Sulvasutras.

A origem e data dos Sulvasutras não incertas, não sendo possível dizer se tais regras são ou não relacionadas com a primitiva agrimensura egípcia.

Com o encerramento do período dos Sulvasutras, segue a idade dos "Siddhantas", ou "sistemas de astronomia". O início da dinastia do Rei Grupta (290) assinalou o começo de um renascimento da cultura sânscrita, onde os Siddhantas parecem ser um produto desse renascimento.

Concorda em geral que, os Siddhantas vêm do fim do quarto século ou começo do quinto, mas existem vários desacordos em relação ao conhecimento que contêm.

Segundo Eves (2008, p. 255), os hindus foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à álgebra. Os problemas aritméticos eram resolvidos por falsa posição. Utilizavam outro método de resolução que era o de inversão (método do retorno), no qual se trabalha para trás, a partir dos dados.

Durante a invasão dos árabes, muitos resultados obtidos pelos matemáticos gregos, chegaram ao conhecimento dos hindus. Os hindus apenas melhoram sob alguns aspectos e traduziram para a sua língua, e os exprimiram com eloquência poética e romântica.

Vejamos um exemplo sugerido por Bhaskara (Boyer, 1999, p. 255):

"Linda donzela de olhos cintilantes, se conheces o método do retorno diz me: qual é o número que, multiplicado por 3, associado por este produto, dividido por 7, diminuído de $\frac{1}{3}$ do quociente, elevado ao quadrado, diminuído de 52, acrescido de 8 e dividido por 10, dá como resultado o número?"

As equações do 2º grau surgiram pela primeira vez na matemática hindu nos Sulvasutras, sob as formas $ax^2 = c$ e $ax^2 + bx = c$, sem que sejam apresentadas soluções. Posteriormente no manuscrito Bakshali, é descrito um procedimento da solução que corresponde à fórmula moderna

$$x = \frac{\sqrt{b^2 + 4ac} - b}{2a}$$

Para a equação $ax^2 + bx - c = 0$.

Segundo Pitombeira (2015), Aryabhata, em torno de 500 d. C., chega a uma equação do 2º grau a partir de progressões aritméticas. Onde o enunciado era o seguinte: seja a o primeiro termo e d a razão da progressão aritmética, respectivamente. Consideremos os termos de $(p + 1)$ até $(p + n)$, Se n é o termo médio, temos:

$$m = a + \left(\frac{n-1}{2} + p\right)d$$

Então a soma desses termos é $S = a_{p+1} + \cdots + a_{p+n} = nm$.

Se $p = 0$, podemos obter n em função de a, d e S:

$$S = n\left(a + \frac{n-1}{2}\right)d$$

$$2S = (2an + n^2 - n)d = n^2 d + n(ad - d)$$

$$n^2 d + n(ad - d) - 2S = 0$$

$$n = \frac{-(a-1) + \sqrt{d^2(a-1)^2 + 4S^2}}{2d}$$

Pitombeira (2015) ainda fala que, Aryabhata mostra também como achar x e y conhecendo xy e $x - y$: a expressão,

$$\frac{\sqrt{4xy + (x-y)^2} \pm (x-y)}{2}$$

Mas dá x e y respectivamente.

Outro matemático hindu que ensina a resolver a equação do tipo $ax^2 + bx = c$, com a, b e c positivos e Brahmagupta, que nasceu em 598. Seu procedimento corresponde exatamente a fórmula:

$x = \frac{\sqrt{4ac+b^2}-b}{2a}$, ou $x = \frac{\sqrt{ac+\left(\frac{b}{2}\right)^2}-\frac{b}{2}}{a}$

Bhaskara, também mostra como resolver a equação $ax^2 + bx = c$.

Para isso, em um de seus trabalhos ele multiplica ambos os membros da equação por a:

$$(ax)^2 + (ab)x = ac$$

Em seguida, completa os quadrados explicitamente:

$$(ax)^2 + (ab)x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2.$$

Nesta época, já havia plena consciência de números negativos e de que o número de raízes de uma equação do 2º grau pode ser 0, 1 ou 2. Brahmagupta afirma que “o quadrado de negativo é positivo e que de 0 é 0” (Pitombeira, 2015, p. 23).

Por Pitombeira (2015), Bhaskara, diz que:

> O quadrado de uma grandeza positiva ou de uma grandeza negativa é positiva e a raiz quadrada de uma grandeza positiva é dupla, positiva e negativa. Não há raiz quadrada de uma grandeza negativa, pois ela não é uma grandeza. (PITOMBEIRA, 2015, p. 24).

Como exemplo de uma equação quadrática duas raízes positivas, Bhaskara propõe o seguinte problema:

> A oitava parte de um bando de macacos, elevada ao quadrado, brinca em um bosque. Além disso, 12 macacos podem ser vistos sobre uma colina. Qual o total de macacos? (PITOMBEIRA, 2015, p. 24).

Na linguagem algébrica este problema pode ser escrito, como

$$\frac{x^{\ 2}}{64} + 12 = x.$$

Cujas raízes são $x = 48$ e $x = 16$.

2.5 As resoluções da Equação do 2° Grau segundo os Chineses

Segundo Boyer (1999, p. 133), a civilização chinesa, assim como a civilização indiana, é muito mais antiga que as civilizações grega e romana, mas não mais antigas que as civilizações egípcia e mesopotâmica.

A civilização chinesa desenvolveu-se às margens dos rios Iang-tse e Amarelo, pelo o que se refere, comparável às do Nilo, ou de entre os rios Tigres e Eufrates, mas não tem evidências específicas sobre este fato.

A China antiga costuma ser dividida em quatro grandes períodos:

- China antiga (2000 a. C. – 600 a. C.), período onde foi governada por Monarquias Hsia, Shang e Chou, onde o poder real se encontrava nas mãos de pequenos senhores e governantes das pequenas cidades.
- China clássica (600 a. C. – 221 d. C.), período onde o filosofo Confúcio pregava uma reestruturação social e política. Nas suas pregações ele pregava o respeito pelas autoridades, cuidados com a pobreza, humildade e ética por parte dos governantes.

  No mesmo período é criado o taoísmo por Chang Tzu (394 – 295), o que proclamavam uma ordem no universo e recomendava a paz. Por volta de 200 a. C., a dinastia Ham cria um império, que prolonga até o fim da China clássica.

- China imperial (221 d. C. – 1911 d. C.), neste período a China encontrava em meio de várias lutas internas. Onde com a queda da dinastia Ham, os senhores começaram a lutar entre si para ter domínio em suas regiões. Em 618 d. C., acontece a unificação da China pela dinastia Sung e Yuan, onde elas bancaram as artes e literatura, surgindo a era do ouro. Fazendo com que a China alcançasse grandes dimensões, com a abertura do comercio Chinês com a Europa.
- China moderna (1911 d. C. – hoje).

O império chinês, só foi rompido com a revolução de 1911. Dando origem a China moderna. Vale ressaltar que o império chinês ao contrário do império romano, isto na época do imperador Kublai Khan, tinha uma cultura rica e uma base intelectual solida. Enquanto os romanos eram militares analfabetos. Porém o interesse dos chineses pela literatura e arte, fez com que a matemática e a ciência, sofressem atraso em relação as outras disciplinas,

Os historiadores consideram difícil datar os documentos matemáticos da China. Pois, o clássico mais antigo da matemática chinesa “Chou Pei Suang Ching”, tem uma variação de quase mil anos. O problema de sua data é dado pelo fato de poder ser obra de vários homens, em períodos diferentes.

Outra publicação quase tão antiga quanto o Chou Pei, e talvez o mais influente livro de matemática chinês, é o “Chui-Chang Suan-Shu” (Nove capítulos sobre a Arte Matemática). Entre seus assuntos abordados, chama a atenção com problemas sobre a mensuração de terras, agricultura, sociedade, engenharia, impostos, cálculos, soluções de equações, e propriedades dos triângulos retângulos.

Época em que os gregos compunham tratados ordenados e sistematicamente expositórios, os chineses repetiam o velho hábito dos babilônios de copilar coleções com problemas específicos.

Nesta publicação de Nove capítulos, em relação às Equações do 2º grau, os chineses se assemelham à matemática egípcia pelo uso da “falsa posição”, mas, assim como a origem da matemática chinesa em geral, parece independente de influência ocidental. Ainda, também, dentro da publicação aparece a solução de problemas sobre equações lineares, usando números positivos e negativos.

Os chineses gostavam dos diagramas para resolver sistemas de equações lineares. Vale observar que o quadrado mágico tem seu primeiro registro efetuado pelos chineses, mesmo que tenha uma origem mais antiga e desconhecida.

Durante toda a sua história, a cultura chinesa foi prejudicada por quebras abruptas impedindo assim algumas das notáveis antecipações dos métodos modernos, que poderiam ter modificado o desenvolvimento da Matemática. Em 213 a. C., por exemplo, o imperador da china mandou queimar todos os livros. Algumas obras escaparam, através de cópia, por transmissão oral e o aprendizado continuou.

Parece que existiu algum contato entre a Índia e a China, assim como entre a China e o Ocidente; pois, muitos dizem ter influência babilônica ou grega, mas a china não utilizava frações sexagesimais. O sistema de numeração deles era decimal.

Os chineses também conheciam operações sobre frações comuns, para as quais achavam o mínimo denominador comum (m.d.c). Trabalhavam com números negativos, em que eles utilizavam duas coleções de barras, uma vermelha e a outra preta, a vermelha para os coeficientes ou números positivos e a preta os negativos, mas não aceitavam a ideia de um número negativo ser solução de uma equação.

A matemática primitiva da China é tão diferente da matemática de períodos comparáveis em outras partes do mundo, que a hipótese de desenvolvimento independente parece justificar.

Segundo Boyer (1999, p. 138), ele afirma que, de qualquer forma, parece seguro dizer que se houve comunicação antes de 400 d. C., então saiu mais matemática da China do que entrou.

Dentro do terceiro século Liu Hui, o importante comentador dos Nove capítulos, determinou o valor de π sendo 3,14, usando um polígono regular de 96 lados e a aproximação 3,14159 considerando um polígono de 3072 lados.

No século XIII. Com o fim do império Sung, a china atinge o ponto mais alto de sua matemática. Período do surgimento de Yang Hui (1261 – 1275), um matemático que trabalhou com séries numéricas e apresentou uma variação chinesa para o triângulo de Pascal.

Neste período também surgiu o último e maior matemático chinês, Chu Shich-chieh (1280 – 1303), porem, pouco se sabe sobre ele, nem mesmo a data de nascimento e morte são exatas. Ele teve a oportunidade de escrever dois tratados. O primeiro deles escrito em 1299, foi o Suam-hsuch ch'i-meng (introdução aos estudos matemáticos), obra elementar que influenciou a Coréia e o Japão. Mas, o tratado de maior interesse histórico e matemático é o Ssu-yuan yu-chien (precioso espelho dos quatros elementos) de 1303.

Os quatros elementos eram "céu, terra, homem e matéria", representações de quatro incógnitas na mesma equação. O livro dele representa um grande desenvolvimento da álgebra chinesa, pois trata de equações simultâneas e de equação de grau até quatorze. No livro ele descreve um método de transformação que chama método fan-fa ou fan, mas que geralmente é chamado de método de Horner, um inglês que viveu meio milênio depois. A seguir um exemplo do método de fan-fa.

Exemplo 1: Resolva a equação $x^2 + 252x - 5292 = 0$.

Solução:

Para resolver a equação $x^2 + 252x - 5292 = 0$, procedia da seguinte maneira:

$$x^2 + 252x = 5292$$

Chu Shich-chieh primeiro obteve $x = 19$, como aproximação (uma raiz cai entre $x = 19$ e $x = 20$), depois aplicou o método fan-fa, nesse caso a transformação $x_1 = x + 19$.

$$(19 + x)^2 + 252(19 + x) = 5292$$

Substituía o valor de x_1 na incógnita x da equação original.

$$361 + 38x + x^2 + 4788 + 252x = 5292$$

$$x^2 + 290x = 143$$

$$x_2 = 19 + \frac{143}{1 + 290} \cong 19{,}49.$$

Repetia o cálculo até que aparecesse o número cujo valor não se modificasse (convergência).

$$x_2 = 19{,}49 + x$$

Substituía o valor de x_2 na incógnita x da equação original.

$$(19{,}49 + x)^2 + 252(19{,}49 + x) = 5292$$

$$x^2 + 290{,}98x = 0{,}66$$

$$x_3 = 19{,}49 + \frac{0{,}66}{1 + 290{,}98}$$

$$x_3 = 19{,}49$$

Logo 19,49 era o valor convergente. Ou seja, o número 19,49 é o valor aproximado de uma das raízes da referida equação.

2.6 As resoluções da Equação do 2° Grau segundo os Árabes

O Império Árabe teve origem em Meca e com a fuga de Maomé para Medina em 622 d. C., as tribos se uniram, mercê de um grande fervor religioso. Dentro de um século, empunhando o estandarte verde e dourado do islamismo, pela força das armas estenderam o domínio em direção, ao Egito e a Mesopotâmia. Estava sobre seu domínio, por exemplo, Alexandria, que ainda possuía uma atividade intelectual considerável.

Por volta de 755 d. C., ocorreram disputas internas, o que levou a uma divisão leste e oeste no império, saindo daí um califado com capital em Bagdá e o outro com capital em Córdoba.

As ciências tanto egípcia, como babilônica deixaram poucos registros, mas é razoável pensar que os conhecimentos foram transmitidos de geração em geração pelos habitantes do lugar.

Foi de importância fundamental para a conservação da cultura mundial, a maneira em que os árabes se apoderaram do conhecimento grego e hindu. Os califas de Bagdá foram governadores esclarecidos, onde a maioria deles tornaram-se patronos da cultura, e convidavam intelectuais eminentes para trabalharem junto às suas cortes. Traduzindo assim vários trabalhos gregos de astronomia, medicina e matemática, para o árabe sendo assim preservados, até que posteriormente os europeus tivessem condições para reproduzi-los para outras línguas.

A matemática e a astronomia foram sempre incentivadas pelos califas de Bagdá:

- Al-mansur, que durante o seu reinado levou para Bagdá os trabalhos de Brahmagputa que, foram traduzidos para o árabe;
- Harun al-Raschid, que se tornou conhecido por causa de *As Mil e Uma Noites*, e patrocinou a tradução de vários clássicos gregos para o árabe, entre eles parte dos *Os Elementos de Euclides*;
- Al-Mamun, foi também um patrono do sabe, além de ser um astrônomo. Patrocinou também várias traduções de obras gregas para o árabe, entre elas destacam o *Almajesto* de Ptolomeu e a versão completa de *Os Elementos de Euclides*. Construiu em Bagdá uma "Casa da Sabedoria", semelhante ao museu de Alexandria.

Entre os mestres havia um matemático e astrônomo, Mohammed ibu-Musa al-Khowarizmi, que escreveu mais de meia dúzia de obras de astronomia e matemática, das quais baseavam provavelmente nos *Siddhantas* derivados da Índia. al-Khowarizmi escreveu dois livros sobre aritmética e álgebra onde existe apenas uma cópia com tradução latim com o título *De numero hindorum*. Esta obra era baseada provavelmente, na tradução árabe de Brahmagupta, onde al-khowarizmi dá uma exposição dos numerais hindus, que assume uma falsa posição de que o sistema de numeração é de origem árabe.

Através da aritmética, Al-khowarizmi tornou-se uma palavra vernácula, através do seu mais importante livro, *Al-jabr Wa'l muqabalah*, ele nos passa uma palavra ainda mais familiar. Surgindo assim com este título o termo álgebra. O livro *Al-jabr*, é mais próximo da álgebra elementar de hoje que as obras de Diofante e de Brahmagupta, pois o seu livro não ocupa de problemas difíceis de analise indeterminada, mas sim de uma exposição direta e elementar da resolução de equações, especialmente de segundo grau.

O *Al-jabr* chegou, até nós, em duas versões uma latina e a outra árabe, mas na latina falta uma parte considerável do texto. Na latina, não há prefacio, talvez porque o prefacio elogiasse o profeta Maomé e Al-Mamum. Onde Al-khowarizmi escreve que esse último o tinha encorajado a:

> [...] compor uma breve obra sobre cálculos por (regras de) complementação e redução, restringindo-a ao que é mais fácil e útil essa aritmética, tal como os homens constantemente necessitam em casos de heranças, ..., e de outras coisas vários tipos e espécies. (KARPINSKI, 1915, p.96, apud BOYER, 1999, p.156)

Não se sabe bem o que significa os termos *Al-labr* e *Muqabalah*, mas a interpretação usual é semelhante à tradução citada acima. Ou seja, *Al-jabr* significa algo como complementação, ou ainda entende como a operação de somar para eliminar os termos negativos. Já *Muqabalah* significa algo como redução. Ou seja, entende como a operação de subtrair, isto é ao cancelamento de termos semelhantes em lados opostos da equação.

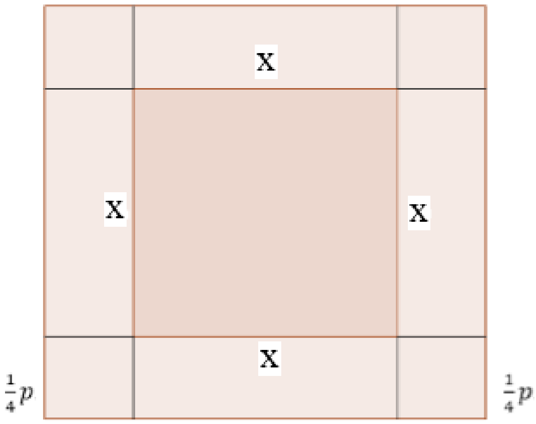
Segundo Morgado (1999), Al-Khowarizmi usou dois métodos gerais para resolver equações quadráticas da forma $x^2 + px = q$.

Um exemplo de um dos métodos de Al-Khowarizmi é o seguinte:

Constrói-se um quadrado de lado x e, sobre esse lado, para o exterior do quadrado, constrói-se um retângulo de lados x e $\frac{1}{4}p$.

Completa-se a Figura IV, construindo em cada um dos quatro cantos um quadrado de lado igual a $\frac{1}{4}p$.

Figura IV: *Construção do quadrado*



Fonte: Morgado, 1999.

Então a área do quadrado maior é $x^2 + 4x\frac{1}{4}p + 4\frac{1}{16}p^2 = x^2 + px + \frac{1}{4}p^2$.

Somando $\frac{1}{4}p^2$ a ambos os membros da equação $x^2 + px = q$, vem

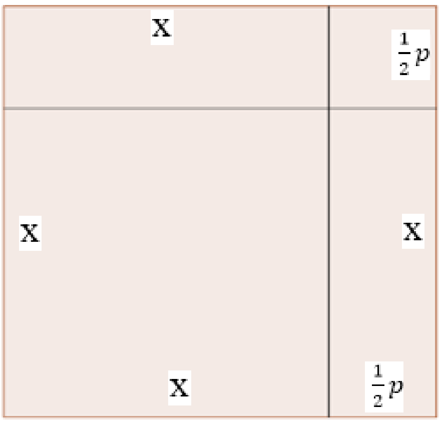
$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$$

$$\left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 = \frac{1}{4}p^2 + q$$

De onde $x + \frac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$ e, por consequência $x = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q} - \frac{1}{2}p$.

O outro método de Al-Khowarizmi baseia-se na construção da figura.

Figura V: *Construção do quadrado*



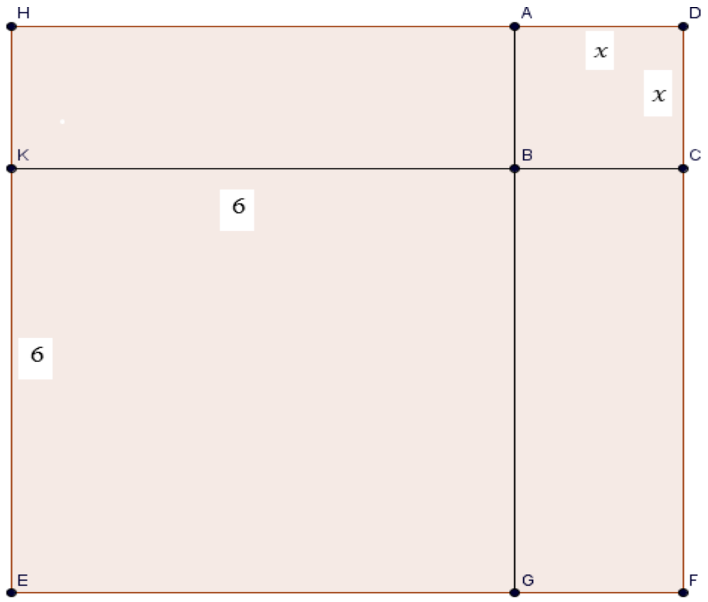
Fonte: Morgado, 1999.

Então a área do quadrado maior é $\left(x + \frac{1}{2}p\right)^2 = x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2$, por ser $x^2 + px = q$, de onde $x + \frac{1}{2}p = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q}$ e, consequentemente,

$$x = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + q} - \frac{1}{2}p.$$

Exemplo: Encontrar a solução para $x^2 + 12x = 64.$ 0

Figura VI:



Fonte: Morgado, 1999.

Na figura a cima tem-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = x$ e que $\overline{AH} = \overline{CF} = 6$. Consequentemente a área do quadrado $ABCD$ é dada por $A_q = x^2$ e a área dos retângulos $HKBA$ e $BGFC$ é dada por $A_r = 6x$. A soma dessas áreas é $x^2 + 6x + 6x = x^2 + 12x$. Completa-se o quadrado $HEFD$ com o quadrado $KEGB$, cuja área é dada por $A'_q = 36$. A área do quadrado $HEFD$ é dada por $(x+6)^2 = x^2 + 12x + 36 = 64 + 36 = 100$, o que resulta $x = 4$. Al-Khowarizmi, assim como os demais matemáticos, só considerava as raízes positivas, mas, admitia a existência de duas raízes.

2.7 As resoluções da Equação do 2° Grau segundo os Europeus

Em 1575, a Europa Ocidental já havia recuperado uma grande parte das principais obras matemáticas existentes. A álgebra árabe, foi perfeitamente dominada e perfeiçoada, tanto para resoluções de equações, quanto por um uso parcial de simbolismo. A maior parte da Europa

Ocidental participava, agora, do desenvolvimento da matemática, mas a figura principal era o francês, François Viète.

Segundo Boyer (1999, p. 207), Viète não era matemático por vocação, apenas seu tempo de lazer que era dedicado à matemática, porém fez grandes contribuições à aritmética, álgebra, trigonometria e geometria. Na aritmética ele é lembrado pelo o uso de frações decimais ao invés de sexagesimais.

Suas maiores contribuições se encontram na álgebra, pois foi aí que chegou mais perto das ideias modernas. Viète usou uma vogal para representar, uma quantidade suposta desconhecida, ou indeterminada, e uma consoante para representar uma grandeza ou números conhecidos.

Segundo Fragoso (2000, p. 24), ele descreve o método de Viète, que consistia em considerar duas novas variáveis u e v e fazer $x = u + v$.

Boyer (1999, p. 208) afirma que, se Viète tivesse aderido a outros simbolismos já existentes em sua época, ele poderia ter escrito as equações quadráticas em uma única forma $BA^2 + CA + D = 0$, onde A é a incógnita e B, C, e D são parâmetros. E ainda afirma que sua álgebra era sincopada e não simbólica, pois mesmo utilizando símbolos diferentes, o resto de sua álgebra consistia de palavras e abreviações.

No século XVII em diante, a matemática desenvolveu apenas em termos de lógica interna do que sob ação de força econômica. Descartes foi o matemático mais conhecido do período.

Segundo Boyer (1999, p. 231), a matemática de Descartes ainda tinha fortes elos com a tradição anterior. Ele estava seriamente interessado na matemática, no inverno de 1619, em que ficava na cama até às dez da manhã pensando em problemas, dentro deste período que ele descobriu a formula sobre poliedros que leva o nome de Euller, $v + f = a + 2$, onde v, f, e a são os número de vértices, faces e arestas, respectivamente.

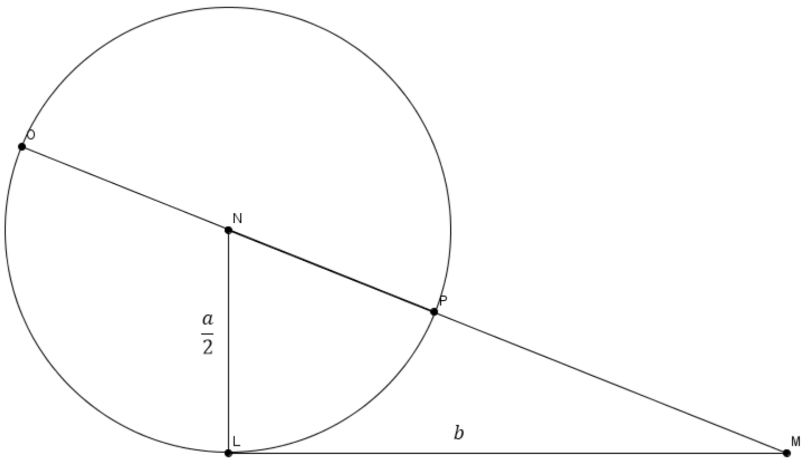
Embora a obra de Descartes, seja descrita frequentemente como aplicação da álgebra à geometria, ela pode ser caracterizada como a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica. Ele ia mais longe que seus predecessores em sua álgebra simbólica.

No apêndice *La Géométrie* de sua obra *O Discurso do Método*, traz instruções detalhadas para resolver equações quadráticas, sendo esta resolução geométrica. Por exemplo, para resolver a equações do tipo $z^2 = az + b^2$, $z^2 = b^2 - az$ e $z^2 = az - b^2$, sempre com a e b positivos.

Segundo Pedroso (2010, p. 11) Descartes, para resolver equações do tipo $z^2 = az + b^2$, usou o seguinte método:

Traça-se um segmento LM, de comprimento b, e, em L, levanta-se um segmento NL igual a $\frac{a}{2}$ e perpendicular a LM. Com centro em N, constrói-se um círculo de raio $\frac{a}{2}$ e traça-se a reta por M e N, que corta o circulo em O e P.

Figura VII:



Fonte: Pedroso, 2010, p. 11.

Então a raiz procurada é o segmento OM. Com efeito, no triângulo MLN, se $OM = x$, tem-se: $\left(z - \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$ e daí: $z^2 - az = b^2$. Hoje, sabe-se que a segunda raiz é $-OM$, mas Descartes não considerava a raiz negativa.

Enfim, apesar de todas as civilizações descritas no texto acima resolverem as Equações do 2° grau, pode ser observado que muitas delas trazem praticamente a mesma forma de resolver tal problema, onde algumas apenas aperfeiçoaram os métodos de resoluções, o que pressupõe que algumas delas tiveram contato entre si, mas este fato não pode ser comprovado pelos historiadores. Este aperfeiçoamento atingiu o auge com a matemática demonstrativa dos Gregos, surgindo assim a matemática moderna conhecida atualmente.

3 AS RESOLUÇÕES DE EQUAÇÕES DO 2° GRAU ATUALMENTE – LIVRO DIDÁTICO

Para relatar como são feitas as resoluções das equações quadráticas, foi observado o conteúdo referente às Equações do 2° grau, do livro Vontade de Saber Matemática 9° ano (Souza, 2012, p. 28 a 38).

Todas as figuras deste capítulo foram retiradas de Souza (2012), por isso as mesmas não serão numeradas conforme as anteriores.

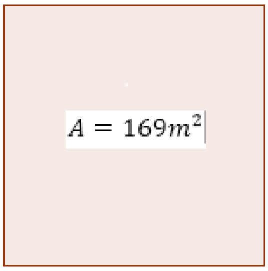
Como visto na coleção “Vontade de Saber Matemática”, os alunos estudam equação do 2° grau, a partir do 9° ano do Ensino Fundamental.

Para fazer a introdução ao tema o autor refere inicialmente as equações do 1° grau, com uma incógnita x, onde o expoente desta incógnita era 1.

Exemplo: $x - 4 = 12$.

Já no caso das equações do 2° grau, o maior expoente da incógnita é 2. Para mostrar isto, Souza (2012, p. 28), cita uma situação que está associada a uma equação deste tipo:

Henrique cercou com uma tela um terreno em forma de quadrado cuja área é 169 m^2. Quantos metros de tela, Henrique utilizou?



Souza (2012) resolve da seguinte maneira: Inicialmente, tem de calcular quantos metros tem cada lado do terreno. Para isto, representa por x a medida do lado do terreno e escreve a equação:

$$x.x = 169$$

$$x^2 = 169$$

Note que a expressão $x^2 = 169$, o maior expoente da incógnita é 2. Diz então que essa é uma equação do 2° grau com uma incógnita. Resolvendo a expressão, temos que há dois números cujo quadrado é 169, isto é:

$$x = \pm\sqrt{169}$$

$$x = \pm 13$$

Nesse caso, x corresponde à medida do lado do terreno, que deve ser positiva. Portanto, a quantidade de tela utilizada para cercar o terreno é $4\,.\,13 = 52 \rightarrow 52m$.

Logo após este exemplo o autor define a forma de uma equação do 2° grau, sendo:

$ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais com $a \neq 0$. Essa igualdade é a forma reduzida de uma equação do 2° grau. Nela, a, b e c são os coeficientes, sendo a o coeficiente de x^2, b o coeficiente de x, e c o termo independente.

Em seguida o autor define as equações do 2° grau incompletas, como sendo aquelas que $c = 0$, $b = 0$, ou $b = c = 0$, sendo das seguintes formas: $ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$ e $ax^2 = 0$, respectivamente.

Para resolver as equações do 2º grau, o autor utiliza três métodos: *fatoração, completar quadrados ou formula resolutiva*.

- Fatoração

Exemplo: Determinar a solução de $x^2 - 14x + 49 = 9$, por fatoração.

Nessa equação, o 1° membro, é um trinômio quadrado perfeito (*expressões que podem ser escritas na forma* $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ *e* $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$. *Essas expressões são obtidas por meio do quadrado da soma ou diferença*). Assim, podemos escrevê-la da seguinte maneira:

$$x^2 - 14x + 49 = 9$$

$$(x-7).(x-7) = 9$$

$$(x-7)^2 = 9$$

Como há dois números cujo quadrado é igual a 9, temos:

$$x - 7 = +\sqrt{9}$$

$$x - 7 = 3$$

$$x - 7 + 7 = 3 + 7$$

$$x = 10$$

e,

$$x - 7 = -\sqrt{9}$$

$$x - 7 = -3$$

$$x - 7 + 7 = -3 + 7$$
$$x = 4$$

Portanto as raízes da equação são 4 e 10.

- Completar quadrados

Segundo Souza (2012, p. 35), existe equações do 2° grau em que o 1° membro não é um trinômio quadrado perfeito. Neste caso, para determinar as raízes da equação utiliza o método de completar quadrados.

Exemplo: Calcular as raízes de $x^2 + 8x + 7 = 0$, utilizando o método de completar quadrados.

Souza (2012) segue o seguinte método para calcular as raízes desta equação:

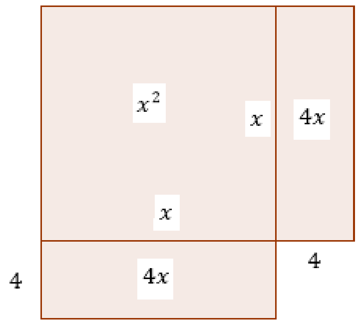
- Como o 1° membro dessa equação não é um trinômio quadrado perfeito, é preciso acrescentar um número apropriado aos dois membros da igualdade para poder fatorá-lo. Para isso, inicialmente isola o termo independente no 2° membro da equação.

$$x^2 + 8x + 7 - 7 = 0 - 7$$
$$x^2 + 8x = -7$$

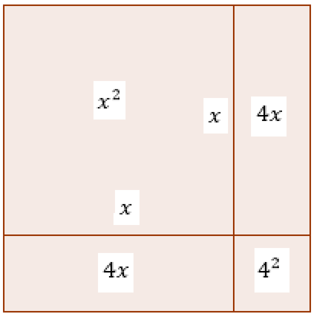
- Escreve o 1° membro da equação de maneira conveniente e o represente geometricamente, como mostra a figura.

$$x^2 + 8x = x^2 + 2.4.x$$

Onde x^2 é a área de um quadrado com lados medindo x, e $4.x$ é a área de um retângulo com lados medindo 4 e x.



- Observando a figura, pode notar que, para completa-la a fim de obter um quadrado, temos de acrescentar um quadrado com 4 unidades de lado.



Dessa forma, para obter um trinômio quadrado perfeito no 1° membro da equação, basta acrescentar 4^2 aos dois membros:

$$x^2 + 8x + 4^2 = -7 + 4^2$$

$$x^2 + 8x + 16 = 9$$

- Agora, basta fatorar o trinômio quadrado perfeito e resolver a equação:

$$x^2 + 8x + 16 = 9$$

$$(x + 4)^2 = 9$$

Logo,

$$x + 4 = +\sqrt{9}$$

$$x + 4 - 4 = 3 - 4$$

$$x = -1$$

e,

$$x + 4 = -\sqrt{9}$$

$$x + 4 - 4 = -3 - 4$$

$$x = -7$$

Portanto, as raízes da equação são -1 e -7.

- Fórmula resolutiva

Segundo Souza (2012, p. 36), outra maneira para resolver equação do 2° grau, chama-se fórmula resolutiva, que consiste na generalização do método de completar quadrados. Fórmula que no Brasil é conhecida como fórmula de Bhaskara. Que é a seguinte fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Veja como Souza (2012), mostra a dedução da fórmula resolutiva.

• Inicialmente, divide cada termo da equação do 2° grau $ax^2 + bx + c = 0$ por a. Depois, isola o termo independente do 2° membro.

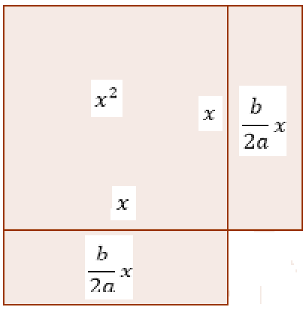
$$\frac{a}{a} \cdot x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x = -\frac{c}{a}$$

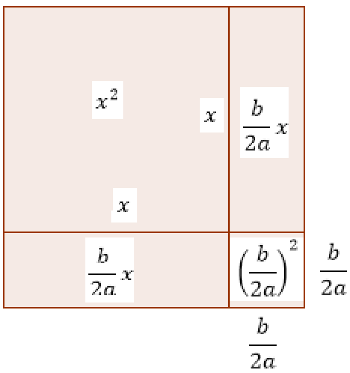
• Escreve o 1° membro da equação de maneira conveniente, e o represente geometricamente, como mostra a figura:

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x = x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x$$

Onde x^2é a área de um quadrado com os lados medindo x, e $\frac{b}{2a} \cdot x$ é a área de um retângulo com lados medindo x e $\frac{b}{2a}$.



• Observando a figura, pode notar que, para completa-la e obter um quadrado, tem que acrescentar um quadrado com $\frac{b}{2a}$ unidades de lado.



Dessa maneira, para obter um trinômio quadrado perfeito no 1° membro da equação, acrescenta $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ aos dois membros:

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Agora fatorando o trinômio quadrado perfeito e isolando a incógnita x no 1° membro.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Se $b^2 - 4ac$ for maior ou igual a zero, pode extrair a raiz quadrada nos dois membros da igualdade.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Onde $b^2 - 4ac$ é chamado discriminante e pode ser substituído por Δ. Tendo assim $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Portanto, a partir das observações feitas no livro Vontade de Saber Matemática, pode notar que os alunos são levados a resolver as equações do 2° grau através do método de completar quadrados, fornecido pelo árabe Al-Khowarizmi, da fórmula resolutiva fornecida pelos hindus e pela representação herdada dos europeus.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, podemos notar que o professor, ao ensinar “Equações do 2° Grau” aos alunos do Ensino Fundamental, não precisa ficar meramente preso ao livro didático utilizado pelo colégio. Pois, dentro do contexto histórico existem várias outras maneiras de resolver este tipo de equação.

Portanto, o professor deve buscar novas abordagens, além das citadas no livro didático; pois, muitas vezes o conteúdo ali apresentado não é suficiente para um bom aprendizado do aluno, visto que, este estudo de equações do 2° grau é o alicerce para o aluno poder entender melhor assuntos que serão tratados no Ensino Médio (função, por exemplo).

Enquanto concluinte do Curso de Licenciatura em Matemática, este trabalho contribuiu muito para reforçar que aspectos da História da Matemática podem ser utilizados na diversificação das abordagens dadas a um assunto matemático em sala de aula; e ampliar o conhecimento do professor, pois é um profissional que deve estar em contínua formação.

5 REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. **História da Matemática** /Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1999.

CASTELO, João Alfredo Montenegro. **Resoluções de equações quadráticas: um resgate histórico dos métodos e uma proposta de aplicação da *Sequência Fedathi* no seu ensino**. / Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado). Centro de Ciências, Departamento de Matemática: UFC, 2013. Disponível em: <http://www.repositorio.ufc.br/ri/bitstream/riufc/5454/1/2013_dis_jamcastelo.pdf#page43> Acesso em 09 de maio de 2016.

EVES, Howard, **Introdução à história da Matemática**, Campinas - SP: Editora da Unicamp, 3ª reimpressão, 2008.

FARAGO, Wagner da Cunha. **Uma abordagem histórica da equação do 2° grau**. / Revista do professor de matemática 43, 2000. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File?2010/veiculos_de_comunicacao/RPM/RPM43/RPM43_04.PDF> Acesso em 19 de abril de 2016.

MORGADO, J. **Equações do 2° grau ou equações quadráticas (um pouco da sua história)**. *Millenium*, *16*, 1999. Disponível em: <http://repositorio.ipv.pt/bitstream/10400.19/949/1/Equações%20do%202%20grau.pdf> Acesso em 09 de maio de 2016.

PEDROSO, Hermes Antônio. **Uma breve história da equação do 2° grau**. / Revista eletrônica de matemática, 2010. Disponível em: <http://www.matematicajatai.com/rematFiles/2-2010/eq2grau.pdf> Acesso em 19 de abril de 2016.

PITOMBEIRA, João Bosco. **Revisitando uma velha conhecida**, 2015. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/C2.pdf> Acesso em 09 de maio de 2016.

SOUZA, Joamir Roberto de. **Vontade de saber matemática, 9° ano** / Joamir Roberto de Souza, Patricia Rosana Moreno Pataro. – 2. ed. – São Paulo: FTD, 2012.