UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
UNIDADE UNVERSITÁRIA DE NOVA ANDRADINA
CURSO DE MATEMÁTICA, LICENCIATURA.

SOLUÇÕES ELEMENTARES PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

RODRIGO HENRIQUE DE OLIVEIRA

NOVA ANDRADINA
2017

SOLUÇÕES ELEMENTARES PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

RODRIGO HENRIQUE DE OLIVEIRA

Trabalho de Conclusão de Curso, do curso de Matemática – Licenciatura, como parte das exigências para obtenção do grau de Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, sob a orientação do Professor Dr. Oyran Silva Rayzaro.

NOVA ANDRADINA

2017

SOLUÇÕES ELEMENTARES PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

RODRIGO HENRIQUE DE OLIVEIRA

Aprovado por:

Prof. Dr. Oyran Silva Rayzaro – UEMS (Orientador)

Prof. Me. Luiz Oreste Cauz – UEMS (Titular)

Prof. Dr. Wilson Barbosa da Costa – UEMS (Titular)

Agradecimentos

Eu agradeço, primeiramente, aos meus pais, pois sem eles esse trabalho não seria possível. Agradeço também ao Professor Oyran, por ter me dado liberdade de pesquisar e compreendido os meus atrasos.

Não poderia deixar de agradecer ao corpo docente e funcionários da Uems por esse quatro anos de estudos. Fica aqui também meu agradecimento a todos professores que passaram pela minha vida, já que eles ajudaram a construir a base de todo esse trabalho.

Por último, e não menos importante, agradeço a minha namorada e aos meus amigos, que me apoiaram e me deram forças para terminar a graduação, já que a dúvida de alguns era meu combustível para continuar.

“Que a Força esteja com você.”

YODA

Resumo

Neste trabalho são apresentados alguns métodos elementares para se encontrar a solução geral de equações diferencias, de primeira e segunda ordem. A construção de como os resultados foram obtidos é mostrada no decorrer do trabalho, além de trazer exemplos de seu uso. Os estudos realizados aqui tratam apenas uma pequena parte das equações diferenciais, servindo como uma pesquisa introdutória acerca deste tópico.

Palavras-chaves: equações diferenciais, equações homogêneas, equações não-homogêneas.

Abstract

In this work are presented some elemental methods to find the general solution of Differencial Equations from the first and second order. The construction of how the results were obtained are shown in the course of the work, besides to bring examples of their use. The studies performed here are only a small part of differential equations, serving as an introductory research about this topic.

Keywords: Differential equations, homogeneous equations, non-homogeneous equations.

Sumário

Introdução

Muitas leis gerais da Física, da Engenharia, da Química, da Biologia, etc. são expressas na forma de equações diferencias. Vários dos fenômenos, estudados nesses ramos, envolvem a variação de uma quantidade em relação a outra, sendo analisados a partir de modelos de equações diferenciais.

Os métodos de Cálculo Diferencial e Integral, descobertos por Newton e Leibniz, deram início aos estudos das equações diferenciais, sendo melhor elaborados para resolverem problemas motivados por considerações físicas e geométricas. Com o tempo os métodos foram evoluindo, até consolidarem as Equações Diferenciais como um novo ramo da Matemática, que em meados do século XVIII tornou-se uma matéria independente. Nessa época ficaram conhecidos alguns métodos elementares de resolução, por meio de integração, de alguns tipos de equações diferenciais mostrados nesse trabalho, as Equações Separáveis e as Equações Lineares. Grandes matemáticos, como Euler, Lagrange e Laplace, contribuíram para o desenvolvimento da Teoria das Equações Diferenciais, expandindo o conhecimento dentro da Mecânica Celeste, Elasticidade, Mecânica de Fluidos, etc. Com revisão e reformulação dos fundamentos da Análise Matemática, no século XIX, que trouxeram mais rigor nas definições do conceito de limite, de derivada, de integral, entre outros processos matemáticos, os estudo sobre as equações diferenciais também ganhou mais rigorosidade. Começaram a considerar a existência e unicidade das soluções antes de procurá-las.

Um marco para a evolução das equações diferenciais foi o trabalho de Poincaré, "Memóire sur les courbes définies par une équation differentielle" de 1881, que traz as Bases da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais. Poincaré estudou a estabilidade das soluções sob efeito de pequenas variações das condições iniciais. Os trabalhos de Andronov e Pontrajin (1937) e os trabalhos de Peixoto (1958-62) constituem um ponto importante para o desenvolvimento das equações diferenciais.

O presente trabalho tem como objetivo expor alguns métodos elementares para se encontrar a solução de alguns tipos de equações diferenciais. Bem como, alguns resultados teóricos sobre suas soluções. No que diz respeito sobre encontrar a solução de uma equação diferencial, as equações que têm recebido maior atenção são as equações lineares, pois possuem técnicas analíticas para resolvê-las, algumas serão citadas aqui. Apesar das equações não-lineares permitirem o estudo de fenômenos interessantes, que não podem ser descritos por equações lineares, elas são mais difíceis de analisar e não existem técnicas gerais de resolução. Portanto, as equações não-lineares serão deixadas de lado nesse trabalho, pois o mesmo trata-se de um estudo introdutório sobre técnicas para se resolver equações diferenciais.

Capítulo 1

1.1 Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Vamos trabalhar nesse capítulo algumas classes de Equações Diferenciais de Primeira Ordem, dadas na forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Observação: Não existe um método geral para resolver as equações diferenciais de primeira ordem. As subclasses apresentadas nesse capítulo possuem métodos analíticos bem estabelecidos para sua resolução.

1.2 Equações Lineares

Considere a equação diferencial linear de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} + m(x)y = h(x), \tag{1.2.1}$$

onde $m(x)$ e $h(x)$ são funções dadas. Multiplicaremos a $Eq. (1.2.1)$ por uma função $\alpha(x)$, de forma que possamos encontrar a solução para $Eq. (1.2.1)$ por meio de uma integração direta. Chamaremos a função $\alpha(x)$ de fator integrante.

Para determinar o fator integrante multiplicamos a $Eq. (1.2.1)$ por $\alpha(x)$, de modo que ela fique na forma

$$\alpha(x)\frac{dy}{dx} + \alpha(x)m(x)y = \alpha(x)h(x). \tag{1.2.2}$$

Supondo que $\alpha(x)$ satisfaça a equação

$$\frac{d[\alpha(x)]}{dx} = \alpha(x)m(x), \tag{1.2.3}$$

temos que

$$\frac{d[\alpha(x)y]}{dx} = \alpha(x)\frac{dy}{dx} + \alpha(x)m(x)y.$$

Assim a $Eq. (1.2.2)$ fica

$$\frac{d[\alpha(x)y]}{dx} = \alpha(x)h(x). \tag{1.2.4}$$

Voltando à $Eq.$ (1.2.3), suponha que $\alpha(x)$ seja positiva, temos

$$\frac{\frac{d[\alpha(x)]}{dx}}{a(x)} = m(x)$$

$$\frac{1}{a(x)}\frac{d[\alpha(x)]}{dx} = m(x).$$

Fazendo $u = a(x)$ e $du = \frac{d[\alpha(x)]}{dx}dx$, obtemos

$$\int \frac{1}{u}du = \int m(x)dx$$

$$\ln u + c_1 = \int m(x)dx + c_2$$

$$\ln \alpha(x) = \int m(x)dx + C.$$

Escolhendo C como zero,

$$\alpha(x) = exp \int m(x)dx, \tag{1.2.5}$$

que será a forma mais simples de $\alpha(x)$. Como a exponencial nunca se anula, $\alpha(x)$ é positiva para todo x. Dessa maneira, integrando a $Eq.$ (1.2.4), temos

$$y = \frac{1}{\alpha(x)}\left[\int \alpha(x)h(x)dx + C\right], \tag{1.2.6}$$

onde a constante C pode ser determinada por meio de condições iniciais dadas

$$y(x_0) = y_0. \tag{1.2.7}$$

PROPOSIÇÃO 1.2.1: *Considere a equação diferencial* (1.2.1)

$$\frac{dy}{dx} + m(x)y = h(x).$$

A solução geral da $Eq.$ (1.2.1) *pode ser dada pela* $Eq.$ (1.2.6)

$$y = \frac{1}{\alpha(x)}\left[\int \alpha(x)h(x)dx + C\right],$$

onde C *pode ser determinado de acordo com a condição inicial da* $Eq.$ (1.2.7). *E a função* $\alpha(x)$ *é dada pela* $Eq.$ (1.2.5)

$$\alpha(x) = exp \int m(x)dx.$$

Observação: Em algumas vezes pode ser necessária a análise do gráfico da solução, mas esse estudo será omitido nesse trabalho.

1.3 Equações Separáveis

A equação geral de primeira ordem é

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{1.3.1}$$

Consideramos na Seção 1.1 equações diferenciais lineares, porém quando a $Eq.$ (1.3.1) for não-linear não existe um método universal para resolvê-la. Considere a $Eq.$ (1.3.1) escrita na forma.

$$A(x, y) + B(x, y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.3.2}$$

Para os casos em que A depende de x e B depende de y, a $Eq.$ (1.3.2) fica

$$A(x) + B(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.3.3}$$

A $Eq.$ (1.3.3) é chamada de Equação Separável, pois pode ser escrita na forma

$$A(x)dx + B(y)dy = 0, \tag{1.3.4}$$

onde podemos resolvê-la integrando as funções A em relação a x e B em relação a y.

PROPOSIÇÃO 1.3.1: *Considere a equação diferencial* (1.3.4)

$$A(x)dx + B(y)dy = 0.$$

A solução geral da $Eq.$ (1.3.4) *pode ser dada por*

$$\int B(y)dy = -\int A(x)dx + C.$$

Vamos, agora, definir a solução geral da $Eq.$ (1.3.3) quando for dada uma condição inicial

$$y(x_0) = y_0, \tag{1.3.5}$$

Suponha que G_1 e G_2 sejam primitivas de A e B, respectivamente. Então

$$G_1'(x) = A(x),\ G_2'(y) = B(y).$$

Dessa maneira a $Eq.$ (1.3.3) fica

$$G_1'(x) + G_2'(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.3.6}$$

Note que a segunda parcela do termo a esquerda da igualdade da $Eq.$ (1.3.6) é

$$G_2'(y)\frac{dy}{dx} = \frac{d[G_2(y)]}{dx},$$

de acordo com a regra da cadeia. Logo, a $Eq.$ (1.3.6) fica

$$\frac{d[G_1(x) + G_2(y)]}{dx} = 0. \tag{1.3.7}$$

Após integrar a $Eq.$ (1.3.7, temos a solução geral da $Eq.$ (1.3.3), dada por

$$G_1(x) + G_2(y) = C. \tag{1.3.8}$$

Aplicando a condição inicial (1.3.5) na solução geral (1.3.8)

$$G_1(x_0) + G_2(y_0) = C.$$

Substituindo o valor de C na $Eq.$ (1.3.8),

$$G_1(x) + G_2(y) = G_1(x_0) + G_2(y_0).$$

Note que, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_{x_0}^{x} A(t)dt = G_1(x) - G_1(x_0),$$

$$\int_{y_0}^{y} B(t)dt = G_2(y) - G_1(y_0).$$

A conclusão dos cálculos será enunciada pela proposição a seguir.

PROPOSIÇÃO 1.3.2: *Considere a equação diferencial* (1.3.4)

$$A(x)dx + B(y)dy = 0$$

e a condição inicial (1.3.5)

$$y(x_0) = y_0.$$

A solução geral da $Eq.$ (1.3.4) *pode ser dada por*

$$\int_{y_0}^{y} B(t)dt = -\int_{x_0}^{x} A(t)dt.$$

1.4 Equações Exatas

Após estudarmos as equações lineares e as separáveis, vamos ver agora outra classe de equações que também pode ser resolvida a partir de integração direta, as equações exatas.

Considere a equação diferencial

$$A(x,y) + B(x,y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.4.1}$$

Suponha que existe uma função $\Omega(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial\Omega(x,y)}{\partial x} = A(x,y), \frac{\partial\Omega(x,y)}{\partial y} = B(x,y). \tag{1.4.2}$$

Suponha, também, que

$$\Omega(x,y) = C, \tag{1.4.3}$$

onde C é uma constante. Logo, se

$$A(x,y) + B(x,y)\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\Omega(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial\Omega(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

então $A(x,y) + B(x,y)\frac{dy}{dx} = \frac{d\Omega(x,y)}{dx}$ e y é uma função dependente de x. Dessa maneira, a $Eq.(1.4.1)$ torna-se

$$\frac{d\Omega(x,y)}{dx} = 0. \tag{1.4.4}$$

Nesse caso, a $Eq.(1.4.4)$ é dita uma equação diferencial exata e a constante C da $Eq.(1.4.3)$ define, implicitamente, as soluções da $Eq.(1.4.1)$.

O teorema a seguir nos auxilia a estabelecer se uma equação diferencial dada é exata.

TEOREMA 1.4.1

Sejam as funções A, B, A_y e B_x, onde os índices denotam derivadas parciais, são contínuas na região retangular (ou qualquer região em duas dimensões que não tenha “buracos” em seu interior) $R: \alpha < x < \beta, \gamma < y < \delta$. Então, a $Eq.(1.4.1)$

$$A(x,y) + B(x,y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

é uma equação diferencial exata em R se, e somente se,

$$A_y(x,y) = B_x(x,y), \qquad (1.4.5)$$

em cada ponto de R. Isto é, existe uma função Ω satisfazendo as $Eq.$ (1.4.2)

$$\frac{\partial\Omega(x,y)}{\partial x} = A(x,y), \frac{\partial\Omega(x,y)}{\partial y} = B(x,y),$$

se, e somente se, A e B satisfazem a $Eq.$ (1.4.5).

Demonstração:

Vamos começar derivando A em relação a y e B em relação a x. Logo

$$A_y(x,y) = \Omega_{xy}(x,y), B_x(x,y) = \Omega_{yx}(x,y).$$

Por hipótese A_y e B_x são contínuas, então $\Omega_{xy}(x,y)$ e $\Omega_{yx}(x,y)$ também são. Portanto a $Eq.$ (1.4.5) faz sentido.

Vamos a mostrar a segunda parte do teorema agora, se A e B satisfazem a $Eq.$ (1.4.5), então a $Eq.$ (1.4.1) é exata. Seja Ω uma função que satisfaz as $Eq.$ (1.4.2),

$$\Omega_x(x,y) = A(x,y), \Omega_y(x,y) = B(x,y)$$

Integrando $\Omega_x(x,y)$ em relação a x. Obtemos

$$\Omega(x,y) = M(x,y) + C, \qquad (1.4.6)$$

onde $\partial M(x,y)/\partial x = A(x,y)$. Considere $C = h(y)$, pois como $\Omega_x(x,y)$ foi integrada em relação a x, pode existir uma função h na $Eq.$ (1.4.6) que é uma função de y, fazendo o papel da constante C. Logo a $Eq.$ (1.4.6) fica

$$\Omega(x,y) = M(x,y) + h(y). \qquad (1.4.7)$$

Precisamos encontrar uma $h(y)$ que satisfaça $\Omega_y(x,y) = B(x,y)$. Derivando a $Eq.$ (1.4.7) em relação a y e igualando o resultado a $B(x,y)$, temos

$$\Omega_y(x,y) = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} + h'(y) = B(x,y).$$

E, portanto, $h'(y)$ é dada por

$$h'(y) = B(x,y) - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}. \qquad (1.4.8)$$

Para determinar $h(y)$ *a partir da* $Eq.(1.4.8)$, *precisamos mostrar que* $h'(y)$ *é uma função só de* y. *Para fazer isso, vamos diferenciar a expressão a direita da igualdade em questão em relação a* x. *Portanto,*

$$\frac{\partial B(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}. \qquad (1.4.9)$$

Podemos trocar a ordem de integração na segunda parcela da $Eq.(1.4.9)$,

$$\frac{\partial B(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial M(x,y)}{\partial x}.$$

Como consequência da $Eq.(1.4.6)$, *temos* $\partial M(x,y)/\partial x = A(x,y)$, *logo*

$$\frac{\partial B(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial A(x,y)}{\partial y},$$

que, pela $Eq.(1.4.5)$, *é zero. Portanto,* $h'(y)$ *não depende de* x. *Integrando a* $Eq.(1.4.8)$, *temos*

$$h(y) = \Omega(x,y) - M(x,y).$$

Substituindo na $Eq.(1.4.7)$, *obtemos*

$$\Omega(x,y) = M(x,y) + [\Omega(x,y) - M(x,y)] = \Omega(x,y).$$

Encontrando assim a função desejada $\Omega(x,y)$.

□

PROPOSIÇÃO 1.4.1: *Considere a equação diferencial* (1.4.1)

$$A(x,y) + B(x,y)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Se $A_y = B_x$, *então a solução geral da* $Eq.(1.4.1)$ *pode ser encontrada pelos seguintes passos:*

1°. Encontrar $\Omega(x,y)$ *tal que*

$$\Omega(x,y) = \int A(x,y)dx + h(y),$$

onde ainda precisamos definir $h(y)$.

2°. Definir $h(y)$ *por meio da integração em relação de y de* $h'(y)$*, que pode ser dado resolvendo*

$$\frac{\partial\Omega(x,y)}{\partial y} = B(x,y).$$

3°. Substituir o valor encontrado de $h(y)$ *na* $Eq.(1.4.17)$*, de modo que*

$$\Omega(x,y) = \int A(x,y)dx + h(y) = C$$

$$\Omega(x,y) = C, \qquad (1.4.10)$$

de modo que $Eq.(1.4.10)$ *define as soluções da* $Eq.(1.4.1)$.

Observação: Algumas vezes é necessário encontrar um fator integrante apropriado para transformar uma equação diferencial que não é exata em uma exata. Porém essa análise não será vista aqui.

Capítulo 2

2.1 Equações Lineares de Segunda Ordem

Uma equação diferencial de segunda ordem tem a forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right), \tag{2.1.1}$$

onde f é alguma função dada, na forma

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = h(x) - m(x)\frac{dy}{dx} - n(x)y,$$

com f linear em y e y'. Nesse caso a $Eq.(2.1.1)$ é linear. Então, podemos escrever a $Eq.(2.1.1)$ como

$$y'' + m(x)y' + n(x)y = h(x), \tag{2.1.2}$$

ou

$$M(x)y'' + P(x)y' + Q(x)y = H(x). \tag{2.1.3}$$

Como trata-se de um equação diferencial de segunda ordem, $M(x) \neq 0$, e podemos dividir a $Eq.(2.1.3)$ por $M(x)$, obtendo a $Eq.(2.1.2)$ com

$$m(x) = \frac{P(x)}{M(x)}, n(x) = \frac{Q(x)}{M(x)}, h(x) = \frac{H(x)}{M(x)}.$$

O estudo da $Eq.(2.1.2)$ será restringido aos casos em que h, m e n sejam contínuas e que $Eq.(2.1.1)$ seja linear.

2.2 Equações Homogêneas com Coeficientes constantes

Considere a equação de diferencial de segunda ordem,

$$y'' + m(x)y' + n(x)y = h(x).$$

Uma equação que tem $h(x) = 0$ é dita homogênea e quando $h(x) \neq 0$ ela é dita não-homogênea. Para nossas discussões, nesse capítulo, vamos trabalhar com equações homogêneas, escritas na forma

$$M(x)y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0. \tag{2.2.1}$$

Mais especificamente, vamos considerar apenas os casos onde M, P e Q são constantes reais. Assim a $Eq.(2.2.1)$ ficará na forma

$$ay'' + by' + cy = 0. \quad (2.2.2)$$

onde a, b e c são constantes dadas. Uma solução para a $Eq.(2.2.2)$ seria uma equação que a função, sua primeira derivada e sua segunda derivada sejam parecidas, ou até iguais, para que, quando multiplicadas pelas constantes a, b e c a equação seja igual a zero. Podemos lembrar do Cálculo que a função exponencial tem essa propriedade. Suponhamos $y = e^{rx}$ seja solução para a $Eq.$(2.2.2), logo $y' = re^{rx}$ e $y'' = r^2e^{rx}$. Substituindo y, y'e y'' na $Eq.$(2.2.2), temos

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0$$

$$(ar^2 + br + c)e^{rx} = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0, \quad (2.2.3)$$

chamamos $Eq.(2.2.3)$ de equação característica da equação diferencial $Eq.(2.2.2)$.

Note que a $Eq.(2.2.3)$ é uma equação do segundo grau com coeficientes reais, portanto ela tem duas raízes, que podem ser reais e distintas, reais e iguais ou complexas conjugadas.

2.3 Soluções com Raízes Reais e Distintas da Equação Característica

Considere a equação diferencial na forma

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (2.3.1)$$

que tenha equação característica

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (2.3.2)$$

Supondo que r_1 e r_2, com $r_1 \neq r_2$, sejam raízes da $Eq.$(2.3.2). Então, temos duas soluções possíveis para a $Eq.$(2.3.1), vamos denota-las por $y_1(x) = e^{r_1x}$ e $y_2(x) = e^{r_2x}$. Observe que a combinação

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} \quad (2.3.3)$$

também é uma solução da $Eq.(2.3.1)$. A verificação desse fato é simples, basta calcular y' e y'',

$$y' = c_1r_1e^{r_1x} + c_2r_2e^{r_2x}$$

e

$$y'' = c_1 r_1^2 e^{r_1 x} + c_2 r_2^2 e^{r_2 x}.$$

Substituindo y, y' e y'' na $Eq. (2.3.1)$,

$$ay'' + by' + cy = c_1(ar_1^2 + br_1 + c)e^{r_1 x} + c_2(ar_2^2 + br_2 + c)e^{r_2 x}.$$

Como r_1 e r_2 são raízes da $Eq. (2.3.2)$,

$$ar_1^2 + br_1 + c = ar_2^2 + br_2 + c = 0.$$

Portanto o y dado pela $Eq. (2.3.3)$ é solução da $Eq. (2.3.1)$.

Caso sejam dadas condições iniciais

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'. \tag{2.3.4}$$

Substituindo-as em y e em y' obtemos

$$c_1 e^{r_1 x_0} + c_2 e^{r_2 x_0} = y_0.$$

e

$$c_1 r_1 e^{r_1 x_0} + c_2 r_2 e^{r_2 x_0} = y_0'.$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} c_1 e^{r_1 x_0} + c_2 e^{r_2 x_0} = y_0 \\ c_1 r_1 e^{r_1 x_0} + c_2 r_2 e^{r_2 x_0} = y_0' \end{cases}$$

obtemos os valores para c_1 e c_2

$$c_1 = \frac{y_0' - y_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{-r_1 x_0}, c_2 = \frac{y_0 r_1 - y_0'}{r_1 - r_2} e^{-r_2 x_0}. \tag{2.3.5}$$

Como, por hipótese, $r_1 - r_2 \neq 0$, as expressões na $Eq. (2.3.5)$ são válidas.

PROPOSIÇÃO 2.3.1: *Considere a equação diferencial* (2.3.1)

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação característica (2.3.2) *correspondente*

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Se r_1 e r_2 são reais e distintas, então a solução geral é dada por

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x},$$

onde c_1 e $c_2$são constantes arbitrárias, que podem ser determinados, caso sejam dadas as condições iniciais (2.3.4), *por*

$$c_1 = \frac{y_0' - y_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{-r_1 x_0}, c_2 = \frac{y_0 r_1 - y_0'}{r_1 - r_2} e^{-r_2 x_0}.$$

2.4 Análise das Soluções de Equações Lineares Homogêneas

Para desenvolver a teoria de Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem, introduziremos alguns Teoremas sobre suas soluções.

Sejam M, P e Q contínuas em um intervalo aberto $I = \{\alpha < x < \beta\}$, onde $\alpha = -\infty$ e/ou $\beta = \infty$ estão inclusos. Então definimos L como

$$L[\psi] = M\psi'' + P\psi' + Q\psi, \tag{2.4.1}$$

onde L é chamado de Operador Diferencial e ψ é uma função duas vezes diferenciável em I.

Vamos estudar a Equação Linear Homogênea de Segunda Ordem, $L[\psi] = 0$. Analisaremos apenas os casos onde M, P e Q são constantes reais e usaremos y para representar $\psi(x)$, assim a $Eq.$ (2.4.1) ficará na forma

$$L[y] = ay'' + by' + cy = 0. \tag{2.4.2}$$

Normalmente, a $Eq.$ (2.4.2) é acompanhada de um conjunto de condições iniciais, a saber

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'. \tag{2.4.3}$$

O teorema a seguir traz o resultado mais geral, pois o resultado para equações não-homogêneas é o mesmo.

TEOREMA 2.4.1

Considere o problema de valor inicial

$$ay'' + by' + c(x)y = h(x), y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0',$$

onde a, b e c são constantes reais e h é contínua em um intervalo aberto I. Então, existe exatamente uma solução $y = \psi(x)$ desse problema e a solução existe em todo intervalo I.

Como visto na seção precedente, podemos ter pelo menos, duas soluções para a $Eq.$ (2.4.2). Suponha que y_1 e y_2 são soluções de $Eq.$ (2.4.2), em outras palavras:

$$L[y_1] = ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0. \qquad (2.4.4)$$

O mesmo vale para y_2. Também vimos que podemos gerar mais soluções formando combinações lineares de y_1 e y_2.

TEOREMA 2.4.2

Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial (2.4.2),

$$L[y] = ay'' + by' + cy = 0,$$

então a combinação linear $c_1y_1 + c_2y_2$ também é solução, quaisquer sejam os valores constantes de c_1 e c_2.

Demonstração:

Vamos substituir os valores

$$y = c_1y_1 + c_2y_2,$$

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2',$$

$$y'' = c_1y_1'' + c_2y_2''.$$

na $Eq. (2.4.2)$. *Logo,*

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = a(c_1y_1'' + c_2y_2'') + b(c_1y_1' + c_2y_2') + c(c_1y_1 + c_2y_2)$$
$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1(ay_1'' + by_1' + cy_1) + c_2(ay_2'' + by_2' + cy_2).$$

Pela $Eq. (2.4.4)$

$$L[c_1y_1 + c_2y_2] = c_1L[y_1] + c_2L[y_2] = 0.$$

Portanto independente dos c_1 *e* c_2, $y = c_1y_1 + c_2y_2$ *satisfaz* $Eq. (2.4.2)$.

Para determinar se todas as soluções $Eq. (2.4.2)$ *estão na forma* $y = c_1y_1 + c_2y_2$ *analisaremos se as constantes* c_1 *e* c_2 *podem ser escolhidas de acordo com as condições iniciais* $(2.4.3)$. *Assim*

$$c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y_0,$$
$$c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = y_0'.$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = y_0 \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = y_0' \end{cases},$$

obtemos os valores para c_1 e c_2

$$c_1 = \frac{y_0 y_2'(x_0) - y_0' y_2(x_0)}{y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0)}, c_2 = \frac{-y_0 y_1'(x_0) + y_0' y_1(x_0)}{y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0)},$$

que também pode ser escrito em termos de determinantes, a saber

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(x_0) \\ y_0' & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}, c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_0 \\ y_1'(x_0) & y_0' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix}}.$$

Ambos, c_1 e c_2, tem o mesmo denominador,

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0),$$

onde chamamos W de determinante wronskiano, apresentado pela notação $W(y_1 y_2,)(x_0)$.

Para que c_1 e c_2 façam sentido, precisamos de $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$. Caso seja, com esses valores para c_1 e c_2, satisfazemos as condições iniciais.

□

TEOREMA 2.4.3

Suponha que y_1 e y_2 são duas soluções da $Eq.$ (2.4.2)

$$L[y] = ay'' + by' + cy = 0,$$

e que $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$, de acordo com as condições iniciais (2.4.3)

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0',$$

então existe uma escolha das constantes c_1 e c_2 para as quais $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ satisfaz a equação diferencial (2.4.2) e as condições iniciais (2.4.3).

TEOREMA 2.4.4

Se y_1 e y_2 são duas soluções da $Eq.$ (2.4.2),

$$L[y] = y'' + my' + ny = 0,$$

e se existe um ponto x_0 onde o $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$, então a família de soluções

$$y = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0), \qquad (2.4.5)$$

com coeficientes arbitrários c_1 e c_2, inclui todas as soluções, que chamamos de conjunto fundamental de soluções.

Demonstração:

Suponha que ψ *seja solução arbitrária da* $Eq.(2.4.2)$. *Precisamos mostrar que* $\psi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ *para alguma combinação linear de* $c_1y_1(x)$ *e* $c_2y_2(x)$. *Seja* x_0 *um ponto onde o* $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$. *Calculando* ψ *e* ψ' *no ponto* x_0 *e chamando-as, respectivamente, de* y *e* y', *temos* $y_0 = \psi(x_0)$ *e* $y_0' = \psi'(x_0)$. *Considere* x_0 *o ponto onde* $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$. *Observe o problema com as condições iniciais*

$$ay'' + by' + cy = 0, y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0'. \qquad (2.4.6)$$

Nessas condições ψ *é solução para o problema de valor inicial, pois se* $y_0 = \psi(x_0)$ *e* $y_0' = \psi'(x_0)$, *qualquer* $y = \psi$ *é solução. Como* $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$, *pelo TEOREMA 2.4.3 podemos escolher* c_1 *e* c_2, *tais que* $y = c_1y_1 + c_2y_2$ *também é solução do problema de valor inicial* $(2.4.6)$. *O TEOREMA 1.4.1 garante que essas duas soluções do mesmo problema são iguais, portanto* $\psi(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. *Como* ψ *é uma solução arbitrária da* $Eq.(2.4.2)$, *segue que toda solução da* $Eq.(2.4.2)$ *pode ser escrita na forma da* $Eq.(2.4.5)$

$$y = c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0).$$

□

TEOREMA 2.4.5

Considere a equação diferencial $(2.4.2)$,

$$L[y] = ay'' + by' + cy = 0,$$

Escolha algum ponto x_0 em I. Seja y_1 a solução da $Eq.(2.4.2)$ que satisfaz, também, as condições iniciais

$$y(x_0) = 1, y'(x_0) = 0,$$

e seja y_2 a solução da $Eq.(2.4.3)$ que satisfaz as condições iniciais

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 1.$$

Então y_1 e y_2, formam um conjunto fundamental de soluções.

Demonstração:

O TEOREMA 2.4.1 garante existência de y_1 e y_2 e como $W(y_1, y_2)(x_0) = 1 \neq 0$, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções.

□

2.5 Relação entre o Wronskiano e a Dependência e Independência Linear

Nesta seção serão enunciados alguns resultados teóricos sobre a relação entre o Wronskiano e a Independência Linear das funções. Considere equação

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) = 0, \tag{2.5.1}$$

para todo x no intervalo aberto I. As funções f e g são ditas linearmente dependentes se, com $c_1 \neq c_2$ a $Eq.(2.5.1)$ for válida para todo x em I. Por outro lado, as funções f e g são ditas linearmente independentes em intervalo aberto I se não forem linearmente dependentes, isto é, se $c_1 = c_2 = 0$.

TEOREMA 2.5.1

Se f e g são funções diferenciáveis em um intervalo aberto I e se $W(f, g)(x_0) \neq 0$ em algum ponto x_0 em I, então f e g são linearmente independentes em I. Além disso, se f e g são linearmente dependentes em I, então $W(f, g)(x) = 0$ para todo x em I.

Observação: Deve-se tomar cuidado para não interpretar o TEOREMA 2.5.1 errado, pois pode acontecer de duas funções, f e g, serem linearmente independentes, mesmo com $W(f, g)(x) = 0$, para todo x em I.

TEOREMA 2.5.2

Se y_1 e y_2 são duas soluções da equação diferencial

$$L[y] = ay'' + by + cy = 0,$$

onde a, b e c são constantes reais dadas, então o wronskiano $W(y_1, y_2)(x)$ é dado por

$$W(y_1, y_2)(x) = C\, e^{-bx},$$

onde C é uma constante determinada que depende de y_1e y_2 mas não de x. Além disso, $W(y_1, y_2)(x)$ ou é zero para todo x em I (se $C = 0$) ou nunca se anula em I (se $C \neq 0$).

Demonstração:

Note que y_1 *e* y_2 *satisfazem*

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = 0, \tag{2.5.2}$$

$$ay_2'' + by_2' + cy_2 = 0. \tag{2.5.3}$$

Multiplicando a $Eq.(2.5.2)$ *por* $-y_2$, *a* $Eq.(2.5.3)$ *por* y_1 *e somando-as, obtemos*

$$-y_2(ay_1'' + by_1' + ny_1) + y_1(ay_2'' + by_2' + cy_2) = 0$$

$$-ay_2y_1'' - by_2y_1' - cy_2y_1 + ay_1y_2'' + by_1y_2' + cy_1y_2 = 0$$

$$(y_1y_2'' - y_1''y_2) + b(y_1y_2' - y_1'y_2) = 0.$$

Seja $W(x) = W(y_1, y_2)(x)$, *dessa forma sua derivada é*

$$W' = (y_1y_2' - y_1'y_2)' = y_1'y_2' + y_1y_2'' - y_1y_2'' - y_1'y_2' = y_1y_2'' - y_1y_2''.$$

Assim temos

$$W' + bW = 0. \tag{2.5.4}$$

Resolvendo a equação diferencial de primeira ordem $(2.5.4)$

$$\frac{dW}{dx} = -bW$$

$$\frac{dW}{W} = -bdx$$

$$ln|W| = -bx + c$$

$$|W| = e^c e^{-bx}$$

$$W = \pm e^c e^{-bx}. \tag{2.5.5}$$

Como $\pm e^c$*depende do par de soluções da* $Eq.(2.5.5)$. *Temos*

$$W = C\ e^{-bx}.$$

Como exponencial não se anula, $W(x)$ *não é zero, a não ser que* $C = 0$ *e, neste caso,* $W(x)$ *é zero para todo* x.

□

TEOREMA 2.5.3

Sejam y_1 e y_2 soluções da equação diferencial (2.5.2)

$$L[y] = ay'' + by' + cy = 0$$

onde a, b e c são constantes reais dadas. Então y_1 e y_2 são linearmente dependentes em I se, e somente se, $W(y_1, y_2)(x)$ é zero para todo x em I. De modo que, y_1 e y_2 são linearmente independentes em I se, e somente se, $W(y_1, y_2)(x)$ nunca se anula em I.

2.6 Soluções com Raízes Complexas da Equação Característica

Considere a equação diferencial

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{2.6.1}$$

onde a, b e c são números reais dados. E equação característica associada a $(2.6.1)$ é

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{2.6.2}$$

Já analisamos o caso onde r_1 e r_2 são reais e distintos. Vamos estudar agora o caso onde $\Delta = b^2 - 4ac < 0$. Então, as raízes da $Eq.(2.6.2)$ são complexos conjugados, denotados por

$$r_1 = \gamma + i\delta, r_2 = \gamma - i\delta,$$

onde γ e δ são reais. Assim

$$y_1 = \exp[(\gamma + i\delta)x],$$
$$y_2 = \exp[(\gamma - i\delta)x].$$

Do Cálculo, temos a Série de MacLaurin, que é um caso particular da Série de Taylor para e^x em torno de $x = 0$, isto é:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Pela Série de MacLaurin, temos $sen(x)$ e $cos(x)$ nas formas

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

$$cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Porém, ao considerarmos e^{ix} conseguimos conciliar essas equações,

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots + \frac{(ix)^n}{n!}$$

$$e^{ix} = 1 + x - \frac{ix^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{ix^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} + \cdots + \frac{ix^n}{n!}$$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{ix} = cos(x) + isen(x). \qquad (2.6.3)$$

Colocamos aqui a função e^{ix} em uma função que separa a parte real da parte imaginária. Assim, substituindo x por $-x$, podemos escrever $Eq.$ (2.6.3) desse modo

$$e^{-ix} = cos(x) - isen(x), \qquad (2.6.4)$$

pois, $cos(-x) = cos(x)$ e $sen(-x) = -sen(x)$.

Além disso, substituindo x por δx na $Eq.$ (2.6.4), temos a versão generalizada.

$$e^{ix} = cos(\delta x) + isen(\delta x).$$

Usando os resultados de y_1 e y_2, temos

$$y_1 = e^{(\gamma + i\delta)x} = e^{\gamma x} e^{i\delta x} = e^{\gamma x}[cos(\delta x) + isen(\delta x)],$$

$$y_2 = e^{(\gamma - i\delta)x} = e^{\gamma x} e^{-i\delta x} = e^{\gamma x}[cos(\delta x) - isen(\delta x)].$$

Através do TEOREMA 2.4.2, y_1 e y_2 podem formar uma combinação linear, sendo essa também uma solução. Vamos trabalhar com a soma e a diferença de y_1 e y_2,

$$y_1 + y_2 = e^{\gamma x}[\cos(\delta x) + isen(\delta x)] + e^{\gamma x}[cos(\delta x) - isen(\delta x)]$$
$$y_1 + y_2 = 2e^{\gamma x} cos(\delta x),$$

e

$$y_1 - y_2 = e^{\gamma x}[\cos(\delta x) + isen(\delta x)] - e^{\gamma x}[cos(\delta x) - isen(\delta x)]$$

$$y_1 - y_2 = 2ie^{\gamma x}sen(\delta x).$$

Se desprezarmos as constantes 2 e $2i$, respectivamente, obteremos soluções reais

$$m(x) = e^{\gamma x}cos(\delta x)$$
$$n(x) = e^{\gamma x}sen(\delta x). \quad (2.6.16)$$

Assim m e n são as partes real e imaginária de y_1, calculando o wronskiano temos,

$$W(m,n) = \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}$$

$$W(m,n) = mn' - m'n$$

$$W(m,n) = \delta e^{2\gamma x}. \quad (2.6.17)$$

Portanto, de $\delta \neq 0$ implica que $W \neq 0$ de modo que m e n formam um conjunto fundamental de soluções.

PROPOSIÇÃO 2.6.1: *Considere a equação diferencial* (2.6.1)

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Sejam r_1 *e* r_2 *as raízes da equação característica* (2.6.2) *correspondente*

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Se r_1 *e* r_2 *são complexos conjugados* $\gamma \pm i\delta$, *então a solução geral é*

$$y = c_1 e^{\gamma x}cos(\delta x) + c_2 e^{\gamma x}sen(\delta x),$$

onde c_1 *e* c_2 *são constantes arbitrárias.*

2.7 Soluções com Raízes repetidas da Equação Característica

Considere a equação diferencial

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (2.7.1)$$

onde a, b e c são números reais dados. E sua equação característica associada é

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (2.7.2)$$

Agora trataremos do caso onde $r_1 = r_2$, onde o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 0$,

$$r_1 = r_2 = \frac{-b}{2a}.$$

Note que ambas as raízes geram a mesma solução,

$$y_1 = e^{\frac{-bx}{2a}}.$$

Sabemos que para encontrar a solução geral da $Eq. (2.7.1)$ precisamos encontrar uma segunda solução. Procuraremos uma equação que seja múltipla de y_1. Lembre-se que $cy_1(x)$ também é solução da $Eq. (2.7.1)$. O método que usaremos aqui foi descoberto por D'Alembert, e consiste em fazer $c = m(x)$, de modo possamos determinar $m(x)$ para que o produto $m(x)y_1(x)$ seja uma solução da $Eq. (2.7.1)$. Logo

$$y = m(x)e^{\frac{-bx}{2a}}, \tag{2.7.3}$$

$$y' = \left(m'(x) - \frac{b}{2a}m(x)\right)e^{\frac{-bx}{2a}},$$

$$y'' = \left(m''(x) - \frac{b}{a}m'(x) + \frac{b^2}{4a^2}m'(x)\right)e^{\frac{-bx}{2a}}.$$

Substituindo y, y' e y' na $Eq. (2.7.1)$

$$\left[a\left(m''(x) - \frac{b}{a}m'(x) + \frac{b^2}{4a^2}m'(x)\right) + b\left(m'(x) - \frac{b}{2a}m(x)\right) + cm(x)\right]e^{\frac{-bx}{2a}} = 0.$$

Como $e^{\frac{-bt}{2a}}$ não se anula, temos

$$am''(x) - bm'(x) + \frac{b^2}{4a}m'(x) + bm'(x) - \frac{b^2}{2a}m(x) + cm(x) = 0$$

$$am''(x) + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)m(x) = 0.$$

Na parcela de $m(x)$, observe que

$$\left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = 0.$$

pois $b^2 - 4ac$ é zero, pela nossa hipótese inicial. Sobrando apenas $m''(x) = 0$, pois $a \neq 0$. Logo, integrando duas vezes $m''(x)$, temos

$$m'(x) = c_1, m(x) = c_1x + c_2.$$

Portanto da $Eq. (2.7.3)$, temos

$$y = (c_1 x + c_2)e^{\frac{-bx}{2a}} = c_1 t e^{\frac{-bx}{2a}} + c_2 e^{\frac{-bx}{2a}}.$$

Então y é uma combinação linear de duas soluções

$$y_1 = c_1 e^{\frac{-bx}{2a}}, y_2 = c_2 x e^{\frac{-bx}{2a}}. \tag{2.7.4}$$

A reorganização de c_1 e c_2 foi apenas para um melhor entendimento de que y_2 foi encontrada a partir de y_1. Note que o wronskiano dessas duas soluções não se anula,

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = e^{\frac{-bx}{2a}} - \frac{-bx}{2a} e^{\frac{-bx}{a}} + \frac{-bx}{2a} e^{\frac{-bx}{a}} = e^{\frac{-bx}{a}} \neq 0.$$

Portanto, as soluções da $Eq.(2.7.4)$ formam um conjunto fundamental de soluções e a solução geral da $Eq.(2.7.1)$ é dada pela combinação linear entre elas, quando as raízes da $Eq.(2.7.2)$ são iguais.

PROPOSIÇÃO 2.7.1: *Considere a equação diferencial* (2.7.1)

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação característica (2.7.2) *correspondente*

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Se $r_1 = r_2$, então a solução geral é dada por

$$y = c_1 e^{\frac{-bx}{2a}} + c_2 x e^{\frac{-bx}{2a}},$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Capítulo 3

3.1 Equações não-homogêneas

Considere a equação não-homogênea

$$L[y] = ay'' + by' + cy = h(x), \tag{3.1.1}$$

com a,b e c são constantes reais e h contínua em um intervalo aberto I.

A equação

$$L[y] = ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.1.2}$$

é chamada equação homogênea associada à $Eq.$ (3.1.1).

TEOREMA 3.1.1

Se Y_1 e Y_2 são duas soluções da equação não-homogênea (3.1.1), então sua diferença $Y_1 - Y_2$ é uma solução da equação associada (3.1.2). Se, além disso, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções para a $Eq.$ (3.1.2), então

$$Y_1(x) - Y_2(x) = c_1 y_1(\mathrm{x}) + c_2 y_2(x), \tag{3.1.3}$$

onde c_1 e $c_2$são constantes arbitrárias.

Demonstração:

Observe que Y_1 e Y_2

$$L[Y_1](x) = h(x), L[Y_2](x) = h(x).$$

Substituindo-as, temos

$$L[Y_1](x) - L[Y_2](x) = h(x) - h(x) = 0.$$

Porém, sabemos que

$$L[Y_1] - L[Y_2] = L[Y_1 - Y_2],$$

de modo que a $Eq.$ (3.1.2) fica

$$L[Y_1 - Y_2] = 0.$$

Note que $L[Y_1 - Y_2]$ é uma solução da $Eq.$ (3.1.2) e pelo TEOREMA 2.4.4 pode ser expressa pela combinação linear $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$.

□

TEOREMA 3.1.2

A solução geral da equação não-homogênea (3.1.1) pode ser expressa na forma

$$y = \psi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + Y(x),$$

onde y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação associada (3.1.2), c_1 e c_2 são constantes arbitrárias e Y é alguma solução específica da equação não-homogênea (3.1.1).

Demonstração

Segue da demonstração anterior que a $Eq.(3.1.3)$ *é válida. Fazendo* Y_1 *como a solução arbitrária* ψ *e* Y_2 *como a solução* Y, *obtemos*

$$\psi(x) - Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x). \qquad (3.1.4)$$

Como escolhemos ψ *como uma solução arbitrária da* $Eq.(3.1.1)$, *segue que* ψ *inclui todas as soluções da* $Eq.(3.1.1)$. *Já que basta reorganizar a* $Eq.(3.1.4)$ *na forma*

$$\psi(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + Y(x).$$

Portanto, podemos chamar ψ *de solução geral de* $Eq.(3.1.1)$.

□

Dessa maneira, para encontrar uma solução geral para a $Eq.(3.1.1)$, precisamos encontrar a solução da equação homogênea associada (3.1.2), que denotaremos por $y_c(x)$. Depois encontrar uma solução particular da $Eq.(3.1.1)$, denotada por $Y(x)$, e somar os dois resultados obtidos. Como já foi discutido como encontrar $y_c(x)$. Discutiremos dois métodos de encontrar $Y(x)$ da equação não-homogênea (3.1.1). A saber, o Método dos Coeficientes Indeterminados e o Método de Variação de Parâmetros.

3.2 Soluções pelo Método dos Coeficientes Indeterminados

Considere a equação não-homogênea

$$L[y] = ay'' + by' + cy = h(x), \qquad (3.2.1)$$

com a, b e c são constantes reais e h contínua em um intervalo aberto I. E a sua equação homogênea associada é

$$L[y] = ay'' + by' + cy = 0.$$

Chamaremos $h(x)$ de termo não-homogêneo. Esse método consiste em fazermos uma hipótese inicial sobre $Y(x)$ em relação a $h(x)$, de modo que

$$aY'' + bY' + cY = h(x).$$

Desse modo, $Y(x)$ será algo na forma $Ah(x)$, onde A é um coeficiente a ser determinado, de modo que a $Y(x)$ seja uma solução particular da $Eq.$ (3.2.1). Vamos supor, primeiro o caso mais simples, que $h(x)$ seja um polinômio de n grau, que possui n coeficientes, uma para cada parcela de graus diferentes. Portanto, $h(x)$ pode ser escrito na forma

$$h(x) = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Logo, a $Eq.$ (3.2.1) fica

$$ay'' + by' + cy = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n. \tag{3.2.2}$$

Suponha que a solução particular é dada por

$$Y(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n.$$

Obtendo a primeira e a segunda derivada de $Y(x)$,

$$Y'(x) = nA_0x^{n-1} + (n-1)A_1x^{n-2} + \cdots + A_{n-1},$$

$$Y''(x) = n(n-1)A_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)A_1x^{n-3} + \cdots + 2A_{n-2}.$$

Substituindo $Y,\ Y'$ e Y'' na $Eq.$ (3.2.2),

$$\begin{aligned} a[n(n-1)A_0x^{n-2} + (n-1)(n-2)A_1x^{n-3} + \cdots + A_{n-2}] \\ + b[nA_0x^{n-1} + (n-1)A_1x^{n-2} + \cdots + A_{n-1}] \\ + c[A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n] = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Ao igualarmos os coeficientes referentes a cada grau de x, temos

$$\begin{cases} cA_0x^n = a_0x^n \\ (cA_1 + bnA_0)x^{n-1} = a_1x^{n-1} \\ [cA_2 + b(n-1)A_1 + an(n-1)A_0]x^{n-1} = a_1x^{n-1}. \\ \vdots \\ cA_n + bA_{n-1} + 2aA_{n-2} = a_n \end{cases}$$

Observe que, se $c \neq 0$, então os dois lados da igualdade tem o mesmo grau e $c = \frac{a_0}{A_0}$ é usado para determinar $A_1 \dots A_n$.como consequência. Por outro lado, se $c = 0$ e b$\neq$ 0, não teremos polinômios de mesmo grau dos dois lados da igualdade da $Eq. (3.2.3)$, pois o polinômio à esquerda terá grau $n-1$ e $h(x)$ é um polinômio de grau n. Para que tenhamos a $aY'' + bY'$como um polinômio de grau n, nossa suposição muda para

$$Y(x) = x(A_0x^n + \cdots + A_n).$$

De modo que, agora $Y(x)$ tem grau $n+1$. As novas derivadas agora são

$$Y'(x) = (n+1)A_0x^n + (n)A_1x^{n-1} + \cdots + A_n,$$

$$Y''(x) = n(n+1)A_0x^{n-1} + n(n-1)A_1x^{n-2} + \cdots + A_{n-1}.$$

Substituindo as novas formas de $Y,\ Y'$ e Y'' na $Eq. (3.2.2)$,

$$a[n(n+1)A_0x^{n-1} + n(n-1)A_1x^{n-2} + \cdots + A_{n-1}] \\ + b[(n+1)A_0x^n + (n)A_1x^{n-1} + \cdots + A_n] = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n.$$

Novamente igualando os coeficientes referentes a cada grau de x, temos

$$\begin{cases} b(n+1)A_0x^n = a_0x^n \\ (bnA_1 + bnA_0)x^{n-1} = a_1x^{n-1} \\ [cA_2 + b(n-1)A_1 + an(n+1)A_0]x^{n-1} = a_1x^{n-1}. \\ \vdots \\ bA_n + aA_{n-1} = a_n \end{cases}$$

Assim $A_0 = \frac{a_0}{b(n+1)}$ e os outros coeficientes $A_1 \ldots A_n$ são encontrados como consequência. O termo constante não foi inserido em $Y(x)$, pois ele é solução da equação homogênea associada quando $c = 0$. Por fim, se $c = b = 0$, nossa suposição novamente, dessa vez para

$$Y(x) = x^2(A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n).$$

Podemos ver que a $Y''(x)$ é um polinômio de grau n e assim, seguindo os procedimentos anteriores, chegamos aos valores de $A_1 \ldots A_n$. Os termos linear e constante não foram inseridos em $Y(x)$ pois, agora, são soluções da equação homogênea associada. Substituindo $Y,\ Y'$ e Y'' na $Eq. (3.2.2)$,

Considerando $h(x) = e^{\gamma x}P_n(x)$,

$$ay'' + by' + cy = e^{\gamma x}P_n(x). \tag{3.2.4}$$

Para encontrar a solução particular, retomaremos a demonstração anterior. Supondo que $v(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \cdots + A_n$ e que nossa solução particular seja

$$Y(x) = e^{\gamma x} v(x),$$

então, suas derivadas são

$$Y'(x) = e^{\gamma x}[v'(x) + \gamma v(x)],$$

$$Y''(x) = e^{\gamma x}[v''(x) + 2\gamma v'(x) + \gamma^2 v(x)].$$

Substituindo as novas formas de $Y,\ Y'$ e Y'' na $Eq.$ (3.2.4),

$$ae^{\gamma x}[v''(x) + 2\gamma v'(x) + \gamma^2 v(x)] + be^{\gamma x}[v'(x) + \gamma v(x)] + ce^{\gamma x} v(x) = e^{\gamma x} P_n(x).$$

Como $e^{\gamma x}$ aparece em todos os termos podemos simplificá-lo, logo

$$av''(x) + 2a\gamma v'(x) + a\gamma^2 v(x) + bv'(x) + b\gamma v(x) + cv(x) = P_n(x)$$

$$av''(x) + (2a\gamma + b)v'(x) + (a\gamma^2 + b\gamma + c)v(x) = P_n(x).$$

De maneira análoga a demonstração de $h(x)$ como uma função polinomial, temos a demonstração da suposta forma de $Y(x)$, quando $h(x) = e^{\gamma x} P_n(x)$. Por fim, se $h(x) = e^{\gamma x} P_n(x) cos(\delta x)$ ou $h(x) = e^{\gamma x} P_n(x) sen(\delta x)$. Como os dois casos são semelhantes, podemos considerar apenas um deles. Pela Fórmula de Euler, $cos(\delta x) = \frac{(e^{i\delta x} + e^{-i\delta x})}{2}$, logo

$$h(x) = e^{\gamma x} P_n(x) cos(\delta x)$$

$$h(x) = e^{\gamma x} P_n(x) \frac{\left(e^{i\delta x} + e^{-i\delta x}\right)}{2}$$

$$h(x) = P_n(x) \frac{e^{(\gamma + i\delta)x} + e^{(\gamma - i\delta)x}}{2}. \quad (3.2.5)$$

Considerando a $Eq.$ (3.2.5)

$$ay'' + by' + cy = P_n(x) \frac{e^{(\gamma + i\delta)x} + e^{(\gamma - i\delta)x}}{2} = e^{(\gamma + i\delta)x} P_{n_1}(x) + e^{(\gamma + i\delta)x} P_{n_2}(x).$$

Supomos então que $v(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \cdots + A_n$ e $u(x) = B_0 x^n + B_1 x^{n-1} + \cdots + B_n$ e que nossa solução particular seja

$$Y(x) = e^{\gamma x} v(x) cos(\delta x) + e^{\gamma x} u(x) sen(\delta x),$$

pois tem a mesma aparência de $h(x)$, como vimos na seção 2.6. No entanto, se $\gamma \pm i\delta$ satisfazem a equação característica corresponde a equação homogênea associada multiplicamos $Y(x)$ por x para aumentar o grau do polinômio. E, para o caso $h(x)$ ter $cos(\gamma x)$ e $sen(\gamma x)$, podemos tratar os termos em conjunto, já que separados eles podem gerar a mesma solução particular.

Para esta seção não proporemos nenhuma forma para encontrar a solução particular $Y(x)$, já que para encontrá-la é necessário saber $h(x)$, para que se possa supor a forma genérica de $Y(x)$. No lugar da proposição segue um resumo das conclusões.

Primeiro precisamos conhecer a forma de $h(x)$. Se for um exponencial, então suponha que $Y(x)$ é proporcional a essa exponencial. Se $h(x)$ for igual a $sen(Ax)$ ou $cos(Bx)$, então suponha que $Y(x)$ é uma combinação linear de $sen(Ax)$ e $cos(Bx)$. E, se for um polinômio, suponha que $Y(x)$ seja um polinômio de mesmo grau que $h(x)$, onde neste caso pode ser necessário multiplicar $Y(x)$ por x ou x^2. Caso $h(x)$ seja a soma ou o produto entre as funções citadas, basta supor $Y(x)$ com mesma aparência. Se $h(x) = h_1(x) + h_2(x) + \cdots + h_n(x)$, suponha $Y(x) = Y_1(x) + Y_2(x) + \cdots + Y_n(x)$, de modo que cada $Y_i(x)$ seja solução de cada equação $ay'' + by' + cy = h_i(x)$, onde i varia de 1 a n. Por fim, encontre a solução geral da equação homogênea associada e faça uso do TEOREMA 3.1.2.

3.3 Soluções pelo Método de Variação de parâmetros

Considere a equação diferencial

$$L[y] = ay'' + by' + cy = h(x), \qquad (3.3.1)$$

onde a, b e c são constantes reais e h uma função contínua dada. E a sua equação homogênea associada é

$$L[y] = ay'' + by' + cy = 0. \qquad (3.3.2)$$

Supondo que conhecemos a solução geral da equação homogênea associada

$$y_c = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x). \qquad (3.3.3)$$

Esse método consiste em substituir c_1 e c_2 na $Eq.(3.3.3)$ por funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$, respectivamente. O que resulta em

$$y = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x). \qquad (3.3.4)$$

Procuramos por funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$ de modo que a $Eq.(3.3.4)$ seja solução da equação não-homogênea (3.3.1). Ao derivar y obtemos

$$y' = u_1'(x)y_1(x) + u_1(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2(x) + u_2(x)y_2'(x). \qquad (3.3.5)$$

Vamos fazer um suposição sobre o resultado da $Eq.$ (3.3.5), para facilitar nossos cálculos. Considere que

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{3.3.6}$$

Reformulando então a $Eq.$ (3.3.5), temos

$$y' = u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x). \tag{3.3.7}$$

Tomando a derivada da $Eq.$ (3.3.7)

$$y'' = u_1'(x)y_1'(x) + u_1(x)y_1''(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2(x)y_2''(x). \tag{3.3.8}$$

Substituindo (3.3.4), (3.3.7) e (3.3.8) na $Eq.$ (3.3.1)

$$a[u_1'(x)y_1'(x) + u_1(x)y_1''(x) + u_2'(x)y_2'(x) + u_2(x)y_2''(x)] + b[u_1(x)y_1'(x) + u_2(x)y_2'(x)] + c[u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)] = h(x)$$

$$u_1(x)[ay_1''(x) + by_1'(x) + cy_1(x)] + u_2(x)[ay_2''(x) + by_2'(x) + cy_2(x)] + au_1'(x)y_1'(x) + au_2'(x)y_2'(x) = h(x). \tag{3.3.9}$$

Observe que as equações entre colchetes são nulas, visto que y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea associada (3.3.2). Portanto, a $Eq.$ (3.3.9) fica

$$au_1'(x)y_1'(x) + au_2'(x)y_2'(x) = h(x). \tag{3.3.10}$$

Temos, a partir das $Eq.$ (3.3.6) e $Eq.$ (3.3.10) um sistema linear para as derivadas $u_1'(x)$ e $u_2'(x)$.

$$\begin{cases} u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \\ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = \dfrac{h(x).}{a} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos

$$u_1'(x) = -\frac{y_2(x)\frac{h(x)}{a}}{W(y_1, y_2)(x)},$$

$$u_2'(x) = \frac{y_1(x)\frac{h(x)}{a}}{W(y_1, y_2)(x)}.$$

onde $W(y_1, y_2)(x)$ é o wronskiano de y_1 e y_2. A divisão é possível pois y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções, sendo assim, $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$. A partir da integração, obtemos $u_1(x)$ e $u_2(x)$

$$u_1(x) = -\int \frac{y_2(x)\frac{h(x)}{a}}{W(y_1, y_2)(x)}dx + c_1, \qquad (3.3.11)$$

$$u_2(x) = \int \frac{y_1(x)\frac{h(x)}{a}}{W(y_1, y_2)(x)}dx + c_2. \qquad (3.3.12)$$

Por fim, substituindo a $Eq.(3.3.11)$ e a $Eq.(3.3.12)$ na $Eq.(3.3.4)$ temos a solução particular da $Eq.(3.3.1)$, dada por

$$Y(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)\frac{h(x)}{a}}{W(y_1, y_2)(x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)\frac{h(x)}{a}}{W(y_1, y_2)(x)}dx.$$

PROPOSIÇÃO 3.3.1: *Considere a equação diferencial* (3.3.1)

$$ay'' + by' + cy = h(x).$$

Se y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes da equação homogênea associada (3.3.2)

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

então, pelo TEOREMA 3.1.2, a solução geral é

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + Y(x),$$

onde a solução particular $Y(x)$ é dada por

$$Y(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)\frac{h(x)}{a}}{W(y_1, y_2)(x)}dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)\frac{h(x)}{a}}{W(y_1, y_2)(x)}dx.$$

Observação: Note que esse método exige a integração de $h(x)$, o que pode gerar dificuldades.

Considerações Finais

A realização desse trabalho possibilitou uma introdução ao estudo sobre equações diferenciais. Os métodos apresentados aqui abrangem equações diferenciais de primeira ordem e equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes constantes. Uma vez que a equação seja identificada em alguma das formas apresentadas nesse trabalho, um dos resultados expostos aqui será suficiente para encontrar sua solução, como segue nos exemplos encontrados no Apêndice.

O estudo realizado trouxe à tona um campo de estudos que não foi apresentado durante a graduação. Onde o assunto foi trabalhado para mostrar como chegar a uma forma geral de se encontrar as soluções das equações abordadas e mesmo estando aquém de uma análise profunda sobre o estudo das equações diferencias, este trabalho pode ser usado como material de apoio para análises mais aprofundadas sobre o assunto, como a resolução por métodos numéricos, a resolução de sistemas de equações diferenciais lineares e não-lineares, análises gráficas do comportamento das soluções, entre outros.

Bibliografia

Boyce, W. E.; DiPrima, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** Rio de Janeiro: Ed. LTC, Sétima Edição, 2008.

Bassanezi, R. C.; Ferreira Jr., W. C. **Equações Diferenciais com Aplicações.** Editora Harbra Ltda, 1988.

Guidorizzi, L. H. **Um Curso de Cálculo:** Volume 4. Rio de Janeiro: Ed. LTC, 5 ed, 2008.

Sotomayor, J. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias.** Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1979.

Zill, G. D.; Cullen, R. M. **Equações Diferenciais.** São Paulo: Ed. Makroon, Terceira Edição, 2001.

APÊNDICE I – EXEMPLOS

Capítulo 1

Observação: Um problema de valor inicial é composto de uma equação diferencial junto com o estabelecimento do valor das funções desejadas em um ponto dado. Observe os exemplos.

Exemplo 1.2.1: Encontre a solução do problema de valor inicial dado

$$y' - y = 2xe^{2x}, y(0) = 1.$$

Multiplicando $a(x)$, a equação fica

$$a(x)y' - a(x)y = a(x)2xe^{2x}.$$

Usando a PROPOSIÇÃO 1.2.1 para determinação de $\alpha(x)$, obtemos

$$\alpha(x) = exp \int -1dx = e^{-x}.$$

Agora, colocando na forma geral apresentada na proposição

$$y = \frac{1}{e^{-x}}\left[\int e^{-x}2xe^{2x}dx + C\right] = \frac{1}{e^{-x}}\left[2\int xe^{x}dx + C\right].$$

Calculando apenas a integral dentro do colchetes,

$$\int xe^{x}dx = xe^{x} - \int e^{x}dx = e^{x}(x-1) + C.$$

Portanto,

$$y = \frac{1}{e^{-x}}[2e^{x}(x-1) + C] = 2e^{2x}(x-1) + Ce^{x}.$$

Empregando o valor inicial $y(0) = 1$

$$1 = 2e^{2.0}(0-1) + Ce^{0}$$
$$C = 3.$$

Logo, a solução para o nosso problema de valor inicial é

$$y = 2e^{2x}(x-1) + 3e^{x}.$$

$\square$

Exemplo 1.3.1: Encontre a solução para o problema de valor inicial

$$2y^2 - \frac{dy}{dx} = 0, y(1) = -1.$$

Precisamos colocar a equação diferencial dada na mesma forma que a $Eq.(1.3.4)$*, para que possamos integrá-la facilmente. Para isso basta multiplicarmos os dois lados da equação por* $-\frac{dx}{y^2}$*. Logo, a equação fica*

$$\frac{dy}{2y^2} - dx = 0.$$

Dessa maneira, utilizando a $Eq.(1.3.5)$*, podemos resolver a* $Eq.(1.3.7)$*. Portanto, a solução geral da* $Eq.(1.3.6)$ *é*

$$y = \frac{1}{2x + C}.$$

De acordo com o valor inicial, $y(1) = -1$*, obtemos* $C = 1$*, logo a solução é*

$$y = \frac{1}{2x + 1}.$$

□

Exemplo 1.3.2: Encontre a solução do problema de valor inicial dado

$$\frac{dy}{dx} + \frac{x}{ye^{-x^2}} = 0, y(0) = 1.$$

Colocando a equação diferencial na forma da $Eq.(1.3.4)$ *obtemos*

$$ydy + xe^{x^2}dx = 0.$$

Aplicando a PROPOSIÇÃO 1.3.2, obtemos

$$\int_1^y tdt = -\int_0^x te^{-t^2}dt$$

$$\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^{-x^2}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$y = \pm\sqrt{e^{-x^2}}.$$

Como estamos calculando y que passa pelo ponto $P(0,1)$, implica que $y > 0$. Logo, a solução geral é

$$y = \sqrt{e^{-x^2}} = e^{\frac{-x^2}{2}}.$$

□

Exemplo 1.4.1: Encontre a solução para o problema de valor inicial

$$2x + 3 + (2y - 2)\frac{dy}{dx} = 0.$$

Para resolver de acordo PROPOSIÇÃO 1.4.1, precisamos definir as funções $A(x, y)$ e $B(x, y)$, de modo que $A_y = B_x$. Logo

$$A(x, y) = 2x + 3, B(x, y) = 2y - 2.$$

Note que $A_y = 0 = B_x$, portanto podemos seguir os passos da PROPOSIÇÃO 1.4.1, de modo que

$$\Omega(x, y) = x^2 + 3x + h(y). \qquad (*)$$

Seguindo para a próxima etapa

$$\frac{\partial[x^2 - 3x + h(y)]}{\partial y} = 2y - 2$$

$$h'(y) = 2y - 2.$$

Integrando $h'(y)$, temos $h(y) = y^2 - 2y$, substituindo esse valor na $Eq.(*)$ e seguindo para o último passo, temos

$$x^2 - 3x + y^2 - 2y = C,$$

como a solução geral do problema de valor inicial.

□

Capítulo 2

Exemplo 2.3.1: Encontre a solução do problema de valor inicial dado

$$y'' + y' - 2y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

A equação característica da equação diferencial é

$$r^2 + r - 2 = 0.$$

E suas raízes são $r_1 = 1$ *e* $r_2 = -2$. *De modo que a solução geral é*

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}.$$

Vamos determinar os valores de c_1 *e* c_2, *para podermos escrever a solução que satisfaz a condição inicial. Logo*

$$c_1 = \frac{1 - 1.(-2)}{1 - (-2)} e^{-1.0} = 1, c_2 = \frac{1.1 - 1}{1 - (-2)} e^{2.0} = 0\ .$$

E, portanto

$$y = 1.e^x + 0.e^{-2x} = e^x.$$

□

Exemplo 2.6.1: Encontre a solução do equação diferencial

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

A equação característica da equação diferencial é

$$r^2 - 2r + 2 = 0.$$

Observe que $r = 1 \pm i$, *portanto* $\gamma = 1$ *e* $\delta = 1$. *Logo, a solução geral é*

$$y = c_1 e^x cos(x) + c_2 e^x sen(x).$$

□

Exemplo 2.7.1: Encontre a solução do equação diferencial

$$y'' - 6y' + 9y = 0.$$

A equação característica da equação diferencial é

$$r^2 - 6r + 9 = 0.$$

Observe que $r_1 = r_2 = 3$, *portanto a solução geral é*

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}.$$

□

Capítulo 3

Exemplo 3.2.1: Encontre a solução particular da equação diferencial

$$y'' - 2y' - 3y = 3e^{2x}.$$

Como o termo não homogêneo é $h(x) = 3e^{2x}$*, vamos supor que* $Y(x)$ *seja proporcional a* $h(x)$*, a saber*

$$Y(x) = Ae^{2x},$$

de modo que Y *satisfaça* $Y'' - 2Y' - 3Y = 3e^{2x}$*, substituindo* $Y(x)$ *na equação diferencial dada, obtemos*

$$4Ae^{2x} - 2(2Ae^{2x}) - 3(Ae^{2x}) = 3e^{2x}.$$

Dessa maneira, temos $A = -1$*, logo a solução particular é*

$$Y(x) = -e^{2x}.$$

□

Exemplo 3.2.2: Encontre a solução da equação diferencial

$$y'' + 2y' + 5y = 3sen\ 2x.$$

Pelo que vimos, procuramos

$$Y(x) = Asen(2x) + Bcos(2x),$$

como solução particular. Portanto, derivando $Y(x)$*, temos*

$$Y' = 2Acos(2x) - 2Bsen(2x), Y'' = -4Asen(2x) - 4Bcos(2x). \quad (3.2.32)$$

Substituindo Y, Y' *e* Y'' *na equação diferencial dada e simplificando, temos*

$$sen(2x)(A - 4B - 3) + cos(2x)(B + 4A) = 0.$$

Precisamos igualar os termos de $sen(2x)$ *e* $cos(2x)$ *a zero, para encontrar os valores de* A *e* B*. Logo*

$$\begin{cases} A - 4B - 3 = 0 \\ B + 4A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3/17 \\ B = -12/17 \end{cases}.$$

Dessa forma, a solução particular procurada é

$$Y(x) = \frac{3}{17}sen(2x) - \frac{12}{17}cos(2x)$$

Para encontrar a solução geral precisamos encontrar a solução da equação homogênea associada

$$y'' + 2y' + 5y = 0.$$

Note que a equação característica é

$$r^2 + 2r + 5 = 0.$$

Observe que $r = 1 \pm 4i$, *portanto* $\gamma = 1$ *e* $\delta = 4$. *Logo, a solução da equação homogênea associada é*

$$y_c = c_1e^x cos(4x) + c_2e^x sen(4x).$$

Dessa maneira, pelo TEOREMA 3.1.2 a solução geral é

$$y = c_1e^x cos(4x) + c_2e^x sen(4x) + \frac{3}{17}sen(2x) - \frac{12}{17}cos(2x).$$

□

Exemplo 3.3.1: Encontre a solução geral da equação diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = x^{-2}e^{-2x}, x > 0.$$

Primeiro precisamos resolver a equação homogênea associada

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

A equação característica é

$$r^2 + 4r^2 + 4 = 0.$$

E a raiz é $r_1 = r_2 = -4$. *De modo que a solução da equação homogênea associada é*

$$y_c = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x}.$$

Para encontrar a solução particular $Y(x)$, *vamos primeiro calcular o* $W(y_1, y_2)(x)$,

$$W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x}.$$

Usando a PROPOSIÇÃO 3.3.1 para determinar $Y(x)$, *temos*

$$Y(x) = -e^{-2x} \int \frac{xe^{-2x}x^{-2}e^{-2x}}{e^{-4x}} dx + xe^{-2x} \int \frac{e^{-2x}x^{-2}e^{-2x}}{e^{-4x}} dx$$

$$Y(x) = -e^{-2x} \int \frac{1}{x} dx + xe^{-2x} \int x^{-2} dx$$

$$Y(x) = -e^{-2x} \ln(x) - e^{-2x}.$$

Pelo TEOREMA 3.1.2 a solução geral é

$$y = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} - e^{-2x} \ln(x) - e^{-2x} = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} - e^{-2x} \ln(x). \qquad \square$$