UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL

UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE CASSILÂNDIA

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

José Eduardo de Almeida Caetano

NÚMEROS COMPLEXOS

Cassilândia - MS

Novembro de 2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL

UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE CASSILÂNDIA

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

José Eduardo de Almeida Caetano

NÚMEROS COMPLEXOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - UEMS - Unidade de Cassilândia como requisito para obtenção do grau de licenciado em matemática.

Orientador: Prof. MSc. Adilson Lelis Nunes Júnior.

Cassilândia - MS

Novembro de 2016

C131n Caetano, José Eduardo de Almeida
Números complexos / José Eduardo de Almeida Caetano. Cassilândia, MS: UEMS, 2016.
193p. ; 30cm.

Monografia (Graduação) – Matemática – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2016.
Orientador: Prof. MSc. Adilson Lelis Nunes Júnior.

1. Números complexos 2. Operações 3. Teorema fundamental da álgebra 4. Corpo I. Título.

CDD 23.ed. 512.7

TERMO DE APROVAÇÃO

José Eduardo de Almeida Caetano

NÚMEROS COMPLEXOS

Trabalho de conclusão de curso aprovado como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática, na Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Unidade Universitária de Cassilândia, pela seguinte banca examinadora:

Prof. MSc. Adilson Lelis Nunes Júnior

Orientador

Profª. Dra. Ana Paula Cruz de Freitas

UEMS/ Cassilândia (MS)

Prof. Dr. Ailton Ribeiro de Oliveira

UEMS/ Cassilândia (MS)

Cassilândia, 23 de novembro de 2016

RESUMO

Este trabalho tem por finalidade mostrar a presença dos números complexos na Matemática. Primeiramente discutimos qual foi a necessidade do surgimento desses números, falando da evolução dos números naturais até os complexos. Falamos também das operações fundamentais sobre cada conjunto numérico e algumas de suas respectivas propriedades elementares. No conjunto dos números complexos, apresentamos as operações de potenciação e radiciação. Por fim, ilustramos a presença dos números complexos nas subáreas da matemática: Álgebra e Análise Matemática. Merece destaque o Teorema Fundamental da Álgebra, pois é através dele que podemos afirmar que o corpo dos números complexos é algebricamente fechado.

Palavras-Chave: números complexos, operações, teorema fundamental da álgebra, corpo.

ABSTRACT

This work aims to show the presence of complex numbers in Mathematics. First we discussed what was the need for the appearance of these numbers talking about the evolution of the natural numbers to the complex. We spoke also of the fundamental operations on each numeric set and some of their respective elemental properties. In the set of complex numbers, we present the potentiation and root extraction operations. Finally, we illustrate the presence of complex numbers on math subfields: Algebra and Mathematical Analysis. It's noteworthy the Fundamental Theorem of Algebra, because it is through him that we can say that the field of complex numbers is algebraically closed.

Keywords: complex numbers, operations, fundamental theorem of algebra, field.

Sumário

Lista de Símbolos **vii**

Introdução **ix**

1 A Evolução dos Números **1**

1.1 Os Números Naturais 1

1.1.1 Operações fundamentais com os Números Naturais 3

1.2 Os Números Inteiros 13

1.2.1 Operações fundamentais com os Números Inteiros 14

1.3 Os Números Racionais 31

1.3.1 Operações fundamentais com os Números Racionais 32

1.4 Os Números Irracionais 52

1.4.1 Operações fundamentais com os Números Irracionais 53

1.5 Os Números Reais 54

1.5.1 Operações fundamentais com os Números Reais 55

2 Os Números Complexos **62**

2.1 O Surgimento dos Números Complexos 62

2.2 Operações Fundamentais com os Números
Complexos 65

2.2.1 Adição 65

2.2.2 Subtração 71
2.2.3 Multiplicação 77
2.2.4 Divisão 89
2.3 Forma Trigonométrica de um Número Complexo 107
2.3.1 Módulo e Argumento de um Número Complexo 107
2.3.2 Forma Trigonométrica 109
2.3.3 Operações com os Números Complexos na Forma Trigonométrica 110
2.4 A Exponencial 133
2.5 Representações Geométricas dos Números Complexos 140
2.5.1 Interpretação Vetorial dos Números Complexos 144
2.5.2 Representação Esférica dos Números Complexos 152

3 Os Números Complexos em Álgebra e Análise Matemática 154

3.1 Os Números Complexos em Álgebra 154
3.1.1 Os Números Complexos em Álgebra Linear 154
3.1.2 Os Números Complexos em Álgebra Moderna 164
3.2 Os Números Complexos em Análise Matemática 174
3.2.1 Funções de uma Variável Complexa 174

Considerações Finais 181

Lista de Símbolos

$+$	Sinal de adição
$-$	Sinal de subtração
$\cdot$	Sinal de multiplicação
$\div$	Sinal de divisão
$=$	Sinal de igualdade
$\neq$	Sinal de diferença
$\geq$	Sinal de desigualdade: maior ou igual
$\leq$	Sinal de desigualdade: menor ou igual
$>$	Sinal de desigualdade estrita: maior que
$<$	Sinal de desigualdade estrita: menor que
$\pm$	Sinal de mais ou menos
$\mp$	Sinal de menos ou mais
$\Longleftrightarrow$	Sinal de equivalência
$\Longrightarrow$	Sinal de implicação
$\in$	Sinal de pertinência
$\notin$	Sinal da negação de pertinência

$\subset$	Sinal de inclusão
$\cup$	Sinal de união de conjuntos
$\cap$	Sinal de intersecção de conjuntos
$\emptyset$	Sinal de conjunto vazio
$\forall$	Sinal de quantificador universal
$Min\ A$	Mínimo do conjunto A
$\mid$	Sinal de divisibilidade
$\nmid$	Sinal da negação de uma divisibilidade
$\exists$	Sinal de quantificador existencial
$\lvert\ \rvert$	Sinal de valor absoluto, ou módulo, de um número
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	Conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$\mathbb{I}$	Conjunto dos números irracionais
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	Conjunto dos números complexos
$\mathbb{N}^*$	Conjunto dos números naturais exceto o zero
$\mathbb{Z}^*$	Conjunto dos números inteiros exceto o zero
$\mathbb{Q}^*$	Conjunto dos números racionais exceto o zero
$\mathbb{R}^*$	Conjunto dos números reais exceto o zero
$\mathbb{C}^*$	Conjunto dos números complexos exceto o zero

Introdução

Na idade média, os matemáticos da época consideravam equações do tipo $x^2+3=0$ como equações sem solução, pois não havia como calcular raízes quadradas de números negativos.

Porém, o matemático italiano Girolamo Cardano, durante o século XVI, publicou a fórmula geral para resolver equações do terceiro grau. Aplicando esta fórmula na equação $x^3 = 15x + 4$, ele encontrou três raízes, sendo uma dessas um número real e as outras duas, raízes contendo a raíz quadrada de um número negativo. Assim, surgiam os números complexos, que é o objeto de estudo deste trabalho.

Desta forma, falaremos sobre os números complexos com mais detalhes em comparação ao que dissemos sobre os demais conjuntos numéricos. Com a intenção de mostrar a presença dos números complexos na Matemática, não aprofundamos em nenhum assunto.

Dividimos este trabalho em três capítulos: no primeiro capítulo, mostramos o surgimento de cada conjunto numérico, as operações fundamentais definidas em cada um e algumas de suas respectivas propriedades elementares, com exceção do conjunto dos números complexos. No segundo capítulo, falamos sobre o surgimento dos números complexos, estudamos as operações fundamentais envolvendo estes números, incluindo a potenciação e a radiciação, e algumas propriedades elementares dessas operações. Em seguida, apresentamos algumas representações geométricas dos números complexos. No terceiro capítulo, ilustramos a presença dos números complexos nas subáreas:

Álgebra e Análise Matemática.

Esperamos que este trabalho seja útil para o leitor interessado em conhecer mais sobre os números complexos.

Capítulo 1

A Evolução dos Números

Neste capítulo introduziremos os números, desde os números naturais até os números reais. Falaremos do surgimento de cada um destes conjuntos numéricos e suas respectivas operações fundamentais, incluindo as propriedades elementares de cada operação.

No desenvolvimento deste capítulo foram utilizadas as referências [1], [5], [6], [9] e [10].

1.1 Os Números Naturais

Supõe-se que tudo começou com o desenvolvimento de algumas atividades, como a criação de animais, o cultivo da terra e a organização em grupos. Assim surgiu na humanidade o sentimento de prioridade.

Contar foi consequência da necessidade de saber quanto possuía cada um. Usar pedrinhas, fazer marcas em ossos ou em pedaços de madeira foram, provavelmente, as primeiras formas de contagem de um rebanho de ovelhas, por exemplo. No entanto, quanto mais crescia um rebanho, maior era a dificuldade de fazer uma marca para cada ovelha.

Assim, em algum momento da história, o homem criou símbolos para representar quantidades e inventou regras de como usá-los para escrever números. Algumas civilizações antigas, como por exemplo os egípcios, babilônios e os romanos, criaram seu próprio sistema de numeração, mas estes sistemas de numeração não eram práticos para efetuar cálculos, até que os hindus desenvolveram um sistema de numeração que estabelecia a ideia de posição e utilizava grupos de dez.

A partir do século VIII, os árabes passaram a adotar o sistema de numeração Hindu, por ser prático e facilitar os cálculos. Quando povoaram o norte da áfrica e parte da Espanha, os árabes ocidentais introduziram os símbolos hindus, que deram origem aos símbolos que conhecemos hoje, os símbolos indo-arábicos, e ao sistema de numeração conhecido como sistema de numeração decimal.

A denominação indo-arábico deve-se ao fato de os símbolos e regras que regem esse sistema terem sido criados pelos hindus e aperfeiçoados e divulgados pelos árabes. Neste sistema, são usados dez símbolos: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Algumas características importantes do nosso sistema de numeração:

- Com apenas 10 símbolos (mencionados acima) pode-se escrever qualquer número, por maior que seja;
- O sistema decimal é de base 10, já que os agrupamentos são feitos de dez em dez.
- O sistema decimal é posicional porque, dependendo da posição que ocupa no número, o mesmo símbolo pode representar valores diferentes. Exemplo: 323 tem o algarismo 3 com valor posicional trezentos e valor posicional três.
- O sistema indo-arábico utiliza o zero para indicar uma "casa vazia"dentre os agrupamentos de dez do número considerado.
- O sistema decimal é multiplicativo, porque um algarismo escrito à esquerda de outro vale dez vezes o valor posicional que teria se estivesse ocupando a posição desse outro. Exemplo: $666 = 6 \times 100 + 6 \times 10 + 6$.

Iniciando pelo zero e acrescentando sempre uma unidade, teremos os números naturais. Os números naturais constituem um conjunto numérico denominado conjunto dos números naturais, que se indica pelo símbolo $\mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \ldots\}$$

Quando se exclui o zero do conjunto $\mathbb{N}$, temos o conjunto dos números naturais não-nulos, indicados por $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

1.1.1 Operações fundamentais com os Números Naturais

Adição

A primeira operação fundamental da Aritmética tem por finalidade reunir em um só número todas as unidades de dois números. Esta operação é chamada de adição. Antes de surgir os algarismos indo-arábicos a adição de dois números naturais podia ser realizada através de instrumentos de cálculos antigos como, por exemplo, o ábaco.

A operação de adição é indicada pelo símbolo $+$. O composto $x + y$, onde $x, y \in \mathbb{N}$, é chamado de soma e os termos x e y são chamados de parcelas. É importante observar que a soma $x+y$ é o resultado da operação de adição dos dois números naturais x e y.

A adição em $\mathbb{N}$ possui as seguintes propriedades elementares:

$A_{\mathbb{N}1}$) **(Associativa)** Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{N}$, $(x + y) + z = x + (y + z)$.

Exemplo 1.1.1. Note que $(2 + 3) + 5 = 2 + (3 + 5)$. De fato,

$$(2 + 3) + 5 = 5 + 5 = 10 \quad \text{e} \quad 2 + (3 + 5) = 2 + 8 = 10.$$

$A_{\mathbb{N}2}$) **(Comutativa)** Para todo $x, y \in \mathbb{N}$, $\quad x + y = y + x$.

Exemplo 1.1.2. Note que 4 + 1 = 1 + 4 = 5.

$A_{\mathbb{N}3}$) **(Elemento neutro)** O elemento neutro para a adição em $\mathbb{N}$ é o zero, isto é,

$$x + 0 = 0 + x = x, \quad \forall\, x \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 1.1.3. Temos 2 + 0 = 0 + 2 = 2.

$A_{\mathbb{N}4}$) **(Elementos regulares)** Todos os números naturais são regulares para a adição, isto é, $\forall\, x, y, a \in \mathbb{N}$, com a fixo, temos

$$a + x = a + y \Longrightarrow x = y \quad \text{e} \quad x + a = y + a \Longrightarrow x = y.$$

Exemplo 1.1.4. Temos $\forall\, x, y \in \mathbb{N}$,

$$1 + x = 1 + y \Longrightarrow x = y \quad \text{e} \quad x + 1 = y + 1 \Longrightarrow x = y.$$

Logo, o número natural 1 é regular para a adição.

Lembremos que o simétrico de um número x em relação a adição é o oposto de x, isto é, $-x$, e que no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais o único elemento simetrizável para a adição é o zero. Note que -0 = 0. De fato, temos 0 + 0 = 0.

Subtração

A subtração é a operação inversa da adição, em que se calcula a diferença entre dois números. O primeiro termo da subtração é chamado minuendo, e o segundo, subtraendo. A operação de subtração é indicada pelo símbolo - .

O composto $x - y$, onde $x, y \in \mathbb{N}$, indica uma subtração, em que o x é o minuendo e o y, o subtraendo. O composto $x - y$ é chamado de diferença, que é o resultado da subtração dos números x e y.

É importante mencionar que, na subtração em $\mathbb{N}$, o minuendo nunca poderá ser menor que o subtraendo, pois caso contrário a diferença não será um número natural. Nesse sentido dizemos que o conjunto $\mathbb{N}$ não é fechado para a subtração.

Contra-exemplo 1.1.1. A diferença 3 - 5 não está definida em $\mathbb{N}$, porque, como veremos na subseção 1.2.1 sobre os números inteiros, ela é igual a (-2), que não é um número natural.

A subtração em $\mathbb{N}$ não possui a propriedade associativa, pois em geral, $(x - y) - z \neq x - (y - z)$, para $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.1.5. Observe que (3 - 2) - 1 $\neq$ 3 - (2 - 1). De fato,
(3 - 2) - 1 = 1 - 1 = 0   e   3 - (2 - 1) = 3 - 1 = 2.

A subtração em $\mathbb{N}$ não possui a propriedade comutativa, pois, para quaisquer $x, y \in \mathbb{N}$, com $x \neq y$, temos $x - y \neq y - x$. Note que neste caso uma das diferenças $x - y$ e $y - x$ nunca estará definida em $\mathbb{N}$. De fato, sendo $x \neq y$, teremos $x > y$ ou $y > x$. Assim, ou $y - x$ não estará definida em $\mathbb{N}$ ou $x - y$ não estará definida em $\mathbb{N}$, respectivamente.

Exemplo 1.1.6. Temos 3 - 1 $\neq$ 1 - 3. Observe que 3 - 1 = 2 e a diferença
1 - 3 não estará definida em $\mathbb{N}$.

A subtração em $\mathbb{N}$ não possui elemento neutro, isto é, não existe um número $e \in \mathbb{N}$ que verifica simultaneamente as duas igualdades

$$e - x = x \quad \text{e} \quad x - e = x, \forall\, x \in \mathbb{N}.$$

O número natural zero satisfaz apenas a segunda igualdade, ou seja, ele é apenas o elemento neutro à direita para a operação de subtração em $\mathbb{N}$.

Lembrando que um número natural x é simetrizável para a subtração em $\mathbb{N}$ quando existe um número natural y de modo que $x - y = y - x = e$, onde e é o elemento neutro para a subtração em $\mathbb{N}$, logo podemos afirmar que nenhum número natural é simetrizável para a subtração porque esta não admite um elemento neutro.

Sobre a questão dos números naturais serem ou não serem regulares para a subtração, o que podemos afirmar é que $\forall\, x, y, a \in \mathbb{N}$, com a fixo, desde que as subtrações estejam definidas em $\mathbb{N}$, temos

$$a - x = a - y \Longrightarrow x = y \quad \text{e} \quad x - a = y - a \Longrightarrow x = y.$$

Exemplo 1.1.7. Observe que $\forall\, x, y \in \mathbb{N}$, desde que as subtrações estejam definidas em $\mathbb{N}$, temos

$$4 - x = 4 - y \Longrightarrow x = y \quad \text{e} \quad x - 4 = y - 4 \Longrightarrow x = y.$$

Assim, o natural 4 é regular para a subtração.

Verificaremos agora se a subtração em $\mathbb{N}$ possui a propriedade distributiva. Não verificamos para a adição pois esta propriedade requer duas operações sobre o mesmo conjunto. Lembrando que para uma operação $*$ ser distributiva em relação à uma outra operação $\triangle$, sendo estas duas operações sobre um conjunto E qualquer, é necessário verificar as duas condições abaixo:

$$x * (y \triangle z) = (x * y) \triangle (x * z) \quad (1.1)$$

e

$$(y \triangle z) * x = (y * x) \triangle (z * x) \quad (1.2)$$

para quaisquer $x, y, z \in E$. Se uma operação $*$ verificar apenas a condição (1.1) em relação à outra operação $\triangle$, então dizemos que $*$ é distributiva à esquerda de $\triangle$, e se verificar apenas a condição (1.2), então $*$ é distributiva à direita de $\triangle$. Se a operação $*$ for comutativa, basta verificar uma das condições, pois se uma for válida a outra também será.

A subtração não é distributiva em relação a adição, ambas definidas em $\mathbb{N}$, e vice-versa.

Exemplo 1.1.8. Note que 6 - (3 + 1) $\neq$ (6 - 3) + (6 - 1). De fato,
6 - (3 + 1) = 6 - 4 = 2 e (6 - 3) + (6 - 1) = 3 + 5 = 8. Assim concluímos que a subtração não é distributiva em relação a adição.

Exemplo 1.1.9. Observe que 5 + (2 - 1) $\neq$ (5 + 2) - (5 + 1). De fato,
5 + (2 - 1) = 5 + 1 = 6 e (5 + 2) - (5 + 1) = 7 - 6 = 1. Logo, a adição não é distributiva em relação a subtração.

Multiplicação

A multiplicação pode ser definida como a soma de várias parcelas iguais. A operação de multiplicação é indicada pelo símbolo $\times$ ou $\cdot$.

Assim, o composto $x \cdot y$ (ou $x \times y$), com $x, y \in \mathbb{N}$, indica uma multiplicação. Os termos x e y deste composto são denominados fatores, onde x é o primeiro fator (ou fator da esquerda) e y é o segundo fator (ou fator da direita).

O primeiro fator x é chamado de multiplicando e o segundo fator y é chamado de multiplicador. O resultado da multiplicação é denominado produto.

Desta forma, se $x \cdot y = z$, com $x, y, z \in \mathbb{N}$, então z é o produto de x por y.

A multiplicação em $\mathbb{N}$ possui as seguintes propriedades elementares:

$\mathrm{M}_{\mathbb{N}1}$) **(Associativa)** Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{N}$, $\;(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

Exemplo 1.1.10. Observe que $(3 \cdot 2) \cdot 6 = 3 \cdot (2 \cdot 6)$ De fato,

$$(3 \cdot 2) \cdot 6 = 6 \cdot 6 = 36 \;\text{ e }\; 3 \cdot (2 \cdot 6) = 3 \cdot 12 = 36.$$

$\mathrm{M}_{\mathbb{N}2}$) **(Comutativa)** Para todo $x, y \in \mathbb{N}$, $\;x \cdot y = y \cdot x$.

Exemplo 1.1.11. Note que $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3 = 21$.

$\mathrm{M}_{\mathbb{N}3}$) **(Elemento neutro)** O elemento neutro para a multiplicação sobre $\mathbb{N}$ é o 1, isto é, $\;x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, $\forall\, x \in \mathbb{N}$.

Exemplo 1.1.12. Veja que $14 \cdot 1 = 1 \cdot 14 = 14$.

$\mathrm{M}_{\mathbb{N}4}$) **(Elementos regulares)** Todos os números naturais não-nulos são regulares para a multiplicação, isto é, $\forall\, x, y, a \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$ fixo, temos

$$a \cdot x = a \cdot y \Longrightarrow x = y \quad \text{e} \quad x \cdot a = y \cdot a \Longrightarrow x = y.$$

Exemplo 1.1.13. Temos $\forall\, x, y \in \mathbb{N}$,

$$2 \cdot x = 2 \cdot y \Longrightarrow x = y \quad \text{e} \quad x \cdot 2 = y \cdot 2 \Longrightarrow x = y.$$

Logo, o número natural 2 é regular para a multiplicação.

$\mathrm{M}_{\mathbb{N}5}$) **(Distributiva da multiplicação em relação à adição)** A multiplicação é distributiva em relação a adição, isto é, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{N}$,

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z \quad \text{e} \quad (y+z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

Exemplo 1.1.14. Veja que $2 \cdot (3+1) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1$. De fato,

$$2 \cdot (3+1) = 2 \cdot 4 = 8 \quad \text{e} \quad 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 6 + 2 = 8.$$

Assim concluímos que a multiplicação é distributiva à esquerda em relação a adição. Note que a operação de multiplicação sobre $\mathbb{N}$ admite a propriedade comutativa, como vimos na propriedade M_2). Logo, a multiplicação também será distributiva à direita em relação a adição, ou seja, $(3+1) \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 2$.

$\mathrm{M}_{\mathbb{N}6}$) **(Distributiva da multiplicação em relação à subtração)** Quanto a distributividade da multiplicação em relação à subtração, podemos afirmar que, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{N}$, desde que as diferenças estejam definidas em $\mathbb{N}$,

$$x \cdot (y-z) = x \cdot y - x \cdot z \quad \text{e} \quad (y-z) \cdot x = y \cdot x - z \cdot x.$$

Exemplo 1.1.15. Observe que $3 \cdot (5-2) = 3 \cdot 5 - 3 \cdot 2$. De fato, $3 \cdot (5-2) = 3 \cdot 3 = 9$ e $3 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 15 - 6 = 9$. Analogamente verificamos que $(5-2) \cdot 3 = 5 \cdot 3 - 2 \cdot 3$. Assim, podemos concluir que $3 \cdot (5-2) = 3 \cdot 5 - 3 \cdot 2$.

Vale ressaltar que o simétrico de um número x qualquer em relação a multiplicação é chamado de inverso de x, e indicado por x^{-1} ou $\dfrac{1}{x}$.

Como veremos na subseção 1.3.1, esta é uma propriedade válida para a multiplicação somente a partir dos números racionais. No conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, o único elemento simetrizável para a multiplicação é o 1. Note que $\dfrac{1}{1} = 1$. De fato, temos $1 \cdot 1 = 1$.

Contra-exemplo 1.1.2. O número natural 3 não possui um inverso em $\mathbb{N}$. O inverso de 3 é $\dfrac{1}{3}$, que é um número racional.

Divisão

Quando precisamos dividir uma quantidade em partes iguais, utilizamos a operação de divisão. A operação de divisão é indicada pelo símbolo $\div$ ou : . O primeiro termo de uma divisão é chamado de dividendo e o segundo, de divisor.

Desta forma, o composto $x \div y$, que também pode ser representado por $x : y$, indica uma divisão, em que o x é o dividendo e o y é o divisor. É importante ressaltar que o divisor deve ser diferente de zero, pois, caso contrário, a divisão não estará definida.

Quando dividimos um número natural x por um número natural não nulo y, esta divisão produz outros dois números naturais, um quociente q e um resto r, que, segundo o algoritmo da divisão, conforme veremos detalhadamente na subseção 1.2.1, verificam as condições $x = y \cdot q + r$, $0 \leq r < y$.

Quando o resto na divisão de x por y for igual a zero, $r = 0$, dizemos que a divisão é exata. Neste caso temos $x = y \cdot q$. Quando isto ocorre dizemos que o dividendo x é um múltiplo natural de y, ou simplesmente, que x é um múltiplo de y.

No caso em que a divisão de um número natural qualquer x por um número natural não nulo y é exata, geralmente indicamos o quociente sob a forma $\frac{x}{y}$.

Exemplo 1.1.16. A divisão de 9 por 3 é exata, isto é, o resto é igual a zero. De fato, $9 = 3 \cdot 3$. Note que o quociente é igual a 3.

Exemplo 1.1.17. A divisão de 7 por 4 não é exata. Observe que $7 = 4 \cdot 1 + 3$. Neste caso, o quociente é igual a 1 e o resto é igual a 3.

A divisão sobre $\mathbb{N}$ não possui a propriedade associativa, pois em geral,

$$(x \div y) \div z \neq x \div (y \div z), \text{ para } x, y, z \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 1.1.18. Veja que $(8 \div 4) \div 2 \neq 8 \div (4 \div 2)$. De fato,

$$(8 \div 4) \div 2 = 2 \div 2 = 1 \text{ e } 8 \div (4 \div 2) = 8 \div 2 = 4.$$

A divisão sobre $\mathbb{N}$ não possui a propriedade comutativa, pois, $\forall\, x, y \in \mathbb{N}$, com $x \neq y$,

$$x \div y \neq y \div x.$$

Exemplo 1.1.19. Note que $6 \div 3 \neq 3 \div 6$. De fato, a divisão $6 \div 3$ é exata. Neste caso o quociente é 2 e o resto é 0. Por outro lado, a divisão $3 \div 6$ não é exata. Nesta divisão o quociente é 0 e o resto é 3.

A divisão sobre $\mathbb{N}$ não possui elemento neutro, isto é, não existe um número $e \in \mathbb{N}$ que verifica simultaneamente as duas igualdades

$$e \div x = x \quad \text{e} \quad x \div e = x, \quad \forall\, x \in \mathbb{N}.$$

O número natural 1 satisfaz apenas a segunda igualdade, ou seja, ele é apenas o elemento neutro à direita para a operação de divisão em $\mathbb{N}$.

Lembrando que um número natural x é simetrizável para a divisão em $\mathbb{N}$ quando existe um número natural y de modo que $x \div y = y \div x = e$, onde e é o elemento neutro para a divisão em $\mathbb{N}$. Logo podemos afirmar que nenhum número natural é simetrizável para a divisão porque, como vimos acima, esta não admite um elemento neutro.

Sobre a questão da regularidade dos números naturais para a divisão, o que podemos afirmar é que $\forall\, a, x, y \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$ fixo, desde que as divisões estejam definidas em $\mathbb{N}$, temos

$$a \div x = a \div y \Longrightarrow x = y \quad \text{e} \quad x \div a = y \div a \Longrightarrow x = y.$$

Exemplo 1.1.20. Note que $\forall\, x, y \in \mathbb{N}$, desde que as divisões estejam definidas em $\mathbb{N}$, temos

$$12 \div x = 12 \div y \Longrightarrow x = y \quad \text{e} \quad x \div 12 = y \div 12 \Longrightarrow x = y.$$

Assim, o natural 12 é regular para a divisão.

A divisão não é distributiva em relação a adição, subtração e multiplicação, todas definidas em $\mathbb{N}$, e vice-versa.

Contra-exemplo 1.1.3. Observe que $30 \div (2+3) \neq (30 \div 2) + (30 \div 3)$. De fato, $30 \div (2+3) = 30 \div 5 = 6$ e $(30 \div 2) + (30 \div 3) = 15 + 10 = 25$; o que verifica que a divisão não é distributiva em relação a adição.

Contra-exemplo 1.1.4. Veja que $1 + (8 \div 2) \neq (1+8) \div (1+2)$. De fato, $1 + (8 \div 2) = 1 + 4 = 5$ e $(1+8) \div (1+2) = 9 \div 3 = 3$; o que verifica que a adição não é distributiva em relação a divisão.

Contra-exemplo 1.1.5. Note que $24 \div (6-2) \neq (24 \div 6) - (24 \div 2)$. De fato, $24 \div (6-2) = 24 \div 4 = 6$ e $(24 \div 6) - (24 \div 2)$ não está definida em $\mathbb{N}$. Logo a divisão não é distributiva em relação a subtração.

Contra-exemplo 1.1.6. Observe que $8 - (4 \div 2) \neq (8-4) \div (8-2)$. De fato, $8 - (4 \div 2) = 8 - 2 = 6$ e $(8-4) \div (8-2)$ não está definida em $\mathbb{N}$. Assim concluímos que a subtração não é distributiva em relação a divisão.

Contra-exemplo 1.1.7. Veja que $12 \div (2 \cdot 3) \neq (12 \div 2) \cdot (12 \div 3)$. De fato, $12 \div (2 \cdot 3) = 12 \div 6 = 2$ e $(12 \div 2) \cdot (12 \div 3) = 6 \cdot 4 = 24$. Assim, a divisão não é distributiva em relação a multiplicação.

Contra-exemplo 1.1.8. Note que $3 \cdot (6 \div 3) \neq (3 \cdot 6) \div (3 \cdot 3)$. De fato, $3 \cdot (6 \div 3) = 3 \cdot 2 = 6$ e $(3 \cdot 6) \div (3 \cdot 3) = 18 \div 9 = 2$. Desta forma, a multiplicação não é distributiva em relação a divisão.

1.2 Os Números Inteiros

Ao longo da história podemos observar o avanço da Matemática. A necessidade de contar e relacionar quantidades fez com que o homem desenvolvesse símbolos no intuito de expressar inúmeras situações. Diversos sistemas de numeração foram criados em todo o mundo no decorrer dos tempos, sendo os mais antigos originários do Egito, Suméria e Babilônia. Podemos também citar outros sistemas de numeração bastante conhecidos, como o Chinês, o Maia, o Grego, o Romano, o Indiano e o Arábico.

O Homem criava situações interessantes na contagem de seus objetos, animais e etc. Ao levar seu rebanho para a pastagem ele relacionava uma pedra a cada animal, e no momento em que ele recolhia os animais fazia a relação inversa, uma vez que no caso de sobrar alguma pedra poderia verificar a falta de algum animal.

Mas o homem buscava algo mais concreto que representasse de uma forma mais simples tais situações. O surgimento dos números naturais $(0, 1, 2, 3, 4, \ldots)$ revolucionou o método de contagem, pois relacionava símbolos (números) e determinadas quantidades.

Com o início do Renascimento surgiu a expansão comercial, que aumentou a circulação de dinheiro, obrigando os comerciantes a expressarem situações envolvendo lucros e prejuízos. A maneira que eles encontraram de resolver tais situações-problemas consistia no uso dos símbolos $+$ e - .

Suponha que um comerciante tenha três sacas de arroz de 10kg cada em seu armazém. Se ele vendesse 5kg de arroz, escreveria o número 5 acompanhado do sinal - ; se ele comprasse 7kg de arroz, escreveria o numeral 7 acompanhado do sinal $+$.

Utilizando essa nova simbologia, os matemáticos da época desenvolveram técnicas operatórias capazes de expressar qualquer situação envolvendo números positivos e negativos. Assim surgia um novo conjunto numérico, chamado de conjunto dos números inteiros, sendo formado pelos números naturais e seus respectivos opostos.

O conjunto de todos os números inteiros é representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$.

Este símbolo foi escolhido devido a letra Z da palavra em alemão Zahl, que significa número.

Assim,

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Quando se exclui o zero do conjunto $\mathbb{Z}$, temos o conjunto dos números inteiros não-nulos, indicado por $\mathbb{Z}^*$:

$$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \ldots\}$$

Portanto, temos a inclusão $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

1.2.1 Operações fundamentais com os Números Inteiros

Adição

Conforme vimos na seção 1.2 o conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é uma extensão do conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais.

Com a adição definida nesses conjuntos a situação não é diferente, isto é, a adição definida em $\mathbb{Z}$ é uma extensão, ou generalização, da adição definida em $\mathbb{N}$. Dessa forma a adição em $\mathbb{Z}$ herda todas as propriedades da adição em $\mathbb{N}$.

Note que para a adição em $\mathbb{Z}$, ao contrário da adição em $\mathbb{N}$, todos os elementos são simetrizáveis, isto é, todo inteiro possui um oposto, que também é um número inteiro. Simbolicamente, $\forall\ x \in \mathbb{Z},\ \exists\ (-x) \in \mathbb{Z}$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

Exemplo 1.2.1. O inteiro 2 é simetrizável em relação a adição em $\mathbb{Z}$, isto é, o inteiro 2 possui um simétrico em relação a adição em $\mathbb{Z}$. Este simétrico, que também é chamado de oposto de 2, é o inteiro (-2). Note que 2 + (-2) = (-2) + 2 = 0.

Subtração

Vimos na subtração em $\mathbb{N}$ que a diferença entre dois números poderia ser calculada se o minuendo fosse maior que o subtraendo, já que no caso contrário o resultado seria um número não natural.

No conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros não é necessário que o minuendo seja maior que o subtraendo. Assim, $\forall\ x, y \in \mathbb{Z},\ \ x - y \in \mathbb{Z}$. Por isto é que dizemos que o conjunto $\mathbb{Z}$ é fechado para a subtração.

Exemplo 1.2.2. Temos 3, 7 $\in \mathbb{Z}$, com 3 $<$ 7, e no entanto 3 - 7 $=$ -4 $\in \mathbb{Z}$.

Podemos dizer também que a subtração em $\mathbb{Z}$ pode ser vista como uma adição do minuendo com o oposto do subtraendo.

Exemplo 1.2.3. Note que 3 - 7 $=$ 3 $+$ (-7) $=$ -4.

As propriedades elementares que não são válidas para a subtração em $\mathbb{N}$ também não são válidas para a subtração em $\mathbb{Z}$.

Em $\mathbb{Z}$, ao contrário de $\mathbb{N}$, a subtração sempre estará definida, porque o conjunto $\mathbb{Z}$ é fechado para a mesma. Dessa forma, levando em consideração o que vimos para a subtração em $\mathbb{N}$, na subseção 1.1.1, dentre as propriedades elementares estudadas, a única propriedade elementar válida para a subtração em $\mathbb{Z}$ é:

$S_{\mathbb{Z}1}$) **(Elementos regulares)** Para quaisquer $x, y, a \in \mathbb{Z}$, com a fixo, temos

$$a - x = a - y \Longrightarrow x = y \quad \text{e} \quad x - a = y - a \Longrightarrow x = y.$$

Pela validade da propriedade elementar $S_{\mathbb{Z}1}$) é que dizemos que todo número inteiro é regular para a subtração em $\mathbb{Z}$.

Exemplo 1.2.4. Veja que $\forall\ x, y \in \mathbb{Z}$, temos

$$-3 - x = -3 - y \Longrightarrow x = y \qquad \text{e} \qquad x - (-3) = y - (-3) \Longrightarrow x = y.$$

Logo, o inteiro (-3) é regular para a subtração.

O zero é o elemento neutro para a subtração em $\mathbb{Z}$ apenas à direita. De fato, $\forall\ x \in \mathbb{Z},\ x - 0 = x,$ porém $0 - x = -x \neq x,$ exceto para o caso em que $x = 0$.

Observe que em $\mathbb{N}$ concluímos que o zero não é o elemento neutro à esquerda para a subtração simplesmente pelo fato de que a subtração $0 - x$ não está definida, para qualquer x natural não-nulo. Já em $\mathbb{Z}$, esta subtração está definida porém, em geral, $0 - x \neq x$.

Multiplicação

Na multiplicação em $\mathbb{Z}$, quando os fatores x e y são ambos inteiros positivos ou negativos, o produto $x \cdot y$ é sempre um inteiro positivo, ao passo que se os fatores x e y são inteiros de sinais contrários, o produto $x \cdot y$ é sempre um inteiro negativo. Já no caso em que um dos fatores x ou y é igual a zero, o produto $x \cdot y$ sempre será igual a zero.

Exemplo 1.2.5. Na multiplicação onde os fatores são os inteiros positivos 2 e 5, o produto é o inteiro positivo 10.

Exemplo 1.2.6. Na multiplicação onde os fatores são os inteiros negativos (-3) e (-7), o produto é o inteiro positivo 21.

Exemplo 1.2.7. Na multiplicação onde os fatores são os inteiros de sinais contrários (-5) e 7, o produto é o inteiro negativo (-35).

Exemplo 1.2.8. Na multiplicação onde os fatores são 0 e 9, o produto é igual a 0.

A multiplicação em $\mathbb{Z}$, assim como em $\mathbb{N}$, é associativa, comutativa, tem elemento neutro, que também é o número 1, e é distributiva tanto em relação a adição quanto em relação a subtração. Além disso, da mesma forma que em $\mathbb{N}$, o único inteiro que não é regular para a multiplicação é o zero.

Os únicos inteiros cujos inversos também são números inteiros são (+1) e (-1). Os inversos desses inteiros são eles mesmos.

Divisão

Sejam x e y dois inteiros, com $x \neq 0$. Diz-se que x divide y se e somente se existe um inteiro q tal que $y = x \cdot q$.

Se x divide y então também podemos dizer que x é um divisor de y, que y é um múltiplo de x, que x é um fator de y ou que y é divisível por x.

É importante observar a sutil diferença entre o emprego da palavra divisor aqui e na subseção 1.1.1, sobre $\mathbb{N}$.

Nesta subseção dissemos que x é um divisor de y, significando que x divide y, ou seja, que na divisão de y por x o resto é igual a zero. Já na subseção 1.1.1, o que dissemos foi que na divisão de y por x, o elemento x é denominado divisor, ou seja, que no composto $y \div x$ o segundo termo x é chamado de divisor. Note que neste último caso o resto da divisão de y por x não é necessariamente igual a zero.

Indicamos por $x \mid y$ quando $x \neq 0$ divide y, e $x \nmid y$ quando $x \neq 0$ não divide y. Esta relação denomina-se relação de divisibilidade em $\mathbb{Z}$.

Se x é um divisor de y, então $-x$ também é um divisor de y, porque a igualdade $y = x \cdot q$ é equivalente a $y = (-x) \cdot (-q)$, de modo que os divisores de um inteiro qualquer são dois a dois iguais em valor absoluto e de sinais opostos (simétricos).

Exemplo 1.2.9. Note que $4 \mid 12$, pois $12 = 4 \cdot 3$.

Exemplo 1.2.10. Veja que $2 \nmid 7$, porque não existe um q inteiro que satisfaça a igualdade $7 = 2 \cdot q$.

A divisibilidade em $\mathbb{Z}$ possui as seguintes propriedades:

Propriedade 1.2.1. Para qualquer inteiro não-nulo x, $\quad x \mid 0$ e $x \mid x$.

Demonstração. A verificação desta propriedade é imediata. Basta notar que, $\forall\, x \in \mathbb{Z}^*$, $0 = x \cdot 0 \quad$ e $\quad x = x \cdot 1$. $\square$

Propriedade 1.2.2. Para qualquer inteiro x, $1 \mid x$.

Demonstração. A verificação desta propriedade segue imediatamente do fato que, $\forall\, x \in \mathbb{Z},\;\; x = 1 \cdot x$. $\square$

Propriedade 1.2.3. Seja x um inteiro não-nulo qualquer. Se $x \mid 1$, então $x = \pm 1$.

Demonstração. De fato, se $x \mid 1$, então $1 = x \cdot q$, com $q \in \mathbb{Z}$, o que implica $x = 1$ e $q = 1$ ou $x = -1$ e $q = -1$, ou seja, $x = \pm 1$. $\square$

Propriedade 1.2.4. Sejam $x, y, z, w \in \mathbb{Z}$, com $x \neq 0$ e $z \neq 0$, quaisquer. Se $x \mid y$ e $z \mid w$, então $x \cdot z \mid y \cdot w$.

Demonstração. De fato, se $x \mid y$ então $y = x \cdot q$, com $q \in \mathbb{Z}$, e se $z \mid w$, então $w = z \cdot q_1$, com $q_1 \in \mathbb{Z}$. Logo, $y \cdot w = (x \cdot q) \cdot (z \cdot q_1)$.

Vimos que a multiplicação em $\mathbb{Z}$ é associativa, então, como $x, z, q, q_1 \in \mathbb{Z}$, podemos afirmar que

$$
\begin{aligned}
y \cdot w &= (x \cdot q) \cdot (z \cdot q_1) \\
&= [x \cdot (q \cdot z)] \cdot q_1,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$y \cdot w = [x \cdot (q \cdot z)] \cdot q_1.$$

Também vimos que a multiplicação em $\mathbb{Z}$ é comutativa, então

$$\begin{aligned} y \cdot w &= [x \cdot (q \cdot z)] \cdot q_1 \\ &= [x \cdot (z \cdot q)] \cdot q_1, \end{aligned}$$

isto é,

$$y \cdot w = [x \cdot (z \cdot q)] \cdot q_1.$$

Associando novamente os inteiros no segundo membro da igualdade acima, temos que

$$\begin{aligned} y \cdot w &= [x \cdot (z \cdot q)] \cdot q_1 \\ &= [(x \cdot z) \cdot q] \cdot q_1 \\ &= (x \cdot z) \cdot (q \cdot q_1), \end{aligned}$$

ou seja,

$$y \cdot w = (x \cdot z) \cdot (q \cdot q_1).$$

Como $q, q_1 \in \mathbb{Z}$, logo $(q \cdot q_1) \in \mathbb{Z}$. Assim, podemos dizer que $q \cdot q_1 = q_2$, onde $q_2 \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$\begin{aligned} y \cdot w &= (x \cdot z) \cdot (q \cdot q_1) \\ &= (x \cdot z) \cdot q_2, \end{aligned}$$

isto é,

$$y \cdot w = (x \cdot z) \cdot q_2,$$

com $q_2 \in \mathbb{Z}$.

Assim concluímos que $x \cdot z \mid y \cdot w$; o que verifica a propriedade. $\square$

Propriedade 1.2.5. Para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{Z}$, com $x \neq 0$ e $y \neq 0$, se $x \mid y$ e $y \mid z$, então $x \mid z$.

Demonstração. De fato, se $x \mid y$ então $y = x \cdot q$, com $q \in \mathbb{Z}$, e se $y \mid z$ então $z = y \cdot q_1$, com $q_1 \in \mathbb{Z}$.

Substituindo a primeira igualdade na segunda, temos

$$z = (x \cdot q) \cdot q_1.$$

Associando o inteiro q com q_1, obtemos

$$z = x \cdot (q \cdot q_1),$$

que também pode ser escrito como

$$z = x \cdot q_2 \text{ , onde } q_2 = q \cdot q_1 \in \mathbb{Z}.$$

Logo, $x \mid z$. $\square$

Propriedade 1.2.6. Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^*$ quaisquer. Se $x \mid y$ e $y \mid x$, então $x = \pm y$.

Demonstração. De fato,

$$x \mid y \Longrightarrow y = x \cdot q, \text{ com } q \in \mathbb{Z}$$

e também,

$$y \mid x \Longrightarrow x = y \cdot q_1, \text{ com } q_1 \in \mathbb{Z}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (y \cdot q_1) \cdot (x \cdot q) \\ &= [y \cdot (q_1 \cdot x)] \cdot q \\ &= [y \cdot (x \cdot q_1)] \cdot q \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [(y \cdot x) \cdot q_1] \cdot q \\
&= (y \cdot x) \cdot (q_1 \cdot q) \\
&= (x \cdot y) \cdot (q \cdot q_1),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$x \cdot y = (x \cdot y) \cdot (q \cdot q_1).$$

Pela igualdade acima concluímos que $q \cdot q_1 = 1$. Assim $1 = q_1 \cdot q$, e isto significa que $q_1 \mid 1$. Logo, pela propriedade 1.2.3, $q_1 = \pm 1$.

Portanto $x = \pm y$. □

A propriedade a seguir envolve o conceito de módulo de um número inteiro. O módulo ou valor absoluto de um número inteiro x é o inteiro indicado por $|x|$ e definido por $|x| = x$, se $x \geq 0$, e $|x| = -x$, se $x < 0$. Em sua verificação precisaremos também da propriedade do módulo do produto: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, isto é, o módulo do produto é o produto dos módulos.

Propriedade 1.2.7. Sejam $x, y \in \mathbb{Z}^*$ quaisquer. Se $x \mid y$, então $|x| \leq |y|$.

Demonstração. Suponhamos que $x \mid y$. Logo, por definição, $\exists\, q \in \mathbb{Z}$ tal que

$$y = x \cdot q. \tag{1.3}$$

Assim,

$$|y| = |x \cdot q| = |x| \cdot |q|,$$

isto é,

$$|y| = |x| \cdot |q|. \tag{1.4}$$

Como $x \neq 0$ e $y \neq 0$, logo, por (1.3), $q \neq 0$. Então

$$|q| \geq 1. \tag{1.5}$$

Por (1.4) e (1.5) temos

$$|y| = |x| \cdot |q| \geq |x| \cdot 1 = |x|, \text{ ou seja, } |x| \leq |y|,$$

o que verifica a propriedade. □

Propriedade 1.2.8. Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$, quaisquer. Se $a \mid b \quad \text{e} \quad a \mid c$, então $a \mid (b \cdot x + c \cdot y), \ \forall\, x, y \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Consideremos que $a \mid b \quad \text{e} \quad a \mid c$. Logo, por definição, existem $q_0,\ q_1 \in \mathbb{Z}$ tais que $b = a \cdot q_0 \quad \text{e} \quad c = a \cdot q_1$. Assim, $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$,

$$b \cdot x \ = \ (a \cdot q_0) \cdot x = a \cdot (q_0 \cdot x),$$

isto é,

$$b \cdot x \ = \ a \cdot (q_0 \cdot x) \tag{1.6}$$

e analogamente,

$$c \cdot y \ = \ (a \cdot q_1) \cdot y = a \cdot (q_1 \cdot y),$$

isto é,

$$c \cdot y \ = \ a \cdot (q_1 \cdot y). \tag{1.7}$$

Somando (1.6) e (1.7) membro à membro, segue que

$$b \cdot x + c \cdot y \ = \ a \cdot (q_0 \cdot x) + a \cdot (q_1 \cdot y) = a \cdot (q_0 \cdot x + q_1 \cdot y),$$

ou seja,

$$b \cdot x + c \cdot y \ = \ a \cdot (q_0 \cdot x + q_1 \cdot y). \tag{1.8}$$

Como $q_0,\ q_1,\ x,\ y \in \mathbb{Z}$, logo $(q_0 \cdot x + q_1 \cdot y) \in \mathbb{Z}$. Tomando $q = q_0 \cdot x + q_1 \cdot y$ em (1.8), temos que

$$b \cdot x + c \cdot y = a \cdot q, \text{ com } q \in \mathbb{Z}.$$

Disto resulta que $\quad a \mid (b \cdot x + c \cdot y), \forall\ x, y \in \mathbb{Z}.$ $\square$

A propriedade 1.2.8 admite uma óbvia generalização: sejam $a, b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$, $a \neq 0$, quaisquer. Se $a \mid b_k$, para $k = 1, 2, ..., n$, então

$$a \mid (b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + ... + b_n \cdot x_n), \forall\ x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{Z}.$$

Indicamos por $\mathrm{D}(x)$ o conjunto de todos os divisores de um inteiro x qualquer. Simbolicamente,

$$\mathrm{D}(x) = \{\ y \in \mathbb{Z}^* : y \mid x\ \}$$

onde $\mathbb{Z}^*$ representa o conjunto dos inteiros não-nulos.

Exemplo 1.2.11. Observe que $\mathrm{D}(0) = \{\ y \in \mathbb{Z}^* : y \mid 0\ \} = \mathbb{Z}^*$, ou seja, $\mathrm{D}(0) = \mathbb{Z}^*$.

Exemplo 1.2.12. Note que D(-8) $= \{\ y \in \mathbb{Z}^* : y \mid -8\ \} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$, isto é, D(-8) $= \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$

É importante notar que, para todo x inteiro, $\mathrm{D}(x) = \mathrm{D}(-x)$, e também, pelo fato de que $x = x \cdot 1 = (-x) \cdot (-1)$, os inteiros 1, (-1), x e $(-x)$ são sempre divisores de x, quando $x \neq 0$. Estes são denominados divisores triviais de x. Em particular, os inteiros 1 e (-1) só admitem divisores triviais.

Qualquer que seja o inteiro $x \neq 0$, se $y \mid x$, então

$$-x \leq y \leq x \Longrightarrow D(\mathrm{x}) \subset [-x, x]$$

e isto significa que qualquer inteiro $x \neq 0$ tem um número finito de divisores.

Chama-se divisor comum de dois inteiros x e y todo inteiro $z \neq 0$ tal que $z \mid x$ e $z \mid y$, ou seja, o inteiro $z \neq 0$ pertence simultaneamente aos conjuntos $\mathrm{D}(x)$ e $\mathrm{D}(y)$.

O conjunto de todos os divisores comuns de dois inteiros x e y é indicado por $\mathrm{D}(x, y)$. Portanto, simbolicamente,

$$\mathrm{D}(x,y) = \{z \in \mathbb{Z}^* : z \mid x \text{ e } z \mid y\}, \text{ ou seja,}$$

$$\mathrm{D}(x,y) = \{z \in \mathbb{Z}^* : z \in \mathrm{D}(x) \text{ e } z \in \mathrm{D}(y)\}, \text{ e portanto,}$$

$$\mathrm{D}(x,y) = \mathrm{D}(x) \cap \mathrm{D}(y).$$

A intersecção é uma operação comutativa, de modo que $\mathrm{D}(x,y)$ não depende da ordem dos inteiros x e y, isto é:

$$\mathrm{D}(x,y) = \mathrm{D}(y,x).$$

Como (-1) e 1 são divisores comuns de dois inteiros quaisquer x e y, o conjunto $\mathrm{D}(x,y)$ dos divisores comuns de x e y nunca é vazio, ou seja, $\mathrm{D}(x,y) \neq \emptyset$. Em particular, se $x = y = 0$, então todo inteiro não nulo é um divisor comum de x e y, isto é, $\mathrm{D}(x,y) = \mathbb{Z}^*$.

Exemplo 1.2.13. Sejam os inteiros $x = -8$ e $y = 12$. Temos

$$\mathrm{D}(\text{-}8) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8\}$$

$$\mathrm{D}(12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$$

Portanto,

$$\mathrm{D}(\text{-}8,\ 12) = \mathrm{D}(\text{-}8) \cap \mathrm{D}(12) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$$

Chamamos de mínimo de um conjunto não-vazio de inteiros o menor dos elementos deste conjunto, ou seja, se a é o mínimo do conjunto A, então $a \in A$ e $\forall\ b \in A,\ a \leq b$. Usamos a notação $Min\ A$ para indicar o mínimo do conjunto A.

O mínimo de um conjunto, quando existe, sempre é único. De fato, seja A um conjunto não-vazio. Suponhamos que M_1 e M_2 sejam dois elementos mínimos de A. Logo, por definição, $M_1 \leq M_2$ e $M_2 \leq M_1$. Assim $M_1 = M_2$. Isto verifica a unicidade do mínimo de um conjunto.

Exemplo 1.2.14. O mínimo do conjunto $A = \{-5, -3, -1, 0, 2, 4, 6\}$ é (-5), isto é, $Min\ A =$ -5.

Contra-exemplo 1.2.1. O conjunto $B = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ não possui um mínimo. Simbolicamente, $\nexists\ Min\ B$.

Denominamos **princípio da boa ordenação** o resultado: "todo subconjunto não-vazio formado por números naturais possui um menor elemento."

O teorema que apresentaremos a seguir é conhecido como algoritmo da divisão ou algoritmo de Euclides. Ele se trata de um resultado obtido por Euclides, matemático de origem grega que viveu durante o século III a.C.

Teorema 1.2.1. (**Algoritmo da divisão**): Para quaisquer x e y inteiros, com $y \neq 0$, existem e são únicos os inteiros q e r que satisfazem as condições:

$$x = y \cdot q + r \quad \text{e} \quad 0 \leq r < |y|.$$

Demonstração. Dividiremos a demonstração deste teorema em duas partes, considerando primeiramente o caso em que $y > 0$ e depois o caso em que $y < 0$.

Caso 1: $y > 0$.

Seja S o conjunto de todos os inteiros não-negativos que podem ser representados sob a forma $x - y \cdot z$, com $z \in \mathbb{Z}$, isto é,

$$S = \{x - y \cdot z \ \mid \ z \in \mathbb{Z},\ x - y \cdot z \geq 0\}.$$

Note que $S \neq \emptyset$. De fato, sendo $y > 0$, temos que $y \geq 1$ e, portanto, para $z = -|x|$, segue que

$$x - y \cdot z = x + y \cdot |x| \geq x + |x| \geq 0.$$

Assim, para $z = -|x|$, $x - y \cdot z \in S$; o que nos permite concluir que $S \neq \emptyset$. Sendo $S \neq \emptyset$, logo pelo princípio da boa ordenação, existe o mínimo do conjunto S.

Suponhamos que $Min\ S = r$. Logo existe um inteiro q tal que

$$r = x - y \cdot q \geq 0\ ,$$

isto é,

$$x = y \cdot q + r\ ,\ \ r \geq 0.$$

Além disso, temos $r < y$, pois se $r > y$, teríamos

$$0 \leq r - y < r. \tag{1.9}$$

Mas $r = x - y \cdot q$. Logo

$$r - y = x - y \cdot q - y = x - q(y + 1),$$

isto é,

$$r - y = x - y(q + 1).$$

Como $q \in \mathbb{Z}$, logo $(q + 1) \in \mathbb{Z}$. Assim

$$r - y = x - y \cdot z, \tag{1.10}$$

com $z = q + 1 \in \mathbb{Z}$.

Portanto, por (1.9) e (1.10), teríamos que $r - y \in S$ e $r - y < Min\ S = r$; o que é um absurdo!

Até aqui verificamos que existem $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que

$$x = y \cdot q + r \tag{1.11}$$

$$0 \leq r < y.$$

Mostraremos agora que os inteiros q e r são únicos. Para isso, suponhamos que existem dois outros inteiros q_1 e r_1 tais que

$$x = y \cdot q_1 + r_1 \tag{1.12}$$

$$0 \leq r_1 < y.$$

Por (1.11) e (1.12) segue que

$$y \cdot q_1 + r_1 = y \cdot q + r \ ;$$

de onde resulta que

$$r_1 - r = y \cdot q - y \cdot q_1 = y \cdot (q - q_1),$$

isto é,

$$r_1 - r = y \cdot (q - q_1). \tag{1.13}$$

Assim, $y \mid (r_1 - r)$.

Como $0 \leq r < y$, logo $-y < -r \leq 0$.

Pelas desigualdades $0 \leq r_1 < y$ e $-y < -r \leq 0$, logo segue que

$$-y < r_1 - r < y.$$

Isto significa que

$$|r_1 - r| < y.$$

Como $y \mid (r_1 - r)$ e $|r_1 - r| < y$, logo $r_1 - r = 0$. Dessa forma concluímos que $r_1 = r$.

Substituindo $r_1 - r = 0$ em (1.13), obtemos a igualdade

$$y \cdot (q - q_1) = 0.$$

Esta igualdade, juntamente com o fato de que $y \in \mathbb{Z}$, $y > 0$, permite-nos concluir que $q - q_1 = 0$, ou seja, $q = q_1$.

Assim verificamos a unicidade dos inteiros q e r.

Portanto, $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}$, com $y > 0$, existem e são únicos os inteiros q e r satisfazendo as condições

$$x = y \cdot q + r,$$

$$0 \leq r < y.$$

Caso 2: $y < 0$.

Se $y < 0$, então $|y| > 0$, e assim, pelo caso 1, existem e são únicos os inteiros q_1 e r tais que

$$x = |y| \cdot q_1 + r \quad \text{e} \quad 0 \leq r < |y|.$$

Como $y < 0$, logo $|y| = -y$. Assim, podemos reescrever a igualdade anterior sob a forma

$$x = y \cdot (-q_1) + r \quad \text{e} \quad 0 \leq r < |y|.$$

Portanto, existem e são únicos os inteiros $q = -q_1$ e r tais que

$$x = y \cdot q + r \quad \text{e} \quad 0 \leq r < |y|\ ;$$

o que verifica o teorema. $\square$

Exemplo 1.2.15. Na divisão de 55 por (-10) o quociente q e o resto r que verificam as condições do algoritmo da divisão são $q = -5$ e $r = 5$. Note que

$$55 = (-10) \cdot (-5) + 5 \quad \text{e} \quad 0 \leq 5 < |-10|.$$

No exemplo anterior, o quociente q e o resto r foram obtidos facilmente da seguinte maneira: primeiramente determinamos o quociente e o resto na divisão de 55 pelo valor absoluto de (-10). Assim obtemos

$$55 = 10 \cdot 5 + 5.$$

Em seguida, reescrevemos esta igualdade sob a forma

$$55 = (-10) \cdot (-5) + 5.$$

Note que $0 \leq 5 < |-10|$. Dessa forma concluímos que $q = -5$ e $r = 5$.

Exemplo 1.2.16. Na divisão de (-20) por 6, o quociente q e o resto r que verificam as condições do algoritmo da divisão são $q = -4$ e $r = 4$. Note que

$$-20 = 6 \cdot (-4) + 4 \quad \text{e} \quad 0 \leq 4 < |6|.$$

Para encontrarmos o quociente q e o resto r neste último exemplo, primeiro determinamos q e r na divisão do valor absoluto de (-20) por 6. Assim, obtemos:

$$20 = 6 \cdot 3 + 2.$$

Multiplicando a igualdade acima por (-1), temos

$$-20 = -(6 \cdot 3) - 2 = 6 \cdot (-3) - 2,$$

ou seja,

$$-20 = 6 \cdot (-3) - 2.$$

Somando e subtraindo o divisor 6 no segundo membro da igualdade anterior, obtemos a igualdade

$$-20 = 6 \cdot (-3) - 2 + 6 - 6$$

que pode ser reescrita como

$$-20 = 6 \cdot (-4) + 4.$$

Logo, $q = -4$ e $r = 4$.

Exemplo 1.2.17. Na divisão de (-21) por (-5), o quociente q e o resto r que verificam as condições do algoritmo da divisão são $q = 5$ e $r = 4$. Observe que

$$-21 = (-5) \cdot 5 + 4 \quad \text{e} \quad 0 \leq 4 < |-5|.$$

Para encontrarmos o quociente q e o resto r neste último exemplo, primeiro determinamos q e r na divisão do módulo de (-21) pelo módulo de (-5). Assim, obtemos:

$$21 = 5 \cdot 4 + 1.$$

Multiplicando a igualdade acima por (-1), temos

$$-21 = -(5 \cdot 4) - 1 = (-5) \cdot 4 - 1,$$

ou seja,

$$-21 = (-5) \cdot 4 - 1.$$

Subtraindo e somando o divisor (-5) no segundo membro da última igualdade, obtemos

$$-21 = (-5) \cdot 4 - 1 + 5 - 5$$

que pode ser reescrita sob a forma

$$-21 = (-5) \cdot 5 + 4.$$

Portanto, $q = 5$ e $r = 4$.

Segundo o algoritmo da divisão, na divisão de um inteiro qualquer x pelo inteiro 2, os possíveis restos são 0 e 1. Se o resto é igual a zero, então o inteiro $x = 2 \cdot q$ é par. Se o resto é igual a 1, então o inteiro $x = 2 \cdot q + 1$ é ímpar.

Exemplo 1.2.18. O inteiro 18 é par. De fato, $18 = 2 \cdot 9$. Observe que nesta divisão o resto é igual a zero.

Exemplo 1.2.19. O inteiro 13 é ímpar. De fato, $13 = 2 \cdot 6 + 1$. Note que nesta divisão o resto é igual a 1.

O sinal do quociente da divisão sobre $\mathbb{Z}$ depende diretamente dos sinais do dividendo e do divisor. Se o sinal de ambos forem iguais, o quociente será positivo. Se forem diferentes, o quociente será negativo.

Exemplo 1.2.20. Observe que a divisão do inteiro positivo 12 pelo inteiro negativo (-2) tem quociente (-6), pois $12 = (-2) \cdot (-6)$.

Exemplo 1.2.21. Note que a divisão do inteiro negativo (-9) pelo inteiro também negativo (-3) tem quociente 3. De fato, $-9 = -3 \cdot 3$.

A divisão em $\mathbb{Z}$ possui todas as propriedades elementares vistas anteriormente para a divisão em $\mathbb{N}$.

1.3 Os Números Racionais

Os números racionais surgiram da necessidade de representar partes de um inteiro. No Egito Antigo, durante inundações do Rio Nilo, muitas terras ficavam submersas, e isso fazia com que elas recebessem nutrientes. Essas terras tornavam-se muito férteis para a agricultura. Dessa forma, quando as águas baixavam, era necessário remarcar os limites entre os terrenos de cada proprietário. No entanto, por mais eficientes que tentassem ser, não encontravam um número inteiro para representar tais medidas, o que os levou à utilização de frações, isto é, dos números racionais.

O conjunto dos números racionais é constituído por todos os números fracionários do tipo $\dfrac{p}{q}$, onde p é um inteiro qualquer e q é um inteiro não-nulo.

O conjunto de todos os números racionais é representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$. Assim,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

Note que todo número inteiro também é um número racional, porque qualquer inteiro x pode ser representado sob a forma de uma fração do tipo $\dfrac{x}{1}$.

Portanto o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ é uma extensão do conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$. Dessa forma concluímos que é verdadeira a inclusão $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

1.3.1 Operações fundamentais com os Números Racionais

Adição

Vimos na seção 1.3 que um número racional é um número do tipo $\dfrac{p}{q}$, onde $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$.

A adição de dois números racionais quaisquer $\dfrac{p}{q}$ e $\dfrac{u}{v}$ é definida por

$$\frac{p}{q} + \frac{u}{v} = \frac{p \cdot v + q \cdot u}{q \cdot v}.$$

A adição em $\mathbb{Q}$ possui as seguintes propriedades elementares:

$\mathrm{A}_{\mathbb{Q}1}$) **(Associativa)** Para quaisquer $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}, \dfrac{u}{v} \in \mathbb{Q}$,

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{u}{v} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{u}{v}\right).$$

Demonstração. Temos, $\forall \dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}, \dfrac{u}{v} \in \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{u}{v} &= \frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}+\frac{u}{v} \\
&= \frac{(a\cdot d+b\cdot c)\cdot v+(b\cdot d)\cdot u}{(b\cdot d)\cdot v} \\
&= \frac{(a\cdot d)\cdot v+(b\cdot c)\cdot v+(b\cdot d)\cdot u}{(b\cdot d)\cdot v} \quad ,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{u}{v} = \frac{(a\cdot d)\cdot v+(b\cdot c)\cdot v+(b\cdot d)\cdot u}{(b\cdot d)\cdot v} \tag{1.14}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{u}{v}\right) &= \frac{a}{b}+\frac{c\cdot v+d\cdot u}{d\cdot v} \\
&= \frac{a\cdot(d\cdot v)+b\cdot(c\cdot v+d\cdot u)}{b\cdot(d\cdot v)} \\
&= \frac{a\cdot(d\cdot v)+b\cdot(c\cdot v)+b\cdot(d\cdot u)}{b\cdot(d\cdot v)} \\
&= \frac{(a\cdot d)\cdot v+(b\cdot c)\cdot v+(b\cdot d)\cdot u}{(b\cdot d)\cdot v} \quad ,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{u}{v}\right) = \frac{(a\cdot d)\cdot v+(b\cdot c)\cdot v+(b\cdot d)\cdot u}{(b\cdot d)\cdot v}. \tag{1.15}$$

Por (1.14) e (1.15) concluímos que, $\forall \ \frac{a}{b}\ ,\ \frac{c}{d}\ ,\ \frac{u}{v}\ \in \mathbb{Q}$,

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{u}{v}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{u}{v}\right).$$

$\square$

Exemplo 1.3.1. Note que $\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{9}\right)+\frac{5}{8}=\frac{3}{7}+\left(\frac{2}{9}+\frac{5}{8}\right)$. De fato, temos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{9}\right)+\frac{5}{8} &= \frac{3\cdot 9+7\cdot 2}{7\cdot 9}+\frac{5}{8} = \frac{27+14}{63}+\frac{5}{8} \\
&= \frac{41}{63}+\frac{5}{8} = \frac{41\cdot 8+63\cdot 5}{63\cdot 8} \\
&= \frac{328+315}{504} = \frac{643}{504},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\left(\frac{3}{7}+\frac{2}{9}\right)+\frac{5}{8} = \frac{643}{504}$$

e também,

$$\begin{aligned}
\frac{3}{7}+\left(\frac{2}{9}+\frac{5}{8}\right) &= \frac{3}{7}+\frac{2\cdot 8+9\cdot 5}{9\cdot 8} = \frac{3}{7}+\frac{16+45}{72} \\
&= \frac{3}{7}+\frac{61}{72} = \frac{3\cdot 72+7\cdot 61}{7\cdot 72} \\
&= \frac{216+427}{504} = \frac{643}{504},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{3}{7}+\left(\frac{2}{9}+\frac{5}{8}\right) \quad = \quad \frac{643}{504}\ .$$

Assim, concluímos que $\left(\dfrac{3}{7}+\dfrac{2}{9}\right)+\dfrac{5}{8}=\dfrac{3}{7}+\left(\dfrac{2}{9}+\dfrac{5}{8}\right).$

A$_{\mathbb{Q}2}$) **(Comutativa)** Para quaisquer $\dfrac{a}{b}\ ,\ \dfrac{c}{d}\ \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.$$

Demonstração. De fato,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d} \tag{1.16}$$

e, por outro lado,

$$\frac{c}{d}+\frac{a}{b}=\frac{c\cdot b+d\cdot a}{d\cdot b}=\frac{d\cdot a+c\cdot b}{d\cdot b}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\ ,$$

isto é,

$$\frac{c}{d}+\frac{a}{b}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}. \tag{1.17}$$

Logo, por (1.16) e (1.17), $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{c}{d}+\dfrac{a}{b}.$ Portanto, podemos concluir que a adição em $\mathbb{Q}$ é comutativa. $\square$

Exemplo 1.3.2. Observe que $\dfrac{2}{5}+\dfrac{3}{9}=\dfrac{3}{9}+\dfrac{2}{5}.$ De fato,

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{9}=\frac{2\cdot 9+5\cdot 3}{5\cdot 9}=\frac{18+15}{45}=\frac{33}{45},$$

ou seja,

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{9}=\frac{33}{45}$$

e também,

$$\frac{3}{9}+\frac{2}{5}=\frac{3\cdot 5+9\cdot 2}{9\cdot 5}=\frac{15+18}{45}=\frac{33}{45},$$

isto é,

$$\frac{3}{9}+\frac{2}{5}=\frac{33}{45}.$$

$A_{\mathbb{Q}3}$) **(Elemento neutro)** O elemento neutro para a adição em $\mathbb{Q}$ é o zero.

Demonstração. De fato, temos $0=\frac{0}{b},\;\; b\in\mathbb{Z}^*$. Assim, para todo racional $\frac{c}{d}$,

$$\begin{aligned} 0+\frac{c}{d} &= \frac{0}{b}+\frac{c}{d}=\frac{0\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}=\frac{0+b\cdot c}{b\cdot d} \\ &= \frac{b\cdot c}{b\cdot d} =\frac{c}{d} \;\; , \end{aligned}$$

isto é,

$$0+\frac{c}{d} = \frac{c}{d} \tag{1.18}$$

e, por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\frac{c}{d} + 0 \;&=\; \frac{c}{d} + \frac{0}{b} \;=\; \frac{c \cdot b + d \cdot 0}{d \cdot b} \;=\; \frac{c \cdot b + 0}{d \cdot b} \\
&=\; \frac{c \cdot b}{d \cdot b} \;=\; \frac{c}{d} \;,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\frac{c}{d} + 0 \;=\; \frac{c}{d} \;. \tag{1.19}
$$

Por (1.18) e (1.19) segue que, para todo racional $\dfrac{c}{d}$, $\dfrac{c}{d} + 0 = 0 + \dfrac{c}{d} = \dfrac{c}{d}$; de onde concluímos que o zero é o elemento neutro para a adição em $\mathbb{Q}$. $\square$

Exemplo 1.3.3. Veja que $\dfrac{7}{2} + 0 = 0 + \dfrac{7}{2} = \dfrac{7}{2}$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\frac{7}{2} + 0 \;&=\; \frac{7}{2} + \frac{0}{1} \;=\; \frac{7 \cdot 1 + 2 \cdot 0}{2 \cdot 1} \\
&=\; \frac{7 + 0}{2} \;=\; \frac{7}{2} \;,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\frac{7}{2} + 0 \;=\; \frac{7}{2} \;.
$$

De forma análoga verificamos que $0 + \dfrac{7}{2} = \dfrac{7}{2}$.

$A_{\mathbb{Q}4}$) **(Elementos simetrizáveis)** Todo número racional possui um oposto também racional.

Demonstração. Seja $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ qualquer. Logo $\dfrac{(-a)}{b} \in \mathbb{Q}$ e, além disso,

$$\begin{aligned}\frac{a}{b}+\frac{(-a)}{b} &= \frac{a\cdot b+b\cdot(-a)}{b\cdot b} &= \frac{a\cdot b-b\cdot a}{b^2}\\ &= \frac{a\cdot b-a\cdot b}{b^2} &= \frac{0}{b^2} = 0 \quad ,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{a}{b}+\frac{(-a)}{b} = 0$$

e analogamente,

$$\frac{(-a)}{b}+\frac{a}{b}=0.$$

Dessa forma concluímos que

$$-\frac{a}{b}=\frac{(-a)}{b}.$$

Mas

$$\frac{(-a)}{b}=\frac{a}{(-b)}.$$

Assim também temos que $-\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{(-b)}$. Portanto todo número racional é simetrizável para a adição. □

Exemplo 1.3.4. Note que o oposto do número racional $\dfrac{3}{2}$ é o número racional $\dfrac{(-3)}{2}$. De fato,

$$\frac{3}{2}+\frac{(-3)}{2}=\frac{3\cdot 2+2\cdot(-3)}{2\cdot 2}=\frac{6+(-6)}{4}=\frac{0}{4}=0, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{3}{2}+\frac{(-3)}{2}=0.$$

Analogamente verificamos que $\dfrac{(-3)}{2}+\dfrac{3}{2}=0.$

$A_{\mathbb{Q}5}$) **(Elementos regulares)** Todos os números racionais são regulares para a adição, ou seja, $\forall\ \dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}, \dfrac{v}{w} \in \mathbb{Q}$, com $\dfrac{v}{w}$ fixo, temos

$$\frac{v}{w} + \frac{a}{b} = \frac{v}{w} + \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

e também,

$$\frac{a}{b} + \frac{v}{w} = \frac{c}{d} + \frac{v}{w} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ .$$

Demonstração. Sejam $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}, \dfrac{v}{w} \in \mathbb{Q}$ quaisquer, com $\dfrac{v}{w}$ fixo. Logo $\dfrac{(-v)}{w} \in \mathbb{Q}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} + \frac{v}{w} = \frac{c}{d} + \frac{v}{w} \quad &\Longrightarrow \quad \left(\frac{a}{b} + \frac{v}{w}\right) + \frac{(-v)}{w} = \left(\frac{c}{d} + \frac{v}{w}\right) + \frac{(-v)}{w} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{a}{b} + \left(\frac{v}{w} + \frac{(-v)}{w}\right) = \frac{c}{d} + \left(\frac{v}{w} + \frac{(-v)}{w}\right) \\
&\Longrightarrow \quad \frac{a}{b} + 0 = \frac{c}{d} + 0 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad ,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{a}{b} + \frac{v}{w} = \frac{c}{d} + \frac{v}{w} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ .$$

Analogamente verificamos que $\dfrac{v}{w} + \dfrac{a}{b} = \dfrac{v}{w} + \dfrac{c}{d} \Longrightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$.

Dessa forma concluímos que todo número racional é regular para a adição. □

Exemplo 1.3.5. Temos, $\forall\ \dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{3}{2}+\frac{a}{b}=\frac{3}{2}+\frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

e também,

$$\frac{a}{b}+\frac{3}{2}=\frac{c}{d}+\frac{3}{2} \Longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ .$$

Logo, o número racional $\dfrac{3}{2}$ é regular para a adição.

<u>Subtração</u>

A subtração de dois números racionais quaisquer $\dfrac{p}{q}$ e $\dfrac{u}{v}$ é definida por

$$\frac{p}{q}-\frac{u}{v}=\frac{p\cdot v-q\cdot u}{q\cdot v}.$$

Note que $\dfrac{p}{q}-\dfrac{u}{v}=\dfrac{p}{q}+\left(-\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{p}{q}+\dfrac{(-u)}{v}=\dfrac{p}{q}+\dfrac{u}{(-v)}.$

As propriedades elementares que não são válidas para a subtração em $\mathbb{Z}$ também não são válidas para a subtração em $\mathbb{Q}$. Sendo assim, a única propriedade elementar válida para a subtração em $\mathbb{Q}$ é:

$\mathrm{S}_{\mathbb{Q}1}$) **(Elementos regulares)** Todos os números racionais são regulares para a subtração, ou seja, $\forall\ \dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}, \dfrac{v}{w} \in \mathbb{Q}$, com $\dfrac{v}{w}$ fixo, temos

$$\frac{v}{w}-\frac{a}{b}=\frac{v}{w}-\frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

e também,

$$\frac{a}{b}-\frac{v}{w}=\frac{c}{d}-\frac{v}{w} \Longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ .$$

Demonstração. Sejam $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}, \dfrac{v}{w} \in \mathbb{Q}$ quaisquer, com $\dfrac{v}{w}$ fixo. Portanto $\left(-\dfrac{v}{w}\right) \in \mathbb{Q}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b}-\frac{v}{w}=\frac{c}{d}-\frac{v}{w} \quad &\Longrightarrow \quad \left(\frac{a}{b}-\frac{v}{w}\right)+\frac{v}{w}=\left(\frac{c}{d}-\frac{v}{w}\right)+\frac{v}{w} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{a}{b}+\left(-\frac{v}{w}+\frac{v}{w}\right)=\frac{c}{d}+\left(-\frac{v}{w}+\frac{v}{w}\right) \\
&\Longrightarrow \frac{a}{b}+0=\frac{c}{d}+0 \\
&\Longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad ,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\frac{a}{b}-\frac{v}{w}=\frac{c}{d}-\frac{v}{w} \Longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ .$$

Analogamente verificamos que

$$\frac{v}{w}-\frac{a}{b}=\frac{v}{w}-\frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ .$$

Dessa forma concluímos que todo número racional é regular para a subtração. $\square$

Exemplo 1.3.6. Temos que, $\forall\ \frac{a}{b},\ \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{a}{b}-\frac{9}{4}=\frac{c}{d}-\frac{9}{4} \Longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

e também,

$$\frac{9}{4}-\frac{a}{b}=\frac{9}{4}-\frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}\ .$$

Assim, o racional $\frac{9}{4}$ é regular para a subtração em $\mathbb{Q}$.

Multiplicação

A multiplicação de dois números racionais quaisquer $\dfrac{p}{q}$ e $\dfrac{u}{v}$ é definida por

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{u}{v} = \frac{p \cdot u}{q \cdot v} \quad .$$

As propriedades elementares da multiplicação sobre $\mathbb{Q}$ são:

$M_{\mathbb{Q}1}$) **(Associativa)** Para quaisquer $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}, \dfrac{u}{v} \in \mathbb{Q}$,

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{u}{v} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{u}{v}\right) .$$

Demonstração. Temos, $\forall \ \dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}, \dfrac{u}{v} \in \mathbb{Q}$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{u}{v} &= \frac{(a \cdot c)}{(b \cdot d)} \cdot \frac{u}{v} = \frac{(a \cdot c) \cdot u}{(b \cdot d) \cdot v} = \frac{a \cdot (c \cdot u)}{b \cdot (d \cdot v)} \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{(c \cdot u)}{(d \cdot v)} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{u}{v}\right) , \end{aligned}$$

isto é,

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{u}{v} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{u}{v}\right).$$

Portanto a multiplicação em $\mathbb{Q}$ é associativa. $\square$

Exemplo 1.3.7. Observe que $\left(\dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{2}{7}\right) \cdot \dfrac{2}{3} = \dfrac{3}{5} \cdot \left(\dfrac{2}{7} \cdot \dfrac{2}{3}\right)$. De fato,

$$\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7}\right) \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{35} \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{105} \ , \ \text{ ou seja, } \ \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{12}{105}$$

e também,

$$\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2 \cdot 2}{7 \cdot 3}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{21} = \frac{12}{105}\ , \text{ isto é, } \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3}\right) = \frac{12}{105}\ .$$

Assim, concluímos que $\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{3}\right)$.

$M_{\mathbb{Q}2}$) **(Comutativa)** Para quaisquer $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$.

Demonstração. De fato, $\forall\ \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = \frac{c \cdot a}{d \cdot b} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}\ ,$$

ou seja,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}.$$

Assim, concluímos que a multiplicação em $\mathbb{Q}$ é comutativa. □

Exemplo 1.3.8. Veja que $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{9} = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{5}$. De fato,

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 9} = \frac{6}{45}$$

e também,

$$\frac{3}{9} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{9 \cdot 5} = \frac{6}{45}\ .$$

$M_{\mathbb{Q}3}$) **(Elemento neutro)** O elemento neutro para a multiplicação em $\mathbb{Q}$ é o 1.

Demonstração. De fato, temos $1 = \frac{1}{1} \in \mathbb{Q}$. Assim, para todo racional $\frac{c}{d}$,

$$
\begin{aligned}
1 \cdot \frac{c}{d} &= \frac{1}{1} \cdot \frac{c}{d} = \frac{1 \cdot c}{1 \cdot d} = \frac{c}{d} \\
&= \frac{c \cdot 1}{d \cdot 1} = \frac{c}{d} \cdot \frac{1}{1} = \frac{c}{d} \cdot 1
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$1 \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot 1.$$

Portanto, o racional 1 é o elemento neutro para a multiplicação em $\mathbb{Q}$. □

Exemplo 1.3.9. Note que $\dfrac{4}{7} \cdot 1 = 1 \cdot \dfrac{4}{7} = \dfrac{4}{7}$. De fato,

$\dfrac{4}{7} \cdot 1 = \dfrac{4}{7} \cdot \dfrac{1}{1} = \dfrac{4 \cdot 1}{7 \cdot 1} = \dfrac{4}{7}$, ou seja, $\dfrac{4}{7} \cdot 1 = \dfrac{4}{7}$

e também,

$1 \cdot \dfrac{4}{7} = \dfrac{1}{1} \cdot \dfrac{4}{7} = \dfrac{1 \cdot 4}{1 \cdot 7} = \dfrac{4}{7}$, isto é, $1 \cdot \dfrac{4}{7} = \dfrac{4}{7}$.

Portanto, podemos concluir que $\dfrac{4}{7} \cdot 1 = 1 \cdot \dfrac{4}{7} = \dfrac{4}{7}$.

$\mathrm{M}_{\mathbb{Q}4}$) **(Elementos simetrizáveis)** Todo número racional não-nulo possui um inverso que também é um racional não-nulo.

Demonstração. Seja $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$ qualquer. Logo, pela definição de número racional, $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Assim $\dfrac{b}{a} \in \mathbb{Q}^*$. Além disso,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{a \cdot b}{b \cdot a} = \frac{a \cdot b}{a \cdot b} = 1 \ ,$$

isto é, $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{b}{a} = 1$. Analogamente mostramos que $\dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{a}{b} = 1$. Portanto $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1} = \dfrac{b}{a}$; o que verifica a propriedade. □

Exemplo 1.3.10. O número racional não-nulo $\dfrac{4}{5}$ é simetrizável para a multiplicação. O seu simétrico é $\dfrac{5}{4}$, ou seja, $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-1} = \dfrac{5}{4}$. De fato, obviamente $\dfrac{5}{4} \in \mathbb{Q}^*$ e, além disso,

$\dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{5}{4} = \dfrac{4 \cdot 5}{5 \cdot 4} = \dfrac{20}{20} = 1$, isto é, $\dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{5}{4} = 1$.

Analogamente verificamos a igualdade $\dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{4}{5} = 1$. Dessa forma concluímos que $\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-1} = \dfrac{5}{4}$.

$M_{\mathbb{Q}5}$) **(Elementos regulares)** Todos os números racionais não-nulos são regulares para a multiplicação, isto é, $\forall\ \dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}, \dfrac{v}{w} \in \mathbb{Q}$, com $\dfrac{v}{w} \neq 0$ fixo, temos

$$\frac{v}{w} \cdot \frac{a}{b} = \frac{v}{w} \cdot \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

e também,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{v}{w} = \frac{c}{d} \cdot \frac{v}{w} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\,.$$

Demonstração. Sejam $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}, \dfrac{v}{w} \in \mathbb{Q}^*$ quaisquer, com $\dfrac{v}{w}$ fixo. Logo, pela propriedade

($M_{\mathbb{Q}4}$), existe $\left(\dfrac{v}{w}\right)^{-1}$ e, além disso, $\left(\dfrac{v}{w}\right)^{-1} = \dfrac{w}{v} \in \mathbb{Q}^*$. Assim

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \cdot \frac{v}{w} = \frac{c}{d} \cdot \frac{v}{w} \quad &\Longrightarrow \quad \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{v}{w}\right) \cdot \frac{w}{v} = \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{v}{w}\right) \cdot \frac{w}{v} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{v}{w} \cdot \frac{w}{v}\right) = \frac{c}{d} \cdot \left(\frac{v}{w} \cdot \frac{w}{v}\right) \\
&\Longrightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{v \cdot w}{w \cdot v}\right) = \frac{c}{d} \cdot \left(\frac{v \cdot w}{w \cdot v}\right)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{v \cdot w}{v \cdot w} = \frac{c}{d} \cdot \frac{v \cdot w}{v \cdot w}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{c}{d} \cdot 1$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ou seja,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{v}{w} = \frac{c}{d} \cdot \frac{v}{w} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \, .$$

Analogamente verificamos que $\dfrac{v}{w} \cdot \dfrac{a}{b} = \dfrac{v}{w} \cdot \dfrac{c}{d} \Longrightarrow \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d}$. Assim concluímos que todo número racional não-nulo é regular para a multiplicação. □

Exemplo 1.3.11. Temos, $\forall \ \dfrac{a}{b}, \ \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}^*$,

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{a}{b} = \frac{2}{5} \cdot \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

e também,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{2}{5} = \frac{c}{d} \cdot \frac{2}{5} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \, .$$

Logo, o racional $\dfrac{2}{5}$ é regular para a multiplicação.

$M_{\mathbb{Q}6}$) **(Distributiva da multiplicação em relação à adição)** Para quaisquer $\dfrac{a}{b}, \ \dfrac{c}{d}, \ \dfrac{v}{w} \in \mathbb{Q}$, temos

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{v}{w} \right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \right) + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{v}{w} \right)$$

e

$$\left(\frac{c}{d} + \frac{v}{w} \right) \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} \right) + \left(\frac{v}{w} \cdot \frac{a}{b} \right) \, .$$

Demonstração. De fato, temos

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{v}{w}\right)=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c\cdot w+d\cdot v}{d\cdot w}\right)$$

$$=\frac{a\cdot(c\cdot w+d\cdot v)}{b\cdot(d\cdot w)}=\frac{a\cdot(c\cdot w)+a\cdot(d\cdot v)}{b\cdot(d\cdot w)}\ ,$$

isto é,

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{v}{w}\right) \quad = \quad \frac{a\cdot(c\cdot w)+a\cdot(d\cdot v)}{b\cdot(d\cdot w)} \tag{1.20}$$

e por outro lado,

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{v}{w}\right)=\frac{(a\cdot c)}{(b\cdot d)}+\frac{(a\cdot v)}{(b\cdot w)}=\frac{(a\cdot c)\cdot(b\cdot w)+(b\cdot d)\cdot(a\cdot v)}{(b\cdot d)\cdot(b\cdot w)}$$

$$=\frac{(b\cdot w)\cdot(a\cdot c)+(b\cdot d)\cdot(a\cdot v)}{(b\cdot d)\cdot(b\cdot w)}=\frac{b\cdot[(w\cdot a)\cdot c]+b\cdot[(d\cdot a)\cdot v]}{b\cdot[(d\cdot b)\cdot w]}$$

$$=\frac{b\cdot[(w\cdot a)\cdot c+(d\cdot a)\cdot v]}{b\cdot[(d\cdot b)\cdot w]}=\frac{(w\cdot a)\cdot c+(d\cdot a)\cdot v}{(d\cdot b)\cdot w}=\frac{(a\cdot w)\cdot c+(a\cdot d)\cdot v}{(b\cdot d)\cdot w}$$

$$=\frac{a\cdot(w\cdot c)+a\cdot(d\cdot v)}{b\cdot(d\cdot w)}=\frac{a\cdot(c\cdot w)+a\cdot(d\cdot v)}{b\cdot(d\cdot w)}\ ,$$

ou seja,

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{v}{w}\right) \quad = \quad \frac{a\cdot(c\cdot w)+a\cdot(d\cdot v)}{b\cdot(d\cdot w)}. \tag{1.21}$$

Por (1.20) e (1.21) concluímos que

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{v}{w}\right)=\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{v}{w}\right),$$

para quaisquer racionais $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{v}{w}$.

Analogamente demonstramos que

$$\left(\frac{c}{d} + \frac{v}{w}\right) \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}\right) + \left(\frac{v}{w} \cdot \frac{a}{b}\right).$$

Portanto, em $\mathbb{Q}$, a multiplicação é distributiva em relação à adição. $\square$

Exemplo 1.3.12. Note que $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{7} + \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)$.
De fato, temos

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{7} + \frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2 \cdot 2 + 7 \cdot 3}{7 \cdot 2}\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{4+21}{14}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{25}{14} = \frac{50}{42} \ ,$$

ou seja,

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{7} + \frac{3}{2}\right) = \frac{50}{42} \ ;$$

e por outro lado, temos

$$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) = \frac{4}{21} + \frac{6}{6} = \frac{4 \cdot 6 + 21 \cdot 6}{21 \cdot 6} = \frac{24 + 126}{126} = \frac{150}{126} = \frac{50}{42} \ ,$$

isto é,

$$\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right) = \frac{50}{42} \ .$$

Assim, concluímos que $\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{7} + \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{7}\right) + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}\right)$.

$M_{\mathbb{Q}7}$) **(Distributiva da multiplicação em relação à subtração)** Para quaisquer $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{v}{w} \in \mathbb{Q}$, temos

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} - \frac{v}{w}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) - \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{v}{w}\right)$$

e

$$\left(\frac{c}{d} - \frac{v}{w}\right) \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}\right) - \left(\frac{v}{w} \cdot \frac{a}{b}\right) .$$

Demonstração. De fato, temos

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} - \frac{v}{w}\right) = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c \cdot w - d \cdot v}{d \cdot w}\right)$$

$$= \frac{a \cdot (c \cdot w - d \cdot v)}{b \cdot (d \cdot w)} = \frac{a \cdot (c \cdot w) - a \cdot (d \cdot v)}{b \cdot (d \cdot w)} ,$$

isto é,

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} - \frac{v}{w}\right) \quad = \quad \frac{a \cdot (c \cdot w) - a \cdot (d \cdot v)}{b \cdot (d \cdot w)} \tag{1.22}$$

e por outro lado,

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) - \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{v}{w}\right) = \frac{(a \cdot c)}{(b \cdot d)} - \frac{(a \cdot v)}{(b \cdot w)} = \frac{(a \cdot c) \cdot (b \cdot w) - (b \cdot d) \cdot (a \cdot v)}{(b \cdot d) \cdot (b \cdot w)}$$

$$= \frac{(b \cdot w) \cdot (a \cdot c) - (b \cdot d) \cdot (a \cdot v)}{(b \cdot d) \cdot (b \cdot w)} = \frac{b \cdot [(w \cdot a) \cdot c] - b \cdot [(d \cdot a) \cdot v]}{b \cdot [(d \cdot b) \cdot w]}$$

$$= \frac{b \cdot [(w \cdot a) \cdot c - (d \cdot a) \cdot v]}{b \cdot [(d \cdot b) \cdot w]} = \frac{(w \cdot a) \cdot c - (d \cdot a) \cdot v}{(d \cdot b) \cdot w}$$

$$= \frac{(a \cdot w) \cdot c - (a \cdot d) \cdot v}{(b \cdot d) \cdot w} = \frac{a \cdot (w \cdot c) - a \cdot (d \cdot v)}{b \cdot (d \cdot w)}$$

$$= \frac{a \cdot (c \cdot w) - a \cdot (d \cdot v)}{b \cdot (d \cdot w)} ,$$

ou seja,

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{v}{w}\right) = \frac{a \cdot (c \cdot w) + a \cdot (d \cdot v)}{b \cdot (d \cdot w)} . \tag{1.23}$$

Por (1.22) e (1.23) concluímos que $\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} - \frac{v}{w}\right) = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) - \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{v}{w}\right)$, $\forall\ \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{v}{w} \in \mathbb{Q}$.

Analogamente demonstramos que $\left(\frac{c}{d} - \frac{v}{w}\right) \cdot \frac{a}{b} = \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}\right) - \left(\frac{v}{w} \cdot \frac{a}{b}\right)$. Portanto, em $\mathbb{Q}$, a multiplicação é distributiva em relação à subtração. $\square$

Exemplo 1.3.13. Observe que $\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}\right)$. De fato, temos

$$\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2 \cdot 4 - 3 \cdot 1}{3 \cdot 4}\right) = \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{8-3}{12}\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{12} = \frac{15}{60}\ ,$$

isto é,

$$\frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{60}\ ;$$

e por outro lado, temos

$$\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{6}{15} - \frac{3}{20} = \frac{6 \cdot 20 - 15 \cdot 3}{15 \cdot 20} = \frac{120 - 45}{300} = \frac{75}{300} = \frac{15}{60}\ ,$$

ou seja,

$$\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{3}\right) - \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{60}\ .$$

Divisão

A divisão de um número racional $\frac{p}{q}$ qualquer por um racional não-nulo $\frac{u}{v}$ qualquer é definida por

$$\frac{p}{q} \div \frac{u}{v} = \frac{p \cdot v}{q \cdot u}\ .$$

As propriedades elementares que não são válidas para a divisão em $\mathbb{Z}$ também não são válidas para a divisão em $\mathbb{Q}$. Sendo assim, a única propriedade elementar válida para a divisão em $\mathbb{Q}$ é:

D$_{\mathbb{Q}1}$) **(Elementos regulares)** Todos os números racionais não-nulos são regulares para a divisão, isto é, $\forall\ \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{v}{w} \in \mathbb{Q}$, com $\frac{v}{w} \neq 0$ fixo, temos

$$\frac{v}{w} \div \frac{a}{b} = \frac{v}{w} \div \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

e também,

$$\frac{a}{b} \div \frac{v}{w} = \frac{c}{d} \div \frac{v}{w} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ .$$

Demonstração. Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{v}{w} \in \mathbb{Q}$ quaisquer, com $\frac{v}{w} \neq 0$ fixo. Logo

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} \div \frac{v}{w} = \frac{c}{d} \div \frac{v}{w} \quad &\Longrightarrow \quad \left(\frac{a}{b} \div \frac{v}{w}\right) \div \frac{w}{v} = \left(\frac{c}{d} \div \frac{v}{w}\right) \div \frac{w}{v} \\
&\Longrightarrow \quad \left(\frac{a \cdot w}{b \cdot v}\right) \div \frac{w}{v} = \left(\frac{c \cdot w}{d \cdot v}\right) \div \frac{w}{v} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{(a \cdot w) \cdot v}{(b \cdot v) \cdot w} = \frac{(c \cdot w) \cdot v}{(d \cdot v) \cdot w} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{a \cdot (w \cdot v)}{b \cdot (v \cdot w)} = \frac{c \cdot (w \cdot v)}{d \cdot (v \cdot w)} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{a \cdot (v \cdot w)}{b \cdot (v \cdot w)} = \frac{c \cdot (v \cdot w)}{d \cdot (v \cdot w)} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{a}{b} \div \frac{v}{w} = \frac{c}{d} \div \frac{v}{w} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ .$$

Analogamente verificamos que

$$\frac{v}{w} \div \frac{a}{b} = \frac{v}{w} \div \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ ;$$

o que prova a propriedade. □

Exemplo 1.3.14. Para quaisquer $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$,

$$\frac{a}{b} \div \frac{3}{4} = \frac{c}{d} \div \frac{3}{4} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

e também,

$$\frac{3}{4} \div \frac{a}{b} = \frac{3}{4} \div \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\ .$$

Assim, o racional $\frac{3}{4}$ é regular para a divisão em $\mathbb{Q}$.

1.4 Os Números Irracionais

A origem dos números irracionais está ligada com a geometria e, principalmente, ao teorema de Pitágoras.

Pitágoras foi um matemático grego que viveu por volta do século VI a.C. O teorema de Pitágoras afirma que, em um triângulo retângulo, a hipotenusa ao quadrado se equivale a soma dos quadrados dos catetos.

Dividindo um quadrado de lado 1 em dois triângulos retângulos e aplicando o teorema de Pitágoras em um deles para calcular a diagonal do quadrado, os matemáticos gregos se depararam com um novo número, o número $\sqrt{2}$. Este foi o primeiro indício de um número irracional.

Os números irracionais são todos os números que, representados sob a forma decimal, a parte decimal é infinita e não periódica. Sendo assim, não podem ser representados sob a forma de fração, como no caso dos racionais.

Um número irracional pode ser obtido facilmente pela forma $\sqrt{p}$, onde p é um número natural primo. Lembre-se que um número natural primo é um número que tem apenas dois divisores positivos diferentes, o 1 e o próprio número, isto é, se x for um natural primo, então $\mathrm{D}(x) = \{1,\ x\}$. Vale ressaltar que o natural 1 não é primo pois possui apenas um divisor positivo.

Outro recurso para a construção de irracionais é usar o fato de que se x é um irracional e y é um racional não-nulo, então $x+y,\ x-y,\ x\cdot y,\ x\div y$ e $y\div x$ são todos irracionais.

Exemplo 1.4.1. Os números $\sqrt{2}-3,\ 4+\sqrt{3},\ 2\cdot\sqrt{5},\ \sqrt{3}\div 2$ e $6\div\sqrt{3}$ são todos irracionais, pois se efetuarmos as operações veremos que os resultados são números decimais infinitos e não periódicos.

O conjunto dos números irracionais é representado pelo símbolo $\mathbb{I}$. Assim, pela definição de número irracional, temos que $\mathbb{Q}\cap\mathbb{I}=\emptyset$, ou seja, os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$ são disjuntos. Portanto, obviamente, $\mathbb{Q}\not\subset\mathbb{I}$.

1.4.1 Operações fundamentais com os Números Irracionais

Sobre as operações fundamentais com os números irracionais, é importante notar que a soma, a diferença, o produto e o quociente de dois números irracionais nem sempre é um número irracional. Nesse sentido dizemos que o conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais não é fechado para a adição, subtração, multiplicação e divisão, respectivamente.

Contra-exemplo 1.4.1. Veja que $3+\sqrt{2},\ 3-\sqrt{2}\in\mathbb{I}$, porém a soma $(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=6$ que não é um número irracional.

Contra-exemplo 1.4.2. Note que $\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\in\mathbb{I}$, mas a diferença $\sqrt{2}-(1+\sqrt{2})=-1$ que não é um número irracional.

Contra-exemplo 1.4.3. Observe que $\sqrt{3}\in\mathbb{I}$, porém o produto $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$ que não é um número irracional.

Contra-exemplo 1.4.4. Veja que $\sqrt{11} \in \mathbb{I}$, mas o quociente $\sqrt{11} \div \sqrt{11} = 1$ que não é um número irracional.

Nesta subseção não falaremos sobre as propriedades elementares da adição, subtração, multiplicação e divisão com os números irracionais, porque essas propriedades vistas para as operações até aqui se referem a operações sobre um conjunto, no sentido de que o conjunto é fechado para elas, o que não é o caso desta vez, pois, conforme já citamos, o conjunto $\mathbb{I}$ não é fechado para essas operações.

1.5 Os Números Reais

Conforme vimos na seção 1.2, os números inteiros foram obtidos a partir dos números naturais, porque o conjunto dos números inteiros é composto pelos números naturais e seus respectivos opostos.

Na seção 1.3 vimos que os números racionais foram construídos através dos números inteiros, uma vez que um número racional é um número do tipo $\frac{p}{q}$, onde p e q são números inteiros, com $q \neq 0$.

Na seção 1.4 observamos que um número irracional é construído através dos números inteiros ou racionais, uma vez que um número irracional é um número do tipo $\sqrt{p}$, onde p é um natural primo, ou gerado através das expressões $x \pm y$, $x \cdot y$, $x \div y$ ou $y \div x$, sendo x um irracional e y um racional não-nulo.

Os números reais, ao contrário dos números inteiros, racionais e irracionais, não foram construídos através de números que surgiram anteriormente a eles. Eles são exatamente os números racionais e os números irracionais, isto é, o conjunto dos números reais é a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais. É importante notar que esta união é disjunta, porque a interseção desses conjuntos é vazia.

O conjunto dos números reais é indicado pelo símbolo $\mathbb{R}$. Assim, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

Com a formalização do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais vale ressaltar que o conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais também pode ser representado por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

1.5.1 Operações fundamentais com os Números Reais

Adição

A adição em $\mathbb{R}$ é a mesma considerada em $\mathbb{Q}$ e em $\mathbb{I}$, pois como vimos na seção 1.5, o conjunto $\mathbb{R}$ é a união disjunta desses conjuntos.

A adição em $\mathbb{R}$ possui todas as propriedades elementares válidas para a adição em $\mathbb{Q}$, ou seja, possui as seguintes propriedades: associativa, comutativa, tem o elemento neutro para a adição, que é o zero, cada um de seus elementos possui um oposto e são regulares para a adição.

Como todas as propriedades da adição em $\mathbb{R}$ coincidem com as propriedades da adição em $\mathbb{Q}$, não citaremos aqui exemplos de cada uma delas, pois são análogos aos exemplos relacionados às propriedades verificadas para os conjuntos numéricos tratados anteriormente.

Subtração

Assim como em $\mathbb{Q}$, a subtração em $\mathbb{R}$ possui apenas uma propriedade elementar válida. A propriedade é a seguinte:

$\mathrm{S}_{\mathbb{R}1}$) **(Elementos regulares)** Todos os números reais são regulares para a subtração, ou seja, para quaisquer x, y, z reais, com z fixo, temos

$$z - x = z - y \Longrightarrow x = y$$

e também,

$$x - z = y - z \Longrightarrow x = y.$$

Exemplo 1.5.1. Temos que, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$,

$$x - \frac{\sqrt{2}}{5} = y - \frac{\sqrt{2}}{5} \Longrightarrow x = y$$

e também,

$$\frac{\sqrt{2}}{5} - x = \frac{\sqrt{2}}{5} - y \Longrightarrow x = y.$$

Assim, o número real $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ é regular para a subtração em $\mathbb{R}$.

A subtração em $\mathbb{R}$ não é associativa, pois em geral, $(x - y) - z \neq x - (y - z)$, com $x, y, z \in \mathbb{R}$. Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 1.5.2. Note que $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\right)$. De fato,

$\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{2} = \left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2} = 0$, isto é, $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{2} = 0$ e

$\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} - \left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$, ou seja, $\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\right) = 1$.

Logo, $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\right)$.

A subtração em $\mathbb{R}$ não é comutativa, pois $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, com $x \neq y$, $x - y \neq y - x$.

Exemplo 1.5.3. Temos $2 - 7 \neq 7 - 2$. De fato, 2 - 7 = -5 e 7 - 2 = 5.

A subtração em $\mathbb{R}$ não possui elemento neutro, ou seja, não há um número $e \in \mathbb{R}$ que satisfaz simultaneamente as duas igualdades abaixo

$$e - x = x \quad \text{e} \quad x - e = x,\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

O número real zero satisfaz apenas a segunda igualdade, ou seja, ele é apenas o elemento neutro à direita para a subtração em $\mathbb{R}$. De fato, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, temos $x - 0 = x$.

Para ilustrar o que foi dito acima, veja o exemplo e o contra-exemplo abaixo.

Exemplo 1.5.4. Para $x = \sqrt{2}$, temos $x - 0 = \sqrt{2} - 0 = \sqrt{2} = x$, ou seja, $x - 0 = x$.

Contra-exemplo 1.5.1. Como no exemplo anterior, considerando $x = \sqrt{2}$, temos $0 - x = 0 - \sqrt{2} = -\sqrt{2} = -x$, isto é, $0 - x = -x$. Como $-\sqrt{2} \neq \sqrt{2}$, ou seja, $-x \neq x$, logo $0 - x \neq x$. Portanto, o zero não é um elemento neutro à esquerda para a subtração em $\mathbb{R}$.

Os elementos do conjunto $\mathbb{R}$ não são simetrizáveis para a subtração. De fato, conforme sabemos não existe um elemento neutro e para a subtração em $\mathbb{R}$. Logo, dado $x \in \mathbb{R}$, não existe um número real x' tal que $x - x' = e = x' - x$. Lembre-se que o simétrico de um número real x em relação à subtração é o número real x' que verifica a igualdade mencionada acima.

A subtração em $\mathbb{R}$ não é distributiva em relação à adição e vice-versa. Observe os exemplos abaixo.

Exemplo 1.5.5. Veja que $\dfrac{1}{2} - (4+2) \neq \left(\dfrac{1}{2} - 4\right) + \left(\dfrac{1}{2} - 2\right)$. De fato,

$$\frac{1}{2} - (4+2) = \frac{1}{2} - 6 = -\frac{11}{2} \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{2} - 4\right) + \left(\frac{1}{2} - 2\right) = -\frac{7}{2} + \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{10}{2} = -5.$$

Assim, a subtração não é distributiva em relação à adição.

Exemplo 1.5.6. Note que $\dfrac{1}{3} + \left(1 - \dfrac{2}{3}\right) \neq \left(\dfrac{1}{3} + 1\right) - \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\right)$. De fato,

$$\frac{1}{3} + \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{3} + 1\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Logo, a adição não é distributiva em relação à subtração.

Multiplicação

Todas as propriedades elementares válidas para a multiplicação em $\mathbb{Q}$ também são válidas para a multiplicação em $\mathbb{R}$. Sendo assim, a multiplicação em $\mathbb{R}$ é associativa, comutativa, tem elemento neutro, que é o 1, cada um de seus elementos, exceto o zero, possui um inverso e é regular para a multiplicação e também é distributiva tanto em relação à adição quanto em relação à subtração.

Divisão

Assim como na divisão em $\mathbb{Q}$, a divisão em $\mathbb{R}$ possui apenas uma propriedade elementar que é:

$\mathrm{D}_{\mathbb{R}1}$) **(Elementos regulares)** Todos os números reais não-nulos são regulares para a divisão, isto é, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$, com $z \neq 0$ fixo, temos

$$z \div x = z \div y \Longrightarrow x = y$$

e, analogamente,

$$x \div z = y \div z \Longrightarrow x = y\ .$$

Exemplo 1.5.7. Temos que, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$,

$$x \div \frac{2}{3} = y \div \frac{2}{3} \Longrightarrow x = y$$

e, analogamente,

$$\frac{2}{3} \div x = \frac{2}{3} \div y \Longrightarrow x = y\ .$$

Assim, o real $\dfrac{2}{3}$ é regular para a divisão em $\mathbb{R}$.

A divisão em $\mathbb{R}$ não é associativa, pois em geral, $(x \div y) \div z \neq x \div (y \div z)$, com $x, y, z \in \mathbb{R}^*$. Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 1.5.8. Note que $(9 \div 3) \div \frac{1}{3} \neq 9 \div \left(3 \div \frac{1}{3}\right)$. De fato,

$(9 \div 3) \div \frac{1}{3} = 3 \div \frac{1}{3} = 9$, isto é, $(9 \div 3) \div \frac{1}{3} = 9$ e

$9 \div \left(3 \div \frac{1}{3}\right) = 9 \div 9 = 1$, ou seja, $9 \div \left(3 \div \frac{1}{3}\right) = 1$. Assim,

$(9 \div 3) \div \frac{1}{3} \neq 9 \div \left(3 \div \frac{1}{3}\right)$.

A divisão em $\mathbb{R}$ não é comutativa, pois $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^*$, com $x \neq y$, temos que $x \div y \neq y \div x$.

Exemplo 1.5.9. Observe que $3 \div \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \div 3$. De fato, $3 \div \frac{1}{2} = 6$ e $\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$.

A divisão em $\mathbb{R}$ não possui elemento neutro, isto é, não existe um número real e tal que

$$e \div x = x \quad \text{e} \quad x \div e = x,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^*.$$

O número real 1 satisfaz apenas a segunda igualdade, ou seja, ele é apenas o elemento neutro à direita para a divisão em $\mathbb{R}$. Veja o exemplo e o contra-exemplo abaixo.

Exemplo 1.5.10. Note que $-2 \div 1 = -2$ e, em geral, $x \div 1 = x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Por isto é que dizemos que o 1 é o elemento neutro à direita para a divisão em $\mathbb{R}$.

Contra-exemplo 1.5.2. Observe que $1 \div (-2) = -\frac{1}{2}$. Como $-2 \neq \left(-\frac{1}{2}\right)$, portanto o 1 não é um elemento neutro à esquerda para a divisão em $\mathbb{R}$.

Os elementos do conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais não são simetrizáveis para a divisão. De fato, conforme sabemos, não existe um elemento neutro e para a divisão em $\mathbb{R}$. Portanto, dado $x \in \mathbb{R}$, não existe $x' \in \mathbb{R}$ tal que $x \div x' = e = x' \div x$. Lembrando que o simétrico de um número real x em relação à divisão é o número real x' que verifica a igualdade acima.

A divisão em $\mathbb{R}$ não é distributiva em relação à adição, subtração e multiplicação, e vice-versa. Veja os exemplos a seguir.

Exemplo 1.5.11. Observe que $3 \div \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) \neq \left(3 \div \frac{1}{4}\right) + \left(3 \div \frac{3}{4}\right)$. De fato,

$$3 \div \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) = 3 \div 1 = 3 \quad \text{e} \quad \left(3 \div \frac{1}{4}\right) + \left(3 \div \frac{3}{4}\right) = 12 + 4 = 16.$$

Portanto, a divisão não é distributiva em relação à adição.

Exemplo 1.5.12. Veja que $2 + \left(\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}\right) \neq \left(2 + \frac{1}{2}\right) \div \left(2 + \frac{1}{2}\right)$. De fato,

$$2 + \left(\frac{1}{2} \div \frac{1}{2}\right) = 2 + 1 = 3 \quad \text{e} \quad \left(2 + \frac{1}{2}\right) \div \left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} \div \frac{5}{2} = 1.$$

Dessa forma vemos que a adição não é distributiva em relação à divisão.

Exemplo 1.5.13. Note que $\frac{1}{3} \div \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) \neq \left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} \div \frac{2}{3}\right)$. De fato,

$$\frac{1}{3} \div \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} \div \left(-\frac{1}{3}\right) = -1 \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{3} \div \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} \div \frac{2}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a divisão não é distributiva em relação à subtração.

Exemplo 1.5.14. Observe que $4 - (2 \div 8) \neq (4 - 2) \div (4 - 8)$. De fato, $4 - (2 \div 8) = 4 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{15}{4}$ e $(4 - 2) \div (4 - 8) = 2 \div (-4) = -\dfrac{1}{2}$. Assim, a subtração não é distributiva em relação à divisão.

Exemplo 1.5.15. Note que $2 \div \left(3 \cdot \dfrac{1}{3}\right) \neq (2 \div 3) \cdot \left(2 \div \dfrac{1}{3}\right)$. De fato,

$$2 \div \left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) = 2 \div 1 = 2 \quad \text{e} \quad (2 \div 3) \cdot \left(2 \div \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{12}{3} = 4.$$

Dessa forma podemos notar que a divisão não é distributiva em relação à multiplicação.

Exemplo 1.5.16. Veja que $\dfrac{2}{3} \cdot \left(3 \div \dfrac{1}{3}\right) \neq \left(\dfrac{2}{3} \cdot 3\right) \div \left(\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{3}\right)$. De fato,

$$\frac{2}{3} \cdot \left(3 \div \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot 9 = \frac{18}{3} = 6 \quad \text{e} \quad \left(\frac{2}{3} \cdot 3\right) \div \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) = 2 \div \frac{2}{9} = 9.$$

Portanto, a multiplicação não é distributiva em relação à divisão.

Assim finalizamos o primeiro capítulo deste trabalho. No próximo capítulo, estudaremos especificamente sobre os números complexos.

Capítulo 2

Os Números Complexos

No capítulo anterior, falamos da parte histórica e das operações fundamentais de cada conjunto numérico, com exceção do conjunto dos números complexos. Neste capítulo, falaremos exclusivamente sobre os números complexos, começando pelo surgimento destes números, depois estudaremos as operações sobre os números complexos e, por fim, apresentaremos algumas representações geométricas dos números complexos.

No desenvolvimento deste capítulo foram utilizadas as referências [2], [4], [6], [7], [8] e [12].

2.1 O Surgimento dos Números Complexos

Durante a idade média, os matemáticos italianos exploraram vários tipos de equações algébricas tentando propor fórmulas para a solução dessas equações. Contudo, eles esbarraram em equações do tipo $x^2 + 2 = 0$. Eles consideravam na época que estas equações não tinham solução, pois para eles não havia um número que elevado ao quadrado resultasse em um número negativo.

No entanto, durante o século XVI, o matemático Girolamo Cardano, estudando as soluções de equações cúbicas, isto é, equações do terceiro grau, ignorou as considerações feitas pelos matemáticos dessa época. Ele apresentou uma fórmula geral para resolver a equação cúbica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$. Cardano mostrou que uma raíz da equação cúbica $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ é obtida pela fórmula

$$P + Q - \left(\frac{a}{3}\right), \tag{2.1}$$

onde

$$P = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} \quad \text{e} \quad Q = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}},$$

sendo $p = b - \left(\dfrac{a^2}{3}\right)$ e $q = \dfrac{2a^3}{27} - \dfrac{ab}{3} + c.$

Quando ele aplicou a fórmula geral de resolução de equações do 3º grau, apresentada em (2.1), na equação $x^3 = 15x + 4$, obteve que uma de suas raízes é

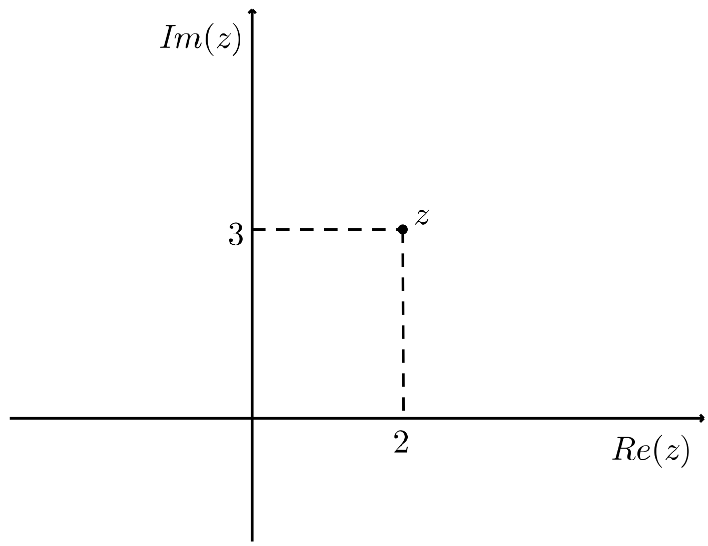
$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}. \tag{2.2}$$

Mas, sabendo que $x = 4$ é uma raíz da equação $x^3 = 15x + 4$ ele percebeu que as raízes cúbicas na igualdade (2.2) devem ser $(2 + \sqrt{-1})$ e $(2 - \sqrt{-1})$, pois elevando-as ao cubo resulta em $(2 + 11\sqrt{-1})$ e $(2 - 11\sqrt{-1})$, respectivamente, e além disso a soma dessas raízes cúbicas é igual a raiz $x = 4$ da equação. Logo, os números complexos entraram na Matemática pela equação do 3º grau.

Cardano chamava as raízes quadradas de números negativos de números fictícios. O resultado das resoluções das equações do 3º grau por Cardano foi a possibilidade da existência de novos números, o que mais tarde foram chamados de números imaginários. Atualmente, os matemáticos se referem a $\sqrt{-1}$ como unidade imaginária (i). Assim surgiram os números complexos, cuja forma algébrica é $a + bi$.

Na representação algébrica de um número complexo $z = a + bi$, a e b são números reais. O número real a é denominado parte real do número complexo z, e indicado por $Re(z) = a$, e o número real b é chamado parte imaginária de z, e indicado por $Im(z) = b$. Quando o número real b for nulo, z é um número real, e quando o número real a for nulo, com $b \neq 0$, z é um número imaginário puro.

Posteriormente, no século XIX, dois matemáticos chamados Argand e Gauss desenvolveram a ideia de representar um número complexo em um sistema de coordenadas. No caso dos números reais, eles podem ser representados por uma reta (a reta real). Já no caso dos complexos, como eles são formados por números reais e imaginários ($a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$), houve a necessidade de acrescentar mais um eixo à reta real para ser possível representá-los (o eixo imaginário). Por exemplo, o número complexo $z = 2 + 3i$, cuja parte real é igual a 2 e a parte imaginária é igual a 3, é representado geometricamente pelo seguinte gráfico:



Conforme acabamos de ver, a representação de um número complexo $z = a + bi$ é realizada em um plano. Este plano é denominado plano Argand - Gauss.

Conclui-se que, como os números complexos possuem parte real e parte imaginária, logo ele é uma extensão dos números reais. Em outras palavras, ele engloba todo o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e também todas as raízes de índice par de números negativos. Os números complexos são representados pelo símbolo $\mathbb{C}$. Assim, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

2.2 Operações Fundamentais com os Números Complexos

Nesta seção falaremos das operações fundamentais com os números complexos e suas respectivas propriedades elementares.

2.2.1 Adição

Na seção 2.1 vimos que um número complexo z qualquer pode ser escrito sob a forma $z = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e a constante i, denominada unidade imaginária dos números complexos, é definida por $i = \sqrt{-1}$; de onde segue que $i^2 = -1$. Esta representação é denominada forma algébrica de um número complexo.

A adição de dois números complexos quaisquer $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ é definida por

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i.$$

Essa soma pode ser obtida através da adição de polinômios. Para isto basta considerar os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ como sendo dois binômios na variável i. Assim temos

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i,$$

ou seja,

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i.$$

Exemplo 2.2.1. Sendo $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 3 - 5i$, temos

$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (3 - 5i) = (2 + 3) + (3 - 5)i = 5 - 2i$, isto é,

$z_1 + z_2 = 5 - 2i$.

A adição em $\mathbb{C}$ possui as seguintes propriedades elementares:

$\mathrm{A}_{\mathbb{C}1}$) **(Associativa)** Para quaisquer $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$,

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3).$$

Demonstração. Sejam $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ e $z_3 = v + wi$ três números complexos quaisquer. Assim,

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2) + z_3 &= [(a + bi) + (c + di)] + (v + wi) \\ &= [(a + c) + (b + d)i] + (v + wi) \\ &= [(a + c) + v] + [(b + d) + w]i \ ,\end{aligned}$$

isto é,

$$(z_1 + z_2) + z_3 = [(a + c) + v] + [(b + d) + w]i \tag{2.3}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}z_1 + (z_2 + z_3) &= (a + bi) + [(c + di) + (v + wi)] \\ &= (a + bi) + [(c + v) + (d + w)i] \\ &= [a + (c + v)] + [b + (d + w)]i \\ &= [(a + c) + v] + [(b + d) + w]i \ ,\end{aligned}$$

ou seja,

$$z_1 + (z_2 + z_3) = [(a + c) + v] + [(b + d) + w]i. \tag{2.4}$$

Por (2.3) e (2.4) segue que $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Logo, a adição em $\mathbb{C}$ é associativa. $\square$

Exemplo 2.2.2. Observe que, para $z_1 = 3 + 2i, z_2 = 5 - 7i$ e $z_3 = 2i$, temos $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$. De fato,

$$\begin{aligned}(z_1 + z_2) + z_3 &= [(3 + 2i) + (5 - 7i)] + 2i \\ &= [(3 + 5) + (2 - 7)i] + 2i \\ &= (8 - 5i) + 2i \\ &= 8 + (-5 + 2)i \\ &= 8 - 3i\ ,\end{aligned}$$

ou seja,

$$(z_1 + z_2) + z_3 = 8 - 3i$$

e também,

$$\begin{aligned}z_1 + (z_2 + z_3) &= (3 + 2i) + [(5 - 7i) + (2i)] \\ &= (3 + 2i) + [5 + (-7 + 2)i] \\ &= (3 + 2i) + (5 - 5i) \\ &= (3 + 5) + (2 - 5)i \\ &= 8 - 3i\ ,\end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 + (z_2 + z_3) = 8 - 3i.$$

Assim, $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$.

$\mathrm{A}_{\mathbb{C}2}$**) (Comutativa)** Para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

Demonstração. Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos quaisquer.

Logo,

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (a+bi)+(c+di)\\
&= (a+c)+(b+d)i\\
&= (c+a)+(d+b)i\\
&= (c+di)+(a+bi)\\
&= z_2 + z_1 \ ,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$z_1 + z_2 \ = \ z_2 + z_1 \ , \forall \ z_1, z_2 \in \mathbb{C} \ .$$

Portanto, a adição em $\mathbb{C}$ é comutativa. $\square$

Exemplo 2.2.3. Veja que, para $z_1 = 2 - 2i$ e $z_2 = 5 + 3i$, temos $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$. De fato,

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= (2-2i)+(5+3i)\\
&= (2+5)+(-2+3)i\\
&= 7 + i \ ,
\end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 + z_2 \ = \ 7 + i.$$

E também,

$$\begin{aligned}
z_2 + z_1 &= (5+3i)+(2-2i)\\
&= (5+2)+(3-2)i\\
&= 7 + i \ ,
\end{aligned}$$

isto é,

$$z_2 + z_1 \ = \ 7 + i.$$

Portanto, $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$.

$A_{\mathbb{C}3}$) **(Elemento neutro)** O elemento neutro para a adição em $\mathbb{C}$ é o zero, $0 = 0 + 0i$.

Demonstração. De fato, $\forall\ (a + bi) \in \mathbb{C}$, temos

$$(a + bi) + (0 + 0i) = (a + 0) + (b + 0)i = a + bi,$$

ou seja,

$$(a + bi) + (0 + 0i) = a + bi.$$

Analogamente verificamos que $(0 + 0i) + (a + bi) = a + bi$. Assim,
$(a + bi) + (0 + 0i) = a + bi = (0 + 0i) + (a + bi)$. Portanto $0 = 0 + 0i$ é o elemento neutro para a adição em $\mathbb{C}$. $\square$

Exemplo 2.2.4. Note que $(2 + 4i) + (0 + 0i) = 2 + 4i = (0 + 0i) + (2 + 4i)$. De fato,
$(2 + 4i) + (0 + 0i) = (2 + 0) + (4 + 0)i = 2 + 4i$. E também,
$(0 + 0i) + (2 + 4i) = (0 + 2) + (0 + 4)i = 2 + 4i$.

$A_{\mathbb{C}4}$) **(Elementos simetrizáveis)** Todo número complexo possui um oposto que também é um número complexo.

Demonstração. Seja $z = a + bi$ um número complexo qualquer. Seu oposto, indicado por $-z$, é o número complexo $-z = -a + (-b)i$. De fato, temos

$$(a + bi) + [-a + (-b)i] = [a + (-a)] + [b + (-b)]i = 0 + 0i,$$

ou seja,

$$(a + bi) + [-a + (-b)i] = 0 + 0i.$$

Analogamente,

$$[-a + (-b)i] + (a + bi) = [(-a) + a] + [(-b) + b]i = 0 + 0i,$$

isto é,

$$[-a + (-b)i] + (a + bi) = 0 + 0i.$$

Logo, para todo $z = (a + bi) \in \mathbb{C}$, temos $-z = [-a + (-b)i] \in \mathbb{C}$ de modo que $(a + bi) + [-a + (-b)i] = [-a + (-b)i] + (a + bi) = 0 + 0i$. Assim, concluímos que o oposto de um número complexo $z = a + bi$ é o número complexo $-z = -a + (-b)i$.

$\square$

Exemplo 2.2.5. Note que o oposto do número complexo $z = 3 + 5i$ é o número complexo $-z = -3 + (-5)i$. De fato,

$(3 + 5i) + [-3 + (-5)i] = (3 - 3) + (5 - 5)i = 0 + 0i = 0$. Analogamente verificamos que $[-3 + (-5)i] + (3 + 5i) = 0$.

$A_{\mathbb{C}5}$) **(Elementos regulares)** Todos os números complexos são regulares para a adição, isto é, $\forall\ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, com z_3 fixo, temos

$$z_3 + z_1 = z_3 + z_2 \Longrightarrow z_1 = z_2$$

e também,

$$z_1 + z_3 = z_2 + z_3 \Longrightarrow z_1 = z_2.$$

Demonstração. Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ quaisquer, com z_3 fixo. Logo, pela propriedade ($A_{\mathbb{C}4}$), existe $-z_3 \in \mathbb{C}$. Assim,

$$\begin{aligned} z_1 + z_3 = z_2 + z_3 &\Longrightarrow (z_1 + z_3) + (-z_3) = (z_2 + z_3) + (-z_3) \\ &\Longrightarrow z_1 + [z_3 + (-z_3)] = z_2 + [z_3 + (-z_3)] \\ &\Longrightarrow z_1 + 0 = z_2 + 0 \\ &\Longrightarrow z_1 = z_2 \end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 + z_3 = z_2 + z_3 \Longrightarrow z_1 = z_2.$$

Analogamente, verificamos que $z_3 + z_1 = z_3 + z_2 \Longrightarrow z_1 = z_2$. Dessa forma concluímos que todo número complexo é regular para a adição. $\square$

Exemplo 2.2.6. O número complexo $z = 1 + 2i$ é regular para a adição, porque, $\forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, temos

$$(1 + 2i) + z_1 = (1 + 2i) + z_2 \Longrightarrow z_1 = z_2$$

e também,

$$z_1 + (1 + 2i) = z_2 + (1 + 2i) \Longrightarrow z_1 = z_2.$$

2.2.2 Subtração

A subtração de dois números complexos quaisquer z_1 e z_2, sendo $z_1 = (a + bi)$ e $z_2 = (c + di)$, é definida por

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i.$$

Analogamente ao que vimos na adição em $\mathbb{C}$, podemos obter essa diferença através da subtração de polinômios. Para isto basta considerar os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ como sendo dois binômios na variável i. Assim temos

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (a + bi) - (c + di) \\ &= (a - c) + (b - d)i, \end{aligned}$$

ou seja,

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i.$$

Exemplo 2.2.7. Dados $z_1 = 3 + 2i$ e $z_2 = 4 - 9i$, temos

$z_1 - z_2 = (3-4) + [2-(-9)]i = -1 + (2+9)i = -1 + 11i$, ou seja,
$z_1 - z_2 = -1 + 11i$.

A subtração em $\mathbb{C}$, assim como a subtração em $\mathbb{R}$, possui apenas uma propriedade elementar válida, que é a seguinte:

$S_{\mathbb{C}1}$) **(Elementos regulares)** Todos os números complexos são regulares para a subtração, isto é, para quaisquer $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, com z_3 fixo, temos

$$z_3 - z_1 = z_3 - z_2 \Longrightarrow z_1 = z_2$$

e também,

$$z_1 - z_3 = z_2 - z_3 \Longrightarrow z_1 = z_2.$$

Demonstração. Sejam $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ e $z_3 = v + wi$ três números complexos quaisquer, com $z_3 = v + wi$ fixo. Logo, pela propriedade ($A_{\mathbb{C}4}$), existe $-z_3 = -v + (-w)i \in \mathbb{C}$. Assim,

$$\begin{aligned} z_1 - z_3 = z_2 - z_3 \quad &\Longrightarrow \quad (z_1 - z_3) + z_3 = (z_2 - z_3) + z_3 \\ &\Longrightarrow \quad z_1 + (-z_3 + z_3) = z_2 + (-z_3 + z_3) \\ &\Longrightarrow \quad z_1 + 0 = z_2 + 0 \\ &\Longrightarrow \quad z_1 = z_2 \ , \end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 - z_3 = z_2 - z_3 \quad \Longrightarrow \quad z_1 = z_2.$$

Analogamente verificamos que $z_3 - z_1 = z_3 - z_2 \Longrightarrow z_1 = z_2$. Portanto, todo número complexo é regular para a subtração em $\mathbb{C}$. □

Exemplo 2.2.8. O número complexo $z = 4 + 3i$ é regular para a subtração, pois, para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, temos

$$(4+3i) - z_1 = (4+3i) - z_2 \Longrightarrow z_1 = z_2$$

e também,

$$z_1 - (4+3i) = z_2 - (4+3i) \Longrightarrow z_1 = z_2.$$

A subtração em $\mathbb{C}$ não é associativa, pois em geral, $(z_1 - z_2) - z_3 \neq z_1 - (z_2 - z_3)$, com $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Observe o exemplo abaixo:

Exemplo 2.2.9. Sejam $z_1 = 3 - 2i, z_2 = 4 + 5i$ e $z_3 = 1 + i$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
(z_1 - z_2) - z_3 &= [(3-2i) - (4+5i)] - (1+i) \\
&= [(3-4) + (-2-5)i] - (1+i) \\
&= (-1-7i) - (1+i) \\
&= (-1-1) + (-7-1)i \\
&= -2-8i,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(z_1 - z_2) - z_3 = -2-8i.$$

E, por outro lado,

$$\begin{aligned}
z_1 - (z_2 - z_3) &= (3-2i) - [(4+5i) - (1+i)] \\
&= (3-2i) - [(4-1) + (5-1)i] \\
&= (3-2i) - (3+4i) \\
&= (3-3) + (-2-4)i \\
&= 0 - 6i = -6i\ ,
\end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 - (z_2 - z_3) = -6i.$$

Portanto, $(z_1 - z_2) - z_3 \neq z_1 - (z_2 - z_3)$.

A subtração em $\mathbb{C}$ não é comutativa, pois para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, com $z_1 \neq z_2$, $z_1 - z_2 \neq z_2 - z_1$.

Exemplo 2.2.10. Veja que, para $z_1 = 4 - 3i$ e $z_2 = 2 + 2i$, temos

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (4 - 3i) - (2 + 2i) \\ &= (4 - 2) + (-3 - 2)i \\ &= 2 - 5i, \end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 - z_2 = 2 - 5i.$$

E, por outro lado, temos

$$\begin{aligned} z_2 - z_1 &= (2 + 2i) - (4 - 3i) \\ &= (2 - 4) + (2 + 3)i \\ &= -2 + 5i, \end{aligned}$$

ou seja,

$$z_2 - z_1 = -2 + 5i.$$

Logo, $z_1 - z_2 \neq z_2 - z_1$.

A subtração em $\mathbb{C}$ não possui elemento neutro, ou seja, não há um número $e \in \mathbb{C}$ que satisfaça simultaneamente as duas igualdades abaixo

$$e - z = z \qquad \text{e} \qquad z - e = z, \ \forall\ z \in \mathbb{C}.$$

O número complexo zero satisfaz apenas a segunda igualdade, ou seja, ele é apenas o elemento neutro à direita para a subtração em $\mathbb{C}$. De fato, para $z = a + bi$ qualquer, temos

$z - 0 = (a + bi) - (0 + 0i) = (a - 0) + (b - 0)i = a + bi = z$, ou seja,
$z - 0 = z, \ \forall\ z \in \mathbb{C}$.

Para ilustrar o que foi dito acima, observe o exemplo e o contra-exemplo a seguir.

Exemplo 2.2.11. Para $z = 3 + 2i$, temos

$z - 0 = (3 + 2i) - (0 + 0i) = (3 - 0) + (2 - 0)i = 3 + 2i = z$, isto é,

$z - 0 = z$.

Contra-exemplo 2.2.1. Utilizando o mesmo número complexo $z = 3+2i$ do exemplo anterior, temos

$0 - z = (0 + 0i) - (3 + 2i) = (0 - 3) + (0 - 2)i = -3 - 2i = -(3 + 2i) = -z$, ou seja,

$0 - z = -z$.

Como $-z \neq z$, logo $0 - z \neq z$. Assim concluímos que o zero não é um elemento neutro à esquerda para a subtração em $\mathbb{C}$.

Os elementos do conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos não são simetrizáveis para a subtração. De fato, conforme já sabemos, não existe um elemento neutro e para a subtração em $\mathbb{C}$. Dessa forma, $\forall\ z \in \mathbb{C}$, não existe $z' \in \mathbb{C}$ tal que $z - z' = e = z' - z$. Lembrando que z' seria o simétrico de z em relação à subtração em $\mathbb{C}$.

A subtração em $\mathbb{C}$ não é distributiva em relação à adição e vice-versa. Veja os exemplos a seguir.

Exemplo 2.2.12. Observe que

$(2 - 3i) - [(5 - i) + (3 + i)] \neq [(2 - 3i) - (5 - i)] + [(2 - 3i) - (3 + i)]$. De fato,

$$\begin{aligned}
(2 - 3i) - [(5 - i) + (3 + i)] &= (2 - 3i) - [(5 + 3) + (-1 + 1)i] \\
&= (2 - 3i) - (8 + 0i) \\
&= (2 - 8) + (-3 + 0)i \\
&= [-6 + (-3)i]\ ,
\end{aligned}$$

isto é,

$$(2 - 3i) - [(5 - i) + (3 + i)] = [-6 + (-3)i]$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}
[(2-3i)-(5-i)]+[(2-3i)-(3+i)] &= [(2-5)+(-3+1)i]+[(2-3)+(-3+1)i] \\
&= [-3+(-2)i]+[-1+(-4)i] \\
&= [(-3-1)+(-2-4)i] \\
&= [-4+(-6)i]\ ,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$[(2-3i)-(5-i)]+[(2-3i)-(3+i)] = [-4+(-6)i].$$

Assim, a subtração não é distributiva em relação à adição.

Exemplo 2.2.13. Note que

$(3+4i)+[(2-2i)-(3+2i)] \neq [(3+4i)+(2-2i)]-[(3+4i)+(3+2i)]$. De fato,

$$\begin{aligned}
(3+4i)+[(2-2i)-(3+2i)] &= (3+4i)+[(2-3)+(-2+2)i] \\
&= (3+4i)+(-1+0i) \\
&= (3-1)+(4+0)i \\
&= 2+4i\ ,
\end{aligned}$$

isto é,

$$(3+4i)+[(2-2i)-(3+2i)] = 2+4i$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}
[(3+4i)+(2-2i)]-[(3+4i)+(3+2i)] &= [(3+2)+(4-2)i]-[(3+3)+(4+2)i] \\
&= (5+2i)-(6+6i) \\
&= (5-6)+(2-6)i \\
&= [-1+(-4)i]\ ,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$[(3+4i)+(2-2i)]-[(3+4i)+(3+2i)] = [-1+(-4)i].$$

Portanto, a adição não é distributiva em relação à subtração.

2.2.3 Multiplicação

A multiplicação de dois números complexos quaisquer z_1 e z_2, sendo $z_1 = (a + bi)$ e $z_2 = (c + di)$, é definida por

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Esse produto pode ser obtido através da multiplicação de polinômios. Para isto basta considerar os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ como sendo dois binômios na variável i, lembrando que $i^2 = -1$. Observe o desenvolvimento abaixo.

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a + bi) \cdot (c + di) \\ &= ac + a(di) + (bi)c + (bi)(di) \\ &= ac + (ad)i + b(ic) + [b(id)]i \\ &= ac + (ad)i + b(ci) + [b(di)]i \\ &= ac + (ad)i + (bc)i + (bd)(i \cdot i) \\ &= ac + (ad)i + (bc)i + (bd) \cdot i^2 \\ &= ac + (ad)i + (bc)i - (bd) \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)i \ , \end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Exemplo 2.2.14. Sendo $z_1 = 4 - 5i$ e $z_2 = 3 + 2i$, temos

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (4-5i)\cdot(3+2i) \\
&= [4\cdot 3-(-5)\cdot 2]+[4\cdot 2+(-5\cdot 3)]i \\
&= [12-(-10)]+[8+(-15)]i \\
&= 12+10+(8-15)i \\
&= 22+(-7)i\ ,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$z_1 \cdot z_2 = 22+(-7)i.$$

A multiplicação em $\mathbb{C}$ possui as seguintes propriedades elementares:

$\mathrm{M}_{\mathbb{C}1}$) **(Associativa)** Para quaisquer $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}, (z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

Demonstração. Sejam $z_1 = a+bi, z_2 = c+di$ e $z_3 = v+wi$ três números complexos quaisquer. Assim,

$$\begin{aligned}
(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 &= [(a+bi)\cdot(c+di)]\cdot(v+wi) \\
&= [(ac-bd)+(ad+bc)i]\cdot(v+wi) \\
&= [(ac-bd)\cdot v-(ad+bc)\cdot w]+[(ac-bd)\cdot w+(ad+bc)\cdot v]i \\
&= [(ac)v-(bd)v-(ad)w-(bc)w]+[(ac)w-(bd)w+(ad)v+(bc)v]i\ ,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
(z_1 \cdot z_2)\cdot z_3 &= [(ac)v-(bd)v-(ad)w-(bc)w]+ \\
&+ [(ac)w-(bd)w+(ad)v+(bc)v]i
\end{aligned} \tag{2.5}$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= (a+bi) \cdot [(c+di) \cdot (v+wi)] \\
&= (a+bi) \cdot [(cv-dw)+(cw+dv)i] \\
&= [a \cdot (cv-dw) - b \cdot (cw+dv)] + [a \cdot (cw+dv) + b \cdot (cv-dw)]i \\
&= [a(cv)-a(dw)-b(cw)-b(dv)] + [a(cw)+a(dv)+b(cv)-b(dw)]i \\
&= [(ac)v-(ad)w-(bc)w-(bd)v] + [(ac)w+(ad)v+(bc)v-(bd)w]i \\
&= [(ac)v-(bd)v-(ad)w-(bc)w] + [(ac)w-(bd)w+(ad)v+(bc)v]i \ ,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= [(ac)v-(bd)v-(ad)w-(bc)w] + \\
&+ [(ac)w-(bd)w+(ad)v+(bc)v]i. \qquad (2.6)
\end{aligned}$$

Por (2.5) e (2.6) concluímos que $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$, para quaisquer $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Logo a multiplicação em $\mathbb{C}$ é associativa. □

Exemplo 2.2.15. Note que, para $z_1 = 3+8i$, $z_2 = 1-3i$ e $z_3 = 1+5i$, temos $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$. De fato,

$$\begin{aligned}
(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 &= [(3+8i) \cdot (1-3i)] \cdot (1+5i) \\
&= [3 \cdot 1 - 8 \cdot (-3) + (3 \cdot (-3) + 8 \cdot 1)i] \cdot (1+5i) \\
&= [3+24+(-9+8)i] \cdot (1+5i) \\
&= (27-i) \cdot (1+5i) \\
&= [27 \cdot 1 - (-1) \cdot 5] + [27 \cdot 5 + (-1) \cdot 1]i \\
&= (27+5) + (135-1)i \\
&= 32+134i \ ,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = 32+134i$$

e também,

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= (3+8i) \cdot [(1-3i) \cdot (1+5i)] \\
&= (3+8i) \cdot [1 \cdot 1 - (-3) \cdot 5 + (1 \cdot 5 + (-3) \cdot 1)i] \\
&= (3+8i) \cdot [(1+15) + (5-3)i] \\
&= (3+8i) \cdot (16+2i) \\
&= [3 \cdot 16 - (8 \cdot 2)] + (3 \cdot 2 + 8 \cdot 16)i \\
&= 48 - 16 + (6+128)i \\
&= 32 + 134i \ ,
\end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = 32 + 134i.$$

Portanto, $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$.

M$_{\mathbb{C}2}$) **(Comutativa)** Para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

Demonstração. Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos quaisquer. Logo, por definição, temos

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

e, por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
z_2 \cdot z_1 &= (c+di) \cdot (a+bi) \\
&= (ca - db) + (cb + da)i \\
&= (ac - bd) + (bc + ad)i \\
&= (ac - bd) + (ad + bc)i \ ,
\end{aligned}$$

isto é,

$$z_2 \cdot z_1 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Dessa forma concluímos que $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$. Portanto, a multiplicação em $\mathbb{C}$ é comutativa. $\square$

Exemplo 2.2.16. Observe que, para $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 3 - 4i$, temos $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$. De fato,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (2 + 3i) \cdot (3 - 4i) \\ &= [2 \cdot 3 - 3 \cdot (-4)] + [2 \cdot (-4) + 3 \cdot 3]i \\ &= 6 + 12 + (-8 + 9)i \\ &= 18 + i \ , \end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 \cdot z_2 = 18 + i$$

e também,

$$\begin{aligned} z_2 \cdot z_1 &= (3 - 4i) \cdot (2 + 3i) \\ &= [3 \cdot 2 - (-4) \cdot 3] + [3 \cdot 3 + (-4) \cdot 2]i \\ &= 6 + 12 + (9 - 8)i \\ &= 18 + i \ , \end{aligned}$$

ou seja,

$$z_2 \cdot z_1 = 18 + i.$$

Portanto, $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$.

$M_{\mathbb{C}3}$) **(Elemento neutro)** O elemento neutro para a multiplicação em $\mathbb{C}$ é o $1 = 1+0i$.

Demonstração. De fato, para todo $z = a + bi \in \mathbb{C}$, temos

$$\begin{aligned} z \cdot 1 &= (a + bi) \cdot (1 + 0i) \\ &= (a \cdot 1 - b \cdot 0) + (a \cdot 0 + b \cdot 1)i \\ &= (a - 0) + (0 + b)i \\ &= a + bi \\ &= z \ , \end{aligned}$$

ou seja,

$$z \cdot 1 = z,$$

e, analogamente, verificamos que $1 \cdot z = z$.

Portanto, $z \cdot 1 = z = 1 \cdot z,\ \forall\ z = a + bi \in \mathbb{C}$. Logo, o número complexo $1 = 1 + 0i$ é o elemento neutro para a multiplicação em $\mathbb{C}$. $\square$

Exemplo 2.2.17. Note que para $z = 1 + 2i$, temos $z \cdot 1 = z = 1 \cdot z$. De fato,

$$\begin{aligned} z \cdot 1 &= (1 + 2i) \cdot (1 + 0i) \\ &= (1 \cdot 1 - 2 \cdot 0) + (1 \cdot 0 + 2 \cdot 1)i \\ &= (1 - 0) + (0 + 2)i \\ &= 1 + 2i \\ &= z\ , \end{aligned}$$

ou seja,

$$z \cdot 1 = z.$$

Analogamente verificamos que $1 \cdot z = z$.

$\mathrm{M}_{\mathbb{C}4}$) **(Elementos simetrizáveis)** Todo número complexo não-nulo possui um inverso que também é um número complexo não-nulo.

Demonstração. Seja $z = a + bi$ um número complexo não-nulo qualquer. Seu inverso, indicado por z^{-1}, é o número complexo $z^{-1} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{b}{a^2 + b^2}\ i$. De fato,

$$\begin{aligned} z \cdot z^{-1} &= (a + bi) \cdot \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2} i \right) \\ &= \left[a \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} - b \cdot \frac{(-b)}{a^2 + b^2} \right] + \left[a \cdot \frac{(-b)}{a^2 + b^2} + b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \right] i \\ &= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} \right) + \left(-\frac{ab}{a^2 + b^2} + \frac{ba}{a^2 + b^2} \right) i \end{aligned}$$

$$= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + \left(\frac{-ab+ba}{a^2+b^2}\right) i$$

$$= 1 + \left(\frac{0}{a^2+b^2}\right) i$$

$$= 1 + 0i = 1 \ ,$$

ou seja,

$$= z \cdot z^{-1} = 1.$$

Analogamente, verificamos que $z^{-1} \cdot z = 1$. Portanto, para todo $z \in \mathbb{C}^*$, existe $z^{-1} \in \mathbb{C}^*$ tal que $z \cdot z^{-1} = 1 = z^{-1} \cdot z$. $\square$

Exemplo 2.2.18. O inverso do número complexo $z = 2 + 3i$ é o número complexo $z^{-1} = \dfrac{2}{2^2+3^2} - \dfrac{3}{2^2+3^2} i = \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}\ i$, isto é,

$z^{-1} = \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13} i.$

$M_{\mathbb{C}5}$) **(Elementos regulares)** Todos os números complexos não-nulos são regulares para a multiplicação, ou seja, para quaisquer $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, com $z_3 \neq 0$ fixo, temos

$$z_3 \cdot z_1 = z_3 \cdot z_2 \Longrightarrow z_1 = z_2$$

e também,

$$z_1 \cdot z_3 = z_2 \cdot z_3 \Longrightarrow z_1 = z_2.$$

Demonstração. Sejam $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ e $z_3 = v + wi$ três números complexos não-nulos quaisquer, com $z_3 = v + wi$ fixo. Logo, pela propriedade ($M_{\mathbb{C}4}$) existe o inverso do número complexo não-nulo z_3, indicado por z_3^{-1}, que também é um número complexo não-nulo. Assim,

$$z_1 \cdot z_3 = z_2 \cdot z_3 \Longrightarrow (z_1 \cdot z_3) \cdot z_3^{-1} = (z_2 \cdot z_3) \cdot z_3^{-1}.$$

Aplicando a propriedade ($\mathrm{M}_{\mathbb{C}1}$) em ambos os membros da última igualdade, temos

$$(z_1 \cdot z_3) \cdot z_3^{-1} = (z_2 \cdot z_3) \cdot z_3^{-1} \Longrightarrow z_1 \cdot 1 = z_2 \cdot 1 \Longrightarrow z_1 = z_2.$$

Analogamente verificamos que $z_3 \cdot z_1 = z_3 \cdot z_2 \Longrightarrow z_1 = z_2$. Assim, concluímos que todo número complexo não-nulo é regular para a multiplicação. $\square$

Exemplo 2.2.19. O número complexo $z = 3 + 5i$ é regular para a multiplicação. Note que $z^{-1} = \dfrac{3}{3^2 + 5^2} - \dfrac{5}{3^2 + 5^2}i = \dfrac{3}{34} - \dfrac{5}{34}i$, ou seja, $z^{-1} = \dfrac{3}{34} - \dfrac{5}{34}i$. Logo, para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, temos

$$(3+5i) \cdot z_1 = (3+5i) \cdot z_2 \Longrightarrow \left(\frac{3}{34} - \frac{5}{34}i\right) \cdot [(3+5i) \cdot z_1] = \left(\frac{3}{34} - \frac{5}{34}i\right) \cdot [(3+5i) \cdot z_2]$$

$$\Longrightarrow \left[\left(\frac{3}{34} - \frac{5}{34}i\right) \cdot (3+5i)\right] \cdot z_1 = \left[\left(\frac{3}{34} - \frac{5}{34}i\right) \cdot (3+5i)\right] \cdot z_2$$

$$\Longrightarrow \left[\left(\frac{9}{34} + \frac{25}{34}\right) + \left(\frac{15}{34} - \frac{15}{34}\right)i\right] \cdot z_1 = \left[\left(\frac{9}{34} + \frac{25}{34}\right) + \left(\frac{15}{34} - \frac{15}{34}\right)i\right] \cdot z_2$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{34}{34} + 0i\right) \cdot z_1 = \left(\frac{34}{34} + 0i\right) \cdot z_2$$

$$\Longrightarrow 1 \cdot z_1 = 1 \cdot z_2 \Longrightarrow z_1 = z_2\ ,$$

isto é,

$$(3+5i) \cdot z_1 = (3+5i) \cdot z_2 \Longrightarrow z_1 = z_2.$$

$\mathrm{M}_{\mathbb{C}6}$) **(Distributiva da multiplicação em relação à adição)** Para quaisquer $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, temos

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3)$$

e também,

$$(z_2 + z_3) \cdot z_1 = (z_2 \cdot z_1) + (z_3 \cdot z_1).$$

Demonstração. Sejam $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ e $z_3 = v + wi$ três números complexos quaisquer. Logo,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (a + bi) \cdot [(c + di) + (v + wi)] \\ &= (a + bi) \cdot [(c + v) + (d + w)i] \\ &= [a \cdot (c + v) - b \cdot (d + w)] + [a \cdot (d + w) + b \cdot (c + v)]i \ , \end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = [a \cdot (c + v) - b \cdot (d + w)] + [a \cdot (d + w) + b \cdot (c + v)]i \tag{2.7}$$

e, por outro lado, temos

$$\begin{aligned} (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3) &= [(a + bi) \cdot (c + di)] + [(a + bi) \cdot (v + wi)] \\ &= [(ac - bd) + (ad + bc)i] + [(av - bw) + (aw + bv)i] \\ &= [(ac - bd) + (av - bw)] + [(ad + bc) + (aw + bv)]i \\ &= (ac + av - bd - bw) + (ad + aw + bc + bv)i \\ &= [a \cdot (c + v) - b \cdot (d + w)] + [a \cdot (d + w) + b \cdot (c + v)]i \ , \end{aligned}$$

ou seja,

$$(z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3) = [a \cdot (c + v) - b \cdot (d + w)] + [a \cdot (d + w) + b \cdot (c + v)]i. \tag{2.8}$$

Por (2.7) e (2.8) segue que

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3), \forall \ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

Analogamente demonstramos que $(z_2 + z_3) \cdot z_1 = (z_2 \cdot z_1) + (z_3 \cdot z_1)$. Portanto, em $\mathbb{C}$, a multiplicação é distributiva em relação à adição. $\square$

Exemplo 2.2.20. Note que para $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 4 + i$ e $z_3 = 3 + 5i$, temos $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3)$ e também $(z_2 + z_3) \cdot z_1 = (z_2 \cdot z_1) + (z_3 \cdot z_1)$. De fato,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 + z_3) &= (3+2i) \cdot [(4+i) + (3+5i)] \\ &= (3+2i) \cdot [(4+3) + (1+5)i] \\ &= (3+2i) \cdot (7+6i) \\ &= (3 \cdot 7 - 2 \cdot 6) + (3 \cdot 6 + 2 \cdot 7)i \\ &= (21 - 12) + (18 + 14)i \\ &= 9 + 32i \ , \end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = 9 + 32i$$

e também,

$$\begin{aligned} (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3) &= [(3+2i) \cdot (4+i)] + [(3+2i) \cdot (3+5i)] \\ &= [(3 \cdot 4 - 2 \cdot 1) + (3 \cdot 1 + 2 \cdot 4)i] + [(3 \cdot 3 - 2 \cdot 5) + (3 \cdot 5 + 2 \cdot 3)i] \\ &= [(12 - 2) + (3 + 8)i] + [(9 - 10) + (15 + 6)i] \\ &= (10 + 11i) + (-1 + 21i) \\ &= (10 - 1) + (11 + 21)i \\ &= 9 + 32i \ , \end{aligned}$$

ou seja,

$$(z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3) = 9 + 32i.$$

Logo, $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = (z_1 \cdot z_2) + (z_1 \cdot z_3)$.

Analogamente verificamos que $(z_2 + z_3) \cdot z_1 = (z_2 \cdot z_1) + (z_3 \cdot z_1)$.

$\mathrm{M}_{\mathbb{C}7}$) **(Distributiva da multiplicação em relação à subtração)** Para quaisquer $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, temos

$$z_1 \cdot (z_2 - z_3) = (z_1 \cdot z_2) - (z_1 \cdot z_3)$$

e também,

$$(z_2 - z_3) \cdot z_1 = (z_2 \cdot z_1) - (z_3 \cdot z_1).$$

Demonstração. Sejam $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ e $z_3 = v + wi$ três números complexos quaisquer. Assim,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot (z_2 - z_3) &= (a + bi) \cdot [(c + di) - (v + wi)] \\ &= (a + bi) \cdot [(c - v) + (d - w)i] \\ &= [a \cdot (c - v) - b \cdot (d - w)] + [a \cdot (d - w) + b \cdot (c - v)]i \ , \end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 \cdot (z_2 - z_3) = [a \cdot (c - v) - b \cdot (d - w)] + [a \cdot (d - w) + b \cdot (c - v)]i \tag{2.9}$$

e, por outro lado, temos

$$\begin{aligned} (z_1 \cdot z_2) - (z_1 \cdot z_3) &= [(a + bi) \cdot (c + di)] - [(a + bi) \cdot (v + wi)] \\ &= [(ac - bd) + (ad + bc)i] - [(av - bw) + (aw + bv)i] \\ &= [(ac - bd) - (av - bw)] + [(ad + bc) - (aw + bv)]i \\ &= (ac - bd - av + bw) + (ad + bc - aw - bv)i \\ &= (ac - av - bd + bw) + (ad - aw + bc - bv)i \\ &= [a \cdot (c - v) - b \cdot (d - w)] + [a \cdot (d - w) + b \cdot (c - v)]i \ , \end{aligned}$$

ou seja,

$$(z_1 \cdot z_2) - (z_1 \cdot z_3) = [a \cdot (c - v) - b \cdot (d - w)] + [a \cdot (d - w) + b \cdot (c - v)]i. \tag{2.10}$$

Por (2.9) e (2.10) segue que

$$z_1 \cdot (z_2 - z_3) = (z_1 \cdot z_2) - (z_1 \cdot z_3), \forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}.$$

Analogamente demonstramos que $(z_2 - z_3) \cdot z_1 = (z_2 \cdot z_1) - (z_3 \cdot z_1)$. Portanto, em $\mathbb{C}$, a multiplicação é distributiva em relação à subtração. $\square$

Exemplo 2.2.21. Para $z_1 = 2 - 4i, z_2 = 5 - 2i$ e $z_3 = -3 + 2i$, temos $z_1 \cdot (z_2 - z_3) = (z_1 \cdot z_2) - (z_1 \cdot z_3)$ e também, $(z_2 - z_3) \cdot z_1 = (z_2 \cdot z_1) - (z_3 \cdot z_1)$. De fato,

$$\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 - z_3) &= (2 - 4i) \cdot [(5 - 2i) - (-3 + 2i)] \\
&= (2 - 4i) \cdot [(5 - (-3)) + (-2 - 2)i] \\
&= (2 - 4i) \cdot [(5 + 3) + (-4)i] \\
&= (2 - 4i) \cdot (8 - 4i) \\
&= [2 \cdot 8 - (-4) \cdot (-4)] + [2 \cdot (-4) + (-4) \cdot 8]i \\
&= (16 - 16) + (-8 - 32)i \\
&= 0 - 40i = -40i\ ,
\end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 \cdot (z_2 - z_3) = -40i$$

e também,

$$\begin{aligned}
(z_1 \cdot z_2) - (z_1 \cdot z_3) &= [(2 - 4i) \cdot (5 - 2i)] - [(2 - 4i) \cdot (-3 + 2i)] \\
&= [(2 \cdot 5 - (-4) \cdot (-2)) + (2 \cdot (-2) + (-4) \cdot 5)i] - \\
&= -[(2 \cdot (-3) - (-4) \cdot 2) + (2 \cdot 2 + (-4) \cdot (-3))i] \\
&= [(10 - 8) + (-4 - 20)i] - [(-6 - (-8)) + (4 + 12)i] \\
&= (2 - 24i) - [(-6 + 8) + 16i]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2-24i)-(2+16i)\\
&= (2-2)+(-24-16)i\\
&= 0-40i=-40i\ ,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$(z_1 \cdot z_2) - (z_1 \cdot z_3) = -40i.$$

Portanto, $z_1 \cdot (z_2 - z_3) = (z_1 \cdot z_2) - (z_1 \cdot z_3)$. Analogamente, verificamos que $(z_2 - z_3) \cdot z_1 = (z_2 \cdot z_1) - (z_3 \cdot z_1)$.

Antes de falarmos sobre a divisão de dois números complexos, precisamos antes definir o conjugado de um número complexo. Seja $z = a + bi$ um número complexo qualquer. O conjugado de z, denotado por $\overline{z}$, é dado por $\overline{z} = a - bi$.

2.2.4 Divisão

A divisão de um número complexo $z_1 = a + bi$ qualquer por um número complexo não-nulo $z_2 = c + di$ qualquer é definida por

$$z_1 \div z_2 = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} - \frac{ad-bc}{c^2+d^2}\ i.$$

Esse quociente pode ser obtido dividindo $z_1 = a+bi$ por $z_2 = c+di$ e multiplicando o numerador e o denominador da fração por $\overline{z_2} = c - di$, que é o conjugado do número complexo z_2. É necessário efetuar essa multiplicação para que o denominador da fração se torne um número real, possibilitando a divisão. Observe o desenvolvimento a seguir.

$$
\begin{aligned}
z_1 \div z_2 &= \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{(c-di)}{(c-di)} \\
&= \frac{a \cdot c - b \cdot (-d) + [\ a \cdot (-d) + b \cdot c\ ]\ i}{c \cdot c - d \cdot (-d) + [\ c \cdot (-d) + d \cdot c\ ]\ i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{ac + bd + (-ad + bc)\ i}{c^2 + d^2 + (-cd + dc)\ i} \\
&= \frac{ac + bd + (-ad + bc)\ i}{c^2 + d^2 + (-cd + cd)\ i} \\
&= \frac{ac + bd - (ad - bc)\ i}{c^2 + d^2 + 0i} \\
&= \frac{ac + bd - (ad - bc)\ i}{c^2 + d^2} \\
&= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}\ i\ ,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
z_1 \div z_2 = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} - \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}\ i.
$$

Exemplo 2.2.22. Para $z_1 = 3 + 4i$ e $z_2 = -5 + 2i$, temos

$$
\begin{aligned}
z_1 \div z_2 &= (3+4i) \div (-5+2i) \\
&= \frac{3\cdot(-5)+4\cdot 2}{(-5)^2+2^2} - \frac{3\cdot 2 - 4\cdot(-5)}{(-5)^2+2^2}\, i \\
&= \frac{-15+8}{25+4} - \frac{6+20}{25+4}\, i \\
&= -\,\frac{7}{29} - \frac{26}{29}\, i\ ,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$z_1 \div z_2 = -\,\frac{7}{29} - \frac{26}{29}\, i.$$

A divisão em $\mathbb{C}$, assim como a divisão em $\mathbb{R}$, possui apenas uma propriedade elementar válida, que é a seguinte:

D$_{\mathbb{C}1}$) **(Elementos regulares)** Todos os números complexos não-nulos são regulares para a divisão, ou seja, para quaisquer $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, com $z_3 \neq 0$ fixo, temos

$$z_3 \div z_1 = z_3 \div z_2 \Longrightarrow z_1 = z_2$$

e também,

$$z_1 \div z_3 = z_2 \div z_3 \Longrightarrow z_1 = z_2.$$

Demonstração: Sejam $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ quaisquer, com $z_3 \neq 0$ fixo. Suponhamos que $z_3 \div z_1 = z_3 \div z_2$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{z_3}{z_1} = \frac{z_3}{z_2} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{z_3}{z_1} \cdot \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} = \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{z_3 \cdot (z_1 \cdot z_2)}{z_1 \cdot z_3} = \frac{z_3 \cdot (z_1 \cdot z_2)}{z_2 \cdot z_3} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{(z_3 \cdot z_1) \cdot z_2}{z_1 \cdot z_3} = \frac{z_3 \cdot (z_2 \cdot z_1)}{z_2 \cdot z_3} \\
&\Longrightarrow \quad \frac{(z_1 \cdot z_3) \cdot z_2}{z_1 \cdot z_3} = \frac{(z_3 \cdot z_2) \cdot z_1}{z_2 \cdot z_3} \\
&\Longrightarrow \quad z_2 = \frac{(z_2 \cdot z_3) \cdot z_1}{z_2 \cdot z_3} \\
&\Longrightarrow \quad z_2 = z_1 \Longrightarrow z_1 = z_2 \ ,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$z_3 \div z_1 = z_3 \div z_2 \Longrightarrow z_1 = z_2.$$

Analogamente verificamos que $z_1 \div z_3 = z_2 \div z_3 \Longrightarrow z_1 = z_2$. Portanto, todo número complexo não-nulo é regular para a divisão em $\mathbb{C}$.

Exemplo 2.2.23. O número complexo $z = 3 + 2i$ é regular para a divisão, pois para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, temos

$$(3 + 2i) \div z_1 = (3 + 2i) \div z_2 \Longrightarrow z_1 = z_2$$

e também,

$$z_1 \div (3 + 2i) = z_2 \div (3 + 2i) \Longrightarrow z_1 = z_2.$$

A divisão em $\mathbb{C}$ não é associativa, pois em geral, $(z_1 \div z_2) \div z_3 \neq z_1 \div (z_2 \div z_3)$, com $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$. Observe o exemplo abaixo.

Exemplo 2.2.24. Sejam $z_1 = 2 - 3i, z_2 = 4 + 5i$ e $z_3 = 3 + 7i$. Assim, temos

$$
\begin{aligned}
(z_1 \div z_2) \div z_3 &= [(2-3i) \div (4+5i)] \div (3+7i) \\
&= \left(\frac{2 \cdot 4 + (-3) \cdot 5}{4^2 + 5^2} - \frac{2 \cdot 5 - (-3) \cdot 4}{4^2 + 5^2}\, i\right) \div (3+7i) \\
&= \left(\frac{8 - 15}{16 + 25} - \frac{10 + 12}{16 + 25}\, i\right) \div (3+7i) \\
&= \left(-\frac{7}{41} - \frac{22}{41}\, i\right) \div (3+7i) \\
&= \frac{-\frac{7}{41} \cdot 3 + \left(-\frac{22}{41}\right) \cdot 7}{3^2 + 7^2} - \left[\frac{-\frac{7}{41} \cdot 7 - \left(-\frac{22}{41}\right) \cdot 3}{3^2 + 7^2}\right] i \\
&= \frac{-\frac{21}{41} - \frac{154}{41}}{9 + 49} - \left(\frac{-\frac{49}{41} - \frac{66}{41}}{9 + 49}\right) i \\
&= \frac{-\frac{175}{41}}{58} - \left(\frac{-\frac{115}{41}}{58}\right) i \\
&= \frac{-\frac{175}{41}}{58} + \frac{\frac{115}{41}}{58}\, i \\
&= -\frac{175}{41} \cdot \frac{1}{58} + \frac{115}{41} \cdot \frac{1}{58}\, i \\
&= -\frac{175}{2378} + \frac{115}{2378}\, i\ ,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$(z_1 \div z_2) \div z_3 = -\frac{175}{2378} + \frac{115}{2378}\ i.$$

e por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
z_1 \div (z_2 \div z_3) &= (2-3i) \div [(4+5i) \div (3+7i)] \\[2ex]
&= (2-3i) \div \left(\frac{4\cdot 3 + 5\cdot 7}{3^2+7^2} - \frac{4\cdot 7 - 5\cdot 3}{3^2+7^2}\ i \right) \\[2ex]
&= (2-3i) \div \left(\frac{12+35}{9+49} - \frac{28-15}{9+49}\ i \right) \\[2ex]
&= (2-3i) \div \left(\frac{47}{58} - \frac{13}{58}\ i \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\cdot\frac{47}{58} + (-3)\cdot\frac{(-13)}{58}}{\left(\frac{47}{58}\right)^2 + \left(-\frac{13}{58}\right)^2} - \left[\frac{2\cdot\left(-\frac{13}{58}\right) - (-3)\cdot\left(\frac{47}{58}\right)}{\left(\frac{47}{58}\right)^2 + \left(-\frac{13}{58}\right)^2} \right] i \\[2ex]
&= \frac{\frac{94}{58}+\frac{39}{58}}{\frac{2209+169}{3364}} - \left(\frac{-\frac{26}{58}+\frac{141}{58}}{\frac{2209+169}{3364}} \right) i \\[2ex]
&= \frac{\frac{133}{58}}{\frac{2378}{3364}} - \frac{\frac{115}{58}}{\frac{2378}{3364}}\ i \\[2ex]
&= \frac{133\cdot 3364}{58\cdot 2378} - \frac{115\cdot 3364}{58\cdot 2378}\ i \\[2ex]
&= \frac{447412}{137924} - \frac{386860}{137924}\ i\ ,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$z_1 \div (z_2 \div z_3) = \frac{447412}{137924} - \frac{386860}{137924}\ i.$$

Logo, $(z_1 \div z_2) \div z_3 \neq z_1 \div (z_2 \div z_3)$.

A divisão em $\mathbb{C}$ não é comutativa, pois $\forall\ z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, com $z_1 \neq z_2, z_1 \div z_2 \neq z_2 \div z_1$.

Exemplo 2.2.25. Note que, para $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = -4 + 2i$, temos

$$\begin{aligned} z_1 \div z_2 &= (2+3i) \div (-4+2i) \\ &= \frac{2 \cdot (-4) + 3 \cdot 2}{(-4)^2 + 2^2} - \frac{2 \cdot 2 - 3 \cdot (-4)}{(-4)^2 + 2^2}\ i \\ &= \frac{-8+6}{16+4} - \frac{4+12}{16+4}\ i \\ &= -\frac{2}{20} - \frac{16}{20}\ i\ , \end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 \div z_2 = -\frac{2}{20} - \frac{16}{20}\ i.$$

e, por outro lado,

$$\begin{aligned} z_2 \div z_1 &= (-4+2i) \div (2+3i) \\ &= \frac{-4 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{2^2 + 3^2} - \frac{(-4) \cdot 3 - 2 \cdot 2}{2^2 + 3^2}\ i \\ &= \frac{-8+6}{4+9} - \left(\frac{-12-4}{4+9}\right)\ i \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{2}{13} - \left(\frac{-16}{13}\right)\ i \\
&= -\frac{2}{13} + \frac{16}{13}\ i\ ,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$z_2 \div z_1 = -\frac{2}{13} + \frac{16}{13}\ i.$$

Portanto, $z_1 \div z_2 \neq z_2 \div z_1$.

A divisão em $\mathbb{C}$ não possui elemento neutro, isto é, não há um número $e \in \mathbb{C}$ que verifica simultaneamente as duas igualdades abaixo

$$e \div z = z \quad \text{e} \quad z \div e = z, \forall\ z \in \mathbb{C}^*.$$

O número complexo 1 satisfaz apenas a segunda igualdade, ou seja, ele é apenas o elemento neutro à direita para a divisão em $\mathbb{C}$. De fato, para $z = a + bi$ qualquer, temos

$$
\begin{aligned}
z \div 1 &= (a + bi) \div (1 + 0i) \\
&= \frac{a \cdot 1 + b \cdot 0}{1^2 + 0^2} - \frac{a \cdot 0 - b \cdot 1}{1^2 + 0^2}\ i \\
&= \frac{a + 0}{1 + 0} - \frac{0 - b}{1 + 0}\ i \\
&= \frac{a}{1} - \left(-\frac{b}{1}\right)\ i \\
&= a + bi = z\ ,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$z \div 1 = z, \forall\ z \in \mathbb{C}.$$

O contra-exemplo a seguir permite-nos concluir que o número complexo $1 = 1+0i$ não verifica a condição $1 \div z = z, \forall\ z \in \mathbb{C}$, isto é, o número complexo $1 = 1+0i$ não é elemento neutro à esquerda para a divisão em $\mathbb{C}$.

Contra-exemplo 2.2.2. Para $z = 2+5i$, temos

$$\begin{aligned} 1 \div z &= (1+0i) \div (2+5i) \\ &= \frac{1 \cdot 2 + 0 \cdot 5}{2^2+5^2} - \frac{1 \cdot 5 - 0 \cdot 2}{2^2+5^2}\, i \\ &= \frac{2+0}{4+25} - \frac{5-0}{4+25}\, i \\ &= \frac{2}{29} - \frac{5}{29}\, i\ , \end{aligned}$$

ou seja,

$$1 \div z = \frac{2}{29} - \frac{5}{29}\, i.$$

Logo $1 \div z \neq z$.

Os elementos do conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos não são simetrizáveis para a divisão. De fato, conforme sabemos não existe um elemento neutro e para a divisão em $\mathbb{C}$. Assim, para todo $z \in \mathbb{C}$, não existe $z' \in \mathbb{C}$ tal que $z \div z' = e = z' \div z$. Lembrando que z' seria o simétrico de z em relação à divisão em $\mathbb{C}$.

A divisão em $\mathbb{C}$ não é distributiva em relação à adição, subtração e multiplicação, e vice-versa. Veja os exemplos a seguir.

Exemplo 2.2.26. Sejam $z_1 = 2 + 3i, z_2 = 2 + 4i$ e $z_3 = 3 + 2i$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
z_1 \div (z_2 + z_3) &= (2 + 3i) \div [(2 + 4i) + (3 + 2i)] \\
&= (2 + 3i) \div [(2 + 3) + (4 + 2)i] \\
&= (2 + 3i) \div (5 + 6i) \\
&= \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 6}{5^2 + 6^2} - \frac{2 \cdot 6 - 3 \cdot 5}{5^2 + 6^2}\ i \\
&= \frac{10 + 18}{25 + 36} - \frac{12 - 15}{25 + 36}\ i \\
&= \frac{28}{61} - \left(\frac{-3}{61}\right)\ i \\
&= \frac{28}{61} + \frac{3}{61}\ i\ ,
\end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 \div (z_2 + z_3) = \frac{28}{61} + \frac{3}{61}\ i$$

e por outro lado,

$$\begin{aligned}
(z_1 \div z_2) + (z_1 \div z_3) &= [(2 + 3i) \div (2 + 4i)] + [(2 + 3i) \div (3 + 2i)] \\
&= \left(\frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 4}{2^2 + 4^2} - \frac{2 \cdot 4 - 3 \cdot 2}{2^2 + 4^2}\ i\right) + \left(\frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 2}{3^2 + 2^2} - \frac{2 \cdot 2 - 3 \cdot 3}{3^2 + 2^2}\ i\right) \\
&= \left(\frac{4 + 12}{4 + 16} - \frac{8 - 6}{4 + 16}\ i\right) + \left[\frac{12}{13} - \left(-\frac{5}{13}\right)\ i\right]
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{20}\ i\right) + \left(\frac{12}{13} + \frac{5}{13}\ i\right)$$

$$= \left(\frac{4}{5} + \frac{12}{13}\right) + \left(-\frac{2}{20} + \frac{5}{13}\right)\ i$$

$$= \frac{112}{65} + \frac{74}{260}\ i\ ,$$

ou seja,

$$(z_1 \div z_2) + (z_1 \div z_3) = \frac{112}{65} + \frac{74}{260}\ i.$$

Como $z_1 \div (z_2 + z_3) \neq (z_1 \div z_2) + (z_1 \div z_3)$, logo a divisão não é distributiva em relação à adição.

Exemplo 2.2.27. Sejam $z_1 = 5 - 3i, z_2 = 3 + 6i$ e $z_3 = 4 + 3i$. Logo,

$$\begin{aligned}
z_1 + (z_2 \div z_3) &= (5 - 3i) + [(3 + 6i) \div (4 + 3i)] \\
&= (5 - 3i) + \left(\frac{3 \cdot 4 + 6 \cdot 3}{4^2 + 3^2} - \frac{3 \cdot 3 - 6 \cdot 4}{4^2 + 3^2}\ i\right) \\
&= (5 - 3i) + \left(\frac{12 + 18}{16 + 9} - \frac{9 - 24}{16 + 9}\ i\right) \\
&= (5 - 3i) + \left[\frac{30}{25} - \left(-\frac{15}{25}\right)\ i\right] \\
&= (5 - 3i) + \left(\frac{6}{5} + \frac{15}{25}\ i\right) \\
&= \left(5 + \frac{6}{5}\right) + \left(-3 + \frac{15}{25}\right)\ i \\
&= \frac{31}{5} + \left(-\frac{60}{25}\right)\ i\ ,
\end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 + (z_2 \div z_3) = \frac{31}{5} + \left(-\frac{60}{25}\right)\ i.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(z_1 + z_2) \div (z_1 + z_3) &= [(5-3i)+(3+6i)] \div [(5-3i)+(4+3i)] \\
&= [(5+3)+(-3+6)i] \div [(5+4)+(-3+3)i] \\
&= (8+3i) \div (9+0i) \\
&= \frac{8\cdot 9 + 3\cdot 0}{9^2+0^2} - \frac{8\cdot 0 - 3\cdot 9}{9^2+0^2}\ i \\
&= \frac{72+0}{81+0} - \frac{0-27}{81-0}\ i \\
&= \frac{72}{81} - \left(-\frac{27}{81}\right)\ i \\
&= \frac{72}{81} + \frac{27}{81}\ i\ ,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(z_1 + z_2) \div (z_1 + z_3) = \frac{72}{81} + \frac{27}{81}\ i.$$

Assim, podemos concluir que $z_1 + (z_2 \div z_3) \neq (z_1 + z_2) \div (z_1 + z_3)$, e portanto a adição não é distributiva em relação à divisão.

Exemplo 2.2.28. Sejam $z_1 = 3 + i, z_2 = 2 + 2i$ e $z_3 = 4 - i$. Assim temos

$$
\begin{aligned}
z_1 \div (z_2 - z_3) &= (3+i) \div [(2+2i) - (4-i)] \\
&= (3+i) \div \{(2-4) + [2-(-1)]i\} \\
&= (3+i) \div [-2 + (2+1)i] \\
&= (3+i) \div (-2+3i) \\
&= \frac{3\cdot(-2) + 1\cdot 3}{(-2)^2 + 3^2} - \frac{3\cdot 3 - 1\cdot(-2)}{(-2)^2+3^2}\ i \\
&= \frac{-6+3}{4+9} - \frac{9+2}{4+9}\ i \\
&= -\frac{3}{13} - \frac{7}{13}\ i\ ,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$z_1 \div (z_2 - z_3) = -\frac{3}{13} - \frac{7}{13}\ i.$$

Por outro lado, temos

$$
\begin{aligned}
(z_1 \div z_2) - (z_1 \div z_3) &= [(3+i) \div (2+2i)] - [(3+i) \div (4-i)] \\
&= \left(\frac{3\cdot 2 + 1\cdot 2}{2^2+2^2} - \frac{3\cdot 2 - 1\cdot 2}{2^2+2^2}\ i\right) - \left[\frac{3\cdot 4 + 1\cdot(-1)}{4^2+(-1)^2} - \frac{3\cdot(-1) - 1\cdot 4}{4^2+(-1)^2}\ i\right] \\
&= \left(\frac{6+2}{4+4} - \frac{6-2}{4+4}\ i\right) - \left[\frac{12-1}{16+1} - \left(\frac{-3-4}{16+1}\right)\ i\right] \\
&= \left(\frac{8}{8} - \frac{4}{8}\ i\right) - \left[\frac{11}{17} - \left(\frac{-7}{17}\right)\ i\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1 - \frac{1}{2}\ i\right) - \left(\frac{11}{17} + \frac{7}{17}\ i\right) \\
&= \left(1 - \frac{11}{17}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{7}{17}\right)\ i \\
&= \frac{6}{17} + \left(-\frac{31}{34}\right)\ i\ ,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
(z_1 \div z_2) - (z_1 \div z_3) = \frac{6}{17} + \left(-\frac{31}{34}\right)\ i.
$$

Como $z_1 \div (z_2 - z_3) \neq (z_1 \div z_2) - (z_1 \div z_3)$, logo a divisão não é distributiva em relação à subtração.

Exemplo 2.2.29. Para $z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 4 + 5i$ e $z_3 = 1 + 2i$, temos

$$
\begin{aligned}
z_1 - (z_2 \div z_3) &= (2+3i) - [(4+5i) \div (1+2i)] \\
&= (2+3i) - \left(\frac{4 \cdot 1 + 5 \cdot 2}{1^2 + 2^2} - \frac{4 \cdot 2 - 5 \cdot 1}{1^2 + 2^2}\ i\right) \\
&= (2+3i) - \left(\frac{4+10}{1+4} - \frac{8-5}{1+4}\ i\right) \\
&= (2+3i) - \left(\frac{14}{5} - \frac{3}{5}\ i\right) \\
&= \left(2 - \frac{14}{5}\right) + \left[3 - \left(-\frac{3}{5}\right)\right]\ i \\
&= -\frac{4}{5} + \left(3 + \frac{3}{5}\right)\ i \\
&= -\frac{4}{5} + \frac{18}{5}\ i\ ,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$z_1 - (z_2 \div z_3) = -\frac{4}{5} + \frac{18}{5}\ i.$$

E por outro lado,

$$\begin{aligned}
(z_1 - z_2) \div (z_1 - z_3) &= [(2+3i) - (4+5i)] \div [(2+3i) - (1+2i)] \\
&= [(2-4) + (3-5)i] \div [(2-1) + (3-2)i] \\
&= (-2-2i) \div (1+i) \\
&= \left[\frac{-2 \cdot 1 + (-2) \cdot 1}{1^2 + 1^2}\right] - \left[\frac{(-2) \cdot 1 - (-2) \cdot 1}{1^2 + 1^2}\right]\ i \\
&= \left(\frac{-2-2}{1+1}\right) - \left[\frac{-2-(-2)}{1+1}\right]\ i \\
&= -\frac{4}{2} - \left(\frac{-2+2}{2}\right)\ i \\
&= -2 - 0i = -2\ ,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(z_1 - z_2) \div (z_1 - z_3) = -2.$$

Como $z_1 - (z_2 \div z_3) \neq (z_1 - z_2) \div (z_1 - z_3)$, podemos concluir que a subtração não é distributiva em relação à divisão.

Exemplo 2.2.30. Para $z_1 = 3 - 2i, z_2 = 2 + 4i$ e $z_3 = 5 - 3i$, temos

$$
\begin{aligned}
z_1 \div (z_2 \cdot z_3) &= (3-2i) \div [(2+4i)\cdot(5-3i)] \\
&= (3-2i) \div \{[2\cdot 5 - 4\cdot(-3)] + [2\cdot(-3) + 4\cdot 5]i\} \\
&= (3-2i) \div [(10+12) + (-6+20)i] \\
&= (3-2i) \div (22+14i) \\
\\
&= \left[\frac{3\cdot 22 + (-2)\cdot 14}{22^2+14^2}\right] - \left[\frac{3\cdot 14 - (-2)\cdot 22}{22^2+14^2}\right]\ i \\
\\
&= \left(\frac{66-28}{484+196}\right) - \left[\frac{42-(-44)}{484+196}\right]\ i \\
\\
&= \frac{38}{680} - \left(\frac{42+44}{680}\right)\ i \\
\\
&= \frac{38}{680} - \frac{86}{680}\ i\ ,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
z_1 \div (z_2 \cdot z_3) = \frac{38}{680} - \frac{86}{680}\ i
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(z_1 \div z_2)\cdot(z_1 \div z_3) &= [(3-2i)\div(2+4i)]\cdot[(3-2i)\div(5-3i)] \\
\\
&= \left\{\left[\frac{3\cdot 2 + (-2)\cdot 4}{2^2+4^2}\right] - \left[\frac{3\cdot 4 - (-2)\cdot 2}{2^2+4^2}\right]\ i\right\}\cdot \\
\\
&\cdot\ \left\{\left[\frac{3\cdot 5 + (-2)\cdot(-3)}{5^2+(-3)^2}\right] - \left[\frac{3\cdot(-3) - (-2)\cdot 5}{5^2+(-3)^2}\right]\ i\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{\left(\frac{6-8}{4+16}\right) - \left[\frac{12-(-4)}{4+16}\right]\ i\right\} \cdot \left\{\left(\frac{15+6}{25+9}\right) - \left[\frac{-9-(-10)}{25+9}\right]\ i\right\} \\
&= \left[-\frac{2}{20} - \left(\frac{12+4}{20}\right)\ i\right] \cdot \left[\frac{21}{34} - \left(\frac{-9+10}{34}\right)\ i\right] \\
&= \left(-\frac{2}{20} - \frac{16}{20}\ i\right) \cdot \left(\frac{21}{34} - \frac{1}{34}\ i\right) \\
&= \left[-\frac{2}{20} \cdot \frac{21}{34} - \left(-\frac{16}{20}\right) \cdot \left(-\frac{1}{34}\right)\right] + \left[\left(-\frac{2}{20}\right) \cdot \left(-\frac{1}{34}\right) + \left(-\frac{16}{20}\right) \cdot \left(\frac{21}{34}\right)\right] i \\
&= \left[-\frac{42}{680} - \left(\frac{16}{680}\right)\right] + \left[\frac{2}{680} + \left(-\frac{336}{680}\right)\right]\ i \\
&= \frac{-42-16}{680} + \frac{2-336}{680}\ i \\
&= -\frac{58}{680} - \frac{334}{680}\ i\ ,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
(z_1 \div z_2) \cdot (z_1 \div z_3) = -\frac{58}{680} - \frac{334}{680}\ i.
$$

Note que $z_1 \div (z_2 \cdot z_3) \neq (z_1 \div z_2) \cdot (z_1 \div z_3)$, e portanto, a divisão não é distributiva em relação à multiplicação.

Exemplo 2.2.31. Sejam $z_1 = 4 + 2i,\ z_2 = 2 + 3i$ e $z_3 = 5 + i$. Assim,

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot (z_2 \div z_3) &= (4+2i) \cdot [(2+3i) \div (5+i)] \\
&= (4+2i) \cdot \left[\left(\frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 1}{5^2 + 1^2}\right) - \left(\frac{2 \cdot 1 - 3 \cdot 5}{5^2 + 1^2}\right)\ i\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (4+2i)\cdot\left[\left(\frac{10+3}{25+1}\right)-\left(\frac{2-15}{25+1}\right)\ i\right]\\
&= (4+2i)\cdot\left[\frac{13}{26}-\left(-\frac{13}{26}\right)\ i\right]\\
&= (4+2i)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ i\right)\\
&= \left(4\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}\right)+\left(4\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}\right)\ i\\
&= (2-1)+(2+1)\ i\\
&= 1+3i\ ,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$z_1\cdot(z_2\div z_3)=1+3i.$$

E por outro lado,

$$
\begin{aligned}
(z_1\cdot z_2)\div(z_1\cdot z_3) &= [(4+2i)\cdot(2+3i)]\div[(4+2i)\cdot(5+i)]\\
&= [(4\cdot 2-2\cdot 3)+(4\cdot 3+2\cdot 2)i]\div[(4\cdot 5-2\cdot 1)+(4\cdot 1+2\cdot 5)i]\\
&= [(8-6)+(12+4)i]\div[(20-2)+(4+10)i]\\
&= (2+16i)\div(18+14i)\\
&= \frac{2\cdot 18+16\cdot 14}{18^2+14^2}-\left(\frac{2\cdot 14-16\cdot 18}{18^2+14^2}\right)\ i
\end{aligned}
$$

$$= \left(\frac{36+224}{324+196}\right) - \left(\frac{28-288}{324+196}\right)\ i$$

$$= \frac{260}{520} - \left(-\frac{260}{520}\right)\ i$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ i\ ,$$

ou seja,

$$(z_1 \cdot z_2) \div (z_1 \cdot z_3) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ i.$$

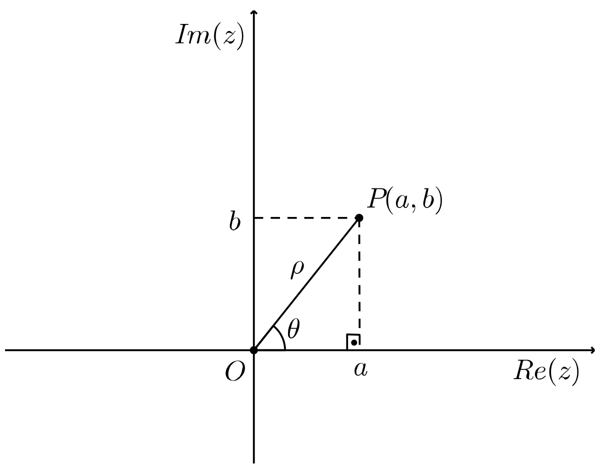
Como $z_1 \cdot (z_2 \div z_3) \neq (z_1 \cdot z_2) \div (z_1 \cdot z_3)$, logo podemos concluir que a multiplicação não é distributiva em relação à divisão.

2.3 Forma Trigonométrica de um Número Complexo

Esta seção tratará da forma trigonométrica de um número complexo, que também é chamada de forma polar de um número complexo.

2.3.1 Módulo e Argumento de um Número Complexo

Consideremos o número complexo não-nulo $z = a + bi$ e o ponto $P(a, b)$ que o representa.



Consideremos também o ângulo de medida θ indicado no gráfico acima e seja ρ a distância de P à origem O do plano complexo.

Utilizando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo formado pelos segmentos $\overline{Oa}$ e $\overline{OP}$, temos que $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. A distância ρ de P até a origem O é denominada módulo de z, e indicamos por $|z|$. Assim, $|z| = |a + bi| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, isto é, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Denomina-se argumento do número complexo z não-nulo, a medida do ângulo θ formado por $\overline{OP}$ com o segmento $\overline{Oa}$, medido no sentido anti-horário.

Note que todo número complexo não-nulo possui uma infinidade de argumentos, dois quaisquer deles diferindo entre si por um múltiplo de 2π.

O argumento cuja medida em radianos está no intervalo $[0, 2\pi[$ é denominado argumento principal e é representado por $\theta = arg(z)$.

Observe ainda que $cos\ \theta = \dfrac{a}{\rho}$ e $sen\ \theta = \dfrac{b}{\rho}$. Estes resultados são obtidos facilmente utilizando relações trigonométricas no triângulo retângulo caracterizado anteriormente no gráfico.

O argumento principal de um número complexo z não-nulo também pode ser dado em graus e, dessa forma, temos $0° \leq \theta \leq 360°$. Em geral, o argumento de um número complexo coincide com o argumento principal deste número.

Exemplo 2.3.1. Iremos determinar o módulo, o argumento e fazer a representação geométrica do número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$. Primeiramente, determinaremos o módulo de z:

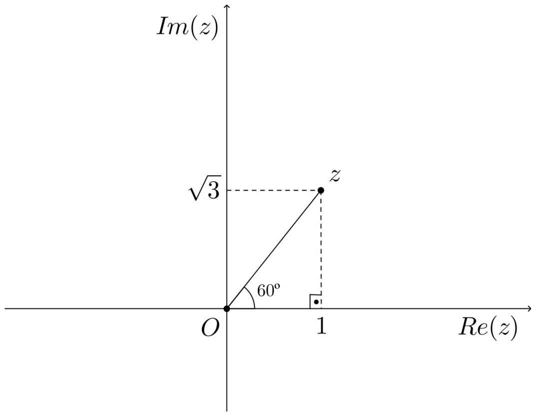
$\rho = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$, ou seja, $\rho = 2$.

Agora, vamos calcular o argumento de z:

$cos\ \theta = \dfrac{1}{2}$ e $sen\ \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo, $\theta = \dfrac{\pi}{3}\ rad$ ou $\theta = 60°$.

Representando geometricamente o número complexo $z = 1 + \sqrt{3}i$, temos:



2.3.2 Forma Trigonométrica

Consideremos o número complexo não-nulo $z = a + bi$.
Como vimos na subseção 2.2.1, considerando ρ como o módulo de z, temos as seguintes igualdades:

$$cos\ \theta = \frac{a}{\rho} \quad \text{e} \quad sen\ \theta = \frac{b}{\rho}.$$

Logo, $a = \rho \cdot cos\theta$ e $b = \rho \cdot sen\theta$. Assim, podemos reescrever o número complexo $z = a + bi$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} z &= \rho \cdot cos\ \theta + (\rho \cdot sen\ \theta)i \\ &= \rho \cdot cos\ \theta + \rho \cdot (sen\ \theta)i \\ &= \rho \cdot cos\ \theta + \rho \cdot (isen\ \theta) \\ &= \rho \cdot (cos\ \theta + isen\ \theta)\ , \end{aligned}$$

isto é,

$$z = \rho \cdot (cos\ \theta + isen\ \theta).$$

Esta maneira de representar um número complexo z é chamada forma trigonométrica ou forma polar do número complexo z.

Exemplo 2.3.2. Para representar o número complexo $z = \sqrt{3} + i$ na forma polar, primeiramente devemos calcular o seu módulo e argumento. Calculando o módulo de $z = \sqrt{3} + i$, temos
$\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$, ou seja, $\rho = 2$. Determinaremos agora o argumento θ de $z = \sqrt{3} + i$. Note que $sen\ \theta = \dfrac{1}{2}$ e $cos\ \theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Logo, $\theta = \dfrac{\pi}{6}\ rad$ ou $\theta = 30°$. Assim a forma polar do número complexo $z = \sqrt{3} + i$ é

$z = \rho\ (cos\ \theta + i\ sen\ \theta) = 2\left[cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\ sen\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right]$, isto é,

$z = 2\left[cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\ sen\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right].$

2.3.3 Operações com os Números Complexos na Forma Trigonométrica

Multiplicação

As operações de multiplicação e divisão entre números complexos são mais facilmente efetuadas quando os números estão na forma trigonométrica, por ser mais prático.

Sejam $z_1 = \rho_1(cos\ \theta_1 + i\ sen\ \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(cos\ \theta_2 + i\ sen\ \theta_2)$ dois números complexos quaisquer. O produto $z_1 \cdot z_2$ é calculado pela seguinte fórmula:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2\ [\ (cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ sen(\theta_1 + \theta_2)\ ].$$

Este resultado pode ser obtido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [\ \rho_1(cos\ \theta_1 + i\ sen\ \theta_2)] \cdot [\rho_2(cos\ \theta_2 + i\ sen\ \theta_2)\ ] \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2\ (cos\ \theta_1 + i\ sen\ \theta_1) \cdot (cos\ \theta_2 + i\ sen\ \theta_2) \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2\ (cos\ \theta_1 cos\ \theta_2 + i\ cos\ \theta_1 sen\ \theta_2 + i\ sen\ \theta_1 cos\ \theta_2 + i^2\ sen\ \theta_1 sen\ \theta_2) \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2\ [\ (cos\ \theta_1 cos\ \theta_2 - sen\ \theta_1 sen\ \theta_2) + i(cos\ \theta_1 sen\ \theta_2 + sen\ \theta_1 cos\ \theta_2)\ ] \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2\ [\ cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ sen(\theta_1 + \theta_2)\ ]\ , \end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2\ [\ cos(\theta_1 + \theta_2) + i\ sen(\theta_1 + \theta_2)\ ].$$

Note que o produto $z_1 \cdot z_2$ é um número complexo cujo módulo é o produto dos módulos dos fatores z_1 e z_2 e o argumento é a soma dos argumentos dos fatores z_1 e z_2.

A fórmula acima pode ser estendida para n fatores. Assim o produto $z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n$ pode ser calculado pela fórmula abaixo:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n &= \rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \ldots \cdot \rho_n\ [\ cos(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + \\ &+ \ i\ sen(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)\ ]. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Divisão

Sejam $z_1 = \rho_1(cos\ \theta_1 + i\ sen\ \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(cos\ \theta_2 + i\ sen\ \theta_2)$ dois números complexos quaisquer, com $z_2 \neq 0$. O quociente $\dfrac{z_1}{z_2}$ é calculado pela fórmula:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\ cos(\theta_1 - \theta_2) + i\ sen(\theta_1 - \theta_2)\ ].$$

Esta fórmula é obtida da seguinte maneira:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \cdot (cos\ \theta_1 + i\ sen\ \theta_1)}{\rho_2 \cdot (cos\ \theta_2 + i\ sen\ \theta_2)}$$

$$= \frac{\rho_1 \cdot (cos\ \theta_1 + i\ sen\ \theta_1)}{\rho_2 \cdot (cos\ \theta_2 + i\ sen\ \theta_2)} \cdot \frac{\rho_2(cos\ \theta_2 - i\ sen\ \theta_2)}{\rho_2(cos\ \theta_2 - i\ sen\ \theta_2)}$$

$$= \frac{\rho_1\ [\ cos\ \theta_1 cos\ \theta_2 - i\ cos\ \theta_1 sen\ \theta_2 + i\ sen\ \theta_1 cos\ \theta_2 - i^2\ sen\ \theta_1 sen\ \theta_2\ ]}{\rho_2\ [\ cos\ \theta_2 cos\ \theta_2 - i\ cos\ \theta_2 sen\ \theta_2 + i\ cos\ \theta_2 sen\ \theta_2 - i^2\ sen\ \theta_2 sen\ \theta_2\ ]}$$

$$= \frac{\rho_1\ [\ cos\ \theta_1 cos\ \theta_2 + sen\ \theta_1 sen\ \theta_2 + i(sen\ \theta_1 cos\ \theta_2 - cos\ \theta_1 sen\ \theta_2)\ ]}{\rho_2\ [\ cos^2\ \theta_2 + sen^2\ \theta_2\ ]},$$

ou seja,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\ [\ cos(\theta_1 - \theta_2) + i\ sen(\theta_1 - \theta_2)\ ]}{\rho_2\ [\ cos^2\ \theta_2 + sen^2\ \theta_2\ ]}. \tag{2.12}$$

Agora, usando a relação fundamental da trigonometria, $sen^2\ \theta + cos^2\ \theta = 1$, podemos reescrever a igualdade (2.12) da seguinte forma:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1\ [\ cos(\theta_1 - \theta_2) + i\ sen(\theta_1 - \theta_2)\ ]}{\rho_2 \cdot 1}$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\ [\ cos(\theta_1 - \theta_2) + i\ sen(\theta_1 - \theta_2)\ ],$$

isto é,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\ [\ cos(\theta_1 - \theta_2) + i\ sen(\theta_1 - \theta_2)\ ].$$

Observe que o quociente $\frac{z_1}{z_2}$ é um número complexo cujo módulo é o quociente dos módulos do dividendo z_1 e do divisor z_2 e o argumento é a diferença dos argumentos do dividendo z_1 e do divisor z_2.

Exemplo 2.3.3. Para calcular o produto $z_1 \cdot z_2$ dos números complexos $z_1 = 2\ \left[\ cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\ sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$ e $z_2 = 3\ \left[\ cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$, primeiramente calculamos o produto dos seus módulos:

$\rho_1 \cdot \rho_2 = 2 \cdot 3 = 6$, ou seja, $\rho_1 \cdot \rho_2 = 6$.

Agora, calculamos a soma dos argumentos de z_1 e z_2:

$\theta_1 + \theta_2 = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{3\pi + 2\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6}$, isto é, $\theta_1 + \theta_2 = \dfrac{5\pi}{6}$.

Substituindo o produto $\rho_1 \cdot \rho_2 = 6$ e a soma $\theta_1 + \theta_2 = \dfrac{5\pi}{6}$ na fórmula $z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \; [\; cos(\theta_1 + \theta_2) + i\; sen(\theta_1 + \theta_2) \;]$, temos

$$z_1 \cdot z_2 = 6 \; \left[\; cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\; sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right].$$

Exemplo 2.3.4. Para calcular o quociente $\dfrac{z_1}{z_2}$ dos números complexos

$z_1 = 6 \; \left[\; cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + i\; sen\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$ e $z_2 = 2 \; \left[\; cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right) + i\; sen\left(\dfrac{\pi}{5}\right)\right]$,
primeiramente devemos calcular o quociente dos módulos de z_1 e z_2:

$\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{6}{2} = 3$, isto é, $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = 3$.

Em seguida, calculamos a diferença dos argumentos de z_1 e z_2:

$\theta_1 - \theta_2 = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{5} = \dfrac{5\pi - 4\pi}{20} = \dfrac{\pi}{20}$, ou seja, $\theta_1 - \theta_2 = \dfrac{\pi}{20}$.

Substituindo o quociente $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = 3$ e a diferença $\theta_1 - \theta_2 = \dfrac{\pi}{20}$ na fórmula

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [\; cos(\theta_1 - \theta_2) + i\; sen(\theta_1 - \theta_2) \;]$, temos

$$\frac{z_1}{z_2} = 3 \; \left[\; cos\left(\frac{\pi}{20}\right) + i\; sen\left(\frac{\pi}{20}\right)\right].$$

Potências de i

Sabemos que o cálculo de potências de números reais com expoente natural é realizado através de uma multiplicação em que todos os fatores são iguais à base e em quantidade igual ao expoente natural. Podemos notar este fato no exemplo a seguir.

Exemplo 2.3.5. A potência 5^3 é o resultado de uma multiplicação com 3 fatores iguais a 5, isto é, $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$.

No caso de potências de números complexos com expoente natural o procedimento é o mesmo. Quando a parte imaginária do número complexo é nula, temos um número real e o cálculo da potência é realizado como vimos no exemplo anterior. Já quando a parte real é nula e a parte imaginária diferente de zero, isto é, quando temos um número imaginário puro, o cálculo da potência pode ser realizado como no exemplo seguinte.

Exemplo 2.3.6. Sendo $z = 0 + 3i$, devemos calcular z^5. Assim,
$z^5 = (0 + 3i)^5 = (3i)^5 = 3^5 \cdot i^5 = 243 \cdot i^5 = 243i$, ou seja,
$z^5 = 243i$.

Podemos notar neste último exemplo que $i^5 = i$. Para entender melhor esta igualdade, vamos calcular as oito primeiras potências de i com expoente natural, sabendo que $i = \sqrt{-1}$:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$, pois $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$.

$i^3 = -i$, pois $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$.

$i^4 = 1$, pois $i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$.

$i^5 = i$, pois $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$.

$i^6 = -1$, pois $i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$.

$i^7 = -i$, pois $i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$.

Veja que $i^0 = i^4, i^1 = i^5, i^2 = i^6$ e $i^3 = i^7$. Este comportamento se estende às demais potências de i, ou seja, os resultados das potências de i se repetem de quatro em quatro. Assim, para calcular a potência i^n, basta dividir o expoente natural n por 4; se o resto r for zero, $i^n = i^0 = 1$; se $r = 1$, temos $i^n = i^1 = i$; se $r = 2$, implica que $i^n = i^2 = -1$ e se $r = 3$ significa que $i^n = i^3 = -i$.

Exemplo 2.3.7. Para calcular i^{22}, primeiramente dividimos 22 por 4, com a intenção de obter o resto desta divisão. Assim, utilizando o algoritmo da divisão, teorema (1.2.1), temos

$$22 = 4 \cdot 5 + 2.$$

Portanto, na divisão de 22 por 4, o resto é igual a 2. Logo, podemos concluir que $i^{22} = i^2 = -1$.

Potenciação

Anteriormente, em **Potências de i**, vimos como calcular potências de números complexos quando a parte imaginária é nula ou quando a parte real é nula. Agora, veremos como calcular potências de números complexos quando ambas as partes real e imaginária são diferentes de zero. Para isso representaremos um número complexo z qualquer na forma trigonométrica por ser mais prático, já que a potência de um número complexo na forma algébrica é efetuada pelo binômio de Newton.

Seja $z = \rho\ (cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$ um número complexo qualquer e n um número natural maior que 1. Pela fórmula estendida do produto de números complexos na forma trigonométrica, fórmula (2.11), temos

$$\begin{aligned} z^n &= \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ fatores}} \\ &= [\ \rho\ (cos\ \theta + i\ sen\ \theta)\ ] \cdot [\ \rho\ (cos\ \theta + i\ sen\ \theta)\ ] \cdot \ldots \cdot [\ \rho\ (cos\ \theta + i\ sen\ \theta)\ ] \\ &= \rho^n \cdot (cos\ n\theta + i\ sen\ n\theta)\ , \end{aligned}$$

ou seja,

$$z^n = \rho^n \cdot (cos\ n\theta + i\ sen\ n\theta) \tag{2.13}$$

A fórmula $z^n = \rho^n \cdot (cos\ n\theta + i\ sen\ n\theta)$ é conhecida como fórmula de De Moivre. Abraham De Moivre foi um matemático francês que viveu durante o período de 1667 à 1754.

Veja que esta fórmula também é válida quando o expoente n for negativo ou nulo. De fato, se $n < 0$, temos

$z^n = (z^{-n})^{-1} = \dfrac{1}{z^{-n}}$, ou seja, $z^n = \dfrac{1}{z^{-n}}$. Como $-n$ é um inteiro positivo, já que n é um inteiro negativo, então, pela fórmula de De Moivre, fórmula (2.13), temos

$$\begin{aligned} z^n &= \frac{1}{z^{-n}} \\ &= \frac{1}{\rho^{-n}\ [cos\ (-n\theta) + i\ sen\ (-n\theta)\ ]} \\ &= \frac{1}{\rho^{-n}} \cdot \frac{1}{cos\ (-n\theta) + i\ sen\ (-n\theta)} \\ &= \rho^n \cdot \frac{1}{cos\ (-n\theta) + i\ sen\ (-n\theta)}\ , \end{aligned}$$

isto é,

$$z^n = \rho^n \cdot \frac{1}{cos\ (-n\theta) + i\ sen\ (-n\theta)}.$$

Multiplicando à direita o numerador e o denominador do segundo membro da igualdade acima pelo conjugado do denominador, temos

$$\begin{aligned} z^n &= \rho^n \cdot \frac{1}{cos\ (-n\theta) + i\ sen\ (-n\theta)} \cdot \frac{cos\ (-n\theta) - i\ sen\ (-n\theta)}{cos\ (-n\theta) - i\ sen\ (-n\theta)} \\ &= \rho^n \cdot \frac{cos\ (-n\theta) - i\ sen\ (-n\theta)}{cos^2\ (-n\theta) + sen^2\ (-n\theta)}\ , \end{aligned}$$

ou seja,

$$z^n = \rho^n \cdot \frac{cos\ (-n\theta) - i\ sen\ (-n\theta)}{cos^2\ (-n\theta) + sen^2\ (-n\theta)}.$$

Mas, pela relação fundamental da trigonometria, que consiste na igualdade $sen^2\ x + cos^2\ x = 1, \forall\ x \in \mathbb{R}$, temos

$$z^n = \rho^n\ [\ cos\ (-n\theta) - i\ sen\ (-n\theta)\ ].$$

Sabendo que as funções cosseno e seno são funções par e ímpar, respectivamente, isto é, $cos\ (-x) = cos\ (x)$ e $sen\ (-x) = -sen\ (x), \forall\ x \in \mathbb{R}$, portanto

$$\begin{aligned} z^n &= \rho^n\ [\ cos\ (-n\theta) - i\ sen\ (-n\theta) \\ &= \rho^n\ [\ cos\ n\theta - i\ (-sen\ n\theta)\ ] \\ &= \rho^n\ (cos\ n\theta + i\ sen\ n\theta)\ , \end{aligned}$$

isto é,

$$z^n = \rho^n\ (cos\ n\theta + i\ sen\ n\theta)\ ;$$

o que verifica a fórmula de De Moivre para expoentes negativos.

Vamos agora verificar a validade da fórmula de De Moivre, fórmula (2.13), para o caso $n = 0$.

Se $n = 0$, por definição, $z^0 = 1$. Note também que

$$\begin{aligned} \rho^0\ [\ cos\ (0 \cdot \theta) + i\ sen\ (0 \cdot \theta)\ ] &= 1 \cdot [\ cos\ (0) + i\ sen\ (0)\ ] \\ &= 1 \cdot (1 + i \cdot 0) \\ &= 1 \cdot 1 = 1\ , \end{aligned}$$

ou seja,

$$\rho^0\ [\ cos\ (0 \cdot \theta) + i\ sen\ (0 \cdot \theta)\ ] = 1.$$

Logo, $z^0 = \rho^0\ [\ cos\ (0 \cdot \theta) + i\ sen\ (0 \cdot \theta)\ ]$; o que verifica a fórmula de De Moivre para o caso $n = 0$.

Exemplo 2.3.8. Para calcular z^8, sendo $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, primeiramente devemos calcular $\rho = |z|$:

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1, \text{ isto é,}$$

$\rho = 1$. Em seguida, calcular $\theta = arg(z)$:

$$cos\ \theta = \frac{a}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}, \text{ ou seja, } cos\ \theta = \frac{1}{2}$$

$$sen\ \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ isto é, } sen\ \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo, $\theta = \frac{\pi}{3}$ rad ou $\theta = 60°$. Aplicando a fórmula de De Moivre, fórmula (2.13), temos

$$\begin{aligned} z^8 &= 1^8 \cdot \left[cos \left(8 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + i\ sen \left(8 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\right] \\ &= 1 \cdot \left[cos \left(\frac{8\pi}{3}\right) + i\ sen \left(\frac{8\pi}{3}\right)\right] \\ &= cos \left(\frac{8\pi}{3}\right) + i\ sen \left(\frac{8\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ i\ , \end{aligned}$$

isto é,

$$z^8 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ i\ .$$

Radiciação

Denominamos raíz n-ésima do número complexo $z = \rho\ (cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$, para $n = 2, 3, 4, \ldots$, todo número complexo w tal que $w^n = z$.

Sendo $z = \rho\ (cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$, consideremos $w = r(cos\ \phi + i\ sen\ \phi)$. Aplicando a fórmula de De Moivre em w, segue

$$w^n = r^n(cos\ n\phi + i\ sen\ n\phi)\ .$$

Assim, temos

$$w^n = z \Longrightarrow r^n(cos\ n\phi + i\ sen\ n\phi) = \rho\ (cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$$

Para que a última igualdade seja verdadeira devemos ter

$$r^n = \rho \Longrightarrow r = \sqrt[n]{\rho}$$

e

$$cos\ n\phi + i\ sen\ n\phi = cos\ \theta + i\ sen\ \theta \Longrightarrow \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n},$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Substituindo os valores de r e de ϕ em $w = r(cos\ \phi + i\ sen\ \phi)$, temos

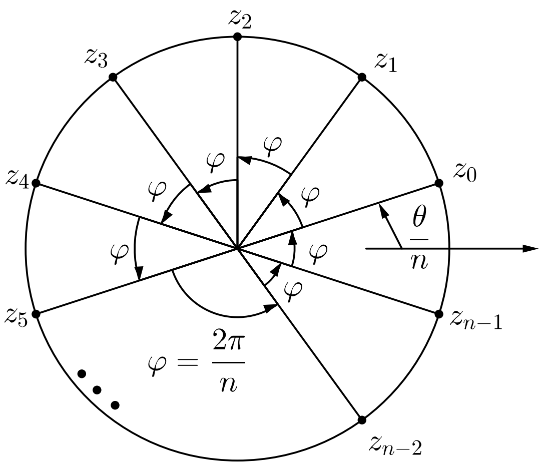
$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\ cos\ \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\ sen\ \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \tag{2.14}$$

para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Esta fórmula produz n raízes distintas, quando a k se atribuem os valores $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Como é fácil ver, qualquer outro valor atribuído a k conduz a uma raiz já obtida com um dos valores acima, precisamente aquele que é o resto da divisão de k por n.

Assim, um número complexo $z \neq 0$ possui n raízes distintas $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$, todas com o mesmo módulo $\sqrt[n]{\rho}$ e com argumentos $\phi_k = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$,
$k = 0, 1, \ldots, n-1$, respectivamente.

Como $\sqrt[n]{\rho}$ é constante e os argumentos diferem de $\dfrac{2\pi}{n}$ para valores consecutivos de k, conclui-se que as imagens das n raízes de um número complexo, para $n \geq 3$, são vértices de um polígono regular de n lados, inscrito numa circunferência de centro na origem e raio $\sqrt[n]{\rho}$, tendo uma das raízes o argumento $\dfrac{\theta}{n}$. Observe a figura abaixo:



Exemplo 2.3.9. Para determinar as raízes cúbicas de $z = 27$, primeiramente devemos calcular o módulo de z:
$\rho = \sqrt{27^2 + 0^2} = \sqrt{729} = 27$, isto é, $\rho = 27$.
Agora, vamos calcular o argumento de z:
$cos\ \theta = \dfrac{27}{27} = 1$, ou seja, $cos\ \theta = 1$.

$sen\ \theta = \dfrac{0}{27} = 0$, isto é, $sen\ \theta = 0$.

Logo, $\theta = 0\ rad$ ou $\theta = 0°$.
Assim, a forma polar do número complexo $z = 27$ é

$z = \rho \cdot (cos\ \theta + i\ sen\ \theta) = 27 \cdot [\ cos(0) + i\ sen(0)\ ]$, isto é,

$z = 27 \cdot [\ cos(0) + i\ sen(0)]$.

As raízes cúbicas de 27 são dadas por

$w_k = \sqrt[3]{27} \cdot \left[\ cos\left(\dfrac{0 + 2k\pi}{3}\right) + i\ sen\left(\dfrac{0 + 2k\pi}{3}\right)\right]$, com $k = 0$, 1 e 2, ou

$w_k = 3\left[\ cos\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right) + i\ sen\left(\dfrac{2k\pi}{3}\right)\right]$, com $k = 0$, 1 e 2.

Assim, para $k = 0$, temos

$$\begin{aligned} w_0 &= 3\left[\ cos\left(\frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right)\right] \\ &= 3[\ cos(0) + i\ sen(0)\ ] \\ &= 3(1 + i \cdot 0) \\ &= 3 \cdot 1 = 3, \end{aligned}$$

ou seja,

$$w_0 = 3.$$

Para $k = 1$, temos

$$\begin{aligned} w_1 &= 3\left[\ cos\left(\frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}\right)\right] \\ &= 3\left[\ cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] \\ &= 3\left(\ -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\ i, \end{aligned}$$

ou seja,

$$w_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}\ i.$$

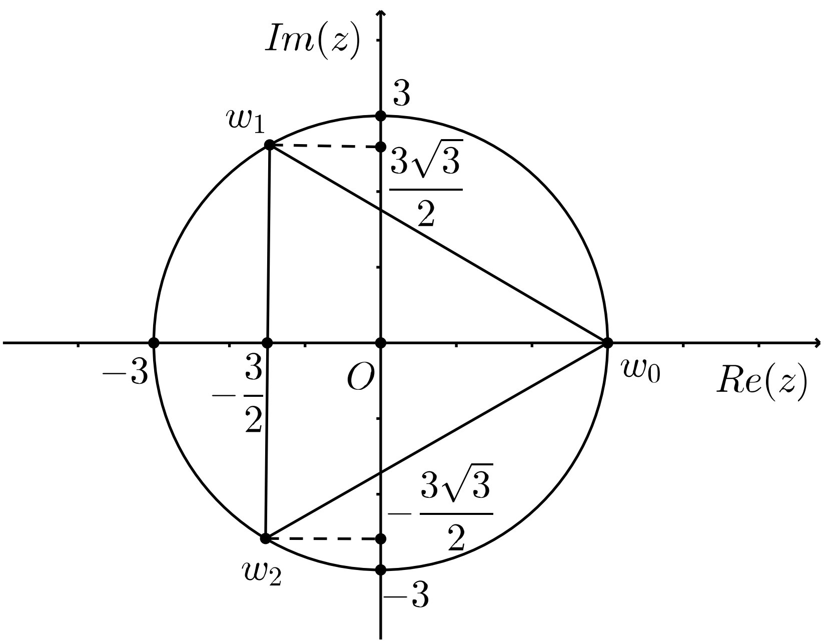
Para $k = 2$, temos

$$\begin{aligned} w_2 &= 3\left[\ cos\left(\frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{3}\right)\right] \\ &= 3\left[\ cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] \\ &= 3\left[\ -\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \\ &= -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\ i, \end{aligned}$$

isto é,

$$w_2 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\ i.$$

Representação geométrica:



Note que, neste caso, os argumentos das raízes consecutivas diferem de $\dfrac{2\pi}{3}$. Assim, como possui 3 raízes distintas, o polígono regular tem 3 lados. Logo, as três raízes são vértices de um triângulo equilátero e estão sobre uma circunferência de raio 3.

Frequentemente utilizamos a representação polar para o cálculo de raízes de números complexos, mas nem sempre é o mais conveniente. Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 2.3.10. Para calcular a raíz quadrada do número complexo $z = -5 - 12i$, é mais fácil proceder da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\sqrt{-5-12i} = x + yi \quad &\Longrightarrow \quad (\sqrt{-5-12i})^2 = (x+yi)^2 \\
&\Longrightarrow \quad -5 - 12i = (x^2 - y^2) + 2xyi \\
&\Longrightarrow \quad x^2 - y^2 = -5 \text{ e } 2xy = -12 \\
&\Longrightarrow \quad x^2 - y^2 = -5 \text{ e } xy = -6,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sqrt{-5-12i} = x + yi \quad \Longrightarrow \quad x^2 - y^2 = -5 \text{ e } xy = -6.$$

Pela equação $xy = -6$ segue que $y = -\dfrac{6}{x}$. Substituindo $y = -\dfrac{6}{x}$ na equação $x^2 - y^2 = -5$, temos

$$\begin{aligned}
x^2 - \left(-\frac{6}{x}\right)^2 = -5 \quad &\Longrightarrow \quad x^2 - \frac{36}{x^2} = -5 \\
&\Longrightarrow \quad x^4 - 36 = -5x^2 \\
&\Longrightarrow \quad x^4 + 5x^2 - 36 = 0,
\end{aligned}$$

isto é,

$$x^2 - \left(-\frac{6}{x}\right)^2 = -5 \quad \Longrightarrow \quad x^4 + 5x^2 - 36 = 0$$

Para resolver a equação biquadrática $x^4 + 5x^2 - 36 = 0$, faremos $u = x^2$, tornando-a uma equação quadrática. Assim, temos

$$x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \Longrightarrow u^2 + 5u - 36 = 0$$

Utilizando a fórmula de Bhaskara na equação $u^2 + 5u - 36 = 0$, temos

$$\begin{aligned} u &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{169}}{2} \\ &= \frac{-5 \pm 13}{2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u = \frac{-5 \pm 13}{2}.$$

Logo, $u = 4$ ou $u = -9$. Como $u = x^2$, logo $x = \pm\sqrt{u}$, e como x é um número real, então u não poderá ser negativo. Desta forma concluímos que u só poderá ser igual a 4. Assim, $x = \pm 2$.

Como $y = \dfrac{-6}{x}$, então $y = \mp 3$. Portanto,

$$\sqrt{-5 - 12i} = x + yi \Longrightarrow \sqrt{-5 - 12i} = \pm(2 - 3i).$$

Logo, podemos concluir que as raízes quadradas do número complexo $z = -5 - 12i$ são $w_0 = 2 - 3i$ e $w_1 = -2 + 3i$.

Vimos anteriormente como calcular as n raízes n-ésimas de um número complexo $z = a + bi$ qualquer. Agora, veremos como calculá-las quando $z = 1$ ou $z = 1 + 0i$.

Primeiramente, iremos representar $z = 1 + 0i$ na forma trigonométrica. Calculando seu módulo, temos $\rho = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$, ou seja, $\rho = 1$. Calculando agora seu argumento, temos

$$cos\ \theta = \frac{a}{\rho} = \frac{1}{1} = 1, \text{ isto é, } cos\ \theta = 1 \text{ e}$$

$$sen\ \theta = \frac{b}{\rho} = \frac{0}{1} = 0, \text{ ou seja, } sen\ \theta = 0.$$

Logo, $\theta = 0\ rad$, ou $\theta = 0°$.

Portanto, a forma trigonométrica de $z = 1 + 0i$ é

$z = \rho\ (cos\ \theta + i\ sen\ \theta) = 1\ [\ cos(0) + i\ sen(0)\ ]$, ou seja,

$z = 1\ [\ cos(0) + i\ sen(0)\ ]$.

Aplicando a fórmula da radiciação, fórmula (2.14), em z, encontramos as raízes n-ésimas da unidade. Assim, as raízes n-ésimas da unidade são:

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[n]{1}\left[\ cos\left(\frac{0+2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{0+2k\pi}{n}\right)\right] \\ &= 1\left[\ cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right] \\ &= cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \text{com } k = 0, 1, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

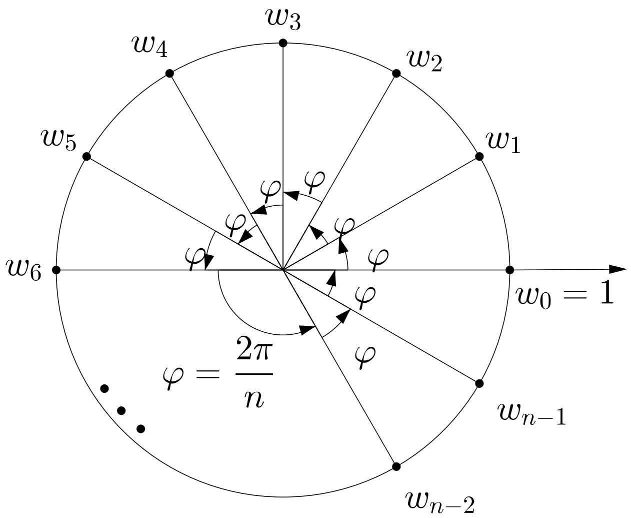
isto é,

$$w_k = cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \text{com } k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2.15}$$

Fazendo $v = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, temos, pela fórmula de De Moivre, fórmula (2.13),

$$v^k = cos\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{k \cdot 2\pi}{n}\right), k \in \mathbb{Z}. \tag{2.16}$$

Observe que as raízes n-ésimas da unidade $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ coincidem com as potências $v^0 = 1, v, v^2, \ldots, v^{n-1}$, respectivamente. Do ponto de vista geométrico, essas raízes representam os n vértices de um polígono regular de n lados inscrito em um círculo de raio 1, com centro na origem. Este círculo tem a equação $|z| = 1$ e é, frequentemente, chamado de círculo unitário. Observe a figura abaixo.



Em seguida veremos um caso particular de raízes n-ésimas da unidade, denominado raízes n-ésimas primitivas da unidade.

Definição 2.3.1. Chama-se raíz n-ésima primitiva da unidade qualquer raíz n-ésima $z \neq 1$ tal que n é o menor inteiro positivo de modo que $z^n = 1$.

Assim, para qualquer inteiro positivo n,

$$v = cos\ \frac{2\pi}{n} + i\ sen\ \frac{2\pi}{n}$$

é uma raíz n-ésima primitiva da unidade. Note que v foi obtido fazendo $k = 1$ na igualdade (2.16). Esta é a primeira raíz n-ésima primitiva da unidade que ocorre quando percorremos o círculo unitário no sentido anti-horário, a partir da unidade real, porém em alguns casos pode não ser a única raíz primitiva. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 2.3.11. No caso das raízes triplas da unidade, ou seja, quando $w = \sqrt[3]{1}$, temos, pela fórmula (2.15),

$$w_k = cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{2k\pi}{3}\right), \text{ com } k = 0, 1, 2.$$

Fazendo $k = 0$, 1 e 2, obtemos as três raízes triplas da unidade. Assim, para $k = 0$,

$$\begin{aligned} w_0 &= cos\left(\frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{2 \cdot 0 \cdot \pi}{3}\right) \\ &= cos(0) + i\ sen(0) \\ &= 1 + i \cdot 0 = 1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$w_0 = 1.$$

Para $k = 1$,

$$\begin{aligned} w_1 &= cos\left(\frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{2 \cdot 1 \cdot \pi}{3}\right) \\ &= cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + i\ \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

isto é,

$$w_1 = -\frac{1}{2} + i\ \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

E, para $k = 2$,

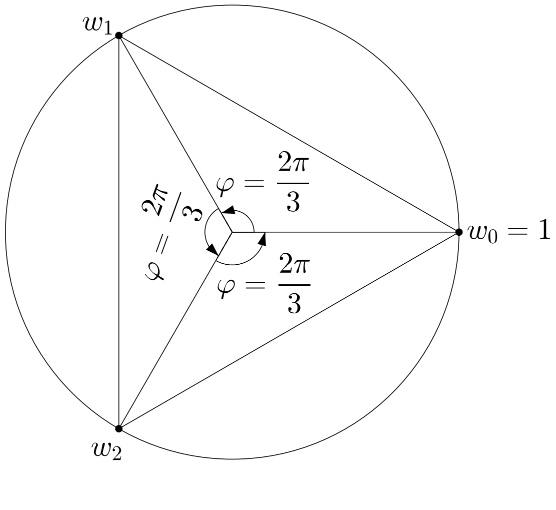
$$\begin{aligned} w_2 &= cos\left(\frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{3}\right) \\ &= cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\ sen\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{2} - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{aligned}$$

isto é,

$$w_2 = -\frac{1}{2} - i\ \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Note que w_1 é uma raíz tripla primitiva da unidade, pois $w_1 \neq 1$, $w_1^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\ i \neq 1$ e $w_1^3 = 1$. Da mesma forma, w_2 também é uma raíz tripla primitiva da unidade.

A representação geométrica das três raízes triplas da unidade pode ser vista a seguir.



Veja que a fórmula da radiciação de números complexos, fórmula (2.14), pode ser representada da seguinte forma:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\ cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{\theta}{n}\right)\right] \cdot \left[\ cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right],$$

para $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

De fato,

$$cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) = cos\left(\frac{\theta}{n}\right) \cdot cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - sen\left(\frac{\theta}{n}\right) \cdot sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

e

$$sen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = sen\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) = sen\left(\frac{\theta}{n}\right) \cdot cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \cdot cos\left(\frac{\theta}{n}\right)$$

Logo,

$$cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) = cos\left(\frac{\theta}{n}\right) \cdot cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - sen\left(\frac{\theta}{n}\right) \cdot sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right) +$$

$$i\left[\ sen\left(\frac{\theta}{n}\right) \cdot cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \cdot cos\left(\frac{\theta}{n}\right)\right] \tag{2.17}$$

Note também que

$$\left[\ cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{\theta}{n}\right)\right] \cdot \left[\ cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right] = cos\left(\frac{\theta}{n}\right) \cdot cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) +$$

$$cos\left(\frac{\theta}{n}\right) \cdot i\ sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{\theta}{n}\right) \cdot cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{\theta}{n}\right) \cdot i\ sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$= cos\left(\frac{\theta}{n}\right) \cdot cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \cdot cos\left(\frac{\theta}{n}\right) +$$

$$i\ sen\left(\frac{\theta}{n}\right) \cdot cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i^2 sen\left(\frac{\theta}{n}\right) \cdot sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

$$= cos\left(\frac{\theta}{n}\right)\cdot cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) - sen\left(\frac{\theta}{n}\right)\cdot sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right) +$$

$$i\left[\ sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\cdot cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + sen\left(\frac{\theta}{n}\right)\cdot cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right],$$

ou seja,

$$\left[\ cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{\theta}{n}\right)\right]\cdot\left[\ cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right] = cos\left(\frac{\theta}{n}\right)\cdot cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) -$$

$$sen\left(\frac{\theta}{n}\right)\cdot sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\left[\ sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\cdot cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + sen\left(\frac{\theta}{n}\right)\cdot cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right] \quad (2.18)$$

Por (2.17) e (2.18) concluímos que

$$cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) = \left[\ cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{\theta}{n}\right)\right]\cdot\left[\ cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right]$$

Assim, podemos reescrever a fórmula da radiciação de números complexos, fórmula (2.14), da seguinte maneira:

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\cdot\left[\ cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{\theta}{n}\right)\right]\cdot\left[\ cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right], \qquad (2.19)$$

para $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Note que $v^k = cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$, com $k = 0, 1, \ldots, n-1$, são as n raízes n-ésimas da unidade. Assim, podemos reescrever a fórmula (2.19) como sendo

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\cdot\left[\ cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{\theta}{n}\right)\right]\cdot v^k, \text{com } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Esta expressão significa que as raízes n-ésimas de um número complexo não-nulo qualquer podem ser obtidas como o produto de uma de suas raízes particulares,

$$w_0 = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\, cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i \; sen\left(\frac{\theta}{n}\right) \right]$$

pelas n raízes n-ésimas da unidade, $v^0 = 1, v, v^2, \ldots, v^{n-1}$.

Exemplo 2.3.12. Para determinar as raízes cúbicas de $z = 27$ utilizando as raízes da unidade, primeiramente devemos conhecer uma dessas raízes, especificamente a raíz

$$w_0 = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left[\, cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i \; sen\left(\frac{\theta}{n}\right) \right].$$

Note que para $z = 27 = 27 + 0i$, temos $\rho = |z| = \sqrt{27^2 + 0^2} = \sqrt{729} = 27$, ou seja, $\rho = 27$.

Calculando $\theta = arg(z)$, temos

$$sen \; \theta = \frac{Im(z)}{\rho} = \frac{0}{27} = 0, \text{ isto é, } sen \; \theta = 0 \quad \text{e}$$

$$cos \; \theta = \frac{Re(z)}{\rho} = \frac{27}{27} = 1, \text{ ou seja, } cos \; \theta = 1.$$

Logo, $\theta = 0 \; rad$ ou $0°$.

Assim,

$$\begin{aligned} w_0 &= \sqrt[3]{27} \cdot \left[\, cos\left(\frac{0}{3}\right) + i \; sen\left(\frac{0}{3}\right) \right] \\ &= 3 \cdot [\, cos(0) + i \; sen(0)] \\ &= 3(1 + i \cdot 0) \\ &= 3(1 + 0) = 3, \end{aligned}$$

isto é,

$$w_0 = 3.$$

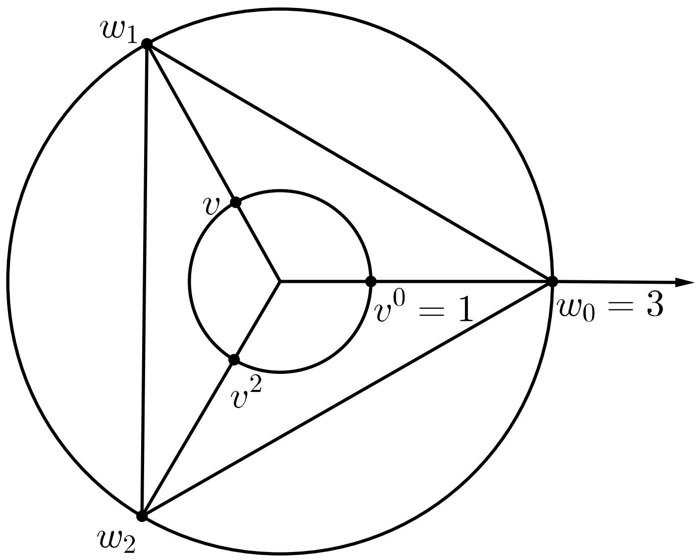
Pelo exemplo anterior, exemplo 2.3.11, sabemos que as raízes triplas da unidade são dadas por $v^0 = 1,\ v = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ i$ e $v^2 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ i$. Portanto basta multiplicá-las por $w_0 = 3$ que iremos obter as raízes cúbicas de $z = 27, w_0,\ w_1$ e w_2, respectivamente. Assim,

$w_0 = 3 \cdot v^0 = 3 \cdot 1 = 3$, ou seja, $w_0 = 3$.

$w_1 = 3 \cdot v = 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ i\right) = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\ i$, isto é, $w_1 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\ i$.

$w_2 = 3 \cdot v^2 = 3 \cdot \left(-\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\ i\right) = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\ i$, ou seja, $w_2 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\ i$.

A representação geométrica das raízes cúbicas de $z = 27$ pode ser vista na figura abaixo.



2.4 A Exponencial

Apresentaremos agora outra forma de representar um número complexo qualquer, que é a forma exponencial.

Sendo e o número de Euler, cujo valor é aproximadamente 2,72, e $z = x + yi$ um número complexo qualquer, então a exponencial e^z é dada pela expressão

$$e^z = e^{x+yi} = e^x \cdot (cos\ y + i\ sen\ y), \text{ com } x, y \in \mathbb{R}.$$

A motivação para a definição da exponencial $e^z, z \in \mathbb{C}$, vista acima leva em consideração alguns conceitos e resultados estudados no curso de cálculo diferencial e integral, tais como as funções trigonométricas $sen\ x$ e $cos\ x$, o número de Euler e, a função exponencial e^x e sua propriedade $e^{x_1+x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}, \forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, e também os desenvolvimentos dessas funções em séries de MacLaurin, válidas para todos os valores reais da variável x. Isto pode ser visto com mais detalhes na referência bibliográfica [2], página 21.

No caso em que o expoente é um número imaginário puro, temos

$$e^z = e^{yi} = cos\ y + i\ sen\ y.$$

Propriedades da exponencial

A seguir destacaremos algumas propriedades elementares da exponencial $e^z, z \in \mathbb{C}$.

Propriedade 1: Para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

Demonstração. Sejam $z_1 = x + yi$ e $z_2 = v + wi$ dois números complexos quaisquer. Pela definição da exponencial dada anteriormente, temos

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= [e^x \cdot (cos\ y + i\ sen\ y)] \cdot [e^v \cdot (cos\ w + i\ sen\ w)] \\ &= e^{x+v} \cdot [(cos\ y\ cos\ w - sen\ y\ sen\ w) \\ &+ i \cdot (sen\ y\ cos\ w + cos\ y\ sen\ w)] \\ &= e^{x+v} \cdot [\ cos(y+w) + i\ sen(y+w)\ ]\ , \end{aligned}$$

ou seja,

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x+v} \cdot [\ cos(y+w) + i\ sen(y+w)\ ].$$

Sabemos que $cos(y+w) + i\ sen(y+w) = e^{(y+w)i}$. Assim, podemos concluir que

$$\begin{aligned} e^{x+v} \cdot [cos(y+w) + i\ sen(y+w)] &= e^{x+v} \cdot e^{(y+w)i} \\ &= e^{x+v+(y+w)i} \\ &= e^{x+v+yi+wi} \\ &= e^{x+yi+v+wi} \\ &= e^{z_1+z_2}\ , \end{aligned}$$

isto é,

$$e^{x+v} \cdot [cos(y+w) + i\ sen(y+w)] = e^{z_1+z_2}\ ,$$

de onde concluímos que $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. $\square$

Propriedade 2: Para todo $z \in \mathbb{C},\ e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.

Demonstração. Seja $z = x + yi$ um número complexo qualquer. Assim, temos

$$\begin{aligned} e^{-z} &= e^{-x-yi} \\ &= e^{-x} \cdot e^{-yi} \\ &= \frac{1}{e^x} \cdot [\ cos\ (-y) + i\ sen\ (-y)\ ] \\ &= \frac{1}{e^x} \cdot (cos\ y - i\ sen\ y) \\ &= \frac{cos\ y - i\ sen\ y}{e^x}\ , \end{aligned}$$

isto é,

$$e^{-z} = \frac{cos\ y - i\ sen\ y}{e^x}.$$

Multiplicando o numerador e o denominador da fração acima por $cos\ y + i\ sen\ y$, temos

$$\begin{aligned} \frac{cos\ y - i\ sen\ y}{e^x} &= \frac{cos\ y - i\ sen\ y}{e^x} \cdot \frac{cos\ y + i\ sen\ y}{cos\ y + i\ sen\ y} \\ &= \frac{cos^2\ y + sen^2\ y}{e^x \cdot (cos\ y + i\ sen\ y)} \\ &= \frac{1}{e^x \cdot (cos\ y + i\ sen\ y)} \\ &= \frac{1}{e^{x+yi}} = \frac{1}{e^z}\ , \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{cos\ y - i\ sen\ y}{e^x} = \frac{1}{e^z}.$$

Portanto, $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$. $\square$

Propriedade 3: Para todo $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{Z}, (e^z)^n = e^{nz}$.

Demonstração. Para os casos em que $n = 0$ e $n = 1$ a fórmula acima é imediata. Para $n = 2$, ela segue da propriedade 1, e em geral, para $n > 0$, ela é estabelecida por indução. Para isso, como ela é válida para $n = 0$, basta mostrar que do fato de ser válida para $n = k$ segue-se que é válida também para $n = k + 1$, $k \geq 0$. Suponhamos, então, que

$$(e^z)^k = e^{kz}.$$

Assim,

$$(e^z)^{k+1} = (e^z)^k \cdot e^z = e^{kz} \cdot e^z = e^{kz+z} = e^{(k+1)z}.$$

Portanto, a fórmula é válida para todo $n \geq 0$. O caso $n < 0$ reduz-se ao caso em que $n > 0$. De fato, supondo $n < 0$, temos

$$(e^z)^n = \frac{1}{(e^z)^{-n}}\ ;$$

mas $-n > 0$, então $(e^z)^{-n} = e^{-nz}$,

portanto,

$$(e^z)^n = \frac{1}{e^{-nz}} = e^{nz} \ ,$$

o que verifica a propriedade. $\square$

Propriedade 4: Para todo $z \in \mathbb{C}, e^z \neq 0$.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que exista um número complexo $z = x + yi$ tal que $e^z = 0$. Assim, temos

$$\begin{aligned} e^z = 0 \ &\Longrightarrow \ e^{x+yi} = 0 \\ &\Longrightarrow \ e^x \cdot (cos\ y + i\ sen\ y) = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$e^z = 0 \Longrightarrow e^x \cdot (cos\ y + i\ sen\ y) = 0 \tag{2.20}$$

Sabemos que, para todo $y \in \mathbb{R}, cos\ y + i\ sen\ y \neq 0$, pois $cos\ y = 0 \Longrightarrow sen\ y \neq 0$, e, da mesma forma, $sen\ y = 0 \Longrightarrow cos\ y \neq 0$. De fato, se $cos\ y = 0$, então $y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, e $sen\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = \pm 1$. Analogamente, se $sen\ y = 0$, então $y = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, e $cos(k\pi) = \pm 1$. Logo,

$$e^x \cdot (cos\ y + i\ sen\ y) = 0 \Longrightarrow e^x = 0 \tag{2.21}$$

Por (2.20) e (2.21) concluímos que $e^z = 0 \Longrightarrow e^x = 0$, o que é um absurdo, pois não existe $x \in \mathbb{R}$ de modo que $e^x = 0$. Portanto, $e^z \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$. $\square$

Propriedade 5: Para todo $z \in \mathbb{C}, |e^z| = e^{Re(z)}$.

Demonstração. Sendo $z = x + yi$, logo $Re(z) = x$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
|e^z| &= |e^{x+yi}| \\
&= |e^x \cdot (cos\ y + i\ sen\ y)| \\
&= |(e^x cos\ y) + i(e^x sen\ y)| \\
&= \sqrt{(e^x cos\ y)^2 + (e^x sen\ y)^2} \\
&= \sqrt{(e^x)^2 cos^2\ y + (e^x)^2 sen^2\ y} \\
&= \sqrt{(e^x)^2 (cos^2\ y + sen^2\ y)} \\
&= \sqrt{(e^x)^2 \cdot 1} \\
&= \sqrt{(e^x)^2} \\
&= e^x = e^{Re(z)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|e^z| = e^{Re(z)},$$

verificando a propriedade. □

Propriedade 6: Para qualquer $z \in \mathbb{C}$ e $k \in Z, e^z = 1 \Longleftrightarrow z = 2k\pi i$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $z = x + yi$. Logo $Re(z) = x$. Por hipótese, $e^z = 1 \Longrightarrow |e^z| = |1| = 1$, isto é, $|e^z| = 1$.

Pela propriedade 5 segue que $|e^z| = e^{Re(z)}$. Assim temos $e^x = 1 \Longrightarrow x = 0$.

Note que

$$\begin{aligned}
e^z &= e^{x+yi} \\
&= e^x \cdot (cos\ y + i\ sen\ y) \\
&= 1 \cdot (cos\ y + i\ sen\ y) \\
&= cos\ y + i\ sen\ y,
\end{aligned}$$

isto é,

$$e^z = cos\ y + i\ sen\ y.$$

Mas, por hipótese, $e^z = 1$. Assim,

$cos\ y + i\ sen\ y = 1 = 1 + 0i$, ou seja, $cos\ y + i\ sen\ y = 1 + 0i$.

Logo $cos\ y = 1 \quad$ e $\quad sen\ y = 0$. Assim $y = 2k\pi\ rad,\ k \in \mathbb{Z}$.

Portanto $z = x + yi = 0 + 2k\pi i = 2k\pi i$, com $k \in Z$, ou seja, $z = 2k\pi i$, com $k \in \mathbb{Z}$.

($\Leftarrow$) Por hipótese, $z = 2k\pi i$, com $k \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\begin{aligned} e^z &= e^{2k\pi i}, k \in \mathbb{Z} \\ &= cos\ 2k\pi + i\ sen\ 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ &= 1 + 0i = 1, \end{aligned}$$

ou seja,

$$e^z = 1.$$

o que verifica a propriedade. □

Com a notação exponencial, a representação polar de um número complexo assume a forma compacta $z = \rho \cdot e^{i\theta}$, onde ρ é o módulo de z, isto é, $\rho = |z|$, e θ é o argumento de z, ou seja, $\theta = arg(z)$. Observe o exemplo abaixo.

Exemplo 2.4.1. Para representar o número complexo $z = 2+2i$ na forma exponencial, primeiro devemos calcular $\rho = |z|$ e $\theta = arg(z)$. Calculando seu módulo, temos
$\rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, isto é, $\rho = 2\sqrt{2}$.
Calculando agora seu argumento, temos

$cos\ \theta = \dfrac{Re(z)}{\rho} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, ou seja, $cos\ \theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, e

$$sen\ \theta = \frac{Im(z)}{\rho} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \text{ isto é, } sen\ \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, $\theta = \dfrac{\pi}{4}\ rad$ ou $\theta = 45°$.

Portanto, a forma exponencial do número complexo $z = 2 + 2i$ é
$z = \rho \cdot e^{i\theta} = 2\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$, isto é, $z = 2\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Anteriormente vimos como é fácil calcular potências de números complexos na forma trigonométrica utilizando a fórmula de De Moivre, fórmula (2.13). Na forma exponencial, podemos aplicar esta fórmula facilmente da seguinte maneira:

$$z^n = (\rho \cdot e^{i\theta})^n = \rho^n \cdot e^{in\theta}, \text{ isto é, } z^n = \rho^n \cdot e^{in\theta}, \text{ com } n \in \mathbb{Z}.$$

Observe que é muito comum usar a notação $exp(z)$ em vez de e^z, principalmente nos casos em que o expoente é muito extenso. Por exemplo, costuma-se escrever $exp\left[\ \frac{3}{4}\left(v - \frac{3}{t}\right)\right]$ no lugar de $e^{\frac{3}{4}\left(v-\frac{3}{t}\right)}$.

Também vimos anteriormente que as raízes n-ésimas da unidade são dadas por

$$w_k = cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \text{ com } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Elas também podem ser facilmente representadas na forma exponencial. Neste caso temos $\rho = 1$ e $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$. Logo sua forma exponencial é

$$w_k = \rho \cdot e^{i\theta} = 1 \cdot e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \text{ ou seja,}$$

$$w_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}, \text{ com } k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

A próxima seção tratará das representações geométricas dos números complexos, com algumas destas representações já vistas anteriormente.

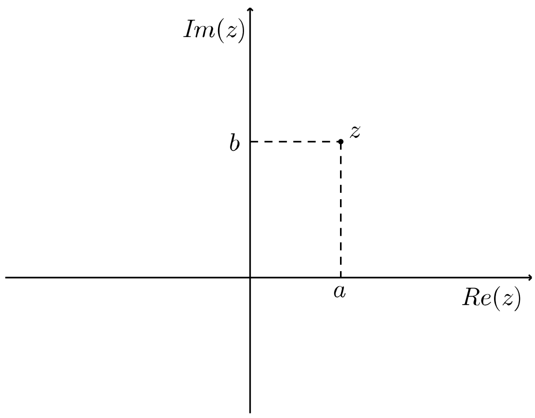
2.5 Representações Geométricas dos Números Complexos

Nesta seção falaremos sobre algumas representações geométricas dos números complexos. Já vimos na seção 2.1 uma dessas representações, que é a representação de um número complexo qualquer como um ponto no plano.

Sendo $z = a+bi$, o par ordenado (a, b) é o ponto que representa o número complexo z, e a e b são denominados coordenadas retangulares do ponto. Vimos que existe uma correspondência biunívoca entre os números complexos e os pontos do plano. Em outras palavras, vimos que cada ponto do plano corresponde a um e somente um número complexo, e vice-versa.

Devido a correspondência dita acima, é comum se referir a um número complexo z qualquer como o ponto z.

Assim, sendo $z = a+bi$, sua representação no plano complexo pode ser vista abaixo.



Dados dois números complexos quaisquer $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, é possível calcular a distância entre os pontos z_1 e z_2 através da fórmula

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

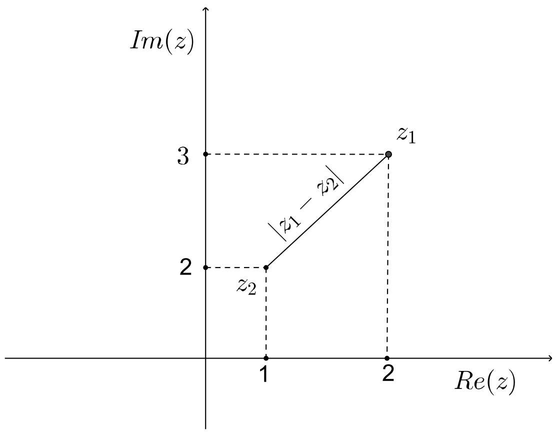
Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 2.5.1. Sejam $z_1 = 2 + 3i$ e $z_2 = 1 + 2i$ dois números complexos. A distância entre os pontos z_1 e z_2 é

$|z_1 - z_2| = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, isto é,

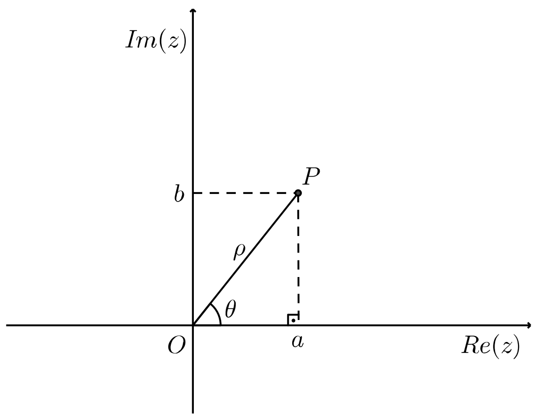
$|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$.

Assim, representando os pontos z_1 e z_2 e a distância entre eles no plano complexo, temos



Conforme acabamos de ver, a representação geométrica de um número complexo na forma algébrica $z = a + bi$ é obtida através das coordenadas retangulares (a, b). Quando o número complexo encontra-se na forma polar $z = \rho\ (cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$ a sua representação gráfica é obtida através das coordenadas (ρ, θ), denominadas coordenadas polares.

A representação geométrica de $z = a + bi$ na forma polar $z = \rho\ (cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$ é o ponto P, que pode ser vista na figura abaixo.



Note que o ponto P pode ser localizado no plano complexo através das coordenadas retangulares (a, b) ou das coordenadas polares (ρ, θ).

Observe que, utilizando relações trigonométricas no triângulo retângulo AÔP acima, podemos afirmar que $\quad a = \rho \cdot cos\ \theta \quad$ e $\quad b = \rho \cdot sen\ \theta$. Logo,

$$z = a + bi = \rho \cdot cos\ \theta + \rho \cdot sen\ \theta i = \rho\ (cos\ \theta + i\ sen\ \theta)\ \text{, ou seja,}$$

$$z = a + bi = \rho\ (cos\ \theta + i\ sen\ \theta).$$

Vimos anteriormente como localizar um número complexo, ou ponto, no plano. Se ele estiver escrito na forma algébrica $z = a+bi$, localizamos ele através das coordenadas retangulares (a, b), e se ele estiver escrito na forma polar $z = \rho\ (cos\ \theta + i\ sen\ \theta)$, localizamos ele através das coordenadas polares (ρ, θ).

Há ainda outras formas de localizar um número complexo. Uma delas é através das coordenadas conjugadas complexas $(z, \overline{z})$. Neste caso, sendo $z = x + yi$, usamos o fato de que $x = \dfrac{1}{2} \cdot (z + \overline{z})$ e $y = \dfrac{1}{2i} \cdot (z - \overline{z})$. Observe o exemplo a seguir.

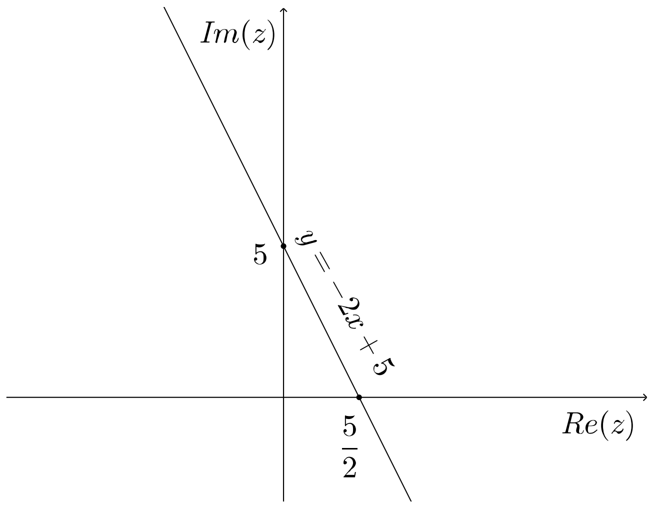
Exemplo 2.5.2. Dada a equação $2x + y = 5$, iremos expressá-la em termos das coordenadas conjugadas. Assim, sendo $z = x+yi$, temos $\overline{z} = x-yi$, e ainda, $x = \dfrac{1}{2} \cdot (z+\overline{z})$ e $y = \dfrac{1}{2i} \cdot (z - \overline{z})$. Logo,

$$\begin{aligned}
2x + y = 5 \quad &\Longrightarrow \quad 2\left[\frac{1}{2} \cdot (z + \overline{z})\right] + \left[\frac{1}{2i} \cdot (z - \overline{z})\right] = 5 \\
&\Longrightarrow \quad z + \overline{z} + \frac{z - \overline{z}}{2i} = 5 \\
&\Longrightarrow \quad 2i(z + \overline{z}) + z - \overline{z} = 10i \\
&\Longrightarrow \quad 2iz + 2i\overline{z} + z - \overline{z} = 10i \\
&\Longrightarrow \quad (2i + 1)z + (2i - 1)\overline{z} = 10i,
\end{aligned}$$

isto é,

$$2x + y = 5 \implies (2i+1)z + (2i-1)\overline{z} = 10i$$

Portanto, a equação $2x + y = 5$ é dada em termos das coordenadas conjugadas complexas por $(2i+1)z + (2i-1)\overline{z} = 10i$. O gráfico desta equação é uma reta decrescente no plano complexo, pois isolando y na equação $2x + y = 5$ segue que $y = -2x + 5$. Veja a figura abaixo.



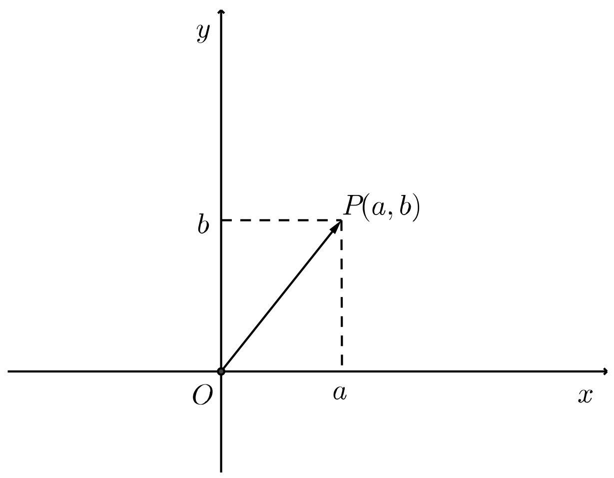
A reta na figura acima representa os números complexos do tipo
$z = x + (-2x+5)i,\ x \in \mathbb{R}$.

Veremos agora outros tipos de representações geométricas dos números complexos.

2.5.1 Interpretação Vetorial dos Números Complexos

Os números complexos podem ser considerados como vetores. Tendo como base o que vimos anteriormente sobre a localização dos números complexos no plano através das coordenadas retangulares e polares, essa consideração se torna simples.

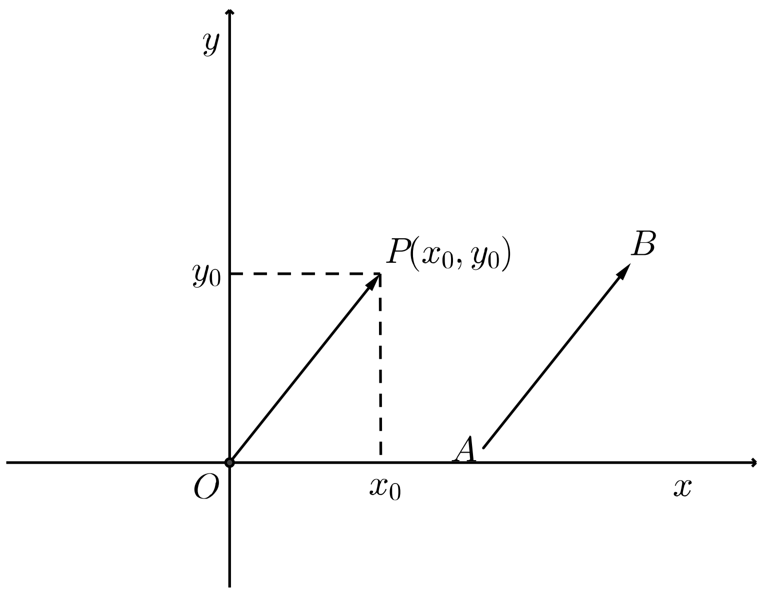
Seja $z = a + bi$ um número complexo qualquer. O ponto $\mathrm{P}(a, b)$ do sistema de coordenadas será o extremo do vetor e a origem do mesmo é o ponto O(0, 0). Veja a figura abaixo.



Algumas vezes, dizemos que o vetor OP é o vetor posição do ponto P.

Dois vetores com o mesmo comprimento e direção, mas origens diferentes, são considerados iguais. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 2.5.3. Dado o vetor OP $= x_0 + y_0 i$, temos

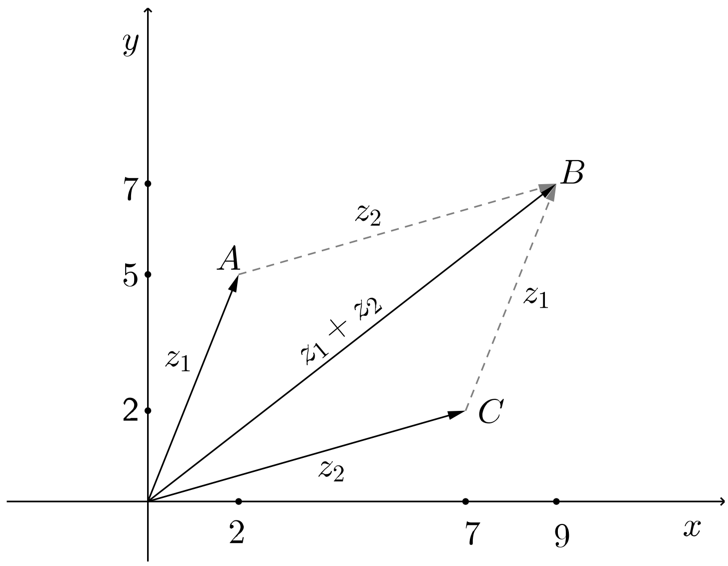


Como o vetor AB tem o mesmo comprimento e direção do vetor OP, logo são iguais. Assim,

$$\text{OP} = x_0 + y_0 i = \text{AB}.$$

A adição de números complexos representados vetorialmente é realizada pela regra do paralelogramo, e a soma corresponde com a adição de números complexos representados na forma algébrica. Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 2.5.4. Sejam $z_1 = 2 + 5i$ e $z_2 = 7 + 2i$ dois números complexos. Representando z_1 e z_2 vetorialmente e efetuando sua soma através da regra do paralelogramo, temos

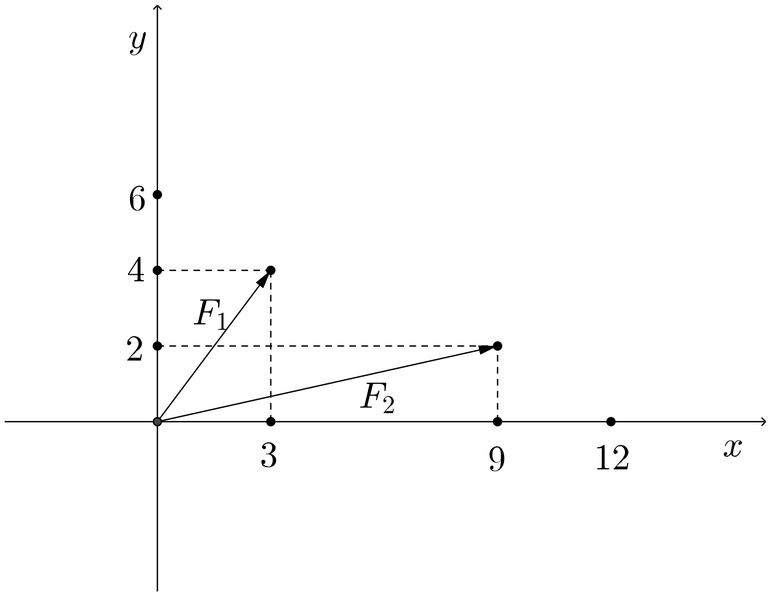


Note que a soma $z_1 + z_2 = 9 + 7i$ é equivalente ao vetor soma $z_1 + z_2$.

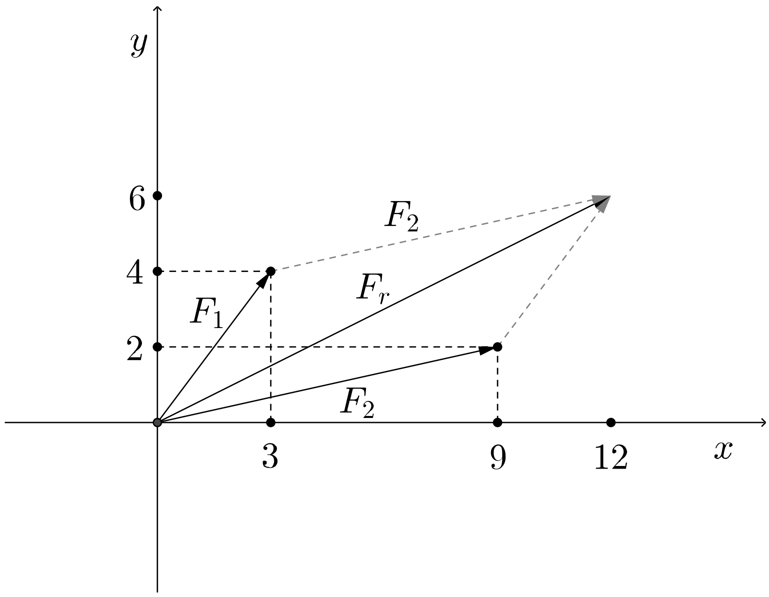
A interpretação vetorial dos números complexos é frequentemente usada na Física quando se trabalha com grandezas vetoriais como, por exemplo, força, velocidade, aceleração, entre outras.

Um exemplo básico dessa utilização é quando se necessita determinar uma força resultante que age sobre um corpo no qual atuam várias forças.
Veja o caso a seguir.

Exemplo 2.5.5. Um corpo está situado na origem do sistema cartesiano. Abaixo e sobre ele atuam as forças $F_1 = 3 + 4i$ e $F_2 = 9 + 2i$ representadas pelos vetores da figura.



Assim, a força resultante dessas duas forças é representada pelo vetor soma, $F_r = 12 + 6i$, que foi obtido através da regra do paralelogramo.



Note que é possível efetuar o produto interno e o produto vetorial em $\mathbb{C}$, já que podemos representar qualquer elemento do conjunto $\mathbb{C}$ como um vetor.

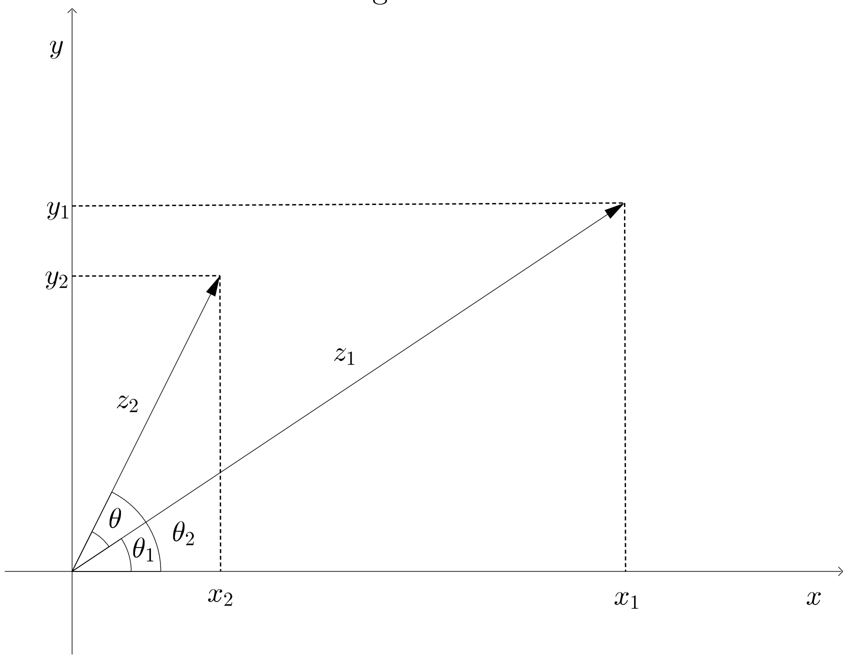
Sejam $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$ dois números complexos quaisquer. O produto interno de z_1 e z_2, também chamado de produto escalar, é indicado por $< z_1, z_2 >$, e definido da seguinte forma:

$$< z_1, z_2 >= |z_1| \cdot |z_2| \cdot cos\ \theta = x_1x_2 + y_1y_2\ ,$$

onde θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ é o ângulo entre z_1 e z_2.

Observe a figura abaixo.

Figura 2.1:



Note que $\theta = \theta_2 - \theta_1$. Assim,

$$\begin{aligned} cos\ \theta &= cos(\theta_2 - \theta_1) \\ &= cos\ \theta_2 \cdot cos\ \theta_1 + sen\ \theta_2 \cdot sen\ \theta_1 \\ &= \frac{x_2}{|z_2|} \cdot \frac{x_1}{|z_1|} + \frac{y_2}{|z_2|} \cdot \frac{y_1}{|z_1|} \\ &= \frac{x_2x_1 + y_2y_1}{|z_1| \cdot |z_2|} \end{aligned}$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|z_1| \cdot |z_2|} \text{ , isto é,}$$

$$cos\ \theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{|z_1| \cdot |z_2|} \ ,$$

de onde segue que

$$|z_1| \cdot |z_2| \cdot cos\ \theta = x_1x_2 + y_1y_2 \ .$$

Exemplo 2.5.6. Sejam $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = 3 + 4i$ dois números complexos, ou dois vetores. Calculando o produto interno entre eles, temos
$< z_1, z_2 >= 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 6 + 4 = 10$, ou seja, $< z_1, z_2 >= 10$.

É importante observar que o produto interno definido acima é o produto interno usual, isto é, ele é um caso particular de produto interno. Veremos o produto interno de forma generalizada na seção 3.1.1.

Para efetuar o produto vetorial de z_1 e z_2, sendo $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, consideraremos z_1 e z_2 dois vetores no espaço, ou vetores em $\mathbb{R}^3$. Assim, $z_1 = (x_1, y_1, 0)$ e $z_2 = (x_2, y_2, 0)$, e o produto vetorial de z_1 e z_2 é indicado por $z_1 \times z_2$.

Devemos lembrar que utilizamos o determinante de uma matriz 3×3 para o cálculo do produto vetorial, sendo a primeira linha composta pelos vetores unitários $i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0)$ e $k = (0, 0, 1)$; a segunda linha composta pelas coordenadas do vetor z_1 e a terceira linha composta pelas coordenadas do vetor z_2. Portanto,

$$\begin{aligned} z_1 \times z_2 &= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= x_1\ y_2\ k - x_2\ y_1\ k \\ &= (x_1\ y_2 - x_2\ y_1)\ k, \end{aligned}$$

ou seja,

$$z_1 \times z_2 = (x_1\ y_2 - x_2\ y_1)\ k.$$

Logo, o produto vetorial de z_1 e z_2 é definido pelo vetor $z_1 \times z_2 = (0, 0, x_1\ y_2 - x_2\ y_1)$. Note que o vetor $z_1 \times z_2$ é sempre perpendicular aos vetores z_1 e z_2.

Exemplo 2.5.7. Para efetuar o produto vetorial dos números complexos $z_1 = 4 + 3i$ e $z_2 = 2 + 5i$, primeiramente devemos considerar z_1 e z_2 como vetores em $\mathbb{R}^3$. Logo, $z_1 = (4, 3, 0)$ e $z_2 = (2, 5, 0)$. Pela definição do produto vetorial, temos
$z_1 \times z_2 = (0, 0, 4 \cdot 5 - 2 \cdot 3) = (0, 0, 20 - 6) = (0, 0, 14)$, isto é,

$$z_1 \times z_2 = (0, 0, 14).$$

Como sabemos, o módulo de um número complexo $z = a + bi$ é dado por $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Da mesma forma, o módulo de um vetor $z_1 = (x_1, y_1, 0)$ é dado por $|z_1| = \sqrt{x_1{}^2 + y_1{}^2 + 0^2}$. Como vimos anteriormente, o produto vetorial de dois números complexos $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$ é definido por $z_1 \times z_2 = (0, 0, x_1\ y_2 - x_2\ y_1)$. Assim, o módulo do produto vetorial de z_1 e z_2 é definido da seguinte forma:
$|z_1 \times z_2| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)^2} = \sqrt{(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)^2} = x_1\ y_2 - x_2\ y_1$, ou seja,
$|z_1 \times z_2| = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$.

Veja ainda que $|z_1| \cdot |z_2| \cdot sen\ \theta = x_1\ y_2 - x_2\ y_1$, sendo θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ o ângulo entre z_1 e z_2. De fato, observando novamente a figura 2.1, podemos notar que

$$\begin{aligned} sen\ \theta &= sen(\theta_2 - \theta_1) \\ &= sen\ \theta_2 \cdot cos\ \theta_1 - sen\ \theta_1 \cdot cos\ \theta_2 \\ &= \frac{y_2}{|z_2|} \cdot \frac{x_1}{|z_1|} - \frac{y_1}{|z_1|} \cdot \frac{x_2}{|z_2|} \end{aligned}$$

$$= \frac{y_2\ x_1 - y_1\ x_2}{|z_1| \cdot |z_2|}$$

$$= \frac{x_1\ y_2 - x_2\ y_1}{|z_1| \cdot |z_2|},$$

ou seja,

$$sen\ \theta = \frac{x_1\ y_2 - x_2\ y_1}{|z_1| \cdot |z_2|},$$

de onde segue que

$$|z_1| \cdot |z_2| \cdot sen\ \theta = x_1\ y_2 - x_2\ y_1.$$

Como $|z_1 \times z_2| = x_1\ y_2 - x_2\ y_1$, concluímos que $|z_1 \times z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot sen\ \theta$.

Adiante destacaremos algumas propriedades que ilustram aplicações do produto interno usual e do produto vetorial de dois vetores, porém antes disso é necessário relembrar alguns conceitos que são pré-requisitos. Um deles é a projeção de um vetor sobre outro. A projeção do vetor z_1 sobre o vetor z_2 é o vetor indicado por $proj(z_1, z_2)$ e obtido pela fórmula

$$proj(z_1, z_2) = \frac{< z_1, z_2 >}{|z_2|^2} \cdot z_2.$$

Outro conceito que devemos lembrar é a área de um paralelogramo. Ela é calculada pelo produto da base pela sua altura.

Agora, apresentaremos as propriedades que mencionamos anteriormente.

P$_1$) Dois vetores não-nulos z_1 e z_2 são perpendiculares se, e somente se, $< z_1, z_2 > = 0$.

P$_2$) Dois vetores não-nulos z_1 e z_2 são paralelos se, e somente se, $z_1 \times z_2 = 0$.

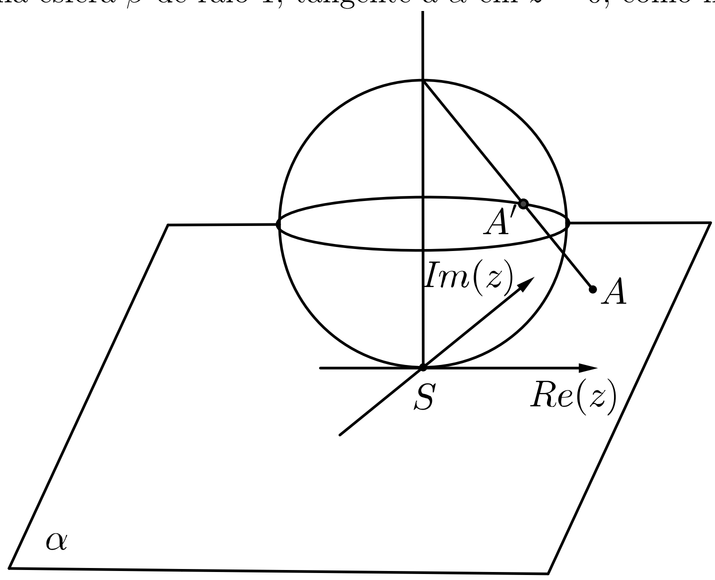
P$_3$) O módulo da projeção do vetor z_1 sobre o vetor z_2 é dado por $\dfrac{| < z_1, z_2 > |}{|z_2|}$.

P_4) A área de um paralelogramo cujos lados são os vetores z_1 e z_2 é dada por $|z_1 \times z_2|$.

Assim encerramos a interpretação vetorial dos números complexos. Veremos na sequência outra representação geométrica dos números complexos, que é a representação esférica. Lembrando que, na geometria analítica, uma esfera qualquer é representada em coordenadas retangulares pela equação $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$, onde x_0, y_0 e z_0 são as coordenadas do centro da esfera nos eixos x, y e z, respectivamente, e r é o raio da esfera. Assim, uma esfera unitária pode ser representada pela equação $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = 1$.

2.5.2 Representação Esférica dos Números Complexos

Chamaremos de α o plano complexo e consideraremos uma esfera unitária β, isto é, uma esfera β de raio 1, tangente a α em $z = 0$, como mostra a figura abaixo.



Correspondendo a qualquer ponto A sobre o plano α, podemos construir uma reta interceptando a esfera β no ponto A'. Assim, cada ponto do plano complexo α corresponde a um e somente um ponto da esfera β, e podemos representar qualquer número complexo por um ponto sobre a esfera.

Este método de extensão do plano complexo é chamado de projeção estereográfica. A esfera é, algumas vezes, chamada de esfera de Riemann.

Desta forma finalizamos as representações geométricas dos números complexos. A seguir iniciaremos o último capítulo deste trabalho, sendo este voltado para exemplificar a presença dos números complexos nas subáreas Álgebra e Análise Matemática.

Capítulo 3

Os Números Complexos em Álgebra e Análise Matemática

Trataremos aqui, de forma básica, dos números complexos nas subáreas álgebra e análise matemática.

Neste capítulo foram utilizadas as referências [2], [3], [4], [5], [6], [8] e [11].

3.1 Os Números Complexos em Álgebra

Nesta seção falaremos sobre os números complexos em álgebra linear e em álgebra moderna, ou álgebra abstrata.

3.1.1 Os Números Complexos em Álgebra Linear

A álgebra linear é um ramo da matemática que surgiu do estudo de sistemas de equações lineares. Nela se estuda estruturas fundamentais da matemática como vetores, matrizes, entre outros.

Destacaremos os números complexos em álgebra linear através de matrizes complexas, espaços vetoriais complexos e produto interno.

Matrizes Complexas

Uma matriz é dita complexa quando seus elementos são números complexos.

Consideraremos que o leitor esteja familiarizado com as matrizes reais e as operações fundamentais que as envolvem.

Lembrando que, sendo $z = a + bi$ um número complexo qualquer, o conjugado de z, denotado por $\overline{z}$, é dado por $\overline{z} = a - bi$.

Da mesma forma, as matrizes complexas também podem ser conjugadas. Se A é uma matriz complexa, a conjugada de A é a matriz obtida de A tomando-se o conjugado de cada elemento de A, e a denotamos por $\overline{\mathrm{A}}$. Assim, se $\mathrm{A} = [a_{ij}]$, então $\overline{\mathrm{A}} = [b_{ij}]$ onde $b_{ij} = \overline{a_{ij}}$, sendo i e j, respectivamente, o número da linha e da coluna onde se localiza o elemento na matriz.

Exemplo 3.1.1. Seja $A = \begin{bmatrix} 2+3i & 1+2i & 6-4i \\ 3i & 4-5i & 3+7i \end{bmatrix}$ uma matriz complexa.

A matriz conjugada de A é

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2-3i & 1-2i & 6+4i \\ -3i & 4+5i & 3-7i \end{bmatrix}$$

Devemos lembrar também da transposição de matrizes. Se A é uma matriz, a transposta de A é a matriz obtida escrevendo-se as linhas de A, em ordem, como colunas, e é denotada por A^T. Assim, se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz de ordem $m \times n$, então $A^T = [b_{ij}]$ é uma matriz de ordem $n \times m$ tal que $b_{ij} = a_{ji}$.

Exemplo 3.1.2. Seja $A = \begin{bmatrix} 3+i & 2+2i \\ 7 & 6-2i \\ 8-2i & 4-5i \end{bmatrix}$ uma matriz complexa.

A matriz transposta de A é

$$A^T = \begin{bmatrix} 3+i & 7 & 8-2i \\ 2+2i & 6-2i & 4-5i \end{bmatrix}.$$

As operações de transposição e conjugação de matrizes comutam para qualquer matriz complexa A, isto é, $(\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$. Quando é efetuada estas duas operações utilizamos a notação A^H, isto é, $(\overline{A})^T = A^H = \overline{(A^T)}$.

Exemplo 3.1.3. Sendo $A = \begin{bmatrix} 6+9i & 2+4i & 2-9i \\ -5+7i & 3+5i & 5+6i \\ 12 & 5+8i & 3-i \end{bmatrix}$ uma matriz complexa, a matriz transposta conjugada de A é

$$A^H = \begin{bmatrix} \overline{6+9i} & \overline{-5+7i} & \overline{12} \\ \overline{2+4i} & \overline{3+5i} & \overline{5+8i} \\ \overline{2-9i} & \overline{5+6i} & \overline{3-i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-9i & -5-7i & 12 \\ 2-4i & 3-5i & 5-8i \\ 2+9i & 5-6i & 3+i \end{bmatrix}.$$

Veremos agora alguns tipos de matrizes complexas.

Uma matriz quadrada complexa A é Hermitiana se $A^H = A$ e anti-Hermitiana se $A^H = -A$.

Vale ressaltar que uma matriz quadrada é uma matriz de ordem $m \times n$ onde $m = n$, ou seja, o número de linhas e o número de colunas da matriz são iguais.

Note que se $A = [a_{ij}]$ é Hermitiana, então $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, e para isso é necessário que cada elemento da diagonal principal seja um número real. Analogamente, se $A = [a_{ij}]$ é anti-Hermitiana, então $-a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ e portanto cada elemento da diagonal principal deve ser nulo.

Exemplo 3.1.4. A matriz quadrada complexa $A = \begin{bmatrix} 2 & 3-4i & 6+2i \\ 3+4i & 3 & 9-7i \\ 6-2i & 9+7i & 5 \end{bmatrix}$

é Hermitiana. De fato,

$$A^H = \begin{bmatrix} \overline{2} & \overline{3+4i} & \overline{6-2i} \\ \overline{3-4i} & \overline{3} & \overline{9+7i} \\ \overline{6+2i} & \overline{9-7i} & \overline{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3-4i & 6+2i \\ 3+4i & 3 & 9-7i \\ 6-2i & 9+7i & 5 \end{bmatrix} = A\ ,$$

isto é,

$$\mathrm{A}^{\mathrm{H}} = \mathrm{A}.$$

Exemplo 3.1.5. A matriz quadrada complexa $B = \begin{bmatrix} 0 & -2+5i & -3+2i \\ 2+5i & 0 & 11+i \\ 3+2i & -11+i & 0 \end{bmatrix}$ é

anti-Hermitiana. De fato,

$$B^H = \begin{bmatrix} \overline{0} & \overline{2+5i} & \overline{3+2i} \\ \overline{-2+5i} & \overline{0} & \overline{-11+i} \\ \overline{-3+2i} & \overline{11+i} & \overline{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2-5i & 3-2i \\ -2-5i & 0 & -11-i \\ -3-2i & 11-i & 0 \end{bmatrix} = -B,$$

ou seja, $B^H = -B$.

Uma matriz quadrada complexa A é unitária se $A \cdot A^H = A^H \cdot A = I$, sendo I a matriz identidade.

Vale lembrar que a matriz identidade I possui todos os elementos da diagonal principal iguais a 1 e os demais nulos.

Exemplo 3.1.6. A matriz quadrada complexa $A = \dfrac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & 1 & 1+i \\ 1+i & -1+i & 0 \end{bmatrix}$

é unitária. De fato,

$$A^H = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \overline{1} & \overline{i} & \overline{1+i} \\ \overline{-i} & \overline{1} & \overline{-1+i} \\ \overline{-1+i} & \overline{1+i} & \overline{0} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & 1 & -1-i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$A^H = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & 1 & -1-i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{e}$$

$$\begin{aligned} A \cdot A^H &= \left(\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & 1 & 1+i \\ 1+i & -1+i & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -i & 1-i \\ i & 1 & -1-i \\ -1-i & 1-i & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 1+1+2 & -i-i+2i & 1-i+i-1+0 \\ i+i-2i & 1+1+2 & i+1-1-i \\ 1+i-i-1+0 & -i+1-1+i+0 & 2+2+0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I, \end{aligned}$$

isto é,

$$A \cdot A^H = I.$$

De forma análoga verificamos que $A^H \cdot A = I$.

Portanto concluímos que a matriz quadrada complexa $A = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -i & -1+i \\ i & 1 & 1+i \\ 1+i & -1+i & 0 \end{bmatrix}$ é unitária.

Outro tipo de matriz complexa é a matriz complexa normal. Uma matriz quadrada complexa A é normal se $A \cdot A^H = A^H \cdot A$. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 3.1.7. A matriz quadrada complexa $A = \begin{bmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{bmatrix}$ é normal. De fato,

$$\begin{aligned} A \cdot A^H &= \begin{bmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \overline{2+3i} & \bar{i} \\ \bar{1} & \overline{1+2i} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2-3i & -i \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 13+1 & 3-2i+1-2i \\ 3+2i+1+2i & 1+5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14 & 4-4i \\ 4+4i & 6 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

isto é,

$$A \cdot A^H = \begin{bmatrix} 14 & 4-4i \\ 4+4i & 6 \end{bmatrix}.$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
A^H \cdot A &= \begin{bmatrix} \overline{2+3i} & \bar{i} \\ \bar{1} & \overline{1+2i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2-3i & -i \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 13+1 & 2-3i-i+2 \\ 2+3i+i+2 & 1+5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 14 & 4-4i \\ 4+4i & 6 \end{bmatrix} = A \cdot A^H,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$A^H \cdot A = A \cdot A^H \ .$$

Assim, a matriz quadrada complexa $A = \begin{bmatrix} 2+3i & 1 \\ i & 1+2i \end{bmatrix}$ é normal.

Agora falaremos sobre espaços vetoriais complexos.

Espaços Vetoriais Complexos

Um espaço vetorial complexo é um conjunto V não vazio sobre o qual estão definidas duas operações: adição e multiplicação por escalar, ou seja,

$$\forall\ u, v \in V, u+v \in V, \text{ e também},$$

$$\forall\ a \in \mathbb{C} \text{ e } u \in V, a \cdot u \in V,$$

e além disso, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $a, b \in \mathbb{C}$, todas as propriedades abaixo devem ser satisfeitas:

i) $(u + v) + w = u + (v + w)$

ii) $u + v = v + u$

iii) Existe $0 \in V$ tal que $u + 0 = u$ (0 é chamado vetor nulo)

iv) Existe $-u \in V$ tal que $u + (-u) = 0$.

v) $a(u + v) = au + av$

vi) $(a + b)v = av + bv$

vii) $(ab)v = a(bv)$

viii) $1 \cdot u = u$.

Os elementos de um espaço vetorial são chamados de vetores. Note que as propriedades acima significam que a adição em V é associativa, comutativa, tem elemento neutro, que é o vetor nulo, e todo elemento de V possui um oposto; a multiplicação por escalar é distributiva à esquerda em relação à adição de vetores, a multiplicação por escalar é distributiva à direita em relação à soma de dois escalares, a multiplicação de um produto de dois escalares por um vetor é associativa, e a multiplicação por escalar quando este for o elemento neutro para a multiplicação em $\mathbb{C}$ sempre resultará no próprio vetor.

Veja o exemplo a seguir sobre espaço vetorial complexo.

Exemplo 3.1.8. Seja V o conjunto das matrizes 2×2, cujos elementos são números complexos. As operações são adição usual de matrizes e multiplicação destas por números complexos. Observe que o conjunto V, juntamente com as operações vistas acima, satisfaz todas as oito propriedades da definição de espaço vetorial complexo. Portanto, V é um espaço vetorial complexo. Observe ainda que os vetores do espaço vetorial complexo V são as matrizes complexas de ordem 2.

Falaremos agora sobre produto interno.

Produto Interno

Na subseção 2.5.1 vimos como calcular o produto interno usual de dois números complexos (vetores). Este é um caso particular de produto interno, que definiremos de forma genérica a seguir.

Sabemos que o produto interno sobre V, sendo V um espaço vetorial complexo, é uma função que a cada par de vetores u e v associa um número complexo, denotado $< u, v >$. Além disso, deve satisfazer as seguintes condições:

i) $< v, v > \geq 0, \forall\ v \in V$ e $< v, v > = 0$ se, e somente se, $v = 0$.

ii) $< \alpha u, v > = \alpha < u, v >, \forall\ \alpha \in \mathbb{C}$ e $\forall\ u, v \in V$.

iii) $< u_1 + u_2, v > = < u_1, v > + < u_2, v >, \forall\ u_1, u_2, v \in V$.

iv) $< u, v > = \overline{< v, u >}, \forall\ u, v \in V$.

Veja ainda que podemos efetuar o produto interno em vetores de qualquer dimensão. No exemplo a seguir apresentaremos um tipo de produto inerno definido no espaço vetorial $\mathbb{C}^3$. As operações consideradas em $\mathbb{C}^3$ são a adição de vetores e multiplicação por escalar usuais.

Exemplo 3.1.9. Sejam $V = \mathbb{C}^3, u, v \in V$ com $u = (x_1, x_2, x_3)$ e $v = (y_1, y_2, y_3)$. Um produto interno em $\mathbb{C}^3$ é definido por

$$< u, v > = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3}$$

Note que Assim, tomando $u = (3 + 4i, 3, -2i),\ v = (2 + i, 1 - 2i, 6)$ e aplicando a definição acima, temos

$$\begin{aligned} < u, v > &= (3 + 4i) \cdot (\overline{2 + i}) + 3 \cdot (\overline{1 - 2i}) + (-2i) \cdot \overline{6} \\ &= (3 + 4i) \cdot (2 - i) + 3 \cdot (1 + 2i) + (-2i) \cdot 6 \\ &= 10 + 5i + 3 + 6i - 12i \\ &= 13 - i, \end{aligned}$$

ou seja,

$$< u, v > \;=\; 13 - i.$$

Este produto interno é conhecido como produto interno usual em $\mathbb{C}^3$.

No exemplo anterior vimos como é calculado o produto interno usual em $\mathbb{C}^3$. Este tipo de produto interno pode ser generalizado para o espaço vetorial $\mathbb{C}^n$, com $n \geq 2$ qualquer. Lembrando que as operações consideradas em $\mathbb{C}^n$ são a adição de vetores e multiplicação por escalar usuais. Assim, sendo $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$,

$$< u, v > = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + \ldots + x_n\overline{y_n}.$$

Note ainda que o produto interno pode ser definido de infinitas maneiras, para quaisquer espaços vetoriais complexos. No exemplo a seguir mostraremos mais um tipo de produto interno, definido em $\mathbb{C}^2$.

Exemplo 3.1.10. Seja $V = \mathbb{C}^2$. Para quaisquer $u, v \in V$, com $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$, a operação $< u, v > = 3x_1x_2 - 2y_2y_1 + x_2\overline{x_1}$ é um produto interno. Note que este produto interno é diferente do usual em $\mathbb{C}^2$. Observe que no caso particular onde $u = (2 + 2i, 3i)$ e $v = (-2i, 5)$, temos

$$\begin{aligned} < u, v > &= 3 \cdot (2 + 2i) \cdot (3i) - 2 \cdot 5 \cdot (-2i) + 3i \cdot (\overline{2 + 2i}) \\ &= (6 + 6i) \cdot (3i) + 20i + 3i \cdot (2 - 2i) \\ &= -18 + 18i + 20i + 6 + 6i \\ &= -12 + 44i, \end{aligned}$$

ou seja,

$$< u, v > \;=\; -12 + 44i.$$

Falaremos agora sobre números complexos em álgebra moderna.

3.1.2 Os Números Complexos em Álgebra Moderna

A álgebra moderna é um ramo da matemática que estuda estruturas algébricas, isto é, estuda conjuntos associados a uma ou mais operações sobre estes conjuntos, satisfazendo algumas condições. São exemplos de estruturas algébricas: grupos, anéis, corpos, espaços vetoriais, entre outros.

No decorrer desta subseção falaremos sobre os números complexos em álgebra moderna através de algumas estruturas algébricas, equações polinomiais e, por fim, apresentaremos o Teorema Fundamental da Álgebra. Portanto, iniciaremos definindo o que é um grupo e mostraremos a presença dos números complexos nesta estrutura algébrica, mas para isso, precisaremos conhecer alguns conceitos preliminares.

Sejam A e B dois conjuntos não vazios. O produto cartesiano de A e B, indicado por $A \times B$, é o conjunto dado por $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$.

Uma relação R de A em B é qualquer subconjunto de $A \times B$, isto é, $R \subset A \times B$. Os conjuntos A e B são denominados, respectivamente, conjunto de partida e conjunto de chegada da relação R.

Exemplo 3.1.11. Para $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{5, 7\}$ temos

$$A \times B = \{(1, 5), (1, 7), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7)\}.$$

Neste caso $R = \{(1, 5), (2, 7)\}$ é uma relação de A em B. Note que $R \subset A \times B$.

Para indicar que $(x, y) \in R$, usamos também a notação xRy (lê-se: "x erre y"). Assim, com a notação $x\not{R}y$ indicamos que $(x, y) \notin R$.

No caso em que xRy dizemos que x se relaciona com y segundo R.

Observando o exemplo anterior, temos que $1R5, 2R7, 1\not{R}7$ e $2\not{R}5$.

O domínio de uma relação R de A em B é o subconjunto de A indicado por $D(R)$ e definido por

$$D(R) = \{x \in A \mid \exists y \in B,\ xRy\}.$$

Assim, no caso do exemplo anterior temos $D(R) = \{1, 2\}$.

A imagem de uma relação R de A em B é o subconjunto de B indicado por $Im(R)$ e definido por

$$Im(R) = \{y \in B \mid \exists x \in A,\ xRy\}.$$

Assim, no caso do exemplo anterior temos $Im(R) = \{5, 7\}$.

A próxima definição se refere a um tipo especial de relação, a aplicação.

Definição 3.1.1. Seja f uma relação de E em F. Dizemos que f é uma aplicação de E em F se:

i) $D(f) = E$, sendo $D(f)$ o domínio da relação f;

ii) Dado $a \in D(f)$, é único o elemento $b \in F$ de modo que $(a, b) \in f$.

Se f é uma aplicação de E em F, escrevemos $b = f(a)$ (lê-se: b é imagem de a pela f) para significar que $(a, b) \in f$. Simbolizamos uma aplicação f de E em F por $f : E \to F$. O conjunto F é chamado de contradomínio de f.

Observação 1:

Se $f : E \to F$ e $g : E \to F$ é óbvio (pela definição de relação) que $f = g \Longleftrightarrow f(x) = g(x), \forall\ x \in E$.

Observação 2:

Se o contradomínio de uma aplicação f é um conjunto numérico (contido em $\mathbb{C}$), então é usual chamar a aplicação f de função.

Exemplo 3.1.12. Veja que a relação $f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x + 2\}$ é uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. De fato, $D(f) \in \mathbb{R}$ e dois elementos do domínio não possuem a mesma imagem. Além disso, o contradomínio de f é o conjunto $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ e, portanto, f é uma função.

A próxima definição tratará de operação sobre um conjunto.

Definição 3.1.2. Sendo E um conjunto não vazio, toda aplicação $f : E \times E \to E$ recebe o nome de operação sobre E ou lei de composição interna em E.

Uma operação f sobre E associa a cada par (x, y) do produto cartesiano $E \times E$ um elemento $x * y$ de E, isto é, $x * y$ é uma outra forma de indicar $f(x, y)$. Dizemos também que E é um conjunto munido da operação $*$.

Exemplo 3.1.13. Observe que a aplicação $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, sendo $f(x, y) = x + y$, é a operação de adição usual sobre $\mathbb{Z}$.

A adição usual vista no exemplo acima é um caso particular de adição, pois pode-se definir uma infinidade de adições diferentes sobre um conjunto. Veja o exemplo a seguir.

Exemplo 3.1.14. Note que a aplicação $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(x, y) = x \oplus y = x + y + 2$ é uma operação de adição sobre $\mathbb{Z}$. Assim, se somarmos o inteiro 3 com o inteiro 4 teremos como soma o inteiro 9.

Definiremos agora um grupo.

<u>Grupos</u>

Definição 3.1.3. Sejam G um conjunto não vazio e $*$ uma operação sobre G. Dizemos que G é um grupo em relação a operação $*$ se são verificadas as condições:

i) $\forall\ a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$; (propriedade associativa)

ii) Existe $e \in G$ de maneira que $a * e = e * a = a, \forall\ a \in G$; (existência do elemento neutro)

iii) $\forall\ a \in G, \exists\ a' \in G$ tal que $a * a' = a' * a = e$. (elementos são simetrizáveis em relação a operação $*$)

Se G é um grupo em relação a uma operação $*$, dizemos que o par $(G, *)$ é um grupo.

É importante observar que, se a operação em relação a qual o conjunto $G \neq \emptyset$ é um grupo for a adição, então denominamos o grupo G como um grupo aditivo e representamos por $(G, +)$. Da mesma forma, se a operação for a multiplicação, chamamos o grupo G de grupo multiplicativo e denotamos pelo par $(G, \cdot)$. Em geral, um conjunto não vazio não é um grupo em relação as operações de subtração e divisão usuais, portanto essas operações não serão utilizadas neste tópico.

Quando a operação de um grupo verifica a propriedade comutativa, ou seja, $x * y = y * x, \forall\ x, y \in G$, dizemos que o grupo é um grupo comutativo ou abeliano.

Veremos nos exemplos abaixo o grupo aditivo dos complexos e o grupo multiplicativo dos complexos não-nulos.

Exemplo 3.1.15. O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos é um grupo em relação à adição usual. De fato, ele é não vazio, pois, por exemplo, $(4 - 2i) \in \mathbb{C}$; vimos na subseção 2.2.1 que a adição usual em $\mathbb{C}$ é associativa, tem elemento neutro, que é o $0 = 0 + 0i$, e os elementos do conjunto $\mathbb{C}$ são simetrizáveis para esta operação, ou seja, se $z = a + bi$, o simétrico de z em relação à adição usual é $-z = -a + (-b)i$. Portanto, o par $(\mathbb{C}, +)$ é um grupo. Além disso, também vimos em 2.2.1 que a adição usual em $\mathbb{C}$ é comutativa. Assim, podemos conluir que o grupo aditivo dos complexos é abeliano.

Exemplo 3.1.16. O conjunto $\mathbb{C}^*$ dos números complexos não-nulos é um grupo em relação à multiplicação usual. De fato, ele é não vazio, pois, por exemplo, $(2 - i) \in \mathbb{C}^*$. Além disso, vimos na subseção 2.2.3 que a multiplicação usual em $\mathbb{C}$ é associativa, tem elemento neutro, que é o $1 = 1 + 0i$, e todo número complexo não-nulo possui um inverso, isto é, se $z = a + bi$, então o simétrico de z em relação à multiplicação usual é

$z^{-1} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2}\, i$. Assim, o par $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ é um grupo. Além disso, vimos também que a multiplicação usual em $\mathbb{C}$ é comutativa. Logo, podemos concluir que o grupo multiplicativo dos complexos não-nulos é abeliano.

Falaremos agora sobre outra estrutura algébrica: o anel.

Anéis

Definição 3.1.4. Um conjunto $A \neq \emptyset$, munido das operações de adição e multiplicação, é um anel quando verificadas todas as condições abaixo:

i) $\forall\ a, b, c \in A, a + (b + c) = (a + b) + c$;

ii) $\forall\ a, b \in A, a + b = b + a$;

iii) Existe elemento neutro para essa adição, e indicamos por 0_A (zero do anel);

iv) Todo elemento de A é simetrizável para a adição, ou seja, possui um oposto;

v) $\forall\ a, b, c \in A, a(bc) = (ab)c$;

vi) $\forall\ a, b, c \in A, a(b + c) = ab + ac$ e $(a + b)c = ac + bc$.

Em outras palavras, o conjunto A deverá ser um grupo abeliano em relação à adição; a multiplicação sobre A deverá ser associativa e também distributiva em relação à adição. Assim, a terna ordenada formada pelo conjunto A, a adição e a multiplicação é um anel, sendo denotada por $(A, +, \cdot)$, ou simplesmente A, quando não houver possibilidade de dúvida.

O zero de um anel A é o elemento neutro para a adição definida neste anel. Geralmente denotamos o zero de um anel A por 0_A, ou quando não houver possibilidade de confusão, simplesmente por 0.

Mostraremos no exemplo a seguir o anel dos complexos.

Exemplo 3.1.17. O conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, munido das operações de adição e multiplicação usuais, é um anel. De fato, como acabamos de ver no tópico sobre grupos, o conjunto $\mathbb{C}$ é um grupo aditivo abeliano. Além disso, vimos na subseção 2.2.3 que a multiplicação usual sobre $\mathbb{C}$ é associativa e distributiva em relação à adição. Desta forma concluímos que a terna ordenada $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ é um anel. Note que, neste caso, o zero do anel é o número complexo zero.

A seguir definiremos o que é um anel comutativo.

Definição 3.1.5. Dizemos que um anel A é um anel comutativo se a sua multiplicação é comutativa, isto é, $\forall\ a, b \in A, a \cdot b = b \cdot a$.

Note que o anel dos complexos visto no exemplo anterior é um anel comutativo, pois como vimos em 2.2.3, a multiplicação usual sobre $\mathbb{C}$ é comutativa.

A definição abaixo trata do anel com unidade.

Definição 3.1.6. Um anel com unidade é um anel A que possui o elemento neutro para a multiplicação. O elemento neutro da multiplicação de um anel é chamado, quando existe, de unidade do anel e é indicado por 1_A ou apenas por 1, se não houver possibilidade de confusão.

Observe, ainda no exemplo anterior, que o anel dos complexos possui unidade, pois conforme já sabemos, a multiplicação usual sobre $\mathbb{C}$ tem elemento neutro, que é o número complexo 1.

Definiremos a seguir o anel de integridade.

Definição 3.1.7. Chamamos de anel de integridade todo anel A comutativo com unidade que verifica a condição abaixo:

$$\forall\ a, b \in A,\ \ a \cdot b = 0_A \Longrightarrow a = 0_A \text{ ou } b = 0_A.$$

Esta condição é chamada de lei do anulamento do produto.

Note que o anel dos complexos visto no último exemplo é um anel de integridade.

Demonstração. Como acabamos de ver, ele é um anel comutativo com unidade, e além disso, para quaisquer $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$z_1 \cdot z_2 = 0 \Longrightarrow z_1 = 0 \text{ ou } z_2 = 0.$$

De fato, temos por hipótese que $z_1 \cdot z_2 = 0$ e suponhamos que $z_2 \neq 0$. Como $z_2 \neq 0$, existe $(z_2)^{-1} \in \mathbb{C}$. Assim, temos

$$\begin{aligned} z_1 &= z_1 \cdot 1 = z_1 \cdot [\ z_2 \cdot (z_2)^{-1}\ ] \\ &= (z_1 \cdot z_2) \cdot (z_2)^{-1} \\ &= 0 \cdot (z_2)^{-1} = 0\ , \end{aligned}$$

isto é,

$$z_1 = 0.$$

De forma análoga verificamos que, se $z_1 \neq 0$ e $z_1 \cdot z_2 = 0$, então $z_2 = 0$. □

Trataremos agora de corpos, sendo esta a última estrutura algébrica apresentada aqui envolvendo números complexos.

Corpos

Definição 3.1.8. Um anel A, comutativo com unidade, recebe o nome de corpo se todo elemento não-nulo de A é simetrizável para a multiplicação. Simbolicamente:

$$\forall\ x \in A, x \neq 0, \exists\ y \in A \mid x \cdot y = 1.$$

Veja que o elemento y visto acima é o inverso de x.

Observe que o anel dos complexos é um corpo. De fato, conforme já sabemos, este anel é comutativo com unidade, e ainda, todo número complexo não-nulo possui um inverso, como vimos na propriedade $(\mathrm{M}_{\mathbb{C}4})$, página 82.

Veremos no próximo tópico sobre equações polinomiais.

Equações Polinomiais

Definição 3.1.9. Uma equação polinomial, também chamada de equação algébrica, é toda equação que pode ser escrita sob a forma

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0 \ ,$$

onde $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ são números complexos, com $a_n \neq 0$, chamados de coeficientes da equação, e n é um inteiro positivo denominado grau da equação.

Note que o primeiro membro da equação polinomial na definição acima é um polinômio na variável z, $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$.

Um zero de um polinômio $P(z)$, também chamado de raíz do polinômio, é todo número complexo z_0 tal que $P(z_0) = 0$.

As soluções de uma equação polinomial $P(z) = 0$ são chamadas de raízes da equação ou, também, de zeros do polinômio $P(z)$.

Exemplo 3.1.18. Dada a equação polinomial $z^4 - 5z^2 - 36 = 0$, iremos determinar as raízes dela através da mudança de variável. Tomando $w = z^2$, temos

$$z^4 - 5z^2 - 36 = 0 \Longrightarrow w^2 - 5w - 36 = 0$$

Note que obtemos uma equação do segundo grau na variável w, que pode ser resolvida através da fórmula de Bhaskara. Pela fórmula de Bhaskara, temos

$$w = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

onde, neste caso, $a = 1, b = -5$ e $c = -36$. Logo,

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} \\
&= \frac{5 \pm \sqrt{169}}{2} \\
&= \frac{5 \pm 13}{2},
\end{aligned}
$$

isto é,

$$w = \frac{5 \pm 13}{2}$$

Portanto, as raízes da equação $w^2 - 5w - 36 = 0$ são $w' = \dfrac{5+13}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$, ou seja, $w' = 9$ e $w'' = \dfrac{5-13}{2} = \dfrac{-8}{2} = -4$, isto é, $w'' = -4$.

Logo, $z = \sqrt{w}$, implicando que

$$z = \sqrt{9} = \pm\ 3 \quad \text{ou} \quad z = \sqrt{-4} = \pm\ 2i.$$

Então, esta equação polinomial possui 2 soluções reais, $\pm\ 3$, e 4 soluções complexas, $\pm\ 3$ e $\pm\ 2i$.

Observação:

Se um número complexo $z = a + bi$, com $b \neq 0$, é raiz de uma equação algébrica com coeficientes reais, então o seu conjugado $\overline{z} = a - bi$ também é raiz desta equação.

O fato apresentado através da observação acima pode ser percebido no exemplo anterior. Neste exemplo, $z = 2i$ é uma raiz, assim como seu conjugado $\overline{z} = -2i$.

Finalizaremos esta subseção com um resultado notável, o **Teorema Fundamental da Álgebra**. Este teorema foi demonstrado em 1799 na tese de doutorado do matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855). Ele consiste no seguinte: toda equação polinomial $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$, sendo $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}, a_n \neq 0$ e $n > 0$, tem exatamente n raízes complexas, podendo algumas ou todas elas serem iguais.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada na referência [2], página 177.

No último exemplo, vimos que a equação $z^4 - 5z^2 - 36 = 0$ possui 4 raízes complexas. Note que o grau desta equação também é 4, satisfazendo o Teorema Fundamental da Álgebra.

Também é importante mencionar o **Teorema da Decomposição**, que diz que todo polinômio P de grau $n > 0$, sendo $P = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ com $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$, pode ser decomposto em n fatores do primeiro grau, isto é,

$$P = a_n(z - w_1)(z - w_2)\ldots(z - w_n) ,$$

onde $w_1, w_2, \ldots, w_n$ são as raízes de P. A demonstração deste teorema pode ser vista na referência [8], página 90.

Assim, a equação polinomial $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ pode ser reescrita sob a forma

$$a_n(z - w_1)(z - w_2)\ldots(z - w_n) = 0.$$

Esta forma é chamada de forma fatorada da equação polinomial.

Vimos anteriormente que o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos, juntamente com as operações de adição e multiplicação usuais, constitui um corpo. Definiremos a seguir o que é um corpo algebricamente fechado.

Definição 3.1.10. Um corpo A é chamado algebricamente fechado se todo polinômio $p \in A$ admite pelo menos uma raíz em A.

Um exemplo de corpo algebricamente fechado é o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos, e o que nos garante isso é o Teorema Fundamental da Álgebra.

Veremos a seguir os números complexos em análise matemática, sendo esta a última seção deste capítulo.

3.2 Os Números Complexos em Análise Matemática

Nesta seção trataremos dos números complexos em análise matemática. Apresentaremos as funções de uma variável complexa e as noções de limite, continuidade e derivada dessas funções. Estes conceitos são semelhantes aos estudados em um curso introdutório de cálculo diferencial e integral.

3.2.1 Funções de uma Variável Complexa

Consideraremos aqui funções definidas em conjuntos complexos que assumem valores complexos, ou seja, possuem como domínio e imagem dois subconjuntos de $\mathbb{C}$. Frequentemente denotamos funções reais por $f(x)$, portanto denotaremos funções complexas por $f(z)$.

A cada função de uma variável complexa $z = x + yi$, estão associadas duas funções reais $u(x, y)$ e $v(x, y)$, sendo x e y variáveis reais. Estas funções são dadas por

$$u(x, y) = Ref(z) \quad \text{e} \quad v(x, y) = Imf(z) \ ,$$

isto é, a função $u(x, y)$ contém a parte real da função complexa $f(z)$, enquanto a função $v(x, y)$ contém a parte imaginária da mesma.

Exemplo 3.2.1. Sendo $f(z) = 2z^2 - 5z + 1$, temos

$$u(x, y) = 2x^2 - 2y^2 - 5x + 1 \ \text{ e } \ v(x, y) = 4xy - 5y.$$

De fato, sendo $z = x + yi$, segue que

$$\begin{aligned} f(z) &= 2z^2 - 5z + 1 \\ &= 2(x+yi)^2 - 5(x+yi) + 1 \\ &= 2(x^2 + 2xyi - y^2) - 5x - 5yi + 1 \\ &= 2x^2 + 4xyi - 2y^2 - 5x - 5yi + 1 \\ &= 2x^2 - 2y^2 - 5x + 1 + (4xy - 5y)i, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f(z) = 2x^2 - 2y^2 - 5x + 1 + (4xy - 5y)i.$$

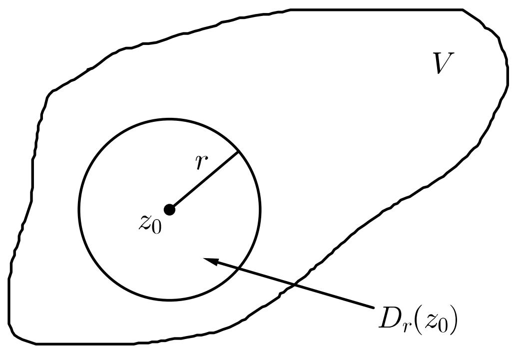
Logo, $u(x,y) = 2x^2 - 2y^2 - 5x + 1$ e $v(x,y) = 4xy - 5y$.

Falaremos a seguir do limite de funções de uma variável complexa, mas antes de defini-la, precisaremos conhecer os conceitos de disco, vizinhança e ponto de acumulação.

Definição 3.2.1. Dados os números $r > 0$ e $z_0 \in \mathbb{C}$ qualquer, chamamos de disco aberto de centro z_0 e raio r ao conjunto $D_r(z_0)$ de todos os números complexos que estão a uma distância menor que r do ponto z_0, isto é,

$$D_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$

como ilustra a figura abaixo.



O disco fechado é o conjunto $\{z : |z-z_0| \leq r\}$, que inclui o círculo $\{z : |z-z_0| = r\}$. Veremos agora o que é vizinhança de um ponto.

Definição 3.2.2. Sendo z_0 um número complexo qualquer, chamamos de vizinhança de um ponto z_0 a todo conjunto V que contém um disco de centro z_0.

Definiremos agora o ponto de acumulação.

Definição 3.2.3. Sendo $z_0 \in \mathbb{C}$ qualquer, dizemos que z_0 é ponto de acumulação de um conjunto $B \subset \mathbb{C}$ se qualquer vizinhança de z_0 contém infinitos pontos de B.

Agora, podemos definir o conceito de limite de funções de uma variável complexa.

Definição 3.2.4. Seja z_0 um ponto de acumulação do domínio $D \subset \mathbb{C}$ de uma função f. Dizemos que f tem limite L, com z tendendo a z_0, se dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$z \in D, 0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - L| < \varepsilon,$$

e denotamos este limite como

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L.$$

Quando o ponto z_0 pertence ao domínio de f e $L = f(z_0)$, dizemos que f é **contínua** no ponto z_0 e escrevemos

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Exemplo 3.2.2. A função $f(z) = 3z - 2i$ é contínua no ponto $z_0 = 1 + i$. Note que o domínio da função $f(z) = 3z - 2i$ é todo o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos e, obviamente, $z_0 = 1 + i \in \mathbb{C}$. Verificaremos agora que o limite desta função existe e que este limite é igual a $f(z_0)$.

Sendo ε um infinitésimo qualquer, temos:

$$\begin{aligned}
|f(z)-f(1+i)|<\varepsilon &\iff |3z-2i-[3(1+i)-2i]<\varepsilon\\
&\iff |3z-2i-(3+3i-2i)|<\varepsilon\\
&\iff |3z-2i-3-i|<\varepsilon\\
&\iff |3z-3-3i|<\varepsilon\\
&\iff |3(z-1-i)|<\varepsilon\\
&\iff 3\cdot|z-1-i|<\varepsilon\\
&\iff 3\cdot|z-(1+i)|<\varepsilon\\
&\iff |z-(1+i)|<\frac{\varepsilon}{3},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|f(z)-f(1+i)|<\varepsilon \iff |z-(1+i)|<\frac{\epsilon}{3}.$$

Portanto, dado qualquer $\varepsilon > 0$, basta tomar $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$ para termos $|z-(1+i)|<\dfrac{\varepsilon}{3} \Longrightarrow |f(z)-f(1+i)|<\delta$. Assim, neste caso, $\lim\limits_{z\to 1+i} f(z) = f(1+i)$. Logo, a função $f(z)=3z-2i$ é contínua no ponto $z_0 = 1+i$.

É importante notar que, assim como no caso de funções de variáveis reais, as propriedades do limite permanecem válidas para funções de variável complexa. Tais propriedades são: o limite da soma, o limite do produto e o limite do quociente.

Lembrando que, se as funções $f(z)$ e $g(z)$ têm limites F e G, respectivamente, então o limite da soma dessas funções é a soma dos limites, ou seja,

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)+g(z)] = \lim_{z\to z_0} f(z) + \lim_{z\to z_0} g(z) = F+G,$$

o limite do produto é o produto dos limites, isto é,

$$\lim_{z\to z_0}[f(z)\cdot g(z)] = \lim_{z\to z_0} f(z) \cdot \lim_{z\to z_0} g(z) = F\cdot G,$$

e da mesma forma, admitindo que o $\lim_{z \to z_0} g(z) \neq 0$, o limite do quociente é o quociente dos limites:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z \to z_0} f(z)}{\lim_{z \to z_0} g(z)} = \frac{F}{G}.$$

Veremos na sequência a derivada de funções de uma variável complexa, porém antes devemos conhecer os conceitos de complementar de um conjunto, fronteira, conjunto aberto conexo e região.

Definição 3.2.5. Chamamos de complementar de um conjunto $B \subset \mathbb{C}$ o conjunto $B' \subset \mathbb{C}$ dos pontos que não pertencem a B. Obviamente, o complementar do complementar de B é ele mesmo.

A próxima definição trata sobre a fronteira de um conjunto.

Definição 3.2.6. Chamamos de fronteira de um conjunto $B \subset \mathbb{C}$ ao conjunto dos pontos $z \in \mathbb{C}$ tais que qualquer vizinhança de z contém pontos de B e pontos do seu complementar B'.

Definiremos a seguir o conjunto aberto.

Definição 3.2.7. Um conjunto $B \subset \mathbb{C}$ é aberto se, e somente se, ele não contém pontos de sua fronteira.

A definição a seguir trata do conjunto aberto conexo.

Definição 3.2.8. Dizemos que um conjunto aberto contido em $\mathbb{C}$ é conexo se quaisquer dois de seus pontos podem ser ligados por um arco todo contido no conjunto.

Definiremos agora a região.

Definição 3.2.9. Chamamos de região a todo conjunto de $\mathbb{C}$ aberto e conexo.

Agora, podemos definir o conceito da derivada de funções de uma variável complexa. Esta definição é formalmente a mesma que no caso de funções de variável real.

Definição 3.2.10. Seja f uma função cujo domínio é uma região R (conjunto aberto e conexo) e seja $z_0 \in \mathbb{C}$ um ponto de R. Dizemos que f é derivável no ponto z_0 se existe o limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Quando esse limite existe, ele define a derivada da função f no ponto z_0 e denotamos a derivada da função f por f'. Assim,

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Exemplo 3.2.3. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = z^2$. A derivada de f no ponto $z_0 = 2$ é:

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \to 2} \frac{z^2 - f(2)}{z - 2} \\ &= \lim_{z \to 2} \frac{z^2 - 4}{z - 2} \\ &= \lim_{z \to 2} \frac{(z-2) \cdot (z+2)}{z - 2} \\ &= \lim_{z \to 2} (z + 2) \\ &= 2 + 2 = 4, \end{aligned}$$

isto é,

$$f'(z_0) = 4.$$

A definição abaixo trata da função analítica.

Definição 3.2.11. Dizemos que uma função f é analítica numa região R se ela é derivável em cada ponto de R.

As regras de derivação para funções reais vistas em um curso introdutório de cálculo diferencial e integral também são válidas para funções de uma variável complexa, desde que elas sejam analíticas. Desta forma, sendo f e g duas funções analíticas, temos que a derivada da soma é a soma das derivadas, isto é,

$$(f+g)' = f' + g',$$

a regra da derivada do produto se mantém, ou seja,

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g',$$

e o mesmo para a regra da derivada do quociente,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}.$$

Dessa forma, finalizamos esta seção. Não aprofundamos nos conceitos de limite, continuidade e derivada pois o nosso objetivo é apenas ilustrar a presença dos números complexos em análise matemática.

Considerações Finais

Neste trabalho de conclusão de curso, com o objetivo de ilustrar a presença dos números complexos na Matemática, foram estudados todos os conjuntos numéricos, dos naturais até os complexos, algumas operações fundamentais envolvendo números complexos e algumas subáreas da Matemática onde a presença desses números é mais frequente.

A maneira que desenvolvemos este trabalho possibilita a compreensão de um estudante de qualquer nível, tanto escolar quanto acadêmico. Todos os resultados utilizados foram verificados com o máximo de detalhes, ou então citamos a referência onde a demonstração pode ser encontrada.

Esperamos que este trabalho ajude o estudante a ter uma boa compreensão sobre números complexos, que ele possa auxiliá-lo no ensino médio e até mesmo, no ensino superior. Assim, desejamos que este material seja útil para qualquer leitor com interesse neste tema.

Referências Bibliográficas

[1] Alencar Filho, E. **Teoria Elementar dos Números.** 3. ed. São Paulo: Nobel, 1985.

[2] Ávila, G. S. S. **Variáveis Complexas e Aplicações.** Rio de Janeiro: LTC, 1990.

[3] Ayres Jr., F. **Matrizes**. Tradução de Ana Amália Feijó Barroso. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1971. (Coleção Schaum)

[4] Boldrini, J. L.; Costa, I. R. C.; Figueiredo, V. L.; Wetzler, H. G. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Haper & Row do Brasil, 1980.

[5] Boyer, C. B. **História da Matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

[6] Domingues, H. H.; Iezzi, G. **Álgebra Moderna.** 3. ed. São Paulo: Atual, 2001.

[7] Herstein, I. N. **Tópicos de Álgebra**. Tradução de Adalberto P. Bergamasco e L. H. Jacy Monteiro. São Paulo: Polígono, 1970.

[8] Iezzi, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**: números complexos, polinômios e equações. 6. ed. São Paulo: Atual, 1998. v. 6.

[9] Iezzi, G.; Murakami, C. **Fundamentos da Matemática Elementar**: conjuntos e funções. 3. ed. São Paulo: Atual, 1997. v. 1.

[10] Ifrah, G. **Os Números**: a história de uma grande invenção. 4. ed. São Paulo: Globo, 1992.

[11] Lipschutz, S. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Makron Books, 1994. (Coleção Schaum)

[12] Spiegel, M. R. **Variáveis Complexas com uma Introdução às Transformações Conformes e suas Aplicações**. Tradução de José Raimundo Braga Coelho. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1972. (Coleção Schaum)