UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE CASSILÂNDIA

MIRIAN MOREIRA SOARES

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINARIAS E POLINÔMIOS FIBONACCI

CASSILÂNDIA- MS
2017

MIRIAN MOREIRA SOARES

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINARIAS E POLINÔMIOS FIBONACCI

Trabalho apresentado à Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Unidade Universitária de Cassilândia, como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Marco Aparecido Queiroz Duarte.

CASSILÂNDIA- MS

2017

S655e Soares, Mirian Moreira
Equações diferenciais ordinárias e polinômios fibonacci/ Mirian Moreira Soares. – Cassilândia, MS: UEMS, 2017.
46p.

Monografia (Graduação) – Matemática – Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul, 2017.
Orientador: Prof. Dr. Marco Aparecido Queiroz Duarte.

1. Sequência de Fibonacci 2. Polinômios de Fibonacci 3. Equação diferencial ordinária I. Título

CDD 23.ed. - 515.35

A meus pais, Vicente e Marta.
E ao meu irmão Michel,
pelo incentivo e apoio.

Agradecimentos

A Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades.

A esta Universidade, pela oportunidade de fazer este curso.

Ao meu orientador prof. Dr. Marco Aparecido Queiroz Duarte, pela paciência, dedicação, incetivo e ensinamentos que possibilitaram que eu realizasse este trabalho.

A meus pais, por não medirem esforços para que eu pudesse levar meus estudos adiante.

A todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu obrigada.

Ama-se mais o que se conquista com esforço.

Benjamin Disraeli

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre uma aplicação dos polinômios Fibonacci na resolução de Equações Diferenciais Ordinárias. Portanto estudamos alguns resultados sobre a Sequência de Fibonacci e também sobre Polinômios Fibonacci. Além disso, através de um novo método utilizamos alguns pré-requisitos sobre EDO, e aplicamos na resolução das mesmas. Dessa forma o principal objetivo deste trabalho foi estudar e resolver equações Diferenciais Ordinárias utilizando um novo método.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci. Polinômios de Fibonacci. Equação diferencial ordinária.

Sumário

Introdução

Ao longo da vida acadêmica e no meio educacional pode se ver muitas situações que desafiam e questionam o ensino da Matemática. Não são raras as indagações sobre a aplicabilidade da Matemática no cotidiano e sua relação com as demais áreas e ciências. Assim, neste trabalho mostramos mais uma aplicação da matemática, por meio da tão famosa sequência de Fibonacci e seus polinômios.

Segundo Garbi [7] a sequência de Fibonacci tem aplicações na análise de mercados financeiros, na ciência da computação e na teoria dos jogos. Também aparece em configurações biológicas, como, por exemplo, na disposição dos galhos das árvores ou das folhas em uma haste, no arranjo do cone da alcachofra, do abacaxi, ou no desenrolar da samambaia, e, também nos alvéolos de cera destinados a serem receptáculos de mel. E, além disso, esta sequência tem várias propriedades interessantes, que a torna muito aplicável em vários campos, inclusive da própria matemática.

Em 1883, o matemático Belga Eugene Charles Catalan(1814-1894), definiu a sequência $F_1(x) = 1, F_2(x) = x, ..., F_{n+1}(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x), ...,\ n > 1$, [14] como sendo a sequência F_n de Polinômios Fibonacci. Duas aplicações desses polinômios na resolução de equações diferenciais serão apresentadas nesse trabalho.

Conforme Boyce e Diprima [12], as equações diferenciais surgiram com os estudos sobre cálculo de Isaac Newton(1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716) durante o século XVII. Sendo que este estudo continua até hoje por pesquisadores atuais e conta com o desenvolvimento de vários métodos para a resolução destas equações. Newton desenvolveu suas teorias mais voltadas para mecânica. Ainda de acordo com Boyce e Diprima [12], suas descobertas sobre o cálculo e as leis da mecânica datam de 1665. Seus estudos contribuíram muito para o aprimoramento das equações diferenciais, dentre eles, a construção das fórmulas das equações diferenciais de primeira ordem como $dy/dx = f(x), dx/dy = f(y)$ e $dy/dx = f(x, y)$.

Assim, esse trabalho se ocupará em apresentar a sequência de Fionacci, os polinômios de Fibonacci e fará uma breve introdução às equações diferenciais ordinárias (EDO). E, com isso, apresentará dois métodos de resoluções de EDO baseados em polinômios de Fibonacci.

Para realização do trabalho foram feitas pesquisas bibliográficas e implementações computacionais usando o software livre FREEMAT.

O restante do texto está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1, apresentamos o aspectos histórico e algumas propriedades da sequência de Fibonacci e dos polinômios de Fibonacci; no Capítulo 2 são dadas noções básicas de equações diferenciais Ordinárias; as aplicações dos polinômios Fibonacci estão no Capítulo 3 e, por fim, são apresentadas as considerações finais.

Capítulo 1

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI e POLINÔMIOS DE FIBONACCI

Neste capítulo apresentamos alguns resultados importantes sobre a sequência de Fibonacci. As principais referências utilizadas foram [1] e [2].

1.1 Sequência de Fibonacci

A sequência de Fibonacci é uma sequência de números naturais, na qual os primeiros dois termos são iguais a 1. E, a partir do terceiro termo, cada termo corresponde a soma dos dois termos anteriores .Esta sequência é definida recursivamente pela fórmula

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n, n \geq 2. \tag{1.1}$$

com as condições $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$.

Esta sequência recebe o nome de um matemático que viveu no século XIII, Leonardo de Pisa, conhecido como Leonardo Fibonacci, e os seus termos são chamados de números de Fibonacci. De acordo com Boyer [1], Leonardo de Pisa (que viveu no periodo de 1180-1250), mais conhecido como Fibonacci ou filho de Bonaccio, foi comerciante e governante da cidade italiana de Pisa e escritor do livro Liber abaci (ou livro do ábaco), que fala sobre problemas e métodos algébricos em que o emprego de numerais indo-arabicos é fortemente recomendado. Neste livro, o problema que mais inspirou os pensadores futuros foi, sem duvida o problema dos coelhos, que deu a origem a sequência de Fibonacci.

O Problema dos Coelhos. Quantos pares de coelhos serão produzidos em um ano, começando com um só par? Considerando que em cada mês, cada par gera um novo par, que se torna produtivo a partir do segundo mês, e os coelhos nunca morrem. Supondo que o primeiro casal de coelhos nasceu no dia 1 de janeiro, dessa forma, no dia 1 de fevereiro esse casal ainda não será fértil. Porém, no dia 1 de março já terão descendentes, e neste mês terá um total de dois casais de coelhos. No dia 1 de abril, esse segundo casal de coelhos ainda não será fértil, mas o casal de coelhos inicial voltará a ter coelhinhos, e no quarto mês terão um total de 3 casais de coelhos, dos quais dois serão férteis no dia 1 de maio, então no quinto mês existirão 5 casais de coelhos. Raciocinando de modo análogo, no dia 1 de junho tem-se 8 casais de coelhos, e no dia 1 de julho têm-se 13 casais e assim sucessivamente. No término de um ano, ou seja, no dia 1 de janeiro do próximo ano, haverá 144 casais de coelhos.

Outro exemplo conhecido em que aparece os números de Fibonacci é o problema das abelhas.

Árvore Genealógica das abelhas. Os ovos de abelhas operárias, quando não fertilizados, se desenvolvem em zangões por um processo conhecido como partenogênese. Assim, cada zangão não tem pai, mas uma mãe (e um avô por parte materna). Uma abelha fêmea, no entanto, possui pai e mãe. Um zangão, assim, tem uma mãe,dois avós (os pais da mãe), três bisavós (os pais da sua avó e um do seu avô), cinco trisavós (dois para cada bisavó e um para seu bisavô), e assim por diante. Assim os 8 números dessa árvore genealógica, formam 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,..., que são os números de Fibonacci. Desta forma, podemos gerar a sequência de Fibonacci somando dois termos consecutivos, ou utilizando a fórmula 1.1.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...$$

Além disso, a sequência de Fibonacci satisfaz algumas propriedades interessantes e que veremos a seguir.

1.1.1 Propriedades da Sequência de Fibonacci

Teorema 1.1. *Para todo* $n \geq 1$, *têm-se* $F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$.

Demonstração. Como $F_1 = F_3 - F_2, F_2 = F_4 - F_3, ..., F_{n+1} = F_{n-1} - F_n$ e

$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$. Se somarmos todos os membros das igualdades obtemos,

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + ... + F_{n-1} + F_n = F_{n+2} - F_2 = F_{n+2} - 1.$$

Teorema 1.2. *Para todo $n \geq 1$, têm-se $F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.*

Demonstração. Observe que para todo $k \in \mathbb{N}$, tem-se

$$F_k F_{k+1} - F_k F_{k-1} = F_k(F_{k+1} - F_{k-1}) = F_k F_k = (F_k)^2$$

segue que,

$$F_1^2 = F_1 F_2, F_2^2 = F_2 F_3 - F_1 F_2, F_3^2 = F_3 F_4 - F_3 F_2, F_4^2 = F_4 F_5 - F_4 F_3,$$

$$F_5^2 = F_5 F_6 - F_5 F_4, ..., F_n^2 = F_n F_{n+1} - F_n F_{n-1}.$$

Logo,

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + ... + F_n^2 = F_1 F_2 + F_2 F_3 - F_2 F_1 + F_3 F_4 - F_3 F_2 +$$

$$+ F_4 F_5 - F_4 F_3 + ... + F_n F_{n+1} + F_n F_{n-1},$$

ou seja,

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + ... + F_n^2 = F_n F_{n+1}.$$

Teorema 1.3. *A soma $S_n, n > 1$, dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci de ordem ímpar é dada por $S_n = F_{2n}$.*

Demonstração. Sabendo que

$$F_1 = F_2, F_3 = F_4 - F_2, F_5 = F_6 - F_4, ..., F_{2n-1} = F_2 n - F_{2n-2},$$

então,

$$S_n = F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + ... + F_{2n-1} = F_2 n.$$

Teorema 1.4. *A soma $S_n, n > 1$, dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci de ordem par é dada por $S_n = F_{2n+1} - 1$.*

Demonstração. Pelo teorema (1.5) sabemos que

$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + ... + F_{2n} = F_{2n+2} - 1. \tag{1.2}$$

Pelo teorema anterior temos que

$$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + ... + F_{2n-1} = F_{2n}. \tag{1.3}$$

Subtrairmos a igualdade (1.3) da igualdade (1.2), membro a membro, segue que

$$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + ... + F_{2n} = F_{2n+2} - 1 - F_{2n}. \tag{1.4}$$

Note que $S_n = F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + ... + F_{2n}$. Logo podemos reescrever a igualdade anterior sob a forma

$$S_n = F_{2n+2} - 1 - F_{2n}. \tag{1.5}$$

Sabemos que

$$F_{2n+2} = F_{2n} + F_{2n+1}. \tag{1.6}$$

Substituindo a igualdade anterior no segundo membro da igualdade (1.5) segue

$$S_n = F_{2n} + F_{2n+1} - 1 - F_{2n} = F_{2n+1} - 1,$$

ou seja,

$$S_n = F_{2n+1} - 1.$$

1.2 Polinômios Fibonacci

Nesta seção iremos apresentar apresentar alguns resultados sobre os Polinômios de Fibonacci.

Definição 1.1. *(Recorrências Lineares de Segunda Ordem homogêneas). Dizemos que a recorrência da forma*

$$y_{n+1} + py_n + qy_{n-1} = 0, \tag{1.7}$$

onde $q \neq 0$*, é uma recorrência linear de segunda ordem homogênea. Quando* $q = 0$ *tem-se uma recorrência de de primeira ordem.*

Definição 1.2. *(Polinômios de Fibonacci) Os Polinômios de Fibonacci são definidos pela relação de recorrência linear de segunda ordem*

$$F_{n+1}(x) = xF_n(x) + F_{n-1}(x), \; n > 1, \; x \in \mathbb{R} \tag{1.8}$$

com as condições iniciais

$$f_1(x) = 1 \text{ e } F_2(x) = x. \tag{1.9}$$

Logo, por (1.8) e (1.9), temos os 6 primeiros polinômios Fibonacci

$F_1(x) = 1$

$F_2(x) = x$

$F_3(x) = xF_2(x) + F_1(x) = x^2 + 1$

$F_4(x) = xF_3(x) + F_2(x) = x(x^2 + 1) + x = x^3 + 2x$

$F_5(x) = xF_4(x) + F_3(x) = x(x^3 + 2x) + x^2 + 1 = x^4 + 3x^2 + 1$

1.2.1 Zeros dos Polinômios Fibonacci

A seguir falaremos sobre as raízes dos polinômios de Fibonacci, para isso iremos utilizar o teorema a seguir para determinar a quantidade de zeros um software para representa no gráfico.

Teorema 1.5 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Todo polinômio de grau* $n \geq 1$ *tem exatamente* n *zeros.*

Nas Figuras 1.1 , 1.2 e 1.3 são apresentadas os gráficos de alguns polinômios Fibonacci, todos gerados pela autora deste trabalho.

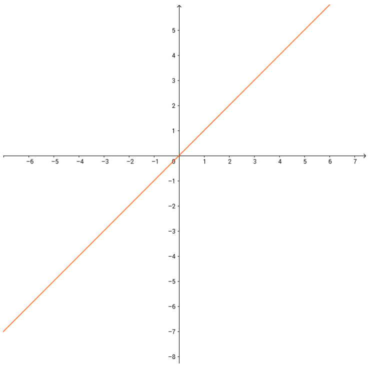

Figura 1.1: Representação gráfica de F_2.

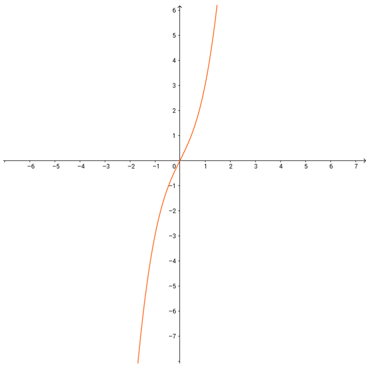

Figura 1.2: Representação gráfica de F_4.

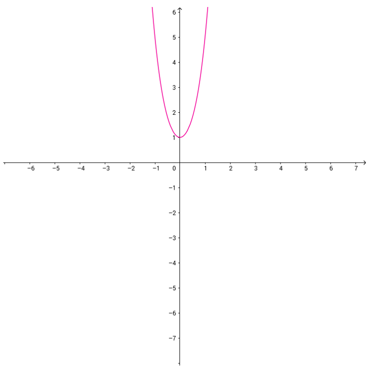

Figura 1.3: Representação gráfica de F_5.

Pelo teorema 1.5 podemos observar que $F_2(x)$ possui uma raíz real, $F_3(x)$ possui duas raízes que são complexas, $F_4(x)$ possui três raízes: duas complexas e uma real, e $F_5(x)$ possui quatro raízes: duas complexas e duas reais.

1.2.2 Propriedades

A seguir veremos algumas propriedades dos polinômios de Fibonacci.

Proposição 1.1. *(Extensão da fórmula de Binet) Sejam* $\alpha = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}$ *e* $\beta = \frac{\sqrt{x-x^2+4}}{2}$, *então*

$$F_n(x) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

.

Assim como, podemos expressar o n-ésimo termo da sequência de Fibonacci pela fórmula de Binet, esta propriedade permite que encontremos também, os polinômios de Fibonacci através da extensão da fórmula de Binet.

Proposição 1.2. *(Resto do quociente entre dois polinômios de Fibonacci) Sempre que um polinômio de Fibonacci é dividido por outro de índice menor, o módulo do resto é um polinômio de Fibonacci.*

Proposição 1.3. *(Propriedades de Divisibilidade) Para todo n, m, verifica-se:*

i)$F_m(x)|F_mn(x)$.

ii)$F_m(x)|F_n(x) \Longleftrightarrow m|n$

iii)$F_n(x) \equiv (x^2+4)^{\frac{p-1}{2}}$, *para todo p primo.*

iv)$mdc(F_n(x), F_{mn}(x)) = F_{mdc(n,m)}(x)$.

As demonstrações podem ser encontradas em [8] e [13].

No Capítulo 3 será mostrado como polinômios de Fibonacci podem ser usados na resolução de equações diferenciais ordinárias. Antes, porém, no capítulo 2 apresentamos algumas noções de equações diferenciais ordinárias.

Capítulo 2

NOÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Neste capítulo apresentamos alguns resultados sobre equações diferenciais ordinárias e que serão utilizados nos capítulos posteriores. As principais referências utilizadas foram [4] e [12].

2.1 Equação Diferencial

Definição 2.1. *Uma equação que envolve uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas é uma equação diferencial(ED).*

Uma equação diferencial é classificada de acordo com o tipo, ordem e linearidade. A seguir estudaremos as três classificações.

2.1.1 Classificação pelo tipo

Equações diferenciais podem ser classificadas em dois tipos, equação diferencial ordinária e equação diferencial parcial.

Se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente, ela é chamada de equação diferencial ordinária(EDO). Mas se uma equação envolver as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes ela é chamada de equação diferencial parcial (EDP).

Exemplo 2.1. *i)* $\frac{dy}{dx} = 5y$

ii) $\frac{dy}{dx} = y + e^x$

iii) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

são equação diferenciais ordinárias.

Exemplo 2.2. *i)* $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$

ii) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$

iii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$

são equação diferenciais parciais.

2.1.2 Classificação pela ordem

Por definição a ordem da derivada de maior ordem em uma equação diferencial determina a ordem da equação.

Exemplo 2.3. *i)*$\frac{d^2y}{dx^2} + 5(\frac{dy}{dx})^3 - 4y + e^x$ *é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem ou de ordem 2.*

ii) $yy' + 2y = 1 + x^2$ *é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem ou de ordem 1.*

2.1.3 Classificação pela linearidade

Uma equação diferencial ordinária de ordem n é chamada de linear quando pode ser escrita da seguinte forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x). \tag{2.1}$$

Assim, uma equação diferencial é linear se satisfaz as seguintes condições:

i) a variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau, isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1.

ii) cada coeficiente depende apenas da variável independente x.

Se uma EDO não é linear, ela é chamada de não linear.

Exemplo 2.4. *i)* $x\frac{dy}{dx} + x^2y = 3$ *é uma EDO linear de ordem 1.*

ii) $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y^3 = e^x$ *é uma EDO não linear.*

2.2 Solução para uma Equação Diferencial Ordinária

Definição 2.2. *Qualquer função f definida em algum intervalo I, que, quando substituída na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de solução para a equação no intervalo.*

Ou seja, uma solução para uma equação diferencial ordinária

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{2.2}$$

é uma função f que possui pelo menos n derivadas e satisfaz a equação, isto é,

$$F(x, f(x), f'(x), ..., f^{(n)}(x)) = 0 \tag{2.3}$$

para todo $x \in I$.

Exemplo 2.5. *A função $y = xe^x$ é uma solução para a equação linear*

$$y - 2y + y = 0$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Observa-se que se uma solução de uma EDO pode ser escrita na forma $y = f(x)$ ela é chamada de solução explicíta, mas se a solução é dada pela relação $G(x, y) = 0$ tem-se uma solução implicíta.

Exemplo 2.6. *A relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$, para $-2 < x < 2$, é uma solução implicíta para equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

2.2.1 Problema de Valor Inicial

O problema

$$Resolva : \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$sujeito\ a : y(x_0) = y_0$$

é chamado de problema de valor inicial(PVI).

Teorema 2.1. *(Existência de uma única solução) Seja R uma região retangular no Plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, que contém o ponto (x_0, y_0) em seu interior. Se $f(x, y)$ e $\partial f/\partial y$ são contínuas em R, então existe um intervalo I centrado em x_0 e uma única função $y(x)$ definida em I que satisfaz o problema de valor inicial.*

2.2.2 Métodos de solução

O método para resolver uma EDO depende de sua natureza. Por exemplo, uma equação com variáveis separáveis, onde é possiel separar as variáveis x e y, é resolvida por integração direta das variáveis dependente e independe.

Exemplo 2.7. $\frac{dy}{dx} = senx$
Resolvendo

$$y = \int senx dx$$
$$= -cosx + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

isto é

$$y = -cosx + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.8. $\frac{dy}{dx} = sen5x$

$$dy = sen5xdx$$

$$\int dy = \int sen5xdx$$

$$y = \frac{-cosx}{5} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.9. $xy^4dx + (y^2 + 2)e^{-3x}dy = 0.$

Se dividirmos a igualdade por y^4e^{-3x}, teremos

$$\frac{x}{e^{-3x}}dx = \frac{-(y^2 + 2)}{y^4}dy.$$

Integrando esta equação teremos,

$$\int xe^{-3x}dx = \int -(\frac{y^2 + 2}{y^4})dy,$$

$$\frac{1}{3}xe^{-3x} - \frac{1}{9}e^{-3x} = y{-}1 + \frac{2}{3}y{-}3 + c_1$$

$$3xe^{-3x} - e^{-3x} = 9y{-}1 + 6y{-}3 + 9c_1$$

fazendo, $c = 9c_1$ *obtém a solução implícita*

$$3xe^{-3x} - e^{-3x} = \frac{9}{y} + \frac{6}{y3} + c.$$

2.2.3 Equação linear

Definição 2.3. *Uma equação diferencial da forma*

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{2.4}$$

é uma equação linear.

Reescrevendo

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x). \tag{2.5}$$

Para resolvermos uma equação linear de primeira ordem basta colocar na forma (2.5), multiplicarmos pelo fator de integração, $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ e resolvermos a integral.

Exemplo 2.10. *Resolva* $\frac{dy}{dx} = 5y$. *Reescrevendo temos*

$$\frac{dy}{dx} - 5y = 0$$

assim, o fator de integração será

$$\mu(x) = e^{\int -5dx} \Longrightarrow \mu(x) = e^{-5x}.$$

Mutiplicando a equação pelo fator de integração temos,

$$e^{-5x}\frac{dy}{dx} - e^{-5x}5y = 0$$

$$\frac{d}{dx}[e^{-5x} \cdot y] = 0.$$

Integrando

$$e^{-5x} \cdot y = c.$$

Logo, $y = ce^{5x}$.

2.2.4 Equações Homogêneas

De forma geral uma equação diferencial ordinária de n-ésima ordem

$$a_n(x)y^{(n)(x)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + ... + a_2(x)y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = g(x)$$

é dita homogênea se $g(x)$ for igual a 0. Caso $g(x) \neq 0$, a equação é chamada de não homogênea.

Exemplo 2.11. $y''' - 3y'' + 5y' - y = 0$

É uma equação homogênea de terceira ordem.

Exemplo 2.12. $2\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} - 2y = x^2 + e^x$

É uma equação não homogênea de quarta ordem.

A seguir falaremos sobre equações de ordem superior, em particular, de EDOs de segunda ordem.

2.3 Equações de ordem superior

2.3.1 Problemas de valor inicial e valor de contorno

Para a equação diferencial de n-ésima ordem, o problema

$$Resolva : a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$
$$Sujeito\ a : y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

em que $y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$ são constantes arbitrárias, é chamado de um problema de valor inicial, e os valores específicos $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ são chamados de condições iniciais.

Mas, por exemplo, para uma equação diferencial de segunda ordem, o problema

$$Resolva : a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$
$$Sujeito\ a : y(a) = y_0, y(b) = y_1$$

é chamado de problema de valor de contorno, e os valores especificados $y(a) = y_0$ e $y(b) = y_1$ são chamados de condições de contorno ou de fronteira.

2.4 Equação de 2ª ordem com coeficientes constantes

Como uma equação linear de primeira ordem $dy/dx + ay = 0$, onde a é uma constante, possui a solução exponencial $y = c_1e^{-ax}$ em $(-\infty, \infty)$. Então, para resolver uma equação de 2ª ordem, também podemos determinar uma solução exponencial no intervalo $(-\infty, \infty)$ para a equação

$$a_2y" + a_1y' + a_0y = 0 \tag{2.6}$$

onde, $a_i,\ i = 0, 1\ e\ 2$. Para isso consideremos a equação a seguir

$$ay" + by' + cy = 0 \tag{2.7}$$

2.4.1 Equação característica

Se procurarmos uma solução exponencial da forma $y = e^{mx}$, então $y' = me^{mx}$ e $y" = m^2e^{mx}$, a equação (2.7) tornará

$$am^2e^{mx} + bme^{mx} + ce^{mx} = 0oue^{mx}(am^2 + bm + c) = 0. \tag{2.8}$$

Como e^{mx} não se anula para valores reais de x, iremos escolher m para que seja uma raiz da equação quadrática

$$am^2 + bm + c = 0 \tag{2.9}$$

que é chamada de equação característica. Para resolver uma equação característica, devem ser considerados três casos:

i)Raízes reais distintas: Se a equação característica possuir duas raízes reais distintas m_1 e m_2, teremos duas soluções, e sua solução geral será

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x}.$$

ii)Raízes reais iguais: Se a equação característica possuir duas raízes reais iguais, ou seja, quando $m_1 = m_2$, teremos apenas uma solução exponencial, e sua solução geral será

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2xe^{m_1x}.$$

iii)Raízes complexas comjugadas. Se a equação característica possuir duas raízes complexas, teremos duas soluções, $m_1 = \alpha + \beta i$ e $m_2 = \alpha - \beta i$, que são conjugadas então sua solução geral será

$$y = c_1e^{\alpha x}cos\beta x + c_2e^{\alpha x}sen\beta x.$$

Exemplo 2.13. *Resolva* $y'' - 3y' + 2y = 0,.$

Solução: A equação característica é

$$m^2 - 3m + 2 = 0$$

e suas raízes são $m_1 = 1$ *e* $m_2 = 2$*. Logo, a solução geral para a EDO de segunda ordem é*

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

No próximo capítulo veremos como os polinômios de Fibonacci podem ser usados nna resolução numérica de EDOs.

Capítulo 3

APLICAÇÕES DOS POLINÔMIOS FIBONACCI

Conforme vimos no capítulo anterior uma equação diferencial ordinária pode ser resolvida por meio de um dos métodos citados, dependendo de sua natureza. Neste capítulo estudaremos um métodos diferente para resolver uma EDO e que geralmente não é apresentado em cursos de licenciatura em matemática. Tal método é baseado em Polinômios Fibonacci.

3.1 Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias usando Polinômios de Fibonacci

Os polinômios Fibonacci podem ser usados para resolver PVIs ou PVCs, através do método pseudo-Spectral. Este método utiliza um polinômio interpolador de grau N para encontrar uma função $\widetilde{f}(x)$ que aproxima a função $f(x)$ em uma malha com $N+1$ nós relacionados a uma sequência de polinômios ortogonais. De acordo com Boyd [15], os coeficientes de uma função conhecida $f(x)$ são encontrados exigindo que a série truncada coincida com $\widetilde{f}(x)$ em cada ponto da malha. Da mesma forma, os coeficientes a_n da solução aproximada de uma equação diferencial ordinária são encontrados exigindo que a função residual da interpolação $f(x)$ seja nula, ou seja:

$$R(x_i; a_0, a_1, ...a_N) = 0, \ i = 0, 1, ..., N.$$

3.1.1 Derivada de uma função aproximante

Seja $f(x)$ uma função contínua, podemos expressá-la como uma combinação linear infinita de polinômios. Suponha esses polinômios como sendo os polinômios Fibonacci, ou seja,

$$f(x) = \sum_{r=1}^{\infty} a_r F_r(x). \tag{3.1}$$

Seja $\widetilde{f}(x)$ uma aproximação de $f(x)$. Para aproximar $f(x)$, consideraremos N polinômios de Fibonacci, $F_r(x)_{r=1}^{N}$. Assim,

$$f(x) \approx \widetilde{f}(x) = \sum_{r=1}^{N} a_r F_r(x), \tag{3.2}$$

onde $a_r, r = 1, ..., N$ são os coeficientes Fibonacci, ainda não determinados. Observe que a Equação (3.2) pode ser reescrita na forma matricial

$$\widetilde{f} = F(x)A, \tag{3.3}$$

onde $F(x)$ é o vetor linha de Fibonacci e A é o vetor coluna Fibonacci, ou seja,

$$F(x) = [F_1(x)\ F_2(x)\ F_3(x)...F_N(x)], \tag{3.4}$$

$$A = [a_1\ a_2\ a_3...a_N]^T. \tag{3.5}$$

Como a k-ésima derivada de $\widetilde{f}(x)$ em (3.2) existe e é contínua, então ela pode ser expressa como uma combinação linear dos polinômios Fibonaci,

$$\widetilde{f}^{(k)}(x) = \sum_{r=1}^{N} a_r^{(k)}\ F_r(x), k = 0, 1, 2, ... \tag{3.6}$$

onde,$a_r^{(0)} = a_r, = \widetilde{f}^{(0)}(x) = \widetilde{f}(x)$. Reescrevendo a Equação (3.6) em notação matricial, temos

$$\widetilde{f}^{(k)}(x) = F(x)A^{(k)}, k = 0, 1, 2, ... \tag{3.7}$$

onde, $A^{(0)} = A$, e

$$A^{(k)} = [a_1^{(k)}\ a_2^{(k)}\ a_3^{(k)}\ ...\ a_N^{(k)}]^T \tag{3.8}$$

é a matriz dos coeficientes da k-ésima derivada da função aproximante.

Proposição 3.1. *Considere-se 3.8, para $k = 0, 1, 2, ..., n$. Então,*

$$A^{(k+1)} = D^{k+1}A, k = 0, 1, 2, ..., n, \tag{3.9}$$

onde D é a matriz operacional da derivada, de ordem NXN, definida por

$$D^k = (d_{ij})_{NXN} = \begin{cases} isen\frac{(j-i)\pi}{2}, & se\ j > i \\ 0, & se\ j \leq i \end{cases} \tag{3.10}$$

Dessa forma, através de (3.7) e (3.9), teremos

$$\widetilde{f}^{(k)}(x) = F(x)D^kA, \quad k = 0, 1, ..., n \tag{3.11}$$

onde $D^0 = I_N$. I_N é a matriz identidade de ordem N.

3.1.2 Resolução de uma EDO

Seja a equação diferencial ordinária linear de ordem n e não-homogênea

$$\sum_{k=0}^{n} q_k(x)y^{(k)}(x) = g(x), \quad q_n(x) \neq 0. \tag{3.12}$$

Suponhamos que a EDO (3.12) admita uma unica solução num intervalo e sejam sua solução aproximada denotada por $\widetilde{y} = \widetilde{y}(x)$ e suas derivadas $\widetilde{y}^{(k)} = \widetilde{y}^k(x)$. Para calcular a solução aproximada ultilizaremos a equação (3.2).

Como nosso interesse é calcular os coefcientes Fibonacci, então definiremos uma malha de tamanho N, no intervalo $[a, b]$. Os nós da malha, $a = x_1, x_2, x_3, ..., x_N = b$, são definidos por

$$x_i = a + \frac{b-a}{N-1}(i-1), \qquad i = 1, 2, ..., N. \tag{3.13}$$

Se substituirmos (3.13) em (3.12) obtemos

$$\sum_{k=0}^{n} q_k(x_1)y^{(k)}(x_i) = g(x_i), \quad i = 1, 2, ..., N, \tag{3.14}$$

ou seja,

$$\begin{cases} q_0(x_1)y(x_1) + q_1(x_1)y'(x_1) + ... + q_n(x_1)y^{(n)}(x_1) = g(x_1) \\ q_0(x_2)y(x_2) + q_1(x_2)y'(x_2) + ... + q_n(x_2)y^{(n)}(x_2) = g(x_2) \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = \ \vdots \\ q_0(x_N)y(x_N) + q_1(x_N)y'(x_N) + ... + q_n(x_N)y^{(n)}(x_N) = g(x_N) \end{cases} \tag{3.15}$$

Reescrevendo o sistema anterior, teremos

$$\sum_{k=0}^{n} Q_k Y^{(k)} = G, \qquad n \leq N, \tag{3.16}$$

onde,

$$Q_k = \begin{bmatrix} q_k(x_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_k(x_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & q_k(x_N) \end{bmatrix}, \ Y^{(k)} = \begin{bmatrix} y^{(k)}(x_1) \\ y^{(k)}(x_2) \\ \vdots \\ y^{(k)}(x_N) \end{bmatrix} \ e \ G = \begin{bmatrix} g(x_1) \\ g(x_2) \\ \vdots \\ g(x_N) \end{bmatrix}.$$

Assim, por (3.11), temos que

$$Y^{(k)} = FD^k A \tag{3.17}$$

onde,

$$F = \begin{pmatrix} F_1(x_1) & F_2(x_1) & \cdots & F_N(x_1) \\ F_1(x_2) & F_2(x_2) & \cdots & F_N(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_1(x_N) & F_2(x_N) & \cdots & F_N(x_N) \end{pmatrix}_{NXN}.$$

Substituindo (3.17) em (3.16), teremos

$$\sum_{k=0}^{n} (Q_k FD^k)A = (Q_0FD^0 + Q_1FD^1 + ... + Q_nFD^n)A = WA = G, \qquad n < N, \tag{3.18}$$

ou,

$$WA = G. \tag{3.19}$$

A Equação anterior representa um sistema linear, onde $a_r, \ r = 1, 2, ..., N$ estão no vetor A. E, para resolvê-lo, deve-se considerar a matriz ampliada

$$[W : G]. \tag{3.20}$$

Como uma EDO pode fazer parte de um problema de valor inicial (PVI) ou problema valor de contorno (PVC), teremos que

$$y^{(l)}(c_j) = \alpha_l, \quad l = 0, 1, ..., n-1, \quad j = 1, 2, ..., N, \quad a \leq c_j \leq b \tag{3.21}$$

são as condições inicias ou de contorno (3.12), onde α_l são valores conhecidos. Utilizando (3.11), temos

$$y^{(l)}(c_j) = F_{c_J} D^l A, \tag{3.22}$$

onde, $F_{c_j} = [F_1(c_j) \;\; F_2(c_j) \;\; .... \;\; F_N(c_j)]$. Denote o vetor

$$U_l = F_{c_j} D^l = [u_{l_1} \; u_{l_2} \; ... \; u_{l_N}], \quad l = 0, 1, ..., n-1. \tag{3.23}$$

Portanto, de (3.21) e (3.23) obtemos a expressão algébrica $U_l A = \alpha_l$ ou $UA = \alpha$. Reescrevendo a matriz ampliada desse sistema teremos

$$[U : \alpha]. \tag{3.24}$$

Ainda podem ser reescritas as matrizes ampliadas (3.20) e (3.24) de forma que se possa gerar uma outra matriz ampliada, ou seja,

$$[W^* : G^*]. \tag{3.25}$$

A matriz ampliada anterior é obtida se substituirmos l linhas da matriz em (3.20) pelas l linhas da matriz em (3.24), onde são escolhidas as últimas l linhas da matriz em (3.20).

3.1.3 Resultados Numéricos

Nesta seção são apresentados alguns resultados numéricos desse novo método, utilizando o sofware de domínio livre FREEMAT.

Exemplo 3.1. *Seja a equação diferencial linear de segunda ordem não-homogênea,*

$$\sum_{k=0}^{2} q_k(x) y^{(k)}(x) = g(x), \tag{3.26}$$

com $q_2(x) = 1,\; q_1(x) = x,\; q_0(x) = -2$ *e* $g(x) = xcos(x) - 3cos(x)$, *ou seja,*

$$y''(x) + xy'(x) - 2y(x) = xcos(x) - 3cos(x) \tag{3.27}$$

com as condicões iniciais $y(0) = 0$ *e* $y(0) = 1$.

Considerando $N = 4$ nós da malha no intervalo $[0; 0,6]$. Assim,

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0,2 \quad x_3 = 0,4 \quad x_4 = 0,6. \tag{3.28}$$

Como a equação é de 2^a ordem, (3.18) se torna

$$\sum_{k=0}^{2}(Q_k F D^k)A = (Q_0 F D^0 + Q_1 F D^1 + Q_2 F D^2)A = WA = G, \tag{3.29}$$

onde,

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0,2 & 1,4 & 0,408 \\ 1 & 0,4 & 1,16 & 0,864 \\ 1 & 0,6 & 1,36 & 1,416 \end{pmatrix}$$

$$D^0 = I_4, \quad D^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q^0 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = I_4.$$

Assim,

$W = Q_0 F D^0 + Q_1 F D^1 + Q_2 F D^2,$

$$W = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -0.2 & -0.72 & 1.024 \\ -2 & -0,4 & 0 & 1,664 \\ -2 & -0,6 & 1 & 2,616 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma teremos a matriz ampliada $[W : G]$, e usando as condições iniciais i) $y(0) = 0$, temos que

$$U_0 = F_0 = (1\ 0\ 1\ 0).$$

ii) $y'(0) = 1$*, temos que*

$$U_1 = F_0 D^1 = (0\ 1\ 0\ 2).$$

Substituindo as condições inicias no sistema linear, obtemos a matriz $[W^* : G^*]$*, e resolvendo o sistema linear encontramos os coeficientes de Fibonacci*

$$A = (0\ 1,2809\ 0\ \ -0,1404)^T.$$

Portanto, a solução aproximada da EDO, é dada por

$$\widetilde{y}(x) = \sum_{r=1}^{4} a_r F_r(x) = a_{(1)}F_1(x) + a_{(2)}F_2(x) + a_{(3)}F_3(x) + a_{(4)}F_4(x) =$$

$$= (0)1 + (1,2809)x + (0)(x^2 + 1) + (0,1404)(x^3 + 2x) =$$

$$= -0,1404x^3 + 1,0001x$$

Na Figura 3.1 são apresentados, respectivamente, os gráficos da solução exata $y(x) = senx$*, e sua solução aproximada* $\widetilde{y} = -0,1404x^3 + 1,0001x$

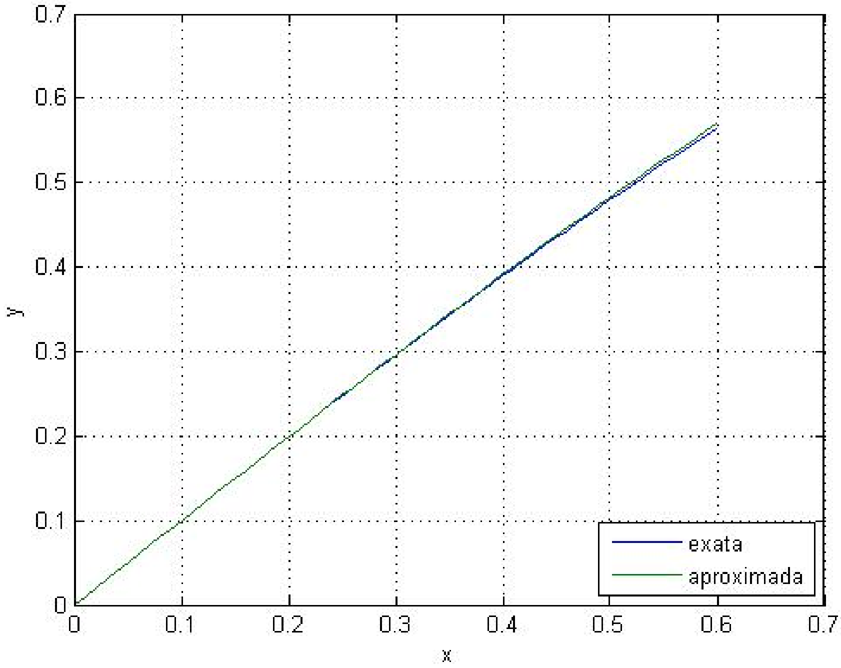

Figura 3.1: Soluções exata e aproximada para o problema do exemplo 3.1 . Fonte própria.

Exemplo 3.2. *Seja a equação diferencial linear de segunda ordem homogênea ,*

$$\sum_{k=0}^{2} q_k(x)y^{(k)}(x) = g(x), \tag{3.30}$$

com $q_2(x) = 1,\ q_1(x) = -2,\ q_0(x) = 2$ *e* $g(x) = 0,$ *ou seja,*

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = 0 \tag{3.31}$$

com as condicões iniciais

$$y(\frac{\pi}{2}) = 0 \ e \ y(\frac{-\pi}{2}) = e^{\frac{-\pi}{2}}. \tag{3.32}$$

Obteremos a solução aproximada considerando N = 5 nós da malha no intervalo [0,1]. Assim,

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,25, \quad x_3 = 0,5, \quad x_4 = 0,75, \quad x_5 = 1. \tag{3.33}$$

substituindo (3.33) em (3.31), teremos

$$\sum_{k=0}^{2}(Q_k F D^k)A = (Q_0 F D^0 + Q_1 F D^1 + Q_2 F D^2)A = WA = G, \tag{3.34}$$

onde,

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0,25 & 1,062 & 0,812 & 1,191 \\ 1 & 0,5 & 1,25 & 1,125 & 1,812 \\ 1 & 0,75 & 1,562 & 1,921 & 3,003 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$D^0 = I, \quad D^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q^0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$Q^1 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = I_5.$$

Assim,

$W = Q_0FD^0 + Q_1FD^1 + Q_2FD^2$,

$$W = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -4 & 8 \\ 2 & -1,5 & 3,124 & -1,248 & 3,63 \\ 2 & -1 & 2,5 & -0,25 & 5,624 \\ 1 & 1,5708 & 3,4674 & 7,0174 & 14,4903 \\ 0 & 1 & 3,1416 & 9,4022 & 24,9279 \end{pmatrix}.$$

Dessa forma teremos a matriz ampliada $[W : G]$ *e usando as condições iniciais*

i) $y(\frac{\pi}{2}) = 0$

Temos que

$$U_0 = F_0 = (1 \quad 1,5708 \quad 3,4674 \quad 7,0174 \quad 14,4903).$$

ii)$y(\frac{-\pi}{2}) = e^{\frac{-\pi}{2}}$,

$$U_1 = F_0D^1 = (0 \quad 1 \quad 3,1416 \quad 9,4022 \quad 24,9279).$$

Sustituindo as condições inicias no sistema linear, obtemos a a matriz $[W^* : G^*]$, *cuja resolução nos dá os coeficientes de Fibonacci*

$$A = (-3,7406 \quad -8,7668 \quad -1,7323 \quad 2,0456 \quad 0,6324)^T$$

Portanto, a solução aproximada da EDO, é dada por

$$\widetilde{y}(x) = \sum_{r=1}^{4} a_r F_r(x) = a_{(1)}F_1(x) + a_{(2)}F_2(x) + a_{(3)}F_3(x) + a_{(4)}F_4(x) =$$

$$= (-0,0374)1 + (-0,0876)x + (-0,0173)(x^2+1) + (0,0204)(x^3+2x) + (0,0063)(x^4+3x^2+1) =$$

$$= 0,0063x^4 + 0,0204x^3 + 0,0016x^2 - 0,0468x - 0,0484.$$

Na Figura 3.2 temos os gráficos da solução exata $y(x) = e^{x-\frac{\pi}{2}}cos(x)$ *e da sua solução aproximada* $\widetilde{y} = 0,0063x^4 + 0,0204x^3 + 0,0016x^2 - 0,0468x - 0,0484$.

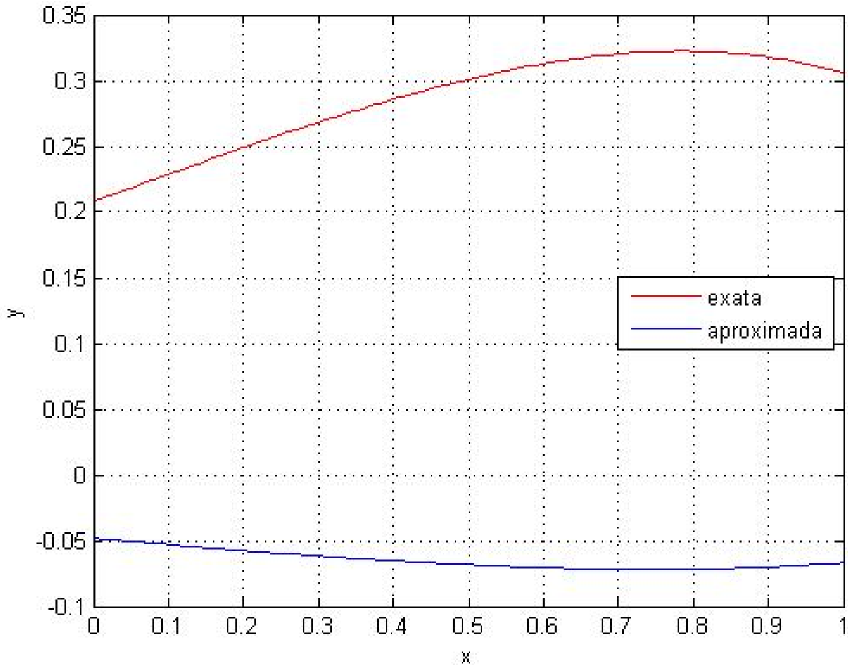

Figura 3.2: Soluções exata e aproximada para o problema do exemplo 3.2. Fonte própria.

Exemplo 3.3. *Seja a equação diferencial linear de segunda ordem não-homogênea,*

$$\sum_{k=0}^{2} q_k(x)y^{(k)}(x) = g(x), \tag{3.35}$$

com $q_2(x) = 1$, $q_1(x) = 2$, $q_0(x) = -8$ *e* $g(x) = 2e^{-2x} - e^{-x}$, *ou seja,*

$$y''(x) + 2y'(x) - 8y(x) = 2e^{-2x} - e^{-x} \tag{3.36}$$

com as condicões iniciais

$$y(0) = 1 \text{ e } y'(0) = 0, \tag{3.37}$$

e considerando $N = 5$ *nós da malha no intervalo [0,1]. Assim,*

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,25, \quad x_3 = 0,5, \quad x_4 = 0,75, \quad x_5 = 1. \tag{3.38}$$

substituindo (3.38) em (3.36), teremos

$$\sum_{k=0}^{2} (Q_k F D^k)A = (Q_0 F D^0 + Q_1 F D^1 + Q_2 F D^2)A = WA = G, \tag{3.39}$$

onde, $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0,25 & 1,062 & 0,812 & 1,191 \\ 1 & 0,5 & 1,25 & 1,125 & 1,812 \\ 1 & 0,75 & 1,562 & 1,921 & 3,003 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$D^0 = I, \quad D^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q^0 = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix},$$

$$Q^1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = I_5.$$

Assim,

$W = Q_0FD^0 + Q_1FD^1 + Q_2FD^2$

$$W = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & -4 & 8 \\ 2 & -1,5 & 3,124 & -1,248 & 3,63 \\ 2 & -1 & 2,5 & -0,25 & 5,624 \\ 1 & 1,5708 & 3,4674 & 7,0174 & 14,4903 \\ 0 & 1 & 3,1416 & 9,4022 & 24,9279 \end{pmatrix}$$

Obtendo a matriz ampliada $[W : G]$ *e usando as condições iniciais*

i) $y(0) = 1$ *Temos que* $U_0 = F_0 = (1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 1)$.

ii) $y'(0) = 0$ *Temos que* $U_1 = F_0D^1 = (0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 0)$.

Sustituindo as condições inicias no sistema linear, obtemos a matriz $[W^* : G^*]$, *e resolvendo encontraremos os coeficientes de Fibonacci*

$$A = (-4,1156 \quad -1,5826 \quad 5,4234 \quad 0,7913 \quad -0,3078)^T$$

Portanto, a solução aproximada da EDO, é dada por

$$\widetilde{y}(x) = \sum_{r=1}^{4} a_r F_r(x) = a_{(1)}F_1(x) + a_{(2)}F_2(x) + a_{(3)}F_3(x) + a_{(4)}F_4(x)$$

$$= (-4,1156)1 + (-1,5826)x + (5,4234)(x^2+1) + (0,7913)(x^3+2x) + (-0,3078)(x^4+3x^2+1)$$

$$= -0,3078x^4 + 0,7913x^3 + 4,5x^2 + 1$$

Na Figura 3.3 estão representadas a solução exata

$$y(x) = \frac{4}{9}e^{-4x} + \frac{25}{36}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{9}e^{-x}$$

,

e a solução aproximada

$$\widetilde{y} = -0,3078x^4 + 0,7913x^3 + 4,5x^2 + 1$$

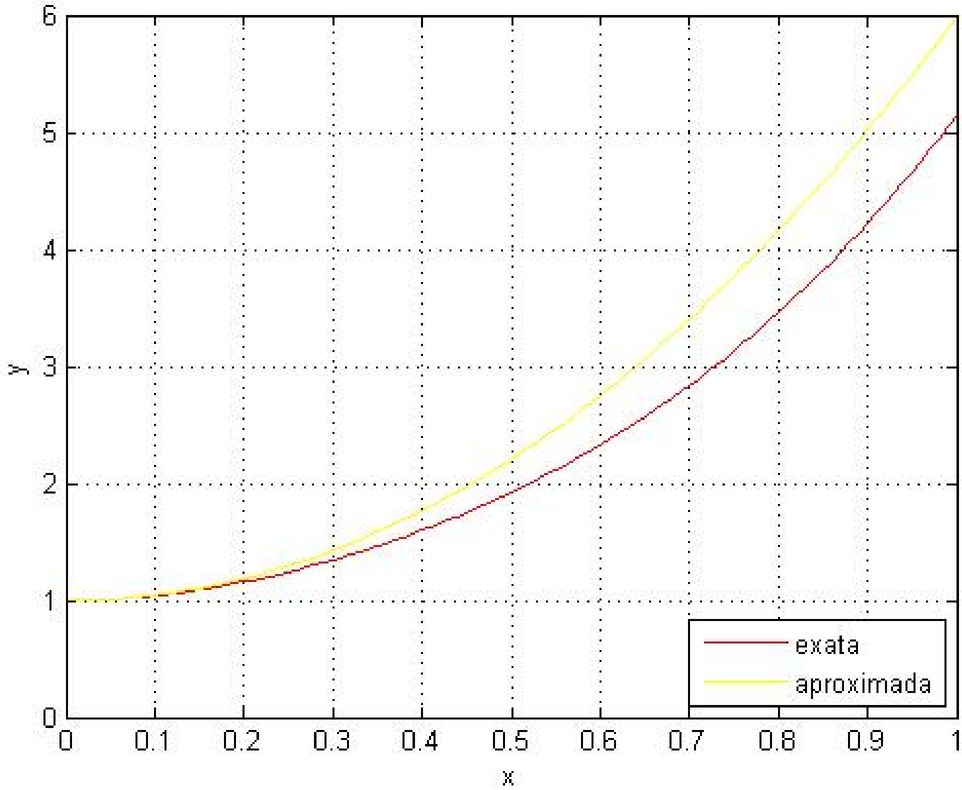

Figura 3.3: Soluções exata e aproximada para o problema do exemplo 3.3. Fonte própria.

Exemplo 3.4. *Seja a equação diferencial linear de segunda ordem não-homogênea,*

$$\sum_{k=0}^{2} q_k(x)y^{(k)}(x) = g(x), \tag{3.40}$$

com $q_2(x) = x^2$, $q_1(x) = -(x^2 + x)$, $q_0(x) = x + 2$ *e* $g(x) = 2x^3$, *ou seja,*

$$x^2y"(x) - (x^2 + x)y'(x) + (x + 2)y(x) = 2x^3 \tag{3.41}$$

com as condicões iniciais

$$y(0) = -2 \text{ e } y'(0) = -4 \tag{3.42}$$

A solução também será obtida considerando N = 5 nós da malha no intervalo [0,1]. Assim,

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0,25, \quad x_3 = 0,5, \quad x_4 = 0,75, \quad x_5 = 1. \tag{3.43}$$

substituindo (3.43) em (3.41), teremos

$$\sum_{k=0}^{2}(Q_kFD^k)A = (Q_0FD^0 + Q_1FD^1 + Q_2FD^2)A = WA = G, \tag{3.44}$$

onde,

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0,25 & 1,062 & 0,812 & 1,191 \\ 1 & 0,5 & 1,25 & 1,125 & 1,812 \\ 1 & 0,75 & 1,562 & 1,921 & 3,003 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D^0 = I, \quad D^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q^0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2,75 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ 3 & & & & \end{pmatrix},$$

$$Q^1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5625 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1,25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2,0625 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad Q_2 = I_5.$$

Assim,

$W = Q_0FD^0 + Q_1FD^1 + Q_2FD^2$

$$W = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2,5 & 0 & 2,2332 & 0.6911 & 1,5555 \\ 2 & 0 & 2,375 & 0,125 & 2,4050 \\ 1 & 0 & 2 & 0,125 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

Dessa forma teremos a matriz ampliada $[W : G]$. *E, usando as condições iniciais*

i) $y(0) = -2$ *temos* $U_0 = F_0 = (1 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 5)$.

ii) $y'(0) = -4$ *e* $U_1 = F_0 D^1 = (0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 5 \;\; 12)$.

Sustituindo as condições inicias no sistema linear, obtemos a matriz $[W^* : G^*]$, *cuja solução é*

$$A = (2 \quad -4,0146 \quad -2,0029 \quad -0,0015 \quad 0,0018)^T$$

Portanto, a solução aproximada da EDO, é dada por

$$\widetilde{y}(x) = \sum_{r=1}^{4} a_r F_r(x) = a_{(1)}F_1(x) + a_{(2)}F_2(x) + a_{(3)}F_3(x) + a_{(4)}F_4(x)$$

$$= (2)1 + (-4,0146)x + (-2,0029)(x^2+1) + (-0,0015)(x^3+2x) + (0,0018)(x^4+3x^2+1)$$

$$= 0,0018x^4 - 0,0015x^3 - 1,9975x^2 - 4,0116x - 0,0011.$$

Na Figura 3.4 estão os gráficos de sua solução exata, $y(x) - 2x^2$, *e de sua solução aproximada*

$\widetilde{y} = 0,0018x^4 - 0,0015x^3 - 1,9975x^2 - 4,0116x - 0,0011.$

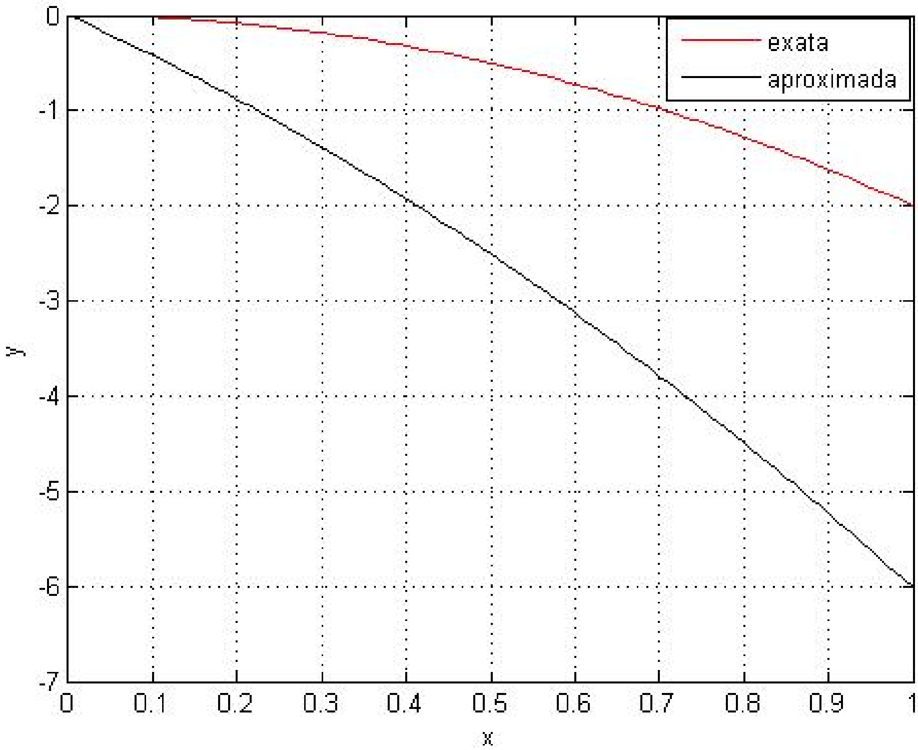

Figura 3.4: Soluções exata e aproximada para o problema do exemplo 3.4. Fonte própria.

Os exemplos apresentados para este método mostram que é possível obter boas aproximações numéricas da solução exata para os problemas propostos. Percebe-se também que nos exemplos 3.2, 3.3 e 3.4 o erro entre a solução exata e a solução aproximada é grande. Isto pode ser atenuado se aumentarmos o número de nós da malha.

3.1.4 Resolução de Equações de Diferencias com Diferenças

Além da resolução EDOs, o método apresentado na subseção 3.1.2 pode ser ultilizado para resolver equações de diferenciais com diferenças e perturbações [10]. Uma equação diferencial com diferenças e pertubações é uma equação em que a derivada mais alta é multiplicada por um pequeno parâmetro, chamado de perturbação e que envolve pelo menos um atraso ou um avanço, chamado de diferença. Sua forma geral é

$$\varepsilon y''(x) + \gamma(x)y'(x-\tau) + \alpha(x)y(x-\delta) + \omega(x)y(x) + \beta(x)y(x+\eta) = g(x), \qquad (3.45)$$

para $0 < x < 1, \quad 0\varepsilon \ll 1$, com as condições de contorno

$$y(x) = \phi(x), \quad -\delta \leq x \leq 0, \quad y(x) = \psi(x), \quad 1 \leq x \leq 1+\eta,$$

onde $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $\omega(x)$, $g(x)$, $\phi(x)$ e $\psi(x)$ são funções, τ, δ e η são os parâmetros de mudança e ε é o parâmetro de pertubação.

Exemplo 3.5. *Considere a seguinte equação.*

$$\varepsilon y''(x) + 0,25y(x-\delta) - y(x) + 0,25y(x+\eta) = 1, \tag{3.46}$$

em $[0,1]$, *com as condições de contorno*

$$\begin{cases} y(x) = 1, & -\delta \le x \le 0 \\ y(x) = 0, & 1 \le x \le 1+\eta \end{cases}$$

onde $\varepsilon = \varepsilon_1^2$. *Sendo que* $(x) = \beta(x) = 0,25$.

Na Figura 3.5 podemos ver a solução numérica $y(x)$ pelo presente método para $N = 40,\ d = 0,03\ \ g = 0,07$ e diferentes valores de ε.

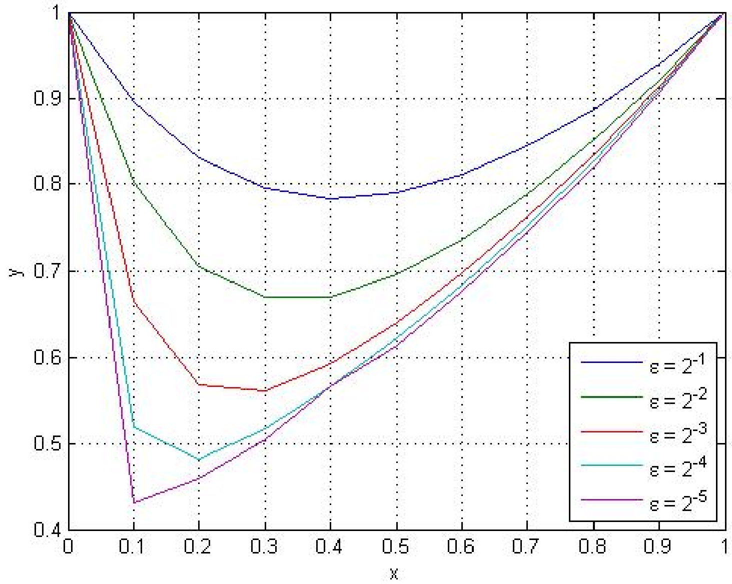

Figura 3.5: Soluções para diferentes valores de ϵ no problema do exemplo 3.5. Fonte própria.

Considerações Finais

Este trabalho mostrou alguns resultados interessantes sobre polinômios Fibonacci, como por exemplo, o estudo de algumas propriedades, raízes e as aplicaçãos na resolução de equações diferenciais ordinárias e de equações diferenciais com diferenças e perturbações.

Para este estudo, vimos alguns resultados sobre a sequência de Fibonacci e polinômios de Fibonacci, que satisfazem várias propriedades e aplicações.

Além disso,também presentamos um breve estudo sobre equações diferencias ordinárias de primeira ordem e de ordem superior, destacando alguns métodos de resolução e exemplos e ultilizamos os resultados estudados nos capítulos posteriores para resolver numéricamente uma EDO, através de um método baseado em polinômios de Fibonacci.

Neste estudo, vimos o método Pseudo-Spectral que consiste em aproximar uma função $f(x)$ ultilizando um polinômio interpolador $\widetilde{f}(x)$, para resolver uma EDO. Observamos que esse método pode ser ultilizado para resolver tanto Problemas de Valor Inicial(PVI) quanto Problemas de Valor de Contorno(PVC).

Se compararmos a solução exata e aproximada das EDOs, podemos ver que em alguns dos exemplos apresentados, o erro é relativamente alto. Mas, isso pode ser atenuado aumentando o número de nós da malha. E semelhante a esse método vimos também, a representação numérica de uma equação de diferença, onde são dados valores para determinar a solução exata.

Assim, este trabalho se mostrou interessante no sentido em que foram estudados resultados e métodos diferentes dos que são estudados no Curso de Licenciatura em Matemática, tornando a pesquisa bastante relevante.

Referências Bibliográficas

[1] BOYER, C. B. **História da Matemática.** Edgard Blücher Ltda, São Paulo. 1999.

[2] DOMINGUES, H. H. **Fundamentos de Aritmética.** Editora Atual, São Paulo. 1991.

[3] ÁVILA, G. **Variáveis Complexas e Aplicações**. Rio de Janeiro: LTC, 1990.

[4] ZILL, D. G; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**: 3ª edição. Vol 1, São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.

[5] GUIDORIZZI, A. L. **Um Curso de Cálculo**. 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[6] IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**. v.6, 7ª edição, São Paulo: Atual, 2005.

[7] GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas**. 3ª edição. São Paulo Livraria Física, 2009.

[8] LIMA, L. J. G. **Polinômios de Fibonacci: Algumas aplicações.**. PROFMAT. Universidade Federal de São João del-Rei UFSJ. 2014.

[9] MATOS. M.P **Série e Equações Diferenciais**. 1ª edição. São Paulo 2001.

[10] MIRZAEE, F. **Solving singularly perturbed diferential-diference equations arising in science and engineering with Fibonacci polynomials.**.v. 3, 134-141 2013.

[11] CAPRI, Fritjof. **A teia da vida: uma nova compreensão científica dos sistemas vivos.**. São Paulo:Cultrix 2006.

[12] WILLIAM, E. B; RICHARD, C. D. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 8ª edição, Rio de Janeiro 2006.

[13] BICKNELL, M. **An Introduction to Fibonacci Polynomials and their Divisibility Properties. The Fibonacci Quarterly.**v. 8.4, 407-420, 1970.

[14] KOSBY, T. **Fibonacci and Lucas Numbers With Applications**. v.51. 2011.

[15] BOYD, J. P. **Chebyshev and Fourier Spectral Methods**. Dover Publications, 2000.