UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

THALES AUGUSTO DIAS NUNES

Classificação de cônicas e quádricas usando álgebra linear

Cassilândia

2017

THALES AUGUSTO DIAS NUNES

Classificação de cônicas e quádricas usando álgebra linear

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao corpo docente do curso de Matemática, da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, unidade universitária de Cassilândia, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ailton Ribeiro de Oliveira

Cassilândia

2017

N929c Nunes, Thales Augusto Dias
Classificação de cônicas e quádricas usando álgebra linear/
Thales Augusto Dias Nunes. Cassilândia, MS: UEMS, 2017.
105p. ; 30cm.

Monografia (Graduação) – Matemática – Universidade
Estadual de Mato Grosso do Sul, 2017.
Orientador: Prof. Dr. Ailton Ribeiro de Oliveira.

1. Cônicas e quádricas 2. Diagonalização de operadores
lineares 3. Álgebra linear I. Título

CDD 23.ed. 512.5

Classificação de cônicas e quádricas usando álgebra linear

Thales Augusto Dias Nunes

Trabalho de conclusão de curso aprovado como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática, na Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Unidade Universitária de Cassilândia, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Ailton Ribeiro de Oliveira ....
(Orientador)

Prof. Me. Eder Pereira Neves ....
UEMS/Cassilândia(MS)

Prof. Dr. Marco Aparecido Queiroz Duarte ....
UEMS/Cassilândia(MS)

Cassilândia(MS), novembro de 2017.

Aos meus pais,

e ao meu irmão

“Algo só é impossível até

que alguém duvide e acabe

por provar o contrário.”

(Albert Einstein)

Agradecimentos

Agradeço imensamente a Deus por toda sabedoria e persistência por ele concedida, me motivando sempre a seguir eM frente independentemente dos obstáculos encontrados pelo caminho.

Agradeço aos meus pais e familiares por me incentivar e me apoiar nos momentos mais difíceis, não somente neste trabalho, mas também durante todo o curso. E também aos meus colegas de sala, pois sem eles, eu não teria conseguido passar pelas etapas a qual o curso exigia.

Agradeço a todo o corpo docente do Curso de Licenciatura em Matemática, por sempre exercerem as suas funções como professores da melhor maneira possível. Em particular, agradeço ao Prof. Ailton, por ser atencioso, ter paciência e por me orientar neste trabalho. E ainda, ao Prof. Marco e ao Prof. Eder, por além de compor a banca avaliadora, também fizeram sugestões bastante construtivas e proveitosas para este trabalho.

Portanto, agradeço a todos aqueles que diretamente ou indiretamente fizeram parte do trajeto percorrido durante a minha formação.

Resumo

Ao observar a equação de uma cônica ou uma quádrica, nem sempre é fácil reconhecê-las a partir dessa equação. No entanto, através de mudanças de coordenadas e translações, é possível reduzir suas equações a uma forma mais simples. Nesta forma mais simples, a identificação se torna imediata. Sabemos da existência de alguns métodos analíticos e geométricos capazes de realizarem tal identificação, porém neste trabalho, iremos aplicar um processo de classificação de cônicas e quádricas utilizando a álgebra linear. Dentre as ferramentas principais utilizadas no trabalho, usaremos a diagonalização de operadores lineares e de formas quadráticas.

Palavras chave: Cônicas, quádricas, álgebra linear, operadores lineares

Abstract

When observing the equation of a conic or a quadric, it is not always easy to recognize them from this equation. However, through coordinate changes and translations you can reduce your equations to a simpler form. In this simpler form, the identification becomes immediate. We know of the existence of some analytical and geometric methods able to perform such identification, but in this work, we will apply a classification process of conic and quadric using linear algebra. Among the main tools used in the work, we will use the diagonalization of linear operators and quadratic forms.

Key words: Conics, quadrics, linear algebra, linear operators

Sumário

Introdução

De acordo com [3], os primórdios do estudo de secções cônicas podem ser identificados na civilização grega, por volta de 350 a.C. com Menaecmus, matemático grego e um dos discípulos de Eudoxo de Cnido que conseguiram atingir eminência em matemática. A descoberta da existência de uma família de curvas adequadas que podiam ser obtidas a partir do corte de um cone circular reto por um plano perpendicular a um elemento do cone, foi uma das contribuições mais importantes de Menaecmus. A partir daí, ele observou que dependendo do ângulo no vértice do cone, as curvas obtidas seriam diferentes. Mais tarde, chamadas de elipse, parábola e hipérbole.

Durante os anos de 300 a 200 a.C., período este compreendido como Idade Áurea grega. Um dos matemáticos mais consagrados dessa época chamado Apolônio de Perga, produziu uma vasta obra na área da Geometria, se destacando de vez com o lançamento de sua obra-prima, as cônicas. A obra elevou os estudos de secções cônicas a níveis superiores aos já até então, superando inclusive, as cônicas de Euclides. Entretanto, Apolônio mostrou de forma sistemática que não precisaria necessariamente que o cone fosse reto, podendo ser também oblíquo ou escaleno. Além disso, foi ele também que introduziu os nomes para as secções cônicas de elipse (significando falta), hipérbole (

significando excesso) e parábola (significando comparação).

No século XVII, Pierre de Fermat $(1601-1665)$ escreveu as cônicas através de um sistema de coordenadas de forma mais analítica, mostrando importantes resultados e definindo as equações já conhecidas de secções cônicas, de maneira mais simples.

A história das quádricas está diretamente ligada à das cônicas. De acordo com [18], há referências consistentes de que Euclides (sec. III a.C.) tenha escrito um tratado sobre elipsóides, parabolóides, hiperbolóides, além de esfera, cilindro e cone. Por sua vez Arquimedes (287-212 a.C.) legou-nos uma vastíssima produção em geometria plana e sólida. Há dois tratados de Arquimedes que apresentam extraordinária profundidade em relação aos sólidos de revolução: Sobre conóides e esferóides e Sobre esfera e cilindro. Como já dito antes, Apolônio de Perga mostrou pela primeira vez, em as cônicas, que a elipse, a parábola e a hipérbole podem ser obtidas variando a inclinação do plano de seção sobre um cone de duas folhas. Pappus (Séc. IV d.C.), que foi um geômetra grego, tem crédito nos teoremas da geometria sobre centros de gravidade de sólidos e superfícies de revolução.

Fulcrado nos geômetras gregos e no desenvolvimento da álgebra em toda a Europa, Fermat conclui em 1629 o manuscrito Introdução aos lugares planos e sólidos. Embora hajam controvérsias, esse manuscrito representa o início da geometria analítica. A partir de Fermat, a geometria analítica trouxe inúmeras facilidades ao desenvolvimento da geometria plana e espacial e foi considerada a estrada real, numa alusão a Euclides que afirmara ao rei Ptolomeu que não havia estrada real para se aprender geometria.

Agora, deve-se a Euler umas das mais importantes contribuições à geometria espacial. Ele apresenta a primeira exposição em livro-texto de quádricas, considerando estas como superfícies do 2º grau em E^3. Nesse texto, Euler apresenta as equações dos cones, dos parabolóides, dos elipsóides, e dos hiperbolóides, utilizando o sistema cartesiano no E^3.

A partir do sec. XVIII, as superfícies têm um notável incremento com o surgimento da Geometria diferencial, com interaplicações do cálculo diferencial e integral e da geometria analítica.

Finalmente, as cônicas e as quádricas são objetos de estudo de muitos matemáticos e, ainda hoje, são muito utilizadas em nosso cotidiano. Elas podem ser observadas em diferentes segmentos nos dias atuais, como por exemplo: em faróis de carros (parabolóides), pontes e torres, acústica (elipsóide), óptica, medicina, e inclusive na natureza também. Entretanto, ainda nos anos entre 1571 e 1630, um físico alemão chamado Johannes Kepler, descobriu uma importante aplicação para a Astronomia, onde através das cônicas ele desenvolveu relações com a órbita dos planetas.

Agora iremos detalhar o que faremos neste trabalho. Dada uma cônica ou uma quádrica de equações, $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, onde A ou B ou C são diferentes de zero, e $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0$, com A ou B ou C ou D ou E ou F também diferentes de zero, respectivamente, nem sempre é possível saber qual cônica ou qual quádrica essa equação representa. No entanto, através de mudanças de coordenadas e translações, é possível reduzir suas equações a uma forma mais simples. Nesta forma mais simples, a identificação se torna imediata. A classificação de cônicas e quádricas usando métodos geométricos e analíticos podem ser encontrados em livros de geometria analítica, como, por exemplo, em [4]. Contudo, estamos interessados em classificar as cônicas e quádricas de um outro ponto de vista: por métodos algébricos. Desse modo, vamos usar as ferramentas de álgebra linear para descrever um procedimento de se efetuar tal simplificação e, assim, classificar as cônicas e as quádricas.

O trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 1 será apresentada uma revisão de conceitos básicos da álgebra linear, porém importantes para o objetivo deste trabalho. Apresentamos resultados de espaços e subespaços vetoriais, combinação linear e dependência e independência linear. E, ainda, os conceitos e definições de base de um espaço vetorial e mudança de base.

No capítulo 2 será desenvolvido os conceitos e definições de transformações lineares, matriz de uma transformação linear e de isomorfismo. Além disso, será mostrado também resultados de autovalores e autovetores de um operador linear e de uma matriz e multiplicidade algébrica e geométrica. E ainda, uma ferramenta que foi bastante utilizada neste trabalho que é a diagonalização de operadores lineares, onde apresentamos definições e propriedades, tais como, a obtenção de uma matriz diagonal e equivalente à inicial, porém mais simples.

No capítulo 3 serão caracterizadas as noções de medidas e distância entre vetores e também um processo para obter uma base ortonormal a partir de uma base ortogonal. E serão também destacados importantes resultados de operadores lineares e também da representação de uma equação quadrática em sua forma matricial, representação esta que será fundamental para aplicação no capítulo 4.

O capítulo 4, dedicamos para o foco deste trabalho, onde será utilizado conceitos e processos da álgebra linear para estudar a classificação de cônicas e quádricas. Serão mostradas também quais são as cônicas e quádricas que foram utilizaas neste trabalho, juntamente com suas expressões. E também que a partir da identificação dos autovalores já podemos saber quais as possíveis cônicas ou quádricas para uma determinada expressão. Pelas quais, apresentam discussões particulares de suma importância para o estudo de cônicas e quádricas que estão apresentadas nas considerações finais.

Capítulo 1

Espaços Vetoriais

Neste capítulo, serão apresentados alguns conceitos e definições da Álgebra Linear, que além de importantes, serão bastante utilizados no decorrer do trabalho. Inicialmente veremos espaços vetoriais, subespaços vetoriais, combinação linear, dependência e independência linear, base de um espaço vetorial e mudança de base. Este capítulo está baseado nas referências [2], [13], [5] e [8].

1.1 Espaços Vetoriais

Nesta seção veremos que um conjunto com duas operações, soma e multiplicação por escalar, satisfazendo certas propriedades é chamado de Espaço Vetorial.

Definição 1.1. *Um espaço vetorial real sobre um corpo de escalares* $\mathbb{F}$ *é um conjunto não vazio, com duas operações: soma,* $V \times V \xrightarrow{+} V$*, e multiplicação por escalar,* $\mathbb{F} \times V \xrightarrow{\cdot} V$*, tais que para quaisquer* u*,* v *e* $w \in \mathbb{R}$*,as propriedades abaixo estão satisfeitas.*

Para a operação de soma:

i) Associatividade: $u + (v + w) = (u + v) + w$*; para todo* u*,* v *e* $w \in V$.

ii) Comutatividade: $u + v = v + u$*; para todo* u*,* $v \in V$.

iii) Elemento Neutro: Existe um elemento $0 \in V$ *tal que* $u + 0 = u$*, para todo* $u \in V$.

iv) Elemento Simétrico: Para todo elemento $u \in V$ *existe o elemento* $-u \in V$ *tal que* $u + (-u) = 0$ *; para todo* $u \in V$.

Para a operação de multiplicação:

v) Distributividade para a Adição de Elementos: $a(u+v) = au + av$ *; para todo* u*,* $v \in V$ *e* $\forall\ a \in \mathbb{F}$.

vi) Distributividade para a Multiplicação por Escalar: $(a + b)v = av + bv$*; para todo* $v \in V$ *e para todo* $a, b \in \mathbb{F}$.

vii) Associatividade: $(ab)v = a(bv)$*; para todo* $v \in V$ *e para todo* $a, b \in \mathbb{F}$.

viii) Elemento Identidade: $1u = u$ *; para todo* $u \in V$.

Os elementos de um espaço vetorial usualmente são chamados de vetores.

Note que um espaço vetorial é considerado um grupo abeliano com a operação de soma.

Muitos dos resultados descritos nesse trabalho valem para qualquer corpo de escalares, contudo, daqui para frente, vamos trabalhar somente com espaços vetoriais em que $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, ou seja, os espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$. A teoria de espaços vetoriais sobre $\mathbb{C}$ ou sobre um corpo qualquer pode ser vista em [8]. Para mais informações sobre corpo e suas propriedades, ver [7].

Exemplo 1.2. *O conjunto dos números reais, com as operações de soma e multiplicação usuais de números reais, é um espaço vetorial real.*

Exemplo 1.3. *O conjunto dos vetores do espaço*

$$V = \mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3); x_i \in \mathbb{R}\}$$

é um espaço vetorial real.

Como um espaço vetorial é um grupo com a operação de soma, a propriedade a seguir seguem das propriedades de grupos.

Teorema 1.4 (Unicidade do Elemento Neutro)**.** *Seja V um espaço vetorial real. Então, existe um único elemento neutro da operação de adição $0 \in V$.*

Demonstração. A propriedade do elemento neutro para a operação de adição afirma que existe pelo menos um elemento neutro 0 em V. Vamos supor que existem dois elementos neutros 0_V e 0_1, isto é,

$$0 = 0 + 0_1 = 0_1 + 0 = 0_1,$$

o que prova a unicidade do elemento neutro da operação de adição. □

Exemplo 1.5. *Considere o espaço vetorial dos polinômios de grau 3. Assim, o elemento neutro da operação de adição é o polinômio $p_0(x) \in P_3(\mathbb{R})$ definido por:*

$$p_0(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 = 0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim, temos que $a = b = c = d = 0$.

Em um espaço vetorial o elemento simétrico é único. É isto que diz o resultado a seguir.

Teorema 1.6 (Unicidade do Elemento Simétrico)**.** *Seja V um espaço vetorial real. Então, todo elemento $u \in V$ possui um único elemento simétrico.*

Demonstração. A propriedade do elemento simétrico para a operação de adição afirma que todo elemento $u \in V$ possui pelo menos um elemento simétrico $-u \in V$. Vamos supor que o elemento $u \in V$ possui dois elementos simétricos $-u$ e u_1, isto é,

$$u + (-u) = 0 \text{ e } u + u_1 = 0.$$

Desse modo, temos que

$$(-u) = 0 + (-u) = (u + u_1) + (-u) = 0_V + u_1 = u_1,$$

o que prova a unicidade do elemento simétrico. □

Exemplo 1.7. *Considere o espaço vetorial real, $C([a,b])$, das funções contínuas no intervalo $[a,b]$. Assim, o elemento neutro da operação de adição é a função $f_0(x) \in C([a,b])$ dada por:*

$$f_0(x) \;=\; 0, \quad \textit{para todo} \quad x \in [a,b] \;.$$

Além disso, dada uma função $f \in C([a,b])$, o seu elemento simétrico é a função $(-f)$ definida por:

$$(-f)(x) \;=\; -f(x), \quad \textit{para todo} \quad x \in [a,b] \;.$$

Um elemento de um espaço vetorial é regular para a operação de soma, como é mostrado no teorema abaixo.

Teorema 1.8 (Lei do Cancelamento)**.** *Sejam V um espaço vetorial real, $u,\ v,\ w \in V$ e $u \;+\; v \;=\; u \;+\; w$. Então, $v \;=\; w$.*

Demonstração. Somando $(-u)$ em ambos os lados na igualdade temos,

$$v \;=\; u \;+\; (-u) \;+\; v \;=\; u \;+\; (-u) \;+\; w \;=\; w \;,$$

o que completa a prova. $\square$

Teorema 1.9. *Sejam V um espaço vetorial real, e $u,\ w \in V$. Então, existe um único elemento $v \in V$ tal que $u \ + \ v \ = \ w$.*

Demonstração. Somando $(-u)$ em ambos os lados da equação tem-se que,

$$v \ = \ u \ + \ (-u) \ + \ v \ = \ (-u) \ + \ w \ ,$$

o que completa a prova. $\square$

1.2 Subespaços Vetoriais

Nesta seção veremos que às vezes precisamos encontrar em um determinado espaço vetorial V, subconjuntos W menores que ainda possuem a estrutura de espaço vetorial.

Definição 1.10. *Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, é um subespaço vetorial de V se W é um espaço vetorial com as operações de adição e multiplicação por escalar em V.*

Para verificar que um conjunto é um subespaço vetorial não precisamos analisar todas as propriedades de espaço vetorial, mas apenas duas propriedades.

Teorema 1.11. *Um subconjunto não vazio U de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V se, e somente se, para quaisquer elementos $u,\, v \in U$ e para qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se que $u + v \in U$ e $\alpha u \in U$, isto é, U é fechado com relação as operações de soma e multiplicação por escalar.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Se U é um subespaço vetorial V, então satisfaz as propriedades de espaço vetorial, em particular as propriedades de fechamento.

($\Longleftarrow$) Agora, serão mostradas que se U satisfaz as propriedades de fechamento, então satisfaz as propriedades da adição de elementos e da multiplicação por escalar. Como $U \subset V$, as propriedades comutativa e associativa da adição são automaticamente satisfeitas, pois são válidas para todos os elementos de V. De modo análogo, as propriedades: associatividade, distributividade para adição de elementos, distributividade para a multiplicação por escalar e a do elemento identidade da operação de multiplicação por escalar, são automaticamente satisfeitas. Agora será provada as propriedades do elemento neutro e do elemento simétrico da operação de adição.

Para quaisquer $u \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $\lambda u \in U$. Fazendo $\lambda = 0$, obtemos $0u = 0 \in U$. Logo, U possui elemento neutro.

Para quaisquer $u \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que $\lambda u \in U$. Fazendo $\lambda = -1$, obtemos $-1u = 1(-u) = -u \in U$. Logo, todo elemento de U possui o elemento simétrico. O que completa a demonstração. $\square$

Exemplo 1.12. *Se V é um espaço vetorial, então V é um subespaço vetorial dele próprio. O subespaço $W = \{0\}$ é um subespaço vetorial de V, dito subespaço nulo.*

Exemplo 1.13. *Seja $V = \mathbb{R}^5$ um espaço vetorial e $W = \{(0, x_2, x_3, x_4, x_5);\ x_i \in \mathbb{R}\}$. Isto é, W é o conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^5$, cuja primeira coordenada é nula.*

Verifiquemos as condições (i) e (ii) do teorema interior:

i) Sejam $u = (0, x_2, x_3, x_4, x_5)$ *e* $v = (0, y_2, y_3, y_4, y_5) \in W$.

Então $u + v = (0, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5)$ *que ainda pertence a* W*, pois tem a primeira coordenada nula.*

ii) $ku = (0, kx_2, kx_3, kx_4, kx_5) \in W$*, pois a primeira coordenada é nula.*

Portanto, W *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^5$.

1.3 Combinação Linear

Veremos agora que a obtenção de novos vetores a partir de vetores dados, é uma importante característica de um espaço vetorial. Chamamos esta característica de Combinação Linear.

Definição 1.14. *Sejam* V *um espaço vetorial real,* $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ *e* $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *números reais. Então, o vetor*

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$$

é um elemento de V *ao que chamamos Combinação Linear de* $v_1, v_2, \cdots, v_n$.

Uma vez fixados vetores $v_1, \cdots, v_n \in V$, o conjunto W de todos os vetores de V que são combinação linear destes é um subespaço vetorial. W é chamado subespaço gerado por $v_1, \cdots, v_n$ e usamos a notação

$$W = [v_1, \cdots, v_n].$$

Note que, formalmente, pode-se escrever $v \in W = [v_1, \cdots, v_n]$, então $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, com $a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n$.

Uma outra caracterização de subespaço gerado é a seguinte: $W = [v_1, \cdots, v_n]$, é o menor subespaço de V que contém o conjunto de vetores $v_1, \cdots, v_n$, no sentido de que qualquer outro subespaço W' de V que contenha $v_1, \cdots, v_n$ satisfaça $W' \supset W$.

Exemplo 1.15. *Considere o espaço vetorial* $V = \mathbb{R}^2$ *e seus vetores* $v_1 = (1,0)$ *e* $v_2 = (0,1)$*. Logo* $V = [v_1, v_2]$ *pois, dado* $v = (x,y) \in V$*, temos* $(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$*, ou seja,* $v = xv_1 + yv_2$*.*

Exemplo 1.16. *Sejam* $v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *vetores pertencentes ao conjunto* V*, sendo que* V *é um espaço vetorial.*

Então $[v_1,\ v_2] = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

1.4 Dependência e Independência Linear

Visto a definição e alguns exemplos de combinação linear, veremos agora que os coeficientes que multiplicam estes vetores podem ser todos iguais e assim iguais a zero, ou pelo menos um diferente de zero.

Definição 1.17. *Sejam* V *um espaço vetorial e* $v_1, \cdots, v_n \in V$*. Dizemos que o conjunto* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *é Linearmente Independente (LI), ou que os vetores* $v_1, \cdots, v_n$ *são LI, se a equação*

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n \ = \ 0, \tag{1.1}$$

implica que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$*. No caso em que exista algum* $a_i \neq 0$ *que satisfaz a Equação (1.1), dizemos que* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *é linearmente dependente (LD), ou que os vetores* $v_1, \cdots, v_n$ *são LD.*

Podemos ainda caracterizar os vetores linearmente dependentes de outra maneira.

Teorema 1.18. *O conjunto* $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *é LD se, e somente se um destes vetores for uma combinação linear dos outros.*

Demonstração. Sejam $v_1, \cdots, v_n$ vetores LD e

$$a_1v_1 + \cdots + a_jv_j + \cdots + a_nv_n = 0.$$

Por definição, um dos coeficientes deve ser diferente de zero. Suponhamos que $a_j \neq 0$. Então

$$v_j = -\frac{1}{a_j}(a_1v_1 + \cdots + a_{j-1}v_{j-1} + a_{j+1}v_{j+1} + \cdots + a_nv_n),$$

e portanto,

$$v_j = -\frac{a_1}{a_j}v_1 + \cdots - \frac{a_n}{a_j}v_n.$$

Logo, v_j é uma combinação linear dos outros vetores. Por outro lado, se tivermos $\{v_1, \cdots, v_j, \cdots, v_n\}$ tal que para algum j,

$$v_j = b_1v_1 + \cdots + b_{j-1}v_{j-1} + b_{j+1}v_{j+1} + \cdots + b_nv_n,$$

temos,

$$b_1v_1 + \cdots - 1v_j + \cdots + b_nv_n = -1 \quad \text{e},$$

portanto, $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é LD. □

Exemplo 1.19. *Seja o espaço vetorial* $V = \mathbb{R}^2$ *e* $e_1 = (1, 0)$ *e* $e_1 = (0, 1)$*, vetores de* V*.*

Os vetores e_1 e e_2 são LI, pois

$$\begin{aligned} a_1e_1 + a_2e_2 &= 0 \\ a_1(1,0) + a_2(0,1) &= (0,0) \\ (a_1, a_2) &= (0,0). \end{aligned}$$

Logo, $a_1 = 0$ e $a_2 = 0$.

Exemplo 1.20. *O conjunto $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ onde*

$$v_1 = (1,1,0), v_2 = (1,4,5) e v_3 = (3,6,5)$$

é linearmente dependente no espaço vetorial $\mathbb{R}^3$.

Considerando a combinação linear nula $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$, obtemos o seguinte sistema linear homogêneo

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ x + 4y + 6z = 0 \\ \quad\; 5y + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ \quad\; y + z = 0 \end{cases}.$$

Assim, obtemos que o sistema possui infinitas soluções não-nulas, provando que o conjunto S é linearmente dependente.

Podemos verificar que $v_3 = 2v_1 + v_2$. Assim, utilizando o resultado do teorema 1.18, mostramos que o conjunto S é linearmente dependente.

1.5 Base de um Espaço Vetorial

Nesta seção veremos que podemos encontrar dentro de um espaço vetorial V um conjunto de vetores LI e que gera V. Esse conjunto será chamado de base do espaço vetorial.

Definição 1.21. *Um conjunto $\{v_1, \cdots, v_n\}$ de vetores de V será uma base de V se:*

i) $\{v_1, \cdots, v_n\}$ *é LI,*

ii) $[v_1, \cdots, v_n] = V$.

De acordo com o resultado a seguir, uma base caracteriza os vetores de um espaço vetorial, pois vetores diferentes são escritos de maneira distinta como combinação linear dos elementos da base.

Teorema 1.22. *Dada uma base $\beta = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ de V, cada vetor de V é escrito de maneira única como combinação linear de $v_1, v_2, \cdots, v_n$.*

Exemplo 1.23. *Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. O conjunto*

$$\beta = [(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)] \text{ é uma base de } \mathbb{R}^3.$$

Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, então podemos escrevê-los como combinação linear dos vetores em β,

$$(x, y, z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Logo β gera $\mathbb{R}^3$. E ainda é LI, pois:

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= x(1+0+0) + y(0+1+0) + z(0+0+1) = (0,0,0)\\ &= (x, y, z) = (0,0,0).\end{aligned}$$

Ou seja, $x = y = z = 0$. Então temos que β é linearmente independente em $\mathbb{R}^3$ e gera o espaço $\mathbb{R}^3$.

Logo, β é uma base para $\mathbb{R}^3$, denominada base canônica.

Exemplo 1.24. *O conjunto* $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ *não é base de* $\mathbb{R}^3$. *É LI, mas não gera todo* $\mathbb{R}^3$, *isto é,* $[(1,0,0),(0,1,0)] \neq \mathbb{R}^3$, *pois, por exemplo, o elemento* $(0,0,2)$ *em* $\mathbb{R}^3$ *não é gerado por esse conjunto.*

Definição 1.25. *Seja* V *um espaço vetorial real. Pode-se dizer que* V *é um espaço vetorial de dimensão finita se* V *possui uma base finita.*

Existem espaços que não têm uma base finita. Isto acontece principalmente quando trabalhamos com espaços de funções. Nestes casos, precisamos de um conjunto finito de vetores para gerar o espaço. Isto não quer dizer que estamos trabalhando com combinações lineares infinitas, mas sim, que cada vetor do espaço é uma combinação linear finita daquela base infinita. Ou seja, para cada vetor, podemos escolher uma quantidade finita de vetores da base para, com eles, escrever o vetor dado.

Um conjunto gerador de um espaço vetorial contém uma base desse espaço.

Teorema 1.26. *Sejam* $v_1, v_2, \cdots, v_n$ *vetores não nulos que geram um espaço vetorial* V. *Então, dentre estes vetores podemos extrair uma base de* V.

Demonstração. Se $v_1, v_2, \cdots, v_n$ são linearmente independentes, então eles cumprem as condições para uma base, e não temos mais nada a fazer. Se $v_1, v_2, \cdots, v_n$ são linearmente dependentes, então existe uma combinação linear deles, com algum coeficiente diferente de zero, dando o vetor nulo

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n = 0.$$

Seja, por exemplo, $x_n \neq 0$. Então podemos escrever

$$v_n = \frac{-a_1}{a_n}v_1 + \frac{-a_2}{a_n}v_2 + \cdots + \frac{-a_{n-1}}{a_n}v_{n-1},$$

ou seja, v_n é uma combinação linear de $v_1, \cdots, v_{n-1}$ e, portanto, $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$ ainda geram V. Se $v_1, \cdots, v_{n-1}$ for LD, então existe uma combinação linear deles dando o vetor nulo e com algum coeficiente diferente de zero; portanto, poderemos extrair aquele vetor que corresponde a este coeficiente. Seguindo desta forma, após uma quantidade finita de estágios, chegaremos a um subconjunto de $\{v_1, \cdots, v_n\}$, formado por $r(r \leqslant n)$ vetores LI $v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{ir}$, que ainda geram V, ou seja, formaremos uma base. □

O maior conjunto LI de um espaço vetorial tem o mesmo número de elementos que o gerador desse espaço.

Teorema 1.27. *Seja um espaço vetorial V gerado por um conjunto finito de vetores $v_1, v_2, \cdots, v_n$. Então, qualquer conjunto com mais de n vetores é necessariamente LD (e, portanto, qualquer conjunto LI tem no máximo n vetores).*

Demonstração. Como $[v_1, \cdots, v_n] = V$, pela proposição anterior, podemos extrair uma base para V de $v_1, \cdots, v_n$. Seja $v_1, \cdots, v_r, r \leqslant n$, esta base. Consideremos agora $w_1, w_2 \cdots, w_m$, m vetores de V, com $m > n$. Existem, então, constantes a_{ij}, tais que

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} w_1 & = & a_{11}v_1 & + & a_{12}v_2 & + & \cdots & + & a_{1r}v_r \\ w_2 & = & a_{21}v_1 & + & a_{22}v_2 & + & \cdots & + & a_{2r}v_r \\ \vdots & & & & \ddots & & & & \\ w_m & = & a_{m1}v_1 & + & a_{m2}v_2 & + & \cdots & + & a_{mr}v_r. \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

Consideremos agora uma combinação linear de $w_1, \cdots, w_m$, dando zero,

$$0 = x_1w_1 + x_2w_2 + \cdots + x_mw_m. \tag{1.3}$$

Substituindo as relações 1.2 e 1.3 e coletando os termos, obtemos,

$$\begin{aligned} 0 &= (a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m)v_1 + \\ &+ (a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{m2}x_m)v_2 + \cdots . \\ &+ (a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + \cdots + a_{mr}x_m)v_r \end{aligned}$$

Como $v_1, v_2, \cdots, v_r$ são LI, então

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{1r}x_1 + a_{2r}x_2 + \cdots + a_{mr}x_r = 0 \end{cases} .$$

Temos então um sistema linear homogêneo com r equações e m incógnitas $x_1, \cdots, x_m$ e, como $r \leqslant n < m$, ele admite uma solução não trivial, ou seja, existe uma solução com algum x_i não nulo. Portanto $w_1, \cdots, w_m$ são LD. $\square$

Corolário 1.28. *Qualquer base de um espaço vetorial tem sempre o mesmo número de elementos.*

O corolário 1.28 nos permite definir dimensão de um espaço vetorial.

Definição 1.29. *Sejam V um espaço vetorial e α uma base qualquer de V. O número de elementos de α é chamado de Dimensão de V, e denotado $dimV$.*

Exemplo 1.30. *Seja o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$.*

Como $\{(1,0),(0,1)\}$ e $\{(1,1),(0,1)\}$ são bases de V. Então dim $V = 2$.

Exemplo 1.31. *Seja o espaço vetorial $W = \mathbb{R}^3$.*

Logo, $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é base de W. Então, dim $W = 3$.

Todo conjunto LI faz parte de uma base. Este resultado é dado pelo teorema do completamento de base descrito abaixo.

Teorema 1.32. *Qualquer conjunto de vetores LI de um espaço vetorial V de dimensão finita pode ser completado de modo a formar uma base de V.*

Demonstração. Seja $dim\ V = n$ e $v_1, \cdots, v_r$ vetores LI. (Observe que, pelo teorema 1.27, $r \leqslant n$). Se $[v_1, \cdots, v_r] = V$, então $\{v_1, \cdots, v_r\}$ forma uma base, e não temos mais nada a fazer (neste caso, $n = r$).

Se existe $v_{r+1} \in V$ tal que $v_{r+1} \in [v_1, \cdots, v_r]$, isto é, v_{r+1} não é uma combinação linear de $v_1, \cdots, v_r$, então $\{v_1, v_2, \cdots, v_r, v_{r+1}\}$ é LI. Se $[v_1, v_2, \cdots, v_r, v_{r+1}] = V$, então $\{v_1, \cdots, v_{r+1}\}$ é a base procurada. Caso contrário, existe $v_{r+2} \in [v_1, \cdots, v_{r+1}]$ e, então, $\{v_1, \cdots, v_{r+1}, v_{r+2}\}$ é LI. Se $[v_1, \cdots, v_{r+1}, v_{r+2}]$ nossa prova está concluída. Se não, prosseguimos usando o mesmo argumento. Como não podemos ter mais do que n vetores LI em V (veja o teorema 1.27), após um número finito de passos teremos obtido uma base de V que contém os vetores dados. $\square$

Corolário 1.33. *Se $dim\ V = n$, qualquer conjunto de n vetores LI formará uma base de V.*

Por exemplo, seja o espaço vetorial $V = \mathbb{R}^2$, e $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (0, 1)$ vetores de V, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Neste caso, temos que

$$\begin{aligned} \alpha v_1 + \beta v_2 &= (0, 0) \\ \alpha(1, 1) + \beta(0, 1) &= (0, 0) \\ (\alpha, \beta) &= (0, 0). \end{aligned}$$

Logo, $\alpha = \beta = 0$. Ou seja, os vetores v_1 e v_2 são LI. Portanto, pelo corolário anterior v_1, V_2 é uma base de $\mathbb{R}^2$ e $dim\ V = 2$.

1.6 Mudança de Base

Uma das características de uma base β de um espaço vetorial V de dimensão finita é essencialmente que ela nos permite introduzir coordenadas em V. Assim, as coordenadas de um elemento u de V em relação a base β serão os escalares que servem pra representar u como uma combinação linear dos elementos da base ordenada β.

Se β é uma base arbitrária do espaço vetorial V de dimensão n, não teremos nenhuma ordenação natural para os elementos de β e será portanto necessário impormos uma certa ordem sobre esses elementos antes de podermos definir as coordenadas de um elemento de V em relação a β.

Definição 1.34. *Seja S um conjunto de n elementos. Uma ordenação do conjunto S, é uma função do conjunto dos inteiros positivos $1, \cdots, n$ sobre o conjunto S.*

Desse modo, uma ordenação do conjunto é simplesmente uma regra para nos dizer que elemento deve ser considerado como primeiro elemento de S, que elemento é o segundo, e assim sucessivamente.

Uma base ordenada de um espaço vetorial V de dimensão finita é uma base β de V, mais uma ordenação fixa dos elementos de β.

Teorema 1.35. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base ordenada de V. Então, todo elemento de V é escrito de modo único como uma combinação linear dos elementos de β, isto é, dado o elemento $u \in V$ temos que existe uma única n-upla $(c_1, \cdots, c_i, \cdots, c_n) \in \mathbb{R}$*

tal que

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i.$$

Dizemos que c_i é a i-ésima coordenada do elemento u com relação à base ordenada β.

Para visualizar a demonstração do teorema 1.35, procure na referência [12]

.

Definição 1.36. *Sejam $\beta = \{u_1, \cdots, u_n\}$ e $\beta' = \{w_1, \cdots, w_n\}$ duas bases ordenadas de um mesmo espaço vetorial V. Dado um vetor $v \in V$, podemos escrevê-lo como:*

$$v = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n \tag{1.4}$$

e

$$v = y_1w_1 + \cdots + y_nw_n. \tag{1.5}$$

Como podemos relacionar as coordenadas de v em relação à base β,

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

com as coordenadas do mesmo vetor v em relação à base β'

$$[v]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Já que $\{u_1, \cdots, u_n\}$ é base de V, podemos escrever os vetores w_i como com-

binação linear dos u_j, isto é,

$$\left\{\begin{array}{lcccccccc} w_1 & = & a_{11}u_1 & + & a_{21}u_2 & + & \cdots & + & a_{n1}u_n \\ w_2 & = & a_{12}u_1 & + & a_{22}u_2 & + & \cdots & + & a_{n2}u_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ w_n & = & a_{1n}u_1 & + & a_{2n}u_2 & + & \cdots & + & a_{nn}u_n \end{array}\right. . \tag{1.6}$$

Substituindo em 1.5 *temos:*

$$\begin{array}{rcl} v & = & y_1w_1 \;+\; \cdots \;+\; y_nw_n \\ & = & y_1(a_{11}u_1+\cdots+a_{n1}u_n) \;+\; \cdots \;+\; y_n(a_{1n}u_1+\cdots+a_{nn}u_n) \;\cdot \\ & = & (a_{11}y_1+\cdots+a_{1n}y_n)u_1 \;+\; \cdots \;+\; (a_{n1}y_1+\cdots+a_{nn}y_n)u_n \end{array}$$

Mas $v = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n$, *e como as coordenadas em relação a uma base são únicas, temos:*

$$\begin{array}{lcccccccc} x_1 & = & a_{11}y_1 & + & a_{12}y_2 & + & \cdots & + & a_{1n}y_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ x_n & = & a_{n1}y_1 & + & a_{n2}y_2 & + & \cdots & + & a_{nn}y_n \end{array} .$$

Em forma matricial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Isto é, denotando

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

temos

$$[v]_\beta \;=\; [I]_\beta^{\beta'}[v]_{\beta'}.$$

A matriz $[I]_\beta^{\beta'}$ é chamada de mudança de base β' para a base β.

Compare $[I]_\beta^{\beta'}$ com (§§) e observe que esta matriz é obtida colocando as coordenadas em relação a β de w_i na i-ésima coluna. Note que uma vez obtida $[I]_\beta^{\beta'}$ podemos encontrar as coordenadas de qualquer vetor v em relação à base β, multiplicando a matriz pelas coordenadas de v na base $\beta^{'}$ (supostamente conhecidas).

Exemplo 1.37. *Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. Determine a matriz de mudança de base, $[I]_\gamma^\beta$, da base canônica $\beta = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ para a base ordenada $\gamma = \{(1,1,1),(1,0,1),(1,0,-1)\}$.*

Vamos escrever cada elemento da base canônica β como uma combinação linear dos elementos da base γ,

$$\begin{aligned}
e_1 &= (1,0,0) &= p_{11}(1,1,1) + p_{21}(1,0,1) + p_{31}(1,0,-1)\\
e_2 &= (0,1,0) &= p_{12}(1,1,1) + p_{22}(1,0,1) + p_{32}(1,0,-1)\\
e_3 &= (0,0,1) &= p_{13}(1,1,1) + p_{23}(1,0,1) + p_{33}(1,0,-1),
\end{aligned}$$

obtendo três sistemas lineares, que podem ser resolvidos pelo processo do escalonamento. Assim, temos que

$$[I]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Logo, podemos verificar que

$$[I]^{\gamma}_{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, concluímos que $[I]^{\gamma}_{\beta}[I]^{\beta}_{\gamma} = [I]$. *Sendo que* $[I]$ *é a matriz identidade de ordem* 3.

Capítulo 2

Diagonalização de operadores lineares

Neste capítulo, será apresentado uma das mais importantes ferramentas utilizadas neste trabalho, que é a diagonalização de operadores lineares. Além disso, veremos também transformações lineares de um espaço vetorial, matriz de uma transformação linear e isomorfismo. Ainda neste capítulo, mostraremos autovalores e autovetores de um operador linear e de uma matriz, multiplicidade algébrica e geométrica e finalmente a diagonalização, onde encontraremos uma matriz equivalente à uma inicial, porém de forma mais simples.

Este capítulo foi desenvolvido através das referências [1], [12], [5] e [2].

2.1 Transformações Lineares

Nesta seção, veremos que a aplicação que preserva as operações do espaço vetorial de um espaço vetorial em outro espaço vetorial, é denominado de transformação linear.

Definição 2.1. *Sejam V e W dois espaços vetoriais. Uma Transformação Linear (ou aplicação linear) é uma função de V em W, $T : V \longrightarrow W$, que satisfaz as seguintes condições:*

1. *Quaisquer que sejam u e v em V.*

$$T(u+v) = T(u) + T(v).$$

2. *Quaisquer que sejam $k \in \mathbb{R}$ e $v \in V$,*

$$T(kv) = kT(v).$$

Exemplo 2.2. *Sejam os espaços vetoriais $V = \mathbb{R}$ e $W = \mathbb{R}$.*

$$\begin{array}{rrcll} \textit{Considere } T: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & u & \longrightarrow & \alpha u & \quad \textit{ou} \;\; T(u) = \alpha u. \end{array}$$

Temos que

$$T(u+v) = \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v = T(u) + T(v)$$

, isto é, T satisfaz a propriedade 1 da definição 2.1, e como

$$T(ku) = \alpha(ku) = k(\alpha u) = kT(u),$$

ou seja, T satisfaz a propriedade 2 da definição 2.1. Logo T é uma transformação linear.

Mas ainda, toda transformação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ só pode ser deste tipo. De fato, $T(x) = T(x \cdot 1)$ e como T é uma transformação linear e x um escalar, $T(x \cdot 1) = x \cdot T(1)$. Chamando $T(1) = \alpha$, temos $T(x) = \alpha x$.

Exemplo 2.3. *Seja $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $T(u) = u^2$.*

Pode-se concluir que T não é linear, pois,

$T(u+v) = (u+v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$

$T(u) + T(v) = u^2 + v^2.$

Portanto, $T(u+v) \neq T(u) + T(v)$.

Exemplo 2.4. *Considere os espaços vetoriais* $V = \mathbb{R}^2$ *e* $W = \mathbb{R}^3$*, e*

$$\begin{array}{rcl} T : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longrightarrow & (2x, 0, x + y) \quad \textit{ou} \quad T(x, y) = (2x, 0, x + y). \end{array}$$

Tem-se que:

$$\begin{array}{rcl} T(u + v) & = & T((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ & = & (2(x_1 + x_2), 0, (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)) \\ & = & (2x_1, 0, x_1 + y_1) + (2x_2, 0, x_2 + y_2) \\ & = & T(u) \ + \ T(v) \quad \textit{isto é,} \\ T(u + v) & = & T(u) + T(v). \end{array}$$

Logo, a propriedade 1 da definição 2.1 é satisfeita. Mais ainda,

$$\begin{array}{rcl} T(ku) & = & T(k(x, y)) \\ & = & T(kx, ky) \\ & = & (2kx, 0, kx + ky) \\ & = & k(2x, 0, x + y) \\ & = & kT(u), \end{array}$$

e a propriedade 2 da definição 2.1 é satisfeita. Então T *é uma transformação linear.*

Uma transformação linear é completamente determinada conhecendo seu valor nos elementos de uma base.

Teorema 2.5. *Dados dois espaços vetoriais* V *e* W *e uma base de* V, $\{v_1, \cdots, v_n\}$, *sejam* $w_1, \cdots, w_n$ *elementos arbitrários de* W. *Então existe uma única aplicação linear* $T : V \longrightarrow W$ *tal que* $T(v_1) = w_1, \cdots, T(v_n) = w_n$. *Esta aplicação é* *dada por: se* $v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$, *então*

$$\begin{aligned} T(v) &= a_1T(v_1) + \cdots + a_nT(v_n) \\ &= a_1w_1 + \cdots + a_nw_n. \end{aligned}$$

Definição 2.6. *Seja* $T : V \longrightarrow W$ *uma aplicação linear.*

1. *A imagem de* T *é o conjunto dos vetores* $w \in W$ *tais que existe um vetor* $v \in V$, *que satisfaz* $T(v) = w$. *Ou seja,*

$$Im(T) = \{w \in W;\ T(v) = w,\ v \in V\}$$

2. *O conjunto de todos os vetores* $v \in V$ *tais que* $T(v) = 0$ *é chamado de núcleo de* T, *sendo denotado por ker(T). Isto é*

$$ker(T) = \{v \in V;\ T(v) = 0\}.$$

Exemplo 2.7. *Determinar o núcleo da transformação linear*

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow T(x, y) = 3x + 2y\ . \end{aligned}$$

Observe que,

$$T(x, y) = 3x + 2y = 0$$

Logo, o núcleo é formado pelos pontos $y = (x, -\frac{3}{2}x),\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.8. *Seja a transformação linear*

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow x\ +\ y. \end{aligned}$$

Neste caso temos ker $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x + y = 0\}$, *isto é, ker* T *é a reta* $y = -x$. *Podemos dizer ainda que ker* $T = \{(x, -x);\ x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -1);\ x \in \mathbb{R}\} = [(1, -1)]$.

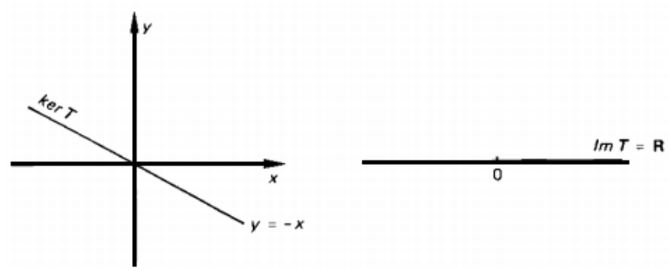

Figura 2.1: Fonte: figura retirada da referência [2].

Além disso, $Im\ T = \mathbb{R}$*, pois dado* $w \in \mathbb{R},\ w = T(w, 0)$*. Ver a figura 2.1.*

Proposição 2.9. *Seja* $T : U \longrightarrow V$ *uma transformação linear. Então:*

i) $Ker(T)$ *é um subespaço vetorial de* U*;*

ii) A transformação linear T *é injetora se, e somente se,* $Ker(T) = \{0\}$*.*

iii) $Im(T)$ *é um subespaço vetorial de* V*.*

Exemplo 2.10. *Seja a transformação linear* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *dada por* $T(x, y, z) = (x, 2y, 0)$*. Então a imagem de* T

$$\begin{aligned} Im(T) &= \{(x, 2y, 0) :\ x,\ y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, 0) + y(0, 2, 0) :\ x,\ y \in \mathbb{R}\} \\ &= [(1, 0, 0), (0, 2, 0)]. \end{aligned}$$

Observe que dim $Im(T) = 2$*.*

O núcleo de T *é dado por:*

$$\begin{aligned} ker(T) &= \{(x, y, z) :\ T(x, y, z) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(x, y, z) :\ (x, 2y, 0) = (0, 0, 0)\} \\ &= \{(0, 0, z) :\ z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(0, 0, 1) :\ z \in \mathbb{R}\} \\ &= [(0, 0, 1)]. \end{aligned}$$

Observe que dim $ker(T) = 1$*.*

O resultado a seguir diz que, o núcleo e a imagem de uma transformação linear tem uma estrutura de espaço vetorial. Além disso, apresentamos uma outra caracterização de transformações lineares injetoras.

O teorema abaixo é um dos resultados mais importantes de álgebra linear. Ele relaciona as dimensões do núcleo e da imagem de uma transformação linear com a dimensão do espaço vetorial.

Teorema 2.11 (Teorema do Núcleo e da Imagem)**.** *Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Dada uma transformação linear $T : U \longrightarrow V$, então*

$$dim\ U = dim\ Ker(T) + dim\ Im(T).$$

Demonstração. Seja $\beta_1 = \{u_1, \cdots, u_r\}$ uma base de $Ker(T)$. Essa base pode ser estendida a uma base $\beta_2 = \{u_1, \cdots, u_r, v_1, \cdots, v_s\}$ de U conforme o teorema do completamento.

Mostremos que $\beta = \{T(v_1), \cdots, T(v_s)\}$ é uma base de $Im(T)$.

a) Dado $v \in Im(T)$, existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$. Mas u é combinação linear de $\beta_2 : u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s$, com os α_i e os β_j em $\mathbb{R}$, já que β_2 é base de U. Logo:

$$\begin{aligned} v &= T(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s) \\ &= \alpha_1 T(u_1) + \cdots + \alpha_r T(u_r) + \beta_1 T(v_1) + \cdots + \beta_s T(v_s) \\ &= \beta_1 T(v_1) + \cdots + \beta_s T(v_s), \end{aligned}$$

pois como $u_1, \cdots, u_r \in Ker(T)$, então suas imagens, por T, são nulas. Então $[B] = Im(T)$.

b) Suponhamos $\beta_1 T(v_1) + \cdots + \beta_s T(v_s) = 0$ com $\beta_1, \cdots, \beta_s \in \mathbb{R}$. Então $\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s \in Ker(T)$. Logo existem $\alpha_1, \cdots, \alpha_r \in \mathbb{R}$ de maneira que:

$$\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_s v_s = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r.$$

Daí, temos que

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + (-\beta_1) v_1 + \cdots + (-\beta_s) v_s = 0.$$

Como o conjunto B_2 é LI, podemos concluir que todos os escalares da última igualdade são nulos. Em particular $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_s = 0$. Portanto, B é LI.

Para terminar a demonstração, basta observar que, como $dim\ Ker(T) = r$, $dim\ U = r + s$ e $dim\ Im(T) = s$, então $dim\ U = dim\ Ker(T) + dim\ Im(T)$.

□

2.2 Matriz de uma Transformação Linear

Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão n e m, respectivamente, sobre $\mathbb{R}$. Consideramos uma transformação linear $T : U \longrightarrow V$. Dadas as bases $\beta = \{u_1, \cdots, u_n\}$ de U e $\gamma = \{v_1, \cdots, v_m\}$ de V, então cada um dos vetores $T(u_1), \cdots, T(u_n)$ está em V e consequentemente é combinação linear da base γ:

$$\begin{array}{ccccccccc} T(u_1) & = & \alpha_{11}v_1 & + & \alpha_{21}v_2 & + & \cdots & + & \alpha_{m1}v_m \\ T(u_2) & = & \alpha_{12}v_1 & + & \alpha_{22}v_2 & + & \cdots & + & \alpha_{m2}v_m \\ \vdots & = & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots \\ T(u_n) & = & \alpha_{1n}v_1 & + & \alpha_{2n}v_2 & + & \cdots & + & \alpha_{mn}v_m, \end{array}$$

ou simplesmente,

$$T(u_j) \;=\; \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i \; (j = 1, 2, \cdots, n),$$

onde os α_{ij} estão univocamente determinados.

Definição 2.12. *A matriz $m \times n$ sobre $\mathbb{R}$,*

$$(\alpha_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

que se obtém das considerações anteriores é chamada matriz de T em relação as bases β e γ. Usaremos para indicar essa matriz a notação:

$$[T]_{\gamma}^{\beta}.$$

Notas:

1. Se T é um operador linear e considerarmos $\beta = \gamma$, então diremos apenas matriz de T em relação à base β para indicar a matriz acima definida e usaremos a notação $[T]_{\beta}^{\beta}$ para representá-la.

2. Sempre que não haja dúvidas quanto ao par de bases que estamos considerando escreveremos apenas $[T]$ para indicar a matriz de T em relação a esse par de bases.

Exemplo 2.13. *A matriz de $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x, y, z) = (x+y, y+z)$, em relação às bases*

$$\begin{aligned} \beta &= \{u_1 = (1, 0, 0);\; u_2 = (0, 1, 0);\; u_3 = (0, 0, 1)\};\; e \\ \gamma &= \{v_1 = (1, 0);\; v_2 = (0, 1)\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(u_1) &= (1,0) = 1v_1 + 0v_2 \\ T(u_2) &= (1,1) = 0v_1 + 1v_2 \\ T(u_3) &= (0,1) = -v_1 + v_2. \end{aligned}$$

Logo,

$$[T]_\gamma^\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 2.14. *Seja U um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e seja I o operador idêntico de U. Dadas as bases β e γ de U, determinaremos então $[I]_\gamma^\beta$.*

Suponhamos $\beta = \{u_1, \cdots, u_n\}$ e $\gamma = \{v_1, \cdots, v_n\}$. Então, se $[I]_\gamma^\beta = (\alpha_{ij})$,

$$\begin{array}{cccccccc} I(u_1) & = u_1 & = & \alpha_{11}v_1 & + & \cdots & + & \alpha_{n1}v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ I(u_n) & = u_n & = & \alpha_{1n}v_1 & + & \cdots & + & \alpha_{nn}v_n, \end{array}$$

o que mostra que $[I]_\gamma^\beta$ é a matriz de mudança da base β para a base γ.

2.3 Isomorfismo

Nesta seção, veremos que a transformação linear bijetora de um espaço vetorial em outro espaço vetorial, é denominada de Isomorfismo. E também, que a transformação linear de um isomorfismo em outro isomorfismo é chamada de automorfismo.

Definição 2.15. *Entende-se por isomorfismo do espaço vetorial U no espaço vetorial V uma transformação linear $T : U \longrightarrow V$ que seja bijetora. Um isomorfismo $T : U \longrightarrow U$ é um automorfismo de U.*

Exemplo 2.16. *O operador idêntico $I : U \longrightarrow U$ dado por $I(u) = u$ para todo vetor u do espaço vetorial é trivialmente um automorfismo de U.*

O resultado abaixo mostra que em dimensão finita todos os espaços vetoriais de mesma dimensão têm as mesmas propriedades de álgebra linear.

Teorema 2.17. *Dois espaços vetoriais U e V de dimensão finita são isomorfos se, e somente se, dim $U =$ dim V.*

Demonstração. A demonstração pode ser vista na referência [5]. □

2.4 Autovalor e Autovetor de um Operador Linear

Nesta seção, iremos definir autovalor e autovetor de um operador linear, e também apresentar teoremas e exemplos com a aplicação da definição.

Definição 2.18. *Sejam V um espaço vetorial real e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Se existirem $v \in V$, não-nulos, e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $T(v) = \lambda v$, então o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ é um Autovalor de T e o elemento v é um Autovetor de T associado ao autovalor λ.*

Exemplo 2.19. *Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$. A transformação linear*

$$\begin{array}{rccccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & & \\ & (x,y) & \longrightarrow & T(x,y) & = & (y,x), \end{array}$$

é a reflexão em torno da reta r dada pela equação $y = x$.

Assim, para qualquer elemento $v = (x,y) \in r$ não-nulo, temos que

$$T(x,y) = T(x,x) = 1(x,x).$$

Portanto, qualquer elemento $v = (x, y) \in r$ *não-nulo é um autovetor de* T *associado ao autovalor* $\lambda = 1$.

De modo análogo, qualquer elemento $v = (x, y) \in s$*, não-nulo, onde* s *é a reta dada pela equação* $y = -x$*, é um autovetor de* T *associado ao autovalor* $\lambda = -1$*. De fato,*

$$T(x, y) = T(x, -x) = (-x, x) = -1(x, y).$$

Teorema 2.20. *Sejam* V *um espaço vetorial real,* T *um operador linear sobre* V *e* v *um autovetor associado ao autovalor* λ*. Então, qualquer elemento* $w = \alpha v$*, com* $\alpha \in \mathbb{R}$ *não nulo, também é um autovetor de* T *associado a* λ*.*

Definição 2.21. *Sejam* V *um espaço vetorial real e* T *um operador linear. Fixando um autovalor* λ *do operador* T*, o subconjunto*

$$V_\lambda = \{v \in V \ : \ T(v) = \lambda v\}$$

é denominado subespaço (ou autoespaço) associado ao autovalor λ*.*

Podemos observar que o subconjunto V_λ é igual ao subespaço $Ker(T - \lambda I_v)$.

De fato, tomando um elemento $v \in V_\lambda$ temos que

$$T(v) = \lambda v \Leftrightarrow (T - \lambda I_v)v = 0_v \Leftrightarrow v \in Ker(T - \lambda I_v).$$

Logo, temos que $V_\lambda = Ker(T - \lambda I_v)$. Assim, provamos que V_λ é um subespaço de V, pois sabemos que o núcleo de um operador linear é um subespaço de V.

Exemplo 2.22. *Sejam* V *um espaço vetorial real,* T *um operador linear sobre* V *e* λ *um autovalor do operador* T*. Podemos verificar que o subespaço* V_λ *é invariante sob* T*, isto é,* $T(v) \in V_\lambda$ *para todo* $v \in V_\lambda$*.*

2.5 Autovalor e Autovetor de uma Matriz

Nesta seção, veremos algumas definições, teoremas, proposições e exemplos de autovalores e autovetores de uma matriz.

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$, digamos que $dim(V) = n$, e T um operador linear sobre V. Encontraremos os autovalores do operador T através do cálculo de determinantes. Queremos encontrar escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que a equação $T(v) = \lambda v$ tenha solução $v \in V$, não nula. A equação $T(v) = \lambda v$ pode ser escrita na forma: $(T - \lambda I_v)(v) = 0_v$.

A equação acima terá solução v não nula se, e somente se, $Ker(T - \lambda I_v) \neq \{0_v\}$. Assim, se $A = [T]_\beta^\beta$ é a representação matricial do operador T, com relação a alguma base ordenada de V, então a matriz $A - \lambda I_n$ é a representação matricial para o operador $T - \lambda I_v$. Desse modo, a matriz $A - \lambda I_n$ deve ser singular, isto é, $det(A - \lambda I_n) = 0$.

Portanto, $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor do operador T se, e somente se, satisfaz a equação

$$det(A - \lambda I_n) = 0.$$

Desse modo, dada uma matriz A de ordem n sobre $\mathbb{R}$, vamos definir um autovalor de A como sendo um autovalor do operador linear T_A sobre $\mathbb{R}$ associado à matriz A, isto é, $A = [T_A]_\beta^\beta$, onde β é a base canônica de $\mathbb{R}$. Portanto, os autovetores da matriz A, associados ao autovalor λ, são soluções não nulas da equação $T_A(v) = \lambda v$, representadas como matriz coluna. Assim, se $u = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}$ é um autovetor de T_A associado ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$, isto é, $T_A(v) = \lambda u$, temos que

$$AX = \lambda X, \quad \text{onde } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{n\times 1}(\mathbb{R}),$$

isto é. Note que $[u]_\beta = X$.

Definição 2.23. *Seja A uma matriz de ordem n sobre $\mathbb{R}$. Um autovalor da matriz A é um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que a matriz $(A - \lambda I_n)$ seja singular.*

Equivalentemente, λ é um autovalor de A se, e somente se, $det(A-\lambda I_n) = 0$. Evidentemente, os autovalores de A são exatamente os escalares $\lambda \in \mathbb{R}$ que são raízes do polinômio $p(\lambda) = det(A-\lambda I_n)$. O polinômio $p(\lambda)$ é denominado Polinômio Característico da matriz A, que é um polinômio de grau n.

Definição 2.24. *Sejam $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Dizemos que a matriz B é similar ou semelhante a matriz A, se existe uma matriz invertível $P \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ de maneira que $B = P^{-1}AP$.*

Note que matrizes similares possuem a seguinte propriedade:

$$\begin{aligned} det(B) &= det(P^{-1}AP) \\ &= det(P^{-1})det(A)det(P) \\ &= det(A). \end{aligned}$$

Esta propriedade nos leva ao seguinte resultado, que é muito importante no estudo de autovalores.

Teorema 2.25. *Matrizes similares possuem o mesmo polinômio característico.*

Demonstração. Considerando que a matriz B é similar à matriz A, isto é, existe uma matriz P invertível tal que $B = P^{-1}AP$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= det(B - \lambda I_n) \\ &= det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) \\ &= det(P^{-1}(A - \lambda I_n)P) \\ &= det(P^{-1})det(A - \lambda I_n)det(P) \\ &= det(A - \lambda I_n), \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. □

O teorema 2.25, nos permite definir o polinômio característico do operador linear T como sendo o polinômio característico da matriz $A = [T]_\beta^\beta$, que é a representação matricial do operador T em relação a qualquer base ordenada β de V. Para isso, vamos precisar do seguinte resultado que será apresentado no teorema a seguir.

Teorema 2.26. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$, T um operador linear sobre V, β e α bases ordenadas de V. Então,*

$$[T]_\beta^\beta = [I]_\beta^\alpha [T]_\alpha^\alpha [I]_\alpha^\beta.$$

Definição 2.27. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$, T um operador linear sobre V e β uma base ordenada de V. Definimos o Determinante do operador T da seguinte forma: $det(T) = det([T]_\beta^\beta)$.*

Exemplo 2.28. *Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ e o operador T sobre $P_2(\mathbb{R})$ definido por: $T(p(x)) = p(x) + xp'(x)$. Considerando a base canônica $\beta =$*

$\{1, x, x^2\}$, *temos que*

$$[T]_\beta^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Assim, $det(T) = det([T]_\beta^\beta) = 6$. *Logo, o operador* T *é invertível, pois* $det(T) \neq 0$.

Definição 2.29. *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão finita sobre* $\mathbb{R}$ *e* T *um operador linear sobre* V. *Definimos o polinômio característico do operador* T *como sendo o polinômio característico da matriz* $[T]_\beta^\beta$ *em relação a qualquer base ordenada* β *de* V.

Exemplo 2.30. *Considere o espaço vetorial* $P_2(\mathbb{R})$ *e o operador* T *sobre* $P_2(\mathbb{R})$ *definido por:* $T(p(x)) = p(x) + xp'(x)$. *Considerando a base canônica* $\beta = \{1, x, x^2\}$ *do exemplo 2.28, temos que o polinômio característico do operador* T *é dado por:*

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda),$$

logo $A = [T]_\beta^\beta$, *onde* β *é a base canônica de* $P_2(\mathbb{R})$.

Proposição 2.31. *Sejam* V *um espaço vetorial de dimensão finita sobre* $\mathbb{R}$, *digamos* $dim(V) = n$, *e* T *um operador linear sobre* V. *Então, os autovalores do operador linear* T *são os escalares* $\lambda \in \mathbb{R}$ *que são raízes do polinômio característico da matriz* $A = [T]_\beta^\beta$ *em relação a qualquer base ordenada* β *de* V.

Exemplo 2.32. *Considere o operador linear* T *sobre* $P_2(\mathbb{R})$ *definido por:*

$$T(p(x)) = (1 + x)p'(x) + p''(x).$$

Determine os autovalores do operador linear T.

Temos que $A = [T]_{\beta}^{\beta}$, onde $\beta = \{1, x, x^2\}$ é a base canônica de $P_2(\mathbb{R})$, é dada por:

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, o polinômio característico do operador T é dado por:

$$p(\lambda) \;=\; det(A - \lambda I) \;=\; -\lambda(1-\lambda)(2-\lambda)$$

Portanto, os autovalores de T são $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 2$.

Como $\lambda_1 = 0$ é um autovalor do operador linear T, podemos observar que

$$V_{\lambda_1} \;=\; Ker(T).$$

Assim, o operador linear T não é um operador injetor.

Exemplo 2.33. *Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$ com a base ordenada $\gamma = \{(1,1),\ (-1,1)\}$*

Temos que a matriz $A = [T]_{\gamma}^{\gamma}$ é dada por:

$$A \;=\; \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, o polinômio característico do operador T é dado por:

$$p(\lambda) \;=\; det(A - \lambda I) \;=\; \left(\frac{5}{2} - \lambda\right)\left(\frac{1}{2} - \lambda\right) + \frac{3}{4} \;=\; \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

Fazendo $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, temos que:

$\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 1$ são os autovalores associados a matriz A.

Agora para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$, *temos que determinar os elementos não-nulos* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tais que* $T(x, y) = 2(x, y)$. *Equivalentemente, temos que encontrar os elementos não nulos do núcleo do operador* $(T - 2I)$. *Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \implies \begin{cases} 0x & + & 2y & = & 0 \\ & + & y & = & 0 \end{cases}.$$

Portanto, os autovetores associados a $\lambda_1 = 2$ *são do tipo* $v_1 = (x, 0)$, *com* $x \neq 0$. *Desse modo, podemos escolher* $v_1 = (1, 0)$ *o autovetor associado ao autovalor* $\lambda_1 = 2$.

Para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 1$, *temos que determinar os elementos não-nulos* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tais que* $T(x, y) = (x, y)$. *Equivalentemente, temos que encontrar os elementos não-nulos do núcleo do operador* $(T - I)$. *Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear*

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies x + 2y = 0 .$$

Portanto, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 1$ *são do tipo* $v_2 = t(-2, 1)$, *para* $t \in \mathbb{R}$ *não-nulo. Assim podemos escolher* $v_2 = (-2, 1)$ *o autovetor associado ao autovalor* $\lambda_2 = 1$.

Exemplo 2.34. *Considere a matriz* $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores e os autovetores da matriz A.

Seja T_A o operador linear sobre $\mathbb{R}^3$ associado a matriz A, isto é,

$$T_A(x,y,z) \;=\; (2x+y+z, 2x+3y+4z, -x-y-2z)\ .$$

Assim, $A \;=\; [T_A]^{\beta}_{\beta}$, onde β é a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Desse modo, os autovalores da matriz A são os autovalores do operador linear T_A, e os autovetores são os autovetores do operador T_A, representados como matriz coluna.

Temos que o polinômio característico da matriz $A \;=\; [T_A]^{\beta}_{\beta}$ é dado por:

$$p(\lambda) \;=\; det(A-\lambda I) \;=\; \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 4 \\ -1 & -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} \;=\; -(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3)\ .$$

Os autovalores da matriz A são $\lambda_1 \;=\; 1$, $\lambda_2 \;=\; -1$ e $\lambda_3 \;=\; 3$.

Para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 \;=\; 1$, temos que encontrar os elementos não-nulos do núcleo do operador $(T_A - I)$. Assim, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 1 & 1 \\ 2 & 3-1 & 4 \\ -1 & -1 & -2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \\ -x & - & y & - & 3z & = & 0 \end{array} \right. .$$

Adicionando a primeira equação e a terceira equação encontramos $z \;=\; 0$, assim as duas primeiras equações ficam reduzidas à equação $x + y = 0$.

Portanto, os autovetores associados a $\lambda_1 \;=\; 1$ são do tipo $v_1 \;=\; t(1,-1,0)$, com $x \neq 0$. Assim, podemos escolher $v_1 \;=\; (1,-1,0)$ o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 \;=\; 1$. De modo análogo, obtemos os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 \;=\; -1$ que são do tipo $v_2 \;=\; t(0,1,-1)$, e os autovetores *associados ao autovalor* $\lambda_3 = 3$ *que são do tipo* $v_3 = t(-2,-3,1)$ *para* $t \in \mathbb{R}$ *não-nulo.*

Portanto, podemos representar os autovetores da matriz A *por:*

$$X_1 = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{bmatrix}, X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{bmatrix} \text{ e } X_3 = \begin{bmatrix} -2z \\ -3z \\ z \end{bmatrix},$$

para $x, y, z \in \mathbb{R}$ *, não nulos, associados aos autovalores* $\lambda_1 = 1$*,* $\lambda_2 = -1$ *e* $\lambda_3 = 3$*, respectivamente.*

Observe que A é uma matriz quadrada de ordem 3 e seus autovetores são matrizes coluna de ordem 3×1.

2.6 Multiplicidade Algébrica e Geométrica

Nesta seção, vamos definir multiplicidade algébrica e geométrica, onde apresentaremos dois exemplos.

Definição 2.35. *Definimos a multiplicidade algébrica de um autovalor* λ *como sendo a quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico.*

Definição 2.36. *Definimos a multiplicidade geométrica de um autovalor* λ *como sendo a dimensão do subespaço* V_λ *associado a ele.*

Exemplo 2.37. *Considere a matriz* $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores e os autovetores da matriz A.

Seja T_A o operador linear sobre $\mathbb{R}^3$, associado a matriz A, isto é,

$$T_A(x,y,z) \;=\; (2x-y+z,\; 3y-z,\; 2x+y+3z).$$

Assim, $A = [T_A]_\beta^\beta$, onde β é a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Desse modo, os autovalores da matriz A são os autovalores do operador linear T_A, e os autovetores são autovetores do operador T_A, representados como matriz coluna.

Temos que o polinômio característico da matriz $A = [T_A]_\beta^\beta$ é dado por:

$$p(\lambda) \;=\; det(A-\lambda I) \;=\; \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \;=\; -(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-4).$$

Os autovalores do operador T_A são $\lambda_1 = 2$ com multiplicidade algébrica igual a 2, e $\lambda_2 = 4$ com multiplicidade algébrica igual a 1.

Para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$, temos que encontrar os elementos não-nulos do núcleo do operador $(T_A - 2I)$. Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} & - & y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. .$$

Assim, obtemos a solução $z = y = -x$. Portanto, os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 2$ são do tipo $v_1 = (x,-x,-x)$ com $x \neq 0$. Desse modo, o autovalor $\lambda_1 = 2$ tem multiplicidade geométrica igual a 1. De maneira análoga, obtemos que os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = 4$ são do *tipo* $v_2 = (x, -x, x)$, *com* $x \neq 0$. *Note que o autovalor* λ_2 *tem multiplicidade geométrica igual a 1.*

Finalmente, os autovetores da matriz A *são representados da seguinte forma:*

$$X_1 = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ -x \end{bmatrix}$$

para $x \in \mathbb{R}$ *não-nulo, são os autovetores associados ao autovalor* $\lambda_1 = 2$, *que possui multiplicidade algébrica igual a 2 e multiplicidade geométrica igual a 1. Desse modo, temos que* $AX_1 = \lambda_1 X_1$.

$$X_2 = \begin{bmatrix} x \\ -x \\ x \end{bmatrix}$$

para $x \in \mathbb{R}$ *não-nulo, são os autovetores associados ao autovalor* $\lambda_2 = 4$, *que possui multiplicidade algébrica igual a 1 e multiplicidade geométrica igual a 1. Desse modo, temos que* $AX_2 = \lambda_2 X_2$.

Portanto, podemos escolher os seguintes autovetores para a matriz A

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad e \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

associados aos autovalores $\lambda_1 = 2$ *e* $\lambda_2 = 4$, *respectivamente.*

Exemplo 2.38. *Considere a matriz $A \in \mathbb{M}_3(\mathbb{R})$ dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determine os autovalores e os autovetores da matriz A.

Seja T_A o operador linear sobre $\mathbb{R}^3$, associado a matriz A, isto é,

$$T_A(x, y, z) = (2x + y + z,\ 2x + 3y + 2z,\ 3x + 3y + 4z).$$

Assim, $A = [T_A]_\beta^\beta$, onde β é a base canônica do $\mathbb{R}^3$. Desse modo, os autovalores da matriz A são os autovalores do operador linear T_A, e os autovetores são autovetores do operador T_A, representados como matriz coluna.

Temos que o polinômio característico da matriz $A = [T_A]_\beta^\beta$ é dado por:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 7).$$

Os autovalores do operador T_A são $\lambda_1 = 7$ com multiplicidade algébrica igual a 1, e $\lambda_2 = 1$ com multiplicidade algébrica igual a 2.

Para determinar os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 7$, temos que encontrar os elementos não-nulos do núcleo do operador $(T_A - 7I)$. Desse modo, temos que obter a solução do seguinte sistema linear

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7x \\ 7y \\ 7z \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ -2x + 4y - 2z = 0 \\ -3x - 3y + 3z = 0 \end{cases}.$$

Assim, obtemos a solução $y = 2x$ *e* $z = 3x$. *Portanto, os autovetores associados ao autovalor* $\lambda_1 = 7$ *são do tipo* $v_1 = t(1,2,3)$ *com* $t \neq 0$. *Desse modo, o autovalor* $\lambda_1 = 7$ *tem multiplicidade geométrica igual a 1. De maneira análoga, obtemos que os autovetores associados ao autovalor* $\lambda_2 = 1$ *são do tipo* $v_2 = a(1,0,-1) + b(0,1,-1)$, *com* $a,\ b \neq 0$. *Note que o autovalor* λ_2 *tem multiplicidade geométrica igual a 2.*

Finalmente, os autovetores da matriz A *são representados da seguinte forma:*

$$X_1 = \begin{bmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{bmatrix}$$

para $x \in \mathbb{R}$ *não-nulo, são os autovetores associados ao autovalor* $\lambda_1 = 7$, *que possui multiplicidade algébrica igual a 1 e multiplicidade geométrica igual a 1. Assim, obtemos que* $AX_1 = \lambda_1 X_1$.

$$X_2 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \\ -y \end{bmatrix}$$

para $x,\ y \in \mathbb{R}$ *não-nulos, são os autovetores associados ao autovalor* $\lambda_2 = 1$, *que possui multiplicidade algébrica igual a 2 e multiplicidade geométrica igual a 2. Desse modo, temos que* $AX_2 = \lambda_2 X_2$.

Portanto, podemos escolher os seguintes autovetores para a matriz A

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad , \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad e \quad X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

onde X_1 *é o autovetor associado ao autovalor* $\lambda_1 \;=\; 7$*,* X_2 *e* X_3 *são os autovetores associados ao autovalor* $\lambda_2 \;=\; 1$*.*

2.7 Diagonalização de Operadores Lineares

Nesta seção, veremos que através de uma matriz A qualquer, podemos encontrar uma outra matriz B diagonal de mesma ordem e que será equivalente a matriz A. E ainda, a sua diagonal é formada pelos autovalores associados a matriz A.

Teorema 2.39. *Sejam* $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$*,* γ *uma base ordenada para o espaço vetorial* $\mathbb{R}^n$ *e* T_A *o operador linear sobre* n *associado a matriz* A*. Então,*

$$[T_A]_\gamma^\gamma \;=\; P^{-1}AP,$$

onde P *é a matriz de mudança de base* γ *para a base canônica* β *de* n*.*

Exemplo 2.40. *Sejam* $\gamma \;=\; \{(1,2),\;(1,1)\}$ *uma base ordenada para* $\mathbb{R}^2$ *e a matriz* $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ *dada por:*

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim, temos que

$$P \;=\; [I]_\beta^\gamma \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad P^{-1} \;=\; \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Desse modo, obtemos

$$[T_A]_\gamma^\gamma \;=\; P^{-1}AP \;=\; \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}.$$

Teorema 2.41. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$, β uma base ordenada para V, T um operador linear sobre V e B uma matriz similar a matriz $[T]_\beta^\beta$. Então, existe uma base ordenada γ para V tal que $B = [T]_\gamma^\gamma$.*

Definição 2.42. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ e T um operador linear sobre V. Dizemos que T é um operador diagonalizável se existe uma base ordenada β para V tal que $[T]_\beta^\beta$ é uma matriz diagonal.*

Definição 2.43. *Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Dizemos que A é uma matriz diagonalizável se A é similar a uma matriz diagonal.*

Exemplo 2.44. *Considere a matriz simétrica $A \in \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ dada por:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que seus autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = -1$ com os autovetores associados

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad e \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

respectivamente.

Tomamos a matriz P e a matriz diagonal D dadas por:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Note que a matriz P foi construída a partir dos autovetores da matriz A e a matriz diagonal D foi construída com os autovalores da matriz A.

Assim, temos que a matriz A é similar a matriz diagonal D, onde, $A = PDP^{-1}$.

De fato, podemos verificar que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right).$$

Portanto, a matriz A é diagonalizável.

Exemplo 2.45. *Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. O operador linear T sobre o $\mathbb{R}^3$ definido por $T(x,y,z) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z)$ é um operador diagonalizável.*

Temos que a matriz $A = [T]^{\beta}_{\beta}$, onde β é a base canônica do $\mathbb{R}^3$, é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico do operador T é dado por:

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I) = -(3-\lambda)^2(1+\lambda).$$

Portanto, os autovalores de T são $\lambda_1 = 3$, com multiplicidade algébrica igual a 2, e $\lambda_2 = -1$, com multiplicidade algébrica igual a 1.

Podemos verificar que os autovetores associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$ são do tipo $v = (x,y,0)$ para $x,\ y \in \mathbb{R}$ não-nulos. Assim, podemos escolher os autovetores $v_1 = (1,0,0)$ e $v_2 = (0,1,0)$ associados ao autovalor $\lambda_1 = 3$. Logo, o autovalor $\lambda_1 = 3$ tem multiplicidade geométrica igual a 2.

Os autovetores associados ao autovalor $\lambda_2 = -1$ são do tipo $v = (-4y, 5y, -4y)$ para $y \in \mathbb{R}$ não-nulo. Assim, podemos escolher o autovetor $v_3 = (-4,5,-4)$ associado ao autovalor $\lambda_2 = -1$.

Portanto, temos que a matriz $A = [T]_\beta^\beta$ *é diagonalizável. Podemos verificar que*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \right)^{-1} .$$

Assim, mostramos que T *é um operador diagonalizável.*

De modo análogo, sabemos que T *é um operador diagonalizável, pois* $\gamma = \{v_1,\ v_2,\ v_3,\}$ *é uma base para* $\mathbb{R}^3$ *de modo que* $[T]_\gamma^\gamma$ *é uma matriz diagonal. De fato, podemos verificar que*

$$[T]_\gamma^\gamma = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} .$$

Capítulo 3

Produto Interno e Formas bilineares

Neste capítulo, os estudos estão voltados em propriedades de vetores relacionadas à medidas e distâncias, tais como, produto interno, norma, ângulo, ortogonalidade conjuntos ortonormais. Veremos o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, além dos operadores lineares autoadjunto e ortogonal bem como suas propriedades. E, ainda, apresentaremos as formas bilineares e as formas quadráticas junto com a diagonalização dessas últimas.

Nessa parte do trabalho focamos nas referências [12], [5], [14] e [2]. Entretanto, não vamos apresentar toda a teoria de produto interno e, por isso, caso o leitor tenha interesse em aprofundar seus conhecimentos sobre o assunto deve olhar as referências [12], [5], [2], [11], [8] e [6].

3.1 Produto interno

Nesta seção veremos que a distância da origem até um ponto P qualquer pode ser medida, e essa distância é chamada de Produto Interno.

Definição 3.1. *Seja V um espaço vetorial real. Um produto interno sobre V é uma função que a cada par de vetores, v_1 e v_2, associa um número real, denotado por, $< v_1, v_2 >$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

i) $< v, v > \geqslant 0$ para todo vetor v e $< v, v > = 0$ se, e somente se $v = 0$.

ii) $< \alpha v_1, v_2 > = \alpha < v_1, v_2 >$ para todo real α.

iii) $< v_1 + v_2, v_3 > = < v_1, v_3 > + < v_2, v_3 >$.

iv) $< v_1, v_2 > = < v_2, v_1 >$.

Exemplo 3.2. *O produto interno usual de vetores do espaço $\mathbb{R}^3$.*

Para $v = (x_1, x_2, x_3)$ e $w = (y_1, y_2, y_3)$

$$< v, w > = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

De modo análogo, chamamos produto interno usual para o espaço $\mathbb{R}^n$:

Dados os vetores de $\mathbb{R}^n$ $v = (x_1, \cdots, x_n)$ e $w = (y_1, \cdots, y_n)$,

$$< v, w >= x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

3.2 Norma

Nesta seção, veremos que o comprimento de um vetor em um determinado espaço vetorial é chamado de Norma.

Definição 3.3. *Seja V um espaço vetorial com produto interno $< \ , \ >$. Definimos a norma de um vetor v em relação a este produto interno por $\| v \| = \sqrt{< v, v >}$. Se $\| v \| = 1$, v é chamado vetor unitário. Dizemos também, neste caso, que v está normalizado.*

Observe que todo vetor não nulo $v \in V$ pode ser normalizado, ou seja, $u = \frac{v}{\|v\|}$.

Exemplo 3.4. *Considerando* $V = \mathbb{R}^3$ *e* $< \, , \, >$ *o produto interno usual, então se* $v = (x_1, \ x_2, \ x_3) \in \mathbb{R}^3$, $\| \, v \, \| = \sqrt{< v, \ v >} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ *que é o comprimento do vetor* v. *Assim, para* $v = (1, \ 2, \ -1)$, *teremos o vetor normalizado.*

$$u = \frac{v}{\| \, v \, \|} = \frac{(1, \ 2, \ -1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \ \frac{2}{\sqrt{6}}, \ \frac{-1}{\sqrt{6}} \right).$$

A noção de norma formaliza o conceito de comprimento.

Agora, veremos algumas propriedades de norma.

Seja V um espaço vetorial com produto interno. Para quaisquer $v, \ w$ em V e $\alpha \in \mathbb{R}$, tem-se:

i) $\| \, v \, \| \geqslant 0$ e $\| \, v \, \| = 0$ se, e somente se $v = 0$.

ii) $\| \, \alpha v \, \| = |\alpha| \ \| \, v \, \|$.

iii) $\| \, v + w \, \| \leqslant \| \, v \, \| + \| \, w \, \|$ (Desigualdade triangular).

Teorema 3.5 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)**.** *Seja* V *um espaço vetorial real munido do produto interno* $< \cdot, \ \cdot >$. *Então, para todos* $u, \ v \in V$ *temos que,*

$$< u, \ v >^2 \leqslant < u, \ u > < v, \ v > .$$

Além disso, a igualdade é válida se, e somente se, os elementos u *e* v *são linearmente dependentes.*

Demonstração. No caso em que os elementos u e v são linearmente dependentes, a igualdade é obtida trivialmente. Vamos considerar u e v linearmente independentes, isto é, $u + \lambda v \neq 0_v$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Desse modo, temos que

$$\begin{aligned} <u+\lambda v, u+\lambda v> &= <u,u> + <u,\lambda v> + <\lambda v, u> + \lambda^2 <v,v> \\ &= <u,\ u> \ + 2\lambda <u,\ v> \ + \lambda^2 <v,\ v> \ > \ 0, \end{aligned}$$

é uma equação de segundo grau na variável λ.

Note que a equação do segundo grau

$$<u,\ u> \ + 2\lambda <u,\ v> \ + \lambda^2 <v,\ v> = \ 0,$$

não possui raízes reais. Assim, devemos ter

$$4 <u,v>^2 - 4 <u,u><v,\ v>< 0 \Longrightarrow <u,v>^2 \ < \ <u,u><v,v>,$$

o que completa a demonstração. $\square$

Teorema 3.6. *Seja V um espaço vetorial real munido do produto interno $<\cdot,\ \cdot>$. Então, para quaisquer $u,\ v \in V$ temos que,*

$$|<u,\ v>|^2 \ \leqslant <u,\ u><v,\ v> .$$

Além disso, a igualdade é válida se, e somente se, os elementos u e v são linearmente dependentes.

Note que, de maneira análoga ao teorema anterior a demonstração deste teorema também pode ser verificada.

3.3 Definição de Ângulo (Ortogonalidade)

Nessa seção vamos ver que o produto interno pode ser usado para caracterizar a noção de perpendicularismo ou ortogonalidade de vetores.

Definição 3.7 (Ângulo)**.** *Seja V um espaço vetorial real munido do produto interno $< \cdot, \ \cdot >$. Ângulo entre dois elementos não-nulos $u, \ v \in V$ é definido como sendo o valor $\theta \in [0, \ \pi]$ que satisfaz a equação*

$$cos(\theta) \ = \ \frac{< u, \ v >}{\| \ u \ \|^2 \ \| \ v \ \|^2} \ .$$

Definição 3.8. *Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $< \cdot, \ \cdot >$. Dizemos que os elementos $u, \ v \in V$ são ortogonais se, e somente se, $< u, \ v > = \ 0$, e denotamos por $u \perp v$.*

Podemos observar facilmente que

$$< u, \ v > = \ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad cos(\theta) \ = \ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \theta \ = \ \frac{\pi}{2} \ \text{ para } \ 0 \ \leq \ \theta \ \leq \ \pi,$$

mostrando a compatibilidade entre os conceitos de ângulo e ortogonalidade.

Teorema 3.9. *Num espaço vetorial V munido do produto interno $< \cdot, \ \cdot >$, temos as seguintes propriedades:*

i) $0 \perp v$ para todo $v \in V$;

ii) $u \perp v$ implica $v \perp u$;

iii) Se $v \perp u$ para todo $u \in V$, então $v = 0$;

iv) Se $v \perp w$ e $u \perp w$, então $(v \ + \ u) \perp w$;

v) Se $v \perp u$ e λ é um escalar, então $\lambda v \perp u$.

Teorema 3.10. *Seja $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ um conjunto de vetores não nulos, dois a dois ortogonais, isto é, $< v_i, v_j > = \ 0$ para $i \neq j$. Então $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é linearmente independente.*

Demonstração. Seja $a_1 v_1 \ + \ a_2 v_2 \ + \ \cdots \ + \ a_n v_n \ = \ 0.$

Fazendo o produto interno dos dois membros da igualdade acima por v_i, temos:

$$< a_1 v_1 \ + \ \cdots, a_n v_n, \ v_i > = < 0, \ v_i >$$

e, portanto, $a_1 < v_1 \cdot v_i > \ + \ \cdots + \ a_i < v_i \cdot v_i > \ + \ \cdots + \ a_n < v_n \cdot v_i > = \ 0$.

Como $< v_j, \ v_i > = \ 0$ para $j \neq i$ e $< v_i, \ v_i > \neq 0$, temos $a_i < v_i, \ v_i > = \ 0$, e assim $a_i \ = \ 0$.

Como isto vale para todo $i = 1, \cdots, n$, temos $a_1 = 0, \cdots, \ a_n = 0$, logo $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é LI. □

Definição 3.11. *Diz-se que uma base $\{v_1, \cdots, v_n\}$ de V é base ortogonal se $< v_i, \ v_j >= 0$ para $i \neq j$, isto é, os vetores da base são dois a dois ortogonais.*

Note que, pelo o teorema anterior, se obtivermos um conjunto de n vetores dois a dois ortogonais num espaço de dimensão n, este conjunto será uma base ortogonal.

Teorema 3.12. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $< \cdot, \ \cdot >$ e $\beta = \{v_1, \ \cdots, \ v_n\}$ uma base ortogonal de V. Então, todo elemento $u \in V$ é escrito de modo único da seguinte forma:*

$$u \ = \ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ v_i \quad com \quad \alpha_i \ = \ \frac{< u, \ v_i >}{< v_i, \ v_i >} \quad .$$

Definição 3.13. *Considere V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ munido do produto interno $< \cdot, \ \cdot >$. Se $S = \{v_1, \cdots, v_n\}$ é um conjunto ortogonal em V com relação ao produto interno $< \cdot, \cdot >$, então dizemos que S é um conjunto ortonormal em V se $\| \ v_j \ \| = 1$ para $j = 1, \cdots, \ n$.*

Definição 3.14. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $< \cdot, \cdot >$ e $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de V. Se o conjunto β é ortonormal, dizemos que β é uma base ortonormal de V.*

3.4 Processo de Ortonormalização de Gram-Schmidt

A partir de uma base qualquer de um espaço vetorial existe um processo para se obter uma base ortonormal: o processo de ortonormalização de Gram-Schmidt.

Teorema 3.15. *Todo espaço de dimensão finita com produto interno possui uma base ortonormal.*

Demonstração. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com produto interno $< , >$. Considere $A = \{v_1, \cdots, v_n\} \subset V$ um conjunto linearmente independente. Vamos construir um outro conjunto $A' = \{v_1', \cdots, v_n'\} \subset V$ que seja ortogonal e tal que os subespaços gerados por A e por A' sejam os mesmos. Esta construção é feita indutivamente como segue

$v_1' = v_1$.

$v_2' = v_2 - \frac{<v_2,\ v_1'>}{\|v_1'\|^2} v_1'$.

Observe que $v_2' \neq 0$ (pois $\{v_1,\ v_2\}$ é LI) e que $v_2' \perp v_1'$. De fato,

$$\begin{aligned} < v_2',\ v_1' > &= < v_2 - \frac{<v_2,\ v_1'>}{\|v_1'\|^2} v_1',\ v_1' > \\ &= < v_2,\ v_1' > - \frac{<v_2,\ v_1'>}{\|v_1'\|^2} \cdot v_1',\ v_1' > \\ &= 0\ . \end{aligned}$$

Definidos $v_1^{'}, \cdots, v_k^{'},\ 1 < k < n$, podemos definir $v_{k+1}^{'}$ como sendo

$$\begin{aligned} v_{k+1}^{'} &= v_{k+1} - \tfrac{<v_{k+1},\ v_1^{'}>}{\|v_1^{'}\|^2}\ v_1^{'} - \cdots - \tfrac{<v_{k+1},\ v_k^{'}>}{\|v_k^{'}\|^2}\ v_k^{'} \\ &= v_{k+1} - \textstyle\sum_{j=1}^{k} \tfrac{<v_{k+1},\ v_j^{'}>}{\|v_j^{'}\|^2}\ v_j^{'} . \end{aligned}$$

Observe que o conjunto $\{v_1^{'}, \cdots, v_n^{'}\}$ definido acima é ortogonal e, em particular, linearmente independente. Observe também que, para cada $i = 1, \cdots, n,\ v_i^{'} \in W = [v_1, \cdots, v_n]$. Como *dim* $W = n$, segue que $A^{'} = \{v_1^{'}, \cdots, v_n^{'}\}$ é uma base de W, o que mostra a igualdade dos subespaços gerados por A e por $A^{'}$. □

Exemplo 3.16. *Seja $\beta = \{(2,1),\ (1,1)\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$. Vamos obter a partir de β uma base ortonormal em relação ao produto interno usual.*

Sejam $v_1 = (2,1)$ e $v_2 = (1,1)$.

$$\begin{aligned} v_1^{'} &= v_1 = (2,1) \\ v_2^{'} &= v_2 - cv_1^{'}. \end{aligned}$$

Como já vimos, a condição de que $v_2^{'}$ seja ortogonal a $v_1^{'}$ implica que

$$c = \frac{< v_2,\ v_1^{'} >}{< v_1^{'},\ v_1^{'} >} \quad ,$$

e, portanto,

$$v_2^{'} = v_2 - \frac{< v_2,\ v_1^{'} >}{< v_1^{'},\ v_1^{'} >}\, v_1^{'} = (1,1) - \frac{< (1,1),\ (2,1) >}{< (2,1),\ (2,1) >}\,(2,1) = \left(-\frac{1}{5},\ \frac{2}{5}.\right)$$

Normalizando estes vetores obtemos:

$$u_1 = \frac{v_1^{'}}{\|\ v_1^{'}\ \|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad e \quad u_2 = \frac{v_2^{'}}{\|\ v_2^{'}\ \|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}},\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right) .$$

Então, $\beta^{'} = \{u_1,\ u_2\}$ é uma base ortonormal.

Exemplo 3.17. *Seja* $\beta = \{(1,0),\ (0,1)\}$ *a base canônica de* $\mathbb{R}^2$. *Vamos obter a partir de* β *uma base ortonormal em relação ao produto interno de* $\mathbb{R}^2$, *definido por*

$$<(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2)> = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + y_1y_2 \ .$$

Sejam $v_1 = (1,0)$ *e* $v_2 = (0,1)$.

$$\begin{aligned} v_1^{'} &= v_1 = (1,0) \\ v_2^{'} &= v_2 - \tfrac{<v_2,\ v_1^{'}>}{<v_1^{'},\ v_1^{'}>} v_1^{'} = (0,1) - \tfrac{<(0,1),\ (1,0)>}{<(1,0),\ (1,0)>} (1,0) \\ &= (0,1) + \tfrac{1}{2}(1,0) = \left(\tfrac{1}{2},\ 1\right). \end{aligned}$$

Normalizando estes vetores obtemos:

$$u_1 = \tfrac{v_1^{'}}{\|v_1^{'}\|} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$$

$$u_2 = \tfrac{v_2^{'}}{\|v_2^{'}\|} = \left(\tfrac{\sqrt{2}}{2},\ \sqrt{2}\right).$$

Assim, $\beta^{'} = \{u_1,\ u_2\}$ *é uma base ortonormal em relação ao produto interno definido acima. Observe que a base inicial* β *é uma base ortonormal em relação ao produto interno usual de* $\mathbb{R}^2$, *mas não em relação ao produto aqui definido.*

3.5 Operadores: autoadjunto e ortogonal

Nesta seção vamos apresentar dois operadores lineares especiais, sendo eles o operador autoadjunto e o operador ortogonal. Juntamente com algumas de suas propriedades, que serão muito úteis no decorrer do trabalho.

Seja A uma matriz $n \times n$ real, A^t a transposta de A e I_n a matriz identidade de ordem n. Assim, A é:

i) simétrica se $A = A^t$;

ii) ortogonal se $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I_n$.

Definição 3.18. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Um operador linear $T : V \longrightarrow V$ com a propriedade de que $\|T(v)\| = \|v\|$, para todo $v \in V$, é chamado de operador ortogonal (ou isometria).*

Na proposição a seguir, enunciamos certas propriedades do operador ortogonal. Note que um operador ortogonal preserva os comprimentos dos vetores do espaço vetorial.

Proposição 3.19. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Então, são equivalentes as seguintes afirmações:*

i) T é ortogonal;

ii) T transforma as bases ortonormais de V em bases ortonormais de V;

iii) $< T(u), T(v) >=< u, v >$, para todo $u, v \in V$.

Demonstração. Ver a referência [5]. $\square$

O resultado a seguir caracteriza a matriz de um operador ortogonal.

Proposição 3.20. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. Se T é um operador ortogonal, então $[T]_\alpha^\alpha$ é uma matriz ortogonal, onde α é uma base ortonormal de V.*

Demonstração. Ver referência [5]. $\square$

Definição 3.21. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \longrightarrow V$ um operador linear. O operador T é dito autoadjunto se*

$$< T(u), v >=< u, T(v) >, \text{ para quaisquer } u, v \in V.$$

Dizer que um operador linear T é autoadjunto é equivalente a dizer que a matriz $[T]_\alpha^\alpha$ é simétrica, onde α é uma base ortonormal de V.

O resultado a seguir nos mostra que a matriz de mudança de base envolvendo bases ortonormais tem uma propriedade especial: é uma matriz ortogonal.

Teorema 3.22. *Se V é um espaço vetorial com produto interno e α e β são bases ortonormais de V, então a matriz de mudança de base $[I]_\beta^\alpha$ é uma matriz ortogonal.*

Demonstração. Ver referência [2]. □

O seguinte teorema diz que autovetores associados a autovalores distintos de um operador autoadjunto são ortogonais.

Teorema 3.23. *Sejam $T : V \longrightarrow V$ um operador auoadjunto λ_1 e λ_2 autovalores distintos de T e v_1 e v_2 autovetores associados a λ_1 e λ_2, respectivamente. Então v_1 e v_2 são ortogonais ($v_1 \perp v_2$).*

Demonstração. Ver a referência [2]. □

O resultado a seguir nos mostra que todo operador autoadjunto é diagonalizável.

Teorema 3.24. *Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador autoadjunto. Então existe uma base de ortonormal de autovetores de T.*

3.6 Formas Bilineares

Nesta seção, veremos que através de uma determinada expressão algébrica podemos escrever um produto de matrizes que representará uma transformação linear de um espaço vetorial em outro. Além disso, apresentaremos funções associadas a espaços vetoriais e munidas de produto interno, que associará pares de vetores com números reais, o qual chamaremos de formas bilineares.

Definição 3.25. *Seja V um espaço vetorial real. Uma forma linear é uma transformação linear $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Exemplo 3.26. *Seja*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow x + y, \quad \textit{ou na forma matricial} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.27. *Seja*

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\longrightarrow 2x + y - z, \quad \textit{ou na forma matricial} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma forma linear, $\alpha = \{v_1, \cdots, v_n\}$ é base de V e $\beta = \{w\}$ é base de $\mathbb{R}$, então

$$[f]^{\alpha}_{\beta} = [a_1 \; a_2 \; \cdots \; a_n]_{1 \times n} .$$

Se $v \in V$ é tal que

$$[v]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

então $[f(v)]_\beta = [f]_\beta^\alpha [v]_\alpha$.

Definição 3.28. *Seja V um espaço vetorial real. Uma forma bilinear é uma aplicação $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $(v, w) \longrightarrow B(v, w)$ tal que:*

i) Para todo w fixado, $B(v, w)$ é uma forma linear em v, isto é,

$$B(v_1 + v_2, w) = B(v_1, w) + B(v_2, w)$$

$$e \quad B(av,\ w) = aB(v, w).$$

ii) Para todo v fixado, $B(v, w)$ é uma forma linear em w, isto é,

$$B(v, w_1 + w_2) = B(v, w_1) + B(v,\ w_2)$$

$$e \quad B(v, aw) = aB(v, w).$$

Exemplo 3.29. *O produto usual de números reais*

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow p(x, y) = xy. \end{aligned}$$

Observe que

$$p(x, y + z) = x(y + z) = xy + xz = p(x, y) + p(x, z),$$

$$p(ax, y) = ax \cdot y = a(xy) = ap(x, y)\ .$$

E ainda que,

$$p(x + y, z) = (x + y)z = xz + yz = p(x, z) + p(y, z),$$

$$p(x, ay) = x \cdot ay = a(xy) = ap(x, y).$$

Logo, p é bilinear.

Exemplo 3.30. *Seja* $M = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

Podemos associar a M uma forma bilinear $B : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$B((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} =$$

$$= -2x_1y_1 + 4x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 .$$

A bilinearidade de B decorre das propriedades do produto e da soma de matrizes.

3.7 Forma Bilinear Simétrica

Nesta seção, será apresentada a definição de forma bilinear simétrica juntamente com alguns exemplos.

Definição 3.31. *A forma bilinear* $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *é simétrica se* $B(v,\ w) = B(w,\ v)$ *para todo* $v,\ w \in V$.

Observação 3.32. *Uma forma bilinear* $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *ser simétrica é equivalente à matriz* $[B]_\alpha^\alpha$ *ser simétrica, onde* α *é uma base de* V.

Exemplo 3.33. *Seja* $<,>$ *um produto interno em* V. *Então a forma bilinear* $B(v,\ w) = <v,\ w>$ *é simétrica, pois* $<v,\ w> = <w,\ v>$.

Exemplo 3.34. *Seja* $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *a forma bilinear dada por*

$$B(v, w) = -x_1y_1 + 3x_2y_1 + 3x_1y_2 + 2x_2y_2,$$

onde

$$v = (x_1,\ x_2) \ \ e \ \ w = (y_1,\ y_2)\ .$$

Calculando $B(v, w)$*, temos*

$$\begin{aligned} B(w, v) &= ((y_1,\ y_2),\ (x_1,\ x_2)) \\ &= -y_1x_1 + 3y_2x_1 + 3y_2x_1 + 2y_2x_2\ . \end{aligned}$$

Como $B(v, w) = B(w, v)$*,* B *é simétrica.*

Observe que, $[B]_\alpha^\alpha$ é uma matriz simétrica, sendo que α é a base canônica. De fato:

$$B(v, w) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\ .$$

Este resultado vale em geral, sendo enunciado no teorema abaixo.

Nesta seção, vimos uma importante ferramenta que será utilizada para introduzirmos o conceito de formas quadráticas que veremos a seguir.

3.8 Formas Quadráticas

Nesta seção, veremos que a partir de uma expressão algébrica podemos escrever um produto de matrizes, de modo que o resultado deste produto será a expressão algébrica inicial, que chamaremos de formas quadráticas.

Definição 3.35. *Seja* V *um espaço vetorial real e* $B : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma forma bilinear simétrica. A função* $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $Q(v) = B(v,\ v)$ *é chamada Forma Quadrática associada a* B*.*

Exemplo 3.36. *Seja a função* $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por:*

$$Q(v) = x^2 \ - \ 10xy \ + \ y^2, \ \textit{onde } v = (x, y).$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} Q(v) \ &= \ \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \ ax^2 \ + \ 2bxy \ + \ cy^2. \end{aligned}$$

Então, $ax^2 \ + \ 2bxy \ + \ cy^2 = x^2 \ - \ 10xy \ + \ y^2.$

Logo, $a = 1, \ 2b = -10, \ c = 1.$

Substituindo,

$$Q(v) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Observe ainda que Q *é a forma quadrática associada à forma bilinear:*

$$B(v, w) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

onde $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $[w]_\alpha = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ *e* $[B]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$, *com* α *sendo a base canônica de* $\mathbb{R}^2$.

O procedimento adotado no exemplo 3.36 pode ser aplicado a uma forma quadrática genérica $Q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, onde $Q(x, y) = Ax^2 \ + \ Bxy \ + \ Cy^2$. Concluímos então que sua forma matricial é

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.37. *Seja a função $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:*

$$Q(x, y, z) = 3x^2 + 2xy + 4y^2 + 5yz.$$

Em relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$, Q é dada na seguinte forma matricial:

$$Q(x, y, z) = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos trabalhar com o intuito de diagonalizar uma forma quadrática.

Dado $Q(v) = x^2 - 10xy + y^2$ onde $v = (x, y)$. Procuremos uma base β de modo que se

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \text{então}$$

$$Q(v) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2,$$

ou ainda,

$$Q(v) = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$Q(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

ou $Q(x, y) = [v]_\alpha^t \, [B]_\alpha^\alpha \, [v]_\alpha$, com α a base canônica do $\mathbb{R}^2$. Como a matriz $[B]_\alpha^\alpha$ é simétrica, ela é diagonalizável, admitindo um conjunto de autovetores ortonormais.

Os autovalores de $[B]_\alpha^\alpha$ são $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = -4$. Procurando os autovetores, encontramos para $\lambda_1 = 6$, $v_1 = (x, -x)$ e para $\lambda_2 = -4$, $v_2 = (x, x)$.

Assim, uma base ortonormal β de autovetores será dada por

$$v_1 \;=\; \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{e} \quad v_2 \;=\; \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Seja $[I]_\alpha^\beta$ a matriz de mudança de base. Então

$$[B]_\alpha^\alpha \;=\; [I]_\alpha^\beta\; [B]_\beta^\beta\; [I]_\beta^\alpha, \;\; \text{onde} \;\; [B]_\beta^\beta \;=\; \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Substituindo em $Q(v) \;=\; [v]_\alpha^t\; [B]_\alpha^\alpha\; [v]_\alpha$, temos

$$Q(v) \;=\; [v]_\alpha^t\; [I]_\alpha^\beta\; [B]_\beta^\beta\; [I]_\beta^\alpha\; [v]_\alpha.$$

Como α e β são bases ortonormais, temos pelo teorema 3.22 que $[I]_\alpha^\beta$ é ortogonal. Logo,

$$([I]_\alpha^\beta)^{-1} \;=\; [I]_\beta^\alpha \;=\; ([I]_\alpha^\beta)^t,$$

donde

$$\begin{aligned} Q(v) \;&=\; ([I]_\beta^\alpha [v]_\alpha)^t\; [B]_\beta^\beta\; ([I]_\beta^\alpha [v]_\alpha) \\ &=\; [v]_\beta^t\; [B]_\beta^\beta\; [v]_\beta. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} Q(v) \;&=\; \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \\ &=\; 6x_1^2 \;-\; 4y_1^2, \end{aligned}$$

onde

$$[v]_\beta \;=\; \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

O teorema abaixo é fundamental nesse texto. A partir dele, podemos diagonalizar uma forma quadrática e, assim, eliminar os termos mistos na equação de uma cônica ou de uma quádrica.

Teorema 3.38. *Seja $Q(v) = B(v,v)$ uma forma quadrática em V. Existe uma base ortonormal β de V tal qual se*

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},$$

então $Q(v) = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$.

Demonstração. Seja α uma base ortonormal qualquer de V. Então

$$Q(v) = B(v,v) = [v]_\alpha^t [B]_\alpha^\alpha [v]_\alpha.$$

Logo, a matriz $[B]_\alpha^\alpha$ é uma matriz simétrica e, portanto corresponde a um operador autoadjunto $T : V \longrightarrow V$ cuja matriz $[T]_\alpha^\alpha = [B]_\alpha^\alpha$. Como um operador autoadjunto pode ser diagonalizado, pelo teorema 3.24, mediante uma base β de autovetores ortonormais, então

$$\begin{aligned} [B]_\alpha^\alpha &= [I]_\alpha^\beta \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [I]_\beta^\alpha \\ &= ([I]_\beta^\alpha)^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [I]_\beta^\alpha , \\ &= ([I]_\beta^\alpha)^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [I]_\beta^\alpha \end{aligned}$$

pois α e β são bases ortonormais e, assim, $[I]_\beta^\alpha$ é uma matriz ortogonal pelo teorema 3.22. Segue que

$$\begin{aligned}
Q(v) &= [v]_\alpha^t \cdot ([I]_\beta^\alpha)^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} [I]_\beta^\alpha \cdot [v]_\alpha \\
&= ([I]_\beta^\alpha [v]_\alpha)^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} ([I]_\beta^\alpha [v]_\alpha) \\
&= ([v]_\beta)^t \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} ([v]_\beta) \\
&= \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.
\end{aligned}$$

□

Exemplo 3.39. *Seja a forma quadrática em $\mathbb{R}^2$ dada por: Se $v = (x_1, x_2)$, então*

$$\begin{aligned}
Q(v) &= -4x_1^2 - 6x_1x_2 + 6x_2^2 \\
&= -4x_1^2 - 3x_1x_2 - 3x_1x_2 + 6x_2^2 \\
&= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Calculemos os autovalores. O polinômio característico é dado por:

$$p(\lambda) = det \begin{bmatrix} -4-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 33, \text{ e assim temos que,}$$

$$\lambda_1 = 1 - \sqrt{34} \quad e \quad \lambda_2 = 1 + \sqrt{34}.$$

Então existe uma base β tal que

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

então, pelo teorema 3.38, observamos que

$$Q(v) = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-\sqrt{34} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix},$$

isto é,

$$Q(v) = (1-\sqrt{34})y_1^2 + (1+\sqrt{34})y_2^2.$$

A diagonalização das formas quadráticas é fundamental neste trabalho, pois dentre as suas diversas aplicações, iremos destacar a sua importância na classificação das cônicas.

Capítulo 4

Cônicas e Quádricas

Neste capítulo, será desenvolvido o principal tema deste trabalho, que é a classificação de cônicas e quádricas através da álgebra linear. Onde inicialmente serão apresentados resultados triviais sobre retas no plano e planos no espaço. Logo após, será apresentado finalmente o estudo sobre cônicas e quádricas, e o processo para suas respectivas classificações. Este capítulo foi baseado nas referências [2], [5] e [15].

Vamos focar no estudo algébrico de cônicas e quádricas, ou melhor, na classificação das cônicas ou quádricas através de suas equações usando a teoria de álgebra linear. Para um outro enfoque no estudo de cônicas e quádricas, ver [10], [4] e [17].

4.1 Retas no Plano e Planos no Espaço

Nesta seção, apresentaremos que o conjunto dos pontos de um plano, onde é estabelecida a relação entre as coordenadas e a base canônica deste plano, irá satisfazer a equação cartesiana chamada de uma reta no plano.

Definição 4.1. *Uma reta no plano é o conjunto dos pontos* (x, y) *desse plano* *cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação cartesiana*

$$Ax + By = C,$$

com $A \neq 0$ *ou* $B \neq 0$*. Temos as seguintes possibilidades:*

i) $A \neq 0$ *e* $B \neq 0$*;* $Ax + By = C$*.*

ii) $A = 0$ *e* $B \neq 0$*;* $By = C$*.*

iii) $A \neq 0$ *e* $B = 0$*;* $Ax = C$*.*

Em seguida, iremos definir planos no espaço.

Definição 4.2. *Um plano no espaço é o conjunto dos pontos* (x, y, z) *do espaço cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem à equação*

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

onde $A \neq 0$ *ou* $B \neq 0$ *ou* $C \neq 0$ *.*

4.2 Cônicas no Plano

Nesta seção, veremos que um conjunto de pontos em $\mathbb{R}^2$, onde a relação entre as coordenadas e a base canônica satisfaz uma equação envolvendo uma forma quadrática, uma linear e um termo constante será uma cônica ou uma de suas degenerações.

Definição 4.3. *Uma cônica em* $\mathbb{R}^2$ *é um conjunto de pontos cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação:*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde A *ou* B *ou* $C \neq 0$*.*

Observe que a equação da cônica envolve uma forma quadrática, $Q(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, uma forma linear, $L(x, y) = Dx + Ey$, e um termo constante F. Isto é, a equação que define a cônica é:

$$Q(x, y) + L(x, y) + F = 0.$$

As cônicas não degeneradas têm uma das formas dadas na Figura 4.1. Os casos degenerados podem vistos na Figura 4.2.

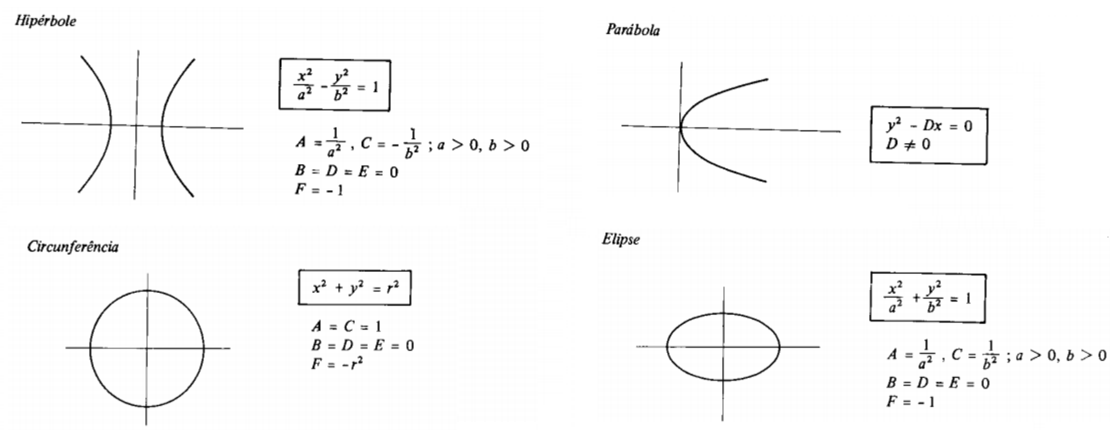

Figura 4.1: Cônicas não degeneradas - Fonte: figura retirada da referência [2].

A seguir veremos o procedimento geral para classificação das cônicas, onde destacaremos cada detalhe do que deve ser feito para chegar ao resultado final.

Dada a equação (em coordenadas canônicas de $\mathbb{R}^2$),

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, (A \text{ ou } B \text{ ou } C \neq 0).$$

Para achar que figura ela representa no plano, escreveremos a equação na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0.$$

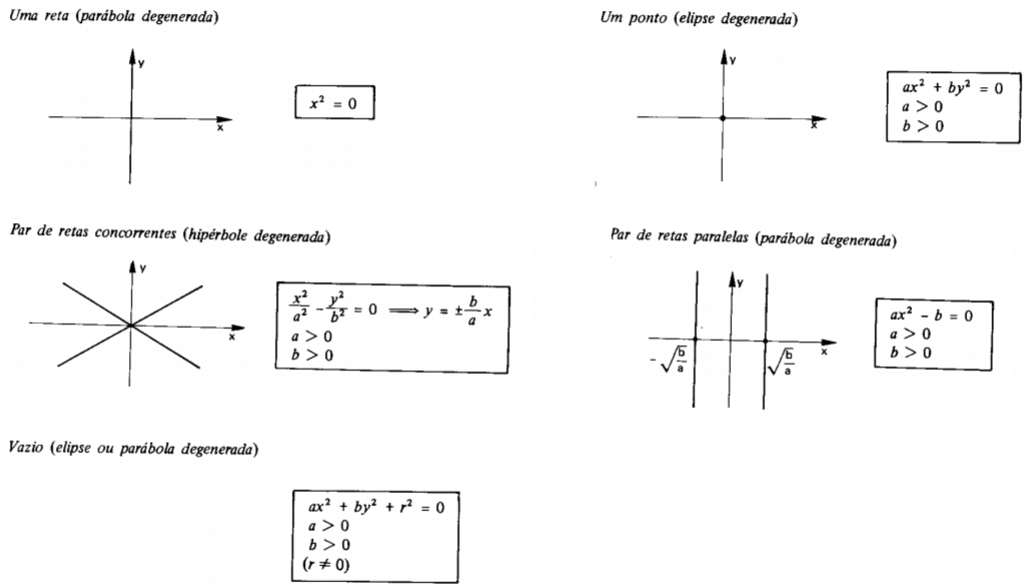

Figura 4.2: Cônicas degeneradas - Fonte: figura retirada da referência [2].

Agora, iremos diagonalizar a forma quadrática para eliminar os termos mistos. Para isto, precisaremos encontrar os autovalores λ_1 e λ_2 e os autovetores ortonormais v_1 e v_2 de $\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$.

Faremos uma mudança de coordenadas. Para isto, precisamos fazer a seguinte substituição na equação

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [I]_\alpha^\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

onde α é a base canônica e β, a base formada pelos autovetores ortonormais, ou seja, $[V]_\alpha = [I]_\alpha^\beta [V]_\beta$.

Substituindo as novas coordenadas na equação, iremos obter a equação na nova base $\{v_1, v_2\}$

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} [I]_\alpha^\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + F = 0,$$

onde α é a base canônica e β, a base formada pelos autovetores ortonormais, ou seja, $\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 y_1^2 + ax_1 + by_1 + F = 0$.

Agora, temos que eliminar os termos lineares das coordenadas cujos autovalores são não nulos. Temos então três casos:

i) λ_1 e $\lambda_2 \neq 0$.

$\lambda_1 x_1^2 + ax_1 + \lambda_2 y_1^2 + by_1 + F = 0$

$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{a}{2\lambda_1}\right)^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} + \lambda_2 \left(y_1 + \frac{b}{2\lambda_2}\right)^2 - \frac{b^2}{4\lambda_2} + F = 0.$

Seja $x_2 = x_1 + \frac{a}{2\lambda_1}$ e $y_2 = y_1 + \frac{b}{2\lambda_2}$, temos então

$$\lambda_1 x_2^2 + \lambda_2 y_2^2 + f = 0,$$

onde, $f = F - \frac{a^2}{4\lambda_1} - \frac{b^2}{4\lambda_2}$.

ii) $\lambda_1 \neq 0$ e $\lambda_2 = 0$.

$\lambda_1 x_1^2 + ax_1 + by_1 + F = 0$

$\lambda_1 \left(x_1 + \frac{a}{2\lambda_1}\right)^2 - \frac{a^2}{4\lambda_1} + by_1 + F = 0.$

Tomando $x_2 = x_1 + \frac{a}{2\lambda_1}$ e $y_2 = y_1$, temos

$$\lambda_1 x_2^2 + by_2 + f = 0,$$

onde, $f = F - \frac{a^2}{4\lambda_1}$.

iii) $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. De maneira análoga ao anterior (ii).

Note que, o procedimento nos permite através de uma mudança de referencial, colocar qualquer cônica na forma de uma equação que possa ser facilmente identificada.

Exemplo 4.4. *Dada a equação na base canônica α de $\mathbb{R}^2$:*

$$2x^2 + 2y^2 + 4xy + 4\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y - 8 = 0. \tag{4.1}$$

Nosso objetivo é determinar qual figura esta cônica representa no plano. Para isto, precisamos inicialmente eliminar os termos mistos, do tipo xy, através da diagonalização da forma quadrática.

Primeiramente iremos escrever a equação 4.1 na forma matricial. Assim, temos

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 8 = 0.$$

Feito isso, vamos calcular os autovalores e os autovetores ortonormais da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

$$p(\lambda) = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2 \ - \ \lambda)^2 - 4 = \lambda(-4+\lambda).$$

Logo, obtemos que os autovalores são $\lambda = 0$ *e* $\lambda = 4$.

Em seguida, iremos encontrar os autovetores ortonormais associados aos autovalores 0 *e* 4.

Para $\lambda_1 = 0$, $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, *e* $v_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Para $\lambda_2 = 4$, $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x \\ 4y \end{bmatrix}$, *donde* $v_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Faremos uma mudança de base e obteremos uma nova base de autovetores $\beta = \{v_1, \ v_2\}$, *a forma quadrática*

$$Q(v) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad onde \quad [v]_\alpha = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

se reduz a

$$Q(v) \;=\; \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad se \quad [v]_\beta \;=\; \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}.$$

Feito isto, precisaremos determinar a relação que existe entre $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ *e* $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ *e substituir o resultado na parte linear da equação dada.*

$$L(v) \;=\; \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Mas, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;=\; [I]_\alpha^\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, *sendo que* $[I]_\alpha^\beta$ *é a matriz de mudança da base* α *(base canônica) para* β *(base formada pelos autovetores ortonormais).*

Logo, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$.

A equação original se reduz a

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 12\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} - 8 \;=\; 0\,.$$

Fazendo a multiplicação entre as matrizes, temos

$$0x_1^2 \;+\; 4y_1^2 \;+\; 4\sqrt{2}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}x_1 \;+\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}y_1\right) \;+\; 12\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}x_1 \;+\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}y_1\right) \;-\; 8 \;=\; 0$$

$$4y_1^2 \;-\; 4x_1 \;+\; 4y_1 \;+\; 12x_1 \;+\; 12y_1 \;-\; 8 \;=\; 0$$

$$4y_1^2 \;+\; 8x_1 \;+\; 16y_1 \;-\; 8 \;=\; 0$$

$$y_1^2 \;+\; 2x_1 \;+\; 4y_1 \;-\; 2 \;=\; 0\,.$$

Esta última equação representa a canônica em relação ao novo referencial formado pelas retas suporte de v_1 e v_2, como mostra a Figura 4.3.

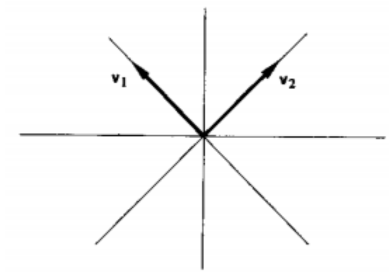

Figura 4.3: Novo referencial - Fonte: figura retirada da referência [2].

Fazendo uma nova mudança de coordenadas para identificar a cônica. Iremos eliminar os termos lineares onde $\lambda \neq 0$, e agruparmos os termos de $y_1^2 + 2x_1 + 4y_1 - 2 = 0$ convenientemente.

$$(y_1^2 + 4y_1 + 4) - 4 + 2x_1 - 2 = 0$$
$$(y_1 + 2)^2 + 2(x_1 - 3) = 0 .$$

Tomando $x_2 = x_1 - 3$ e $y_2 = y_1 + 2$, obtemos $y_2^2 + 2x_2 - 6 = 0$ ou ainda $x_2 = -\frac{1}{2}y_2^2$.

Assim, a equação acima representa a cônica em relação a um novo referencial R_3, obtido por translação e podemos facilmente identificá-la como sendo uma parábola, conforme indica a Figura 4.4.

Onde a origem deste último referencial $\mathbb{R}_3$ será $x_2 = 0$ e $y_2 = 0$, isto é, $x_1 - 3 = 0$ e $y_1 + 2 = 0$.

Muitas vezes, entretanto, estaremos interessados apenas em classificar a cônica dada por uma equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, sem determinar suas dimensões e localização. Visando assim, fazer a classificação

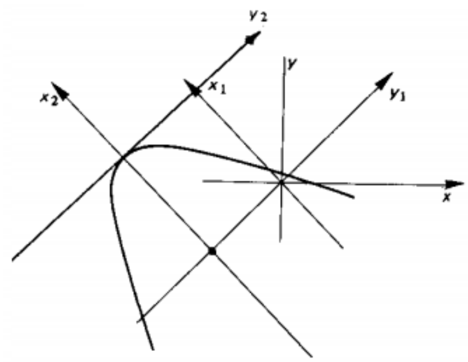

Figura 4.4: Parábola - Fonte: figura retirada da referência [2].

de uma forma mais rápida através da quantidade menor de possibilidades existentes a partir da equação. Observe nos teoremas 4.5 e 4.7 que veremos a seguir.

Teorema 4.5. *Dada uma cônica definida pela equação* $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. *Sejam* λ_1 *e* λ_2 *os autovalores associados à sua forma quadrática, então:*

i) Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ *esta equação representa uma elipse, ou suas degenerações (um ponto ou o vazio).*

ii) Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ *esta equação representa uma hipérbole ou sua degeneração (par de retas concorrentes).*

iii) Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ *esta equação representa uma parábola ou suas degenerações (par de retas paralelas, uma reta ou o vazio).*

Exemplo 4.6. *Considere a equação*

$$2x^2 + 2y^2 + 4xy + 4\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y - 8 = 0, \tag{4.2}$$

dada no exemplo 4.4.

Como já foi visto, temos que $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 4$ são os autovalores associados à forma quadrática. Segue que $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ e, portanto, pelo teorema anterior, a equação 4.2 representa uma parábola ou suas degenerações, que está de acordo com o resultado obtido em 4.4.

Podemos afirmar que o determinante associado à forma quadrática $\begin{bmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{bmatrix}$ é igual ao produto de seus autovalores $\lambda_1 \cdot \lambda_2$. Assim o sinal de $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ é o mesmo de $-\left(\frac{B^2}{4} - AC\right)$, que por sua vez tem o mesmo sinal de $-(B^2 - 4AC)$. Podemos assim reescrever o teorema anterior em função do "discriminante" $B^2 - 4AC$.

Teorema 4.7. *Dada a equação: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, esta equação representará:*

i) Uma elipse ou suas degenerações, se $B^2 - 4AC < 0$.

ii) Uma parábola ou suas degenerações, se $B^2 - 4AC = 0$.

iii) Uma hipérbole, se $B^2 - 4AC > 0$.

Exemplo 4.8. *Considere a equação*

$$2x^2 + 2y^2 + 4xy + 4\sqrt{2}x + 12\sqrt{2}y - 8 = 0, \tag{4.3}$$

dada no exemplo 4.4. Desse modo, usando as notações do teorema acima, temos que $A = 2$, $B = 4$, $C = 2$, $D = 4\sqrt{2}$, $E = 12\sqrt{2}$ e $F = -8$.

Observe que

$$B^2 - 4AC = 4^2 - 4(2)(2) = 16 - 16 = 0$$

e, assim, pelo teorema anterior, concluímos que a equação 4.3 representa uma *parábola ou suas degenerações, que está de acordo com o resultado obtido em 4.4.*

4.3 Quádricas em $\mathbb{R}^3$

Assim como na seção anterior, nesta seção iremos apresentar importantes resultados, onde a relação entre as coordenadas de um conjunto de pontos com a base canônica também satisfaz uma equação análoga a de uma cônica, porém em $\mathbb{R}^3$. Sendo que, esta equação resultará em uma quádrica ou uma de suas degenerações.

Definição 4.9. *Uma quádrica em $\mathbb{R}^3$ é um conjunto de pontos cujas coordenadas em relação à base canônica satisfazem a equação:*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz \ + J = 0,$$

com A ou B ou C ou D ou E ou $F \neq 0$.

As quádricas têm uma das formas dadas na Figura 4.5. Se nenhum termo com z aparece na equação da quádrica, temos o cilindro. O cilindro padrão é formado por retas ortogonais ao plano $z = 0$ que passam por uma cônica neste plano. Os tipos de cilindros são descritos na Figura 4.6.

O procedimento geral para classificar uma quádrica é totalmente análogo ao caso para cônicas.

Exemplo 4.10. *Para classificar a quádrica cuja a equação é,*

$$-x^2 \ + \ 2yz \ + \ z \ - \ y \ = \ 100 \ .$$

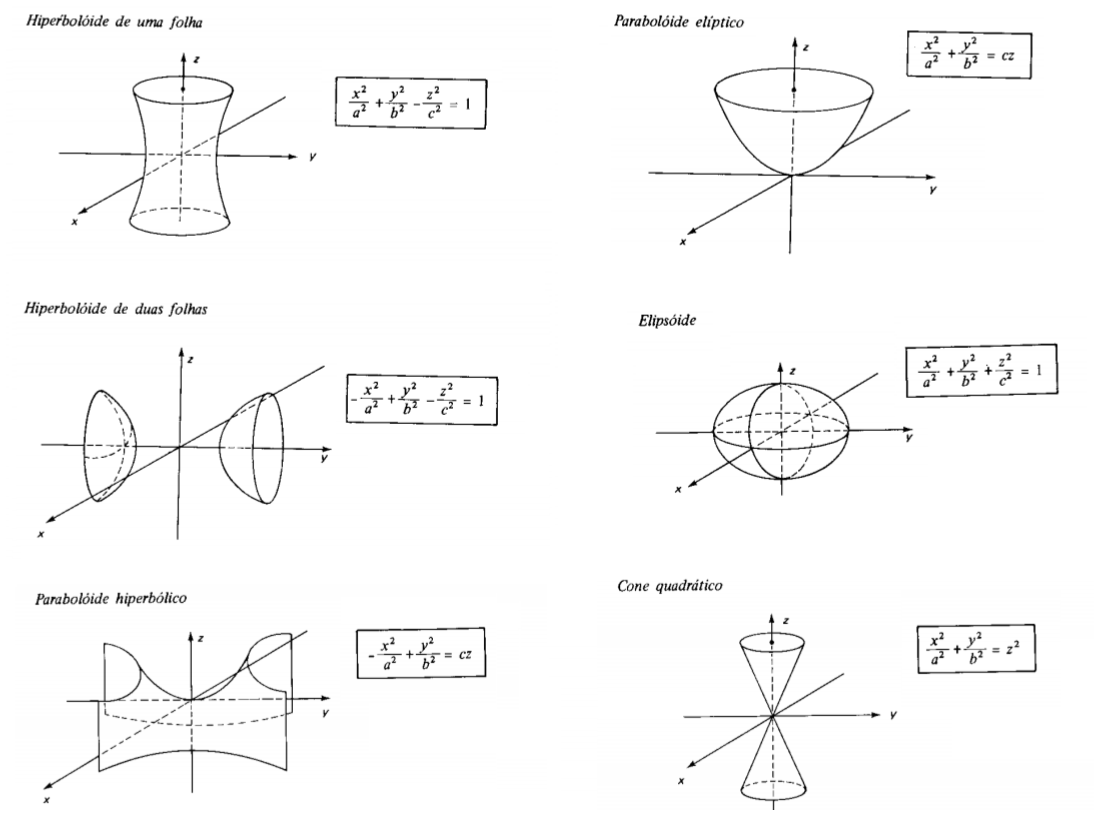

Figura 4.5: Quádricas - Fonte: figura retirada da referência [2].

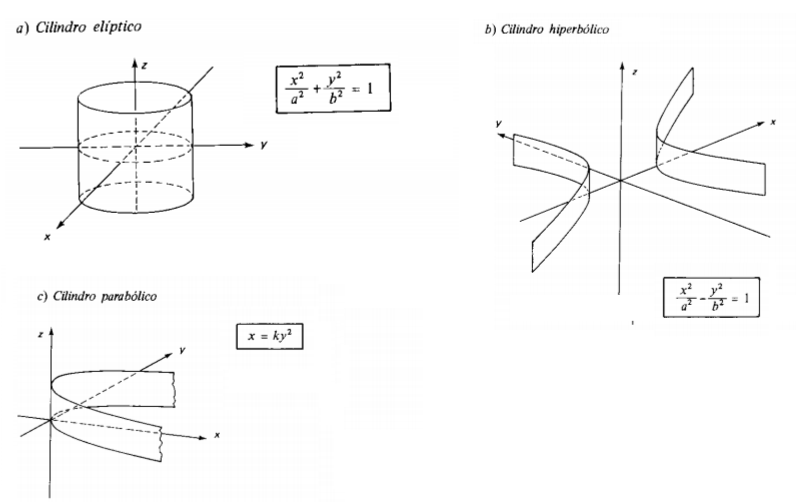

Figura 4.6: Cilindro - Fonte: figura retirada da referência [2].

Primeiramente iremos escrever a equação acima na forma matricial, ob-

tendo:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 100 \; .$$

Agora, calcularemos os autovalores e os autovetores já normalizados da matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *obtendo:*

Para $\lambda_1 = -1$ *temos* $v_1 = (1, 0, 0)$ *e* $v_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Para $\lambda_2 = 1$ *temos* $v_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Fazendo uma mudança de coordenadas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [I]_\alpha^\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix},$$

sendo β *a base formada pelos autovetores ortonormais e* α *a base canônica e*

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Então, a equação da quádrica em relação ao referencial dado pelos autovetores será:

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = 100.$$

Isto é,

$$-x_1^2 - y_1^2 + z_1^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_1 = 100.$$

Faremos uma nova mudança de coordenadas para eliminar os termos lineares.

$$z_1^2 - x_1^2 - \left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{1}{2} - 100 = 0\ .$$

Sejam $x_2 = x_1, y_2 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ *e* $z_2 = z_1$*; assim, temos a seguinte equação:*

$$-\frac{x_2^2}{\left(\sqrt{\frac{199}{2}}\right)^2} - \frac{y_2^2}{\left(\sqrt{\frac{199}{2}}\right)^2} + \frac{z_2^2}{\left(\sqrt{\frac{199}{2}}\right)^2} = 1,$$

que representa a quádrica em relação ao referencial obtido por translação a partir daquele dos autovetores, cuja origem é dada por $x_2 = 0, y_2 = 0$ *e* $z_2 = 0$*. Então*

$$x_1 = 0, y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 \quad e \quad z_1 = 0.$$

Através da equação acima obtida e comparando com a das quádricas indicadas, vemos que esta quádrica é um hiperbolóide de duas folhas, ver figura 4.7.

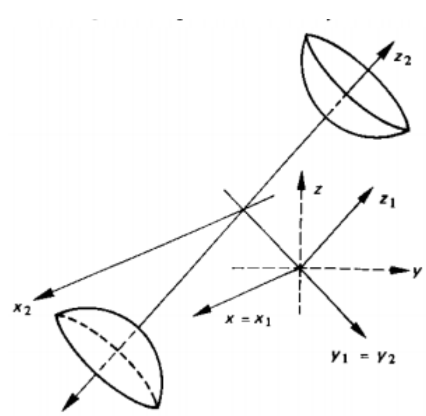

Figura 4.7: Hiperbolóide de duas folhas - Fonte: figura retirada da referência [2].

Exemplo 4.11. *Para achar a figura dada pela equação*

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 81,$$

inicialmente iremos colocar a equação na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 81.$$

Em seguida, vamos encontrar os autovalores e autovetores já normalizados:

Para $\lambda_1 = 1$, *temos* $v_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$.

Para $\lambda_2 = 1$, *temos* $v_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

Para $\lambda_3 = 4$, *temos* $v_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Agora faremos uma mudança de coordenadas

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [I]_\alpha^\beta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix},$$

sendo que α *é base canônica e* β *a base formada pelos autovetores ortonormais, e* $[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$.

Logo, obtemos que

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = 81,$$

ou $x_1^2 + y_1^2 + 4z_1^2 = 81$ *é um elipsóide, dado na figura 4.8.*

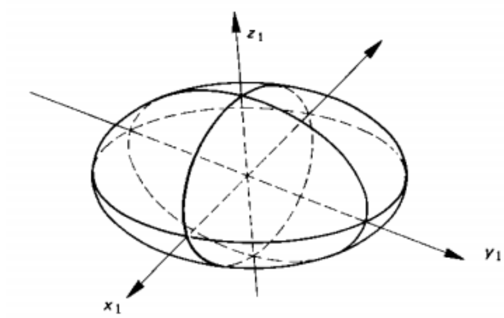

Figura 4.8: Elipsóide - Fonte: figura retirada da referência [2].

Podemos observar, através dos dois exemplos anteriores que o procedimento algébrico utilizado para a identificação e classificação das cônicas e quádricas, é o mesmo. Porém, sendo as cônicas estão localizadas em $\mathbb{R}^2$ e as quádricas, em $\mathbb{R}^3$.

A principal vantagem desse estudo é que ele permite que se identifique e classifique cônicas e quádricas sem a necessidade de observações geométricas das mesmas. O que, com o embasamento necessário de álgebra linear, pode ser algo prazeroso para quem se interessar pelo assunto.

Considerações finais

A álgebra linear contribui para diversas aplicações e avanços na matemática, e neste trabalho, o objetivo principal foi utilizar os conceitos algébricos como ferramentas para a identificação e classificação das cônicas e quádricas, a partir de suas equações. Onde foram apresentados aspectos da álgebra linear que muitas vezes não são vistos na disciplina de álgebra linear em cursos de graduação. Sendo que, inicialmente foi feita uma revisão de conceitos básicos da álgebra linear, definindo propriedades que foram importantes para chegar ao foco do trabalho, tais como, diagonalização de operadores e a diagonalização da forma quadrática.

Durante todo o trabalho, além das propriedades e definições utilizadas, exemplos foram apresentados com o intuito de facilitar a compreensão do leitor, principalmente em relação à classificação de cônicas e quádricas.

Em geral, pode-se dizer que o estudo de cônicas e quádricas ainda é ocupação de muitos matemáticos e outros pesquisadores das ciências exatas. Pois, além de estarem envoltas em um rico conteúdo matemático, cônicas e quádricas são muito utilizadas em aplicações da matemática no cotidiano das pessoas.

Por fim, espera-se que este trabalho possa contribuir para pesquisas de estudantes que buscam conhecer a teoria de álgebra linear, mais especificamente, sobre a classificação de cônicas e quádricas.

Bibliografia

[1] ANTON, H. **Elementary linear algebra**. John Wiley and Sons, 2010.

[2] BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Ed. Harbra Ltda, 1986.

[3] BOYER C.B. **História da Matemática**. revista por Uta C. Merzbach. Tradução Elza F. gomide?2. ed?São Paulo: Edgard Blucher. 2003.

[4] BOULOS, P.; DE CAMARGO, I. **Geometria analítica**. CEP, v. 4533, p. 004, 1987.

[5] CALLIOLI, C.A.; DOMINGUES, H.H; COSTA, R.C.F. **Álgebra linear e aplicações**. São Paulo: Atual Editora, 1992.

[6] COELHO, F.U.; LOURENÇO, M.L. **Curso de Álgebra Linear**, Vol. 34. Edusp, 2001.

[7] DOMINGUES, H; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. 2. ed. São Paulo: Atual Editora, 1982.

[8] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Álgebra linear**. São Paulo: Editora Polígono, 1971.

[9] LANG, S. **Introduction to linear algebra**. Springer Science and Business Media, 2012.

[10] LEITHOLD, L. **Cálculo com geometria analítica**, vol 2. 3. ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1994.

[11] LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1996.

[12] PULINO, P. **Algebra Linear e suas Aplicaçoes, Notas de Aula**. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2012.

[13] SANTOS, R.J. **Algebra Linear e Aplicaçoes**. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2006.

[14] SANTOS, R.J. **Introdução à álgebra linear**. Belo Horizonte-MG. Livro On-Line: http://www. mat. ufmg. br/ regi, 2004.

[15] SANTOS R.J. **Um curso de geometria analítica e álgebra linear**. Belo Horizonte: DM-ICEx-UFMG, 2002.

[16] STEINBRUCH, A; WINTERLE, P. **Álgebra linear**. 2. ed. São Paulo: McGraw Hill, 1987.

[17] STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria analítica**. McGraw-Hill, 1987.

[18] VENTURI J.J. **Cônicas e quádricas**. Livrarias Curitiba. dispon?veis no link: www. geometriaanalitica. com. br. 1949.

Índice