UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL - UEMS – UNIDADE DE NOVA ANDRADINA

NATHALIA MOTA DE ANDRADE

DIFICULDADES EPISTEMOLÓGICA DOS NÚMEROS RELATIVOS

Nova Andradina, dezembro de 2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL - UEMS – UNIDADE DE NOVA ANDRADINA

NATHALIA MOTA DE ANDRADE

DIFICULDADES EPISTEMOLÓGICA DOS NÚMEROS RELATIVOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Matemática, Licenciatura da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como parte do requisito para a obtenção de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Sonner Arfux de Figueiredo

Nova Andradina, dezembro de 2018

NATHALIA MOTA DE ANDRADE

Trabalho de conclusão de curso submetido ao corpo docente da unidade universitária de Nova Andradina da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul – UEMS – MS.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Sonner Arfux de Figueiredo

Profa. Me. Sandra Albano da Silva

Prof. Esp. Ronan Fernandes de Arruda

Nova Andradina, dezembro de 2018

Se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda.

Paulo Freire

Tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo o propósito debaixo do céu.

Eclesiastes 3:1

Nova Andradina, dezembro de 2018

AGRADECIMENTO

Agradeço primeiramente a Deus que me deu forças e sabedoria para chegar até aqui, agradeço meu esposo, a minha irmã que sempre me incentivou, aos meus pais que foram a minha maior motivação, agradeço a minha família, agradeço os meus amigos que em muitos momentos em que eu quis desistir me incentivaram a continuar. Agradeço também a todos os professores que contribuíram para a minha formação. Meus sinceros agradecimentos.

Nova Andradina, dezembro de 2018

Resumo

O presente estudo investigou as estratégias utilizadas por grandes matemáticos na história da Matemática com relação aos números inteiros e o seu ensino. Para tanto nos fundamentamos nos obstáculos epistemológicos de Brousseau. Assim este trabalho nos traz a história dos números mostrando a necessidade do homem em compreender o conceito de números relativos desde a sua origem. A revisão bibliográfica, nos possibilitou observar que o obstáculo epistemológico tem uma grande importância no entendimento, no processo e na conceitualização da construção deste conhecimento, e que uma vez esse obstáculo superado tem se uma mentalidade cientifica assim mostramos as dificuldades encontradas por alguns destes matemáticos tais como: Diofantes, Simon Stevin, Descartes, Colim Maclaurin, Euler, d´Alembert, Carnot, Laplace, Cauchy e Hankel que no decorrer da história da matemática encontraram vários obstáculos. Com os estudos podem se dizer que eles se depararam com em várias situações no entendimento dos números relativos, aumento cada vez mais os estudos e as pesquisas a respeito, assim conseguiram ultrapassar todos os obstáculos epistemológicos na compreensão dos números relativos.

Palavras-Chave: Número relativo, obstáculos epistemológicos, dificuldade de assimilação.

Nova Andradina, dezembro de 2018

Abstract

The present study investigated the strategies used by great mathematicians in the history of Mathematics in relation to integers and their teaching. For this we base ourselves on the epistemological obstacles of Brousseau. Thus this work brings us the history of numbers showing man's need to understand the concept of relative numbers from their origin. Based on this bibliographic review, it enabled us to observe that the epistemological obstacle has a great importance in the understanding, in the process and in the conceptualization of the construction of this knowledge, and that once this obstacle is overcome, there is a scientific mentality, so we show the difficulties encountered by some of these mathematicians such as: Diophants, Simon Stevin, Descartes, Colim Maclaurin, Euler, d'Alembert, Carnot, Laplace, Cauchy and Hankel who in the course of the history of mathematics encountered several obstacles. With the studies they can be said to have come across in various situations in the understanding of relative numbers, increasing the studies and the researches in this respect, thus they have managed to overcome all the epistemological obstacles in the understanding of the relative numbers.

Keywords: integer number, epistemological obstacle, difficulty of assimilation.

Nova Andradina, dezembro de 2018

SUMÁRIO

Nova Andradina, dezembro de 2018

INTRODUÇÃO

O que inspirou esse tema foi as aulas de história da matemática onde foi levantado a questão dos números relativos, e as dificuldades dos autores no decorrer da história. Neste trabalho há algumas observações que foram feitas do decorrer das aulas o que me ajudou na elaboração.

Ao se tratar de dificuldades epistemológicas encontramos várias lacunas, uma dessas lacunas, talvez a maior, é a famosa regra dos sinais x = + atribuída geralmente a Diofantes de Alexandria (fim do século III D.C.). Esse autor não fez qualquer referência aos números negativos. Porém, no início do Livro I da sua “Aritmética” (Diofantes), aludindo sem dúvida ao desenvolvimento do produto de duas diferenças, ele escreve, *“O que está em falta multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo; enquanto o que está em falta multiplicando pelo que é positivo, dá o que está em falta”.*

Na China, a ideia de números negativos surgiu há cerca de 2000 anos, onde os chineses representavam os números com barras de bambu estendidas sobre um tabuleiro. As barras pretas representavam os números negativos e as barras vermelhas, os números positivos. Os matemáticos indianos, porém, descobriram os números negativos quando tentavam formular um algoritmo para a resolução de equações quadráticas.

Ao longo da história, os matemáticos se atreveram a praticar cada vez melhor o cálculo com números relativos. Mas, até o fim do século XVIII, as quantidades negativas não tinham adquirido o status de números. Ante sua intempestiva intrusão num cálculo, os sábios se viam às voltas com o problema: “Como me livrar dele? ”

Somente em 1867, Herman Hankel em sua obra “Teoria dos sistemas dos números complexos”, dedicada aos números complexos, sem a devida intenção, eliminou por completo todas as dúvidas referentes os números relativos.

Percebemos que esta dificuldade, perpassa a história da matemática desde o início da matemática grega até os tempos de hoje. Observando que Piaget (1949), cita textos de D’Alembert, onde afirma que a dificuldade no entendimento deste assunto estaria no caráter fixo (estático) do número: “se concebermos toda noção matemática como resultante da percepção, o número negativo não seria justificável, pois corresponderia a uma ausência de percepção". Esta barreira desapareceria se associássemos um número a uma ação (dinâmica) e não a um estado.

Assim esta investigação tem por objetivo apresentar algumas considerações sobre a noção de obstáculos epistemológicos e a como os grandes matemáticos perpassaram para a sua compreensão, expondo as dificuldades referentes ao entendimento do assunto em questão e onde foram capazes de avançar.

O surgimento de obstáculos é inevitável, sendo assim de suma importância a superação para ter um desenvolvimento no pensamento científico. Podemos observar que curiosamente, as dificuldades encontradas no decorrer da história quanto à compreensão dos números relativos repetem-se em sala de aula. Muitos são os professores e pesquisadores que têm discutido e apresentado novas metodologias que possam levar os alunos a compreender e utilizar números negativos e suas operações com uma certa facilidade.

Esse trabalho está divido em quatro capítulos sendo eles a introdução, o capitulo 2 traz a questão da epistemologia na visão de Gaston Bachelard que trata sobre a construção do conhecimento cientifico e os obstáculos epistemológicos encontrados no decorrer do processo de aprendizagem. No capítulo 3 nos mostra um pouco a histórias dos números os processos de criação e os conjuntos numéricos. Por fim no capitulo 4 apresenta os 6 obstáculos epistemológicos e as dificuldades encontrados pelos 10 matemáticos.

METODOLOGIA

Na investigação de pesquisa bibliográfica com o contexto no estudo na dificuldades dos entendimento dos números relativos, faremos uma breve revisão histórica dos números, trazendo o conjunto dos números naturais, conjunto dos números inteiros e os relativos, e seus obstáculos para e a compreensão do mesmo, em seguida desenvolveremos um estudo dos obstáculos epistemológicos relacionados tendo por base da fundamentação teórica Gaston Bachelard.

Este trabalho se faz preferencialmente a documentação escrita, sendo utilizado biblioteca, arquivos, teses acadêmicas e livros. A coleta de informações foi feita a partir de fichamento das leituras, tendo base na observação de que vários relatos de pesquisas, com as pesquisas temos que o conhecimento na realidade não é apenas a simples transposição dessa realidade para o pensamento, pelo contrário, consiste na reflexão crítica, nesse trabalho de pesquisa houve três tipos de leitura que são: leitura exploratória, leitura seletiva, leitura interpretativa.

Depois da coleta de dados das pesquisas e a organização da mesma, houve uma análise dos conteúdos onde obtivemos alguns resultados e assim finalizamos esse trabalho.

CAPÍTULO I

1.1 História dos números

Na antiguidade o homem encontra a necessidade de contar a necessidade de se manipular quantidades. O homem precisava saber a quantidades de animais ou objetos, para isso fazia a comparação, ele fazia a prática da aritmética mesmo sem ele saber o que é um número abstrato. Podemos exemplificar, um pastor que está cuidando do rebanho de carneiros todas as noites, ele cuida de 40 carneiros, apesar que ele só sabe que são “vários” carneiros, mas ele tem a necessidade de saber se todos os dias todos os carneiros estão junto com o rebanho. Um certo dia ele tem a ideia de a cada carneiro do rebanho ele iria fazer um entalhe em um pedaço de osso, e assim ele tem 40 talhos no osso que representa os 40 carneiros. Assim ele consegue saber se ele está com todos os carneiros ou se algum se perdeu do rebanho, pois todas as noites quando ele for juntar os carneiros a cada talho ele faz a correspondência a um carneiro, se nascer ele adiciona ao osso mais um talho. Desde mesmo modo homens de toda parte fazia uso dessa técnica, mas não necessariamente com o uso de um osso, ele usava conchas, pauzinhos, cocos, tudo correspondente a quantidades de seres ou objetos

> A ideia de número finalmente tornou-se suficientemente ampla e vivida para que se sentisse a necessidade de exprimir a propriedade de algum modo, presumivelmente a princípio somente na linguagem dos sinais... “Grupos de pedras são demasiado efêmeros para conservar informação: por isso o homem pré-histórico às vezes registrava um número fazendo marcas num bastão ou pedaço de osso” (BOYER, 1974, p. 2-3).

Podemos dizer que a ideia de medida está associada a ideia de ordem, pois há tamanho maior e menor, e ordem primeiro e segundo.

A Matemática não teria evoluído se não houvesse a dualidade dos números discretos e contínuo (números discretos são os números inteiros, e medida contínua é um número que pode ser não inteiro).

Quando falamos sobre a número recobre dois aspectos que os complementam, o cardial e ordinal, o cardial baseia se no princípio de equiparação podemos citar um exemplo os dias do mês se um determinado mês tem 30 dias, esse número 30 corresponde o número a quantidades de dias, logo esse número é cardial, já o ordinal exige um processo de agrupamento e o da sucessão.

> A arte de contar surgiu em conexão com rituais religiosos primitivos e que o aspecto ordinal precedeu o conceito quantitativo. Em ritos cerimoniais representando mitos da criação era necessário chamar os participantes à cena segundo uma ordem específica, e talvez a contagem tenha sido inventada para resolver esse problema. Se são corretas as teorias que dão origem ritual à contagem, o conceito de número ordinal pode ter precedido o de número cardinal (BOYER, 1974, p. 4).

No século V da era cristã no norte da Índia foi onde nasceu o ancestral do nosso sistema de numeração moderno, e onde foram estabelecidas as bases do cálculo que são usadas nos dias de hoje. Não podemos deixar de dizer que os Indus tiveram uma grande contribuição para o sistema de numeração.

Os Indus conseguiram chegar a técnicas operatórias quase que tão simples quanto as de hoje, ao conceber o zero e aplicar o princípio de posição a algarismos de base independentes, os índios deram o ultimo aperfeiçoamento a numeração escrita. No século VI, ainda faltava um último avanço, que era aperfeiçoar o conceito abstrato do zero, o "zero" tinha o significado unicamente de uma coluna ou um espaço vazio. Porém os matemáticos da índia preencheram essa lacuna, este conceito já significava indistintamente "vazio" ou "nada", com o sentido que atribuímos hoje a "quantidade nula" ou "número zero". No decorrer do século ainda houve melhorias no sistema de numeração.

O sistema de numeração da matemática começa com os números que nos utilizamos para contar no caso, 1,2,3,4,5,6,.... Esses números são chamados de conjunto dos números naturais, podemos dizer que o menor número natural é o 1, mas não podemos dizer qual é o maior número natural já que sempre que escolhemos um número há um maior que ele, assim dizemos que há infinitos números naturais. Sempre que somamos um número natural ele nos resulta em um número natural um exemplo 1 + 1 = 2, também podemos afirmar que o produto de dois números naturais também é um número natural por exemplo 2 x 5 = 10, assim temos que números naturais são fechados em relação a adição e multiplicação, ou seja operando com números naturais (tanto adição como multiplicação) o resultados que teremos será sempre um número natural. Já na subtração não é a mesma coisa, há alteração, ou seja, os números naturais não são fechados em relação a subtração, 8 – 10 = -2, assim conseguimos mostrar que nem sempre a diferença de números naturais se dá um número natural. Na divisão os números naturais também não são fechados pois se fazermos 8 dividido por 10 o resultado será 8/10 que não é um número natural.

Os hindus também contribuíram para a formação dos números negativos, com o objetivo de mostrar os débitos. O registro mais antigo encontrado foi feito pelo astrônomo e matemático Brahmagupta (598), que fazia conhecimento das quatro operações com números negativo. Baskara compreendeu que todo o número positivo (natural) tem 2 raízes quadradas sendo uma positivo e a outra negativa, e já mostrou que não é possível extrair uma raiz quadrada de um número negativo.

Diofanto (Séc. III) operou com os números negativos. Eles eram constantemente em cálculos intermédios em muitos problemas do seu "Aritmetika", no entanto havia certos problemas para o qual as soluções eram valores inteiros negativos como por exemplo:

$$4=4x+20$$

$$3x -18 = 5x^2$$

Nestas situações Diofanto limitava-se a classificar o problema de absurdo.

Michael Stifel (1487- 1567) que se recusou a admitir números negativos como raízes de uma equação, chamando-lhes de "numeri absurdi". Cardano usou os números negativos embora chamando-os de "numeri ficti". A situação mudou a partir do (Séc.XVIII) quando foi descoberta uma interpretação geométrica dos números positivos e negativos como sendo segmentos de direções opostas.

Assim surgiu um novo conjunto numérico que é representado pela letra Z, sendo formado pelos números positivos e seus respectivos opostos, sendo escrito da seguinte forma: Z = {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}. Chamanos esse conjuto tambem de números realtivos.

Abaixo temos a sua representação na reta númerica.

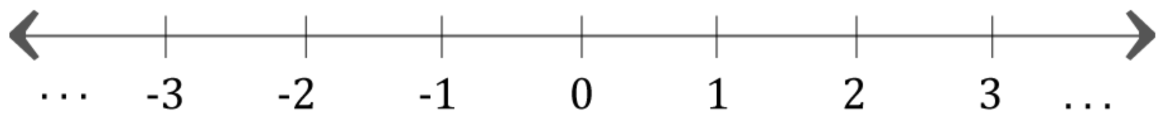

Figura 1: Os números: Os números inteiros na reta.
Fonte:https://www.google.com.br/search?q=reta+numerica&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwj67dyg693dAhVCgpAKHaAQD6cQ_AUICigB&biw=1536&bih=747&dpr=1.25#imgrc=sioHyQF6qsgfUM:

Para Teixeira (1993, p. 62) “A construção do conceito de número inteiro, do ponto de vista matemático, é uma ampliação dos naturais, sendo desta perspectiva necessário demonstrar que as leis do sistema de numeração seguem sendo cumpridas”.

Temos algumas formas de mostras o conjunto número, abaixo vamos ver em forma de diagrama de Venn.

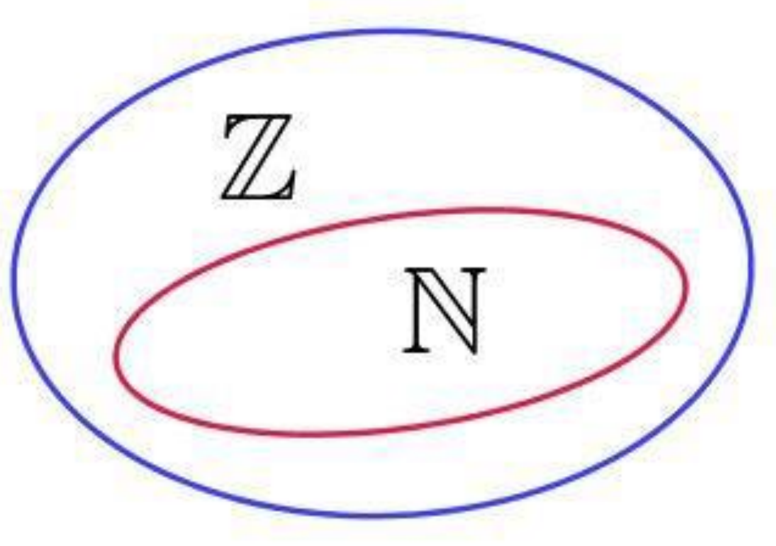

Figura 2: Diagrama de Venn, conjunto dos números naturais e inteiros.
Fonte:https://www.gabarite.com.br/dica-concurso/235-conjunto-dos-numeros-naturais-inteiros-racionais-irracionais-e-complexos

Por meio do diagrama podemos identificar que o conjunto dos números naturais está contido no conjunto dos números inteiros, e que todo número natural é inteiro, mas nem todo número inteiro é natural.

CAPÍTULO II

2. Fundamentação teórica - A Epistemologia e Obstáculos epistemológicos

Tendo em vista que não é fácil ensinar o por que “menos vezes menos se dá mais”, não se sabe se é pela pouca maturidade ou pela abordagem didática, mas quando falamos em perpassar esse conhecimento, temos que pensar nos obstáculos epistemológicos.

A noção de obstáculo epistemológico desenvolvida por Gaston Bachelard (1884 – 1962) é essencial para o entendimento do processo dinâmico de construção do conhecimento científico. O filósofo francês usou o termo “obstáculos epistemológicos” para referir-se a tudo aquilo que impede, impossibilita o progresso da ciência.

Em 1938 Gaston Bachelard cunhou em sua obra *A formação do espírito científico* a ideia do obstáculo epistemológico, que impossibilita ou dificulta o avanço do o desenvolvimento do pensamento, assim impedindo o pensamento pré-científico de conceber a abordagem científica.

Em 1938, Bachelard (1970) publica uma de suas obras mais importantes, “A Formação do Espírito Científico”, na qual aborda os mais diversos “obstáculos epistemológicos” que devem ser superados para que se estabeleça e se desenvolva uma mentalidade verdadeiramente científica.

Segundo Bachelard, o progresso do conhecimento científico se dá no momento em que este supera obstáculos para romper o seu estado inercial.

> ... é no próprio ato de conhecer, intimamente, que aparece por uma espécie de necessidade funcional, lentidões e perturbações. É aí que mostraremos as causas da estagnação e mesmo do regresso; é aí que nós revelaremos as causas da inércia, que nós chamamos de obstáculos epistemológicos (BACHELARD, 1970, p.6).

Na visão do filósofo é no ato de conhecer que estamos contextualizando os obstáculos. O autor ainda descreve 10 obstáculos que são:

- *A primeira experiência*: Ela é a experiência que é composta das informações percebidas e está no espírito, geralmente adquirida nos primeiros anos da vida intelectual das pessoas que, em seguida, envolvidas no desenvolvimento da ciência, e não sujeitas à algumas críticas, leva a pessoa a ficar imersa neste mar de ignorância tomando estes conhecimentos primários como verdadeiros e rejeitando as novidades que vão contra eles*;*

- *O obstáculo generalista*: envolve tomar as características ou particularidades de conhecimento da substância como realidade e verdade, que não tem discussão. Você não pode explicar, ele é tomado como uma causa fundamental e inegável**,** a primeira experiência: Ela é a experiência que é composta das informações percebidas e está no espírito, geralmente adquirida nos primeiros anos da vida intelectual das pessoas que, em seguida, envolvidas no desenvolvimento da ciência, e não sujeitas à algumas críticas, leva a pessoa a ficar imersa neste mar de ignorância tomando estes conhecimentos primários como verdadeiros e rejeitando as novidades que vão contra eles;
- *Obstáculo Verbal*: Localizado em hábitos orais de pessoas usados em uma base diária, tornando este obstáculo um dos mais difíceis e com maior poder explicativo;
- *Obstáculo unitário e pragmático*: O conceito de unidade para simplificar o estudo de qualquer realidade, para explicar tudo de forma satisfatória. As partes são explicadas e sua unificação explica toda a realidade. O conceito de unidade em conjunto com o utilitário se torna perigoso porque dá imediatamente explicação para o que é de algum modo útil;
- *Obstáculo substancialista*: Esta coligação é feita da substância e as suas qualidades. Bachelard distingue uma realidade oculta do substancialismo que é algo fechado, coberto pelo material, que deve abrir para expor seu conteúdo. E há substancialismo da íntima qualidade, profundo, que é fechado não superficialmente. Devemos cavar fundo para encontrá-lo;
- *Obstáculo Realista*: A mente está deslumbrada com a presença do real. Ela ainda considerou que não deve ser estudado ou ensinado. Toma impressões pessoais sobre o pesquisador. O argumento realista tem mais peso contra o que não é;
- *Obstáculo animista*: Os seres humanos prestam mais atenção e maior valorização do conceito que pode levar para a vida. O espírito do pesquisador prioriza a vida, este valor sempre acompanhou o homem em qualquer fase do seu desenvolvimento intelectual*;*
- *Obstáculo e o mito da digestão*: Qualquer evento ou fenômeno que tem a ver com o estômago passa a ter maior valor explicativo*;*

- *Obstáculo da libido:* é interpretado a partir da perspectiva do poder e a vontade de dominar os outros seres humanos por parte do pesquisador e que não pode ajudar, mas refletir sobre suas experiências ou ensaios dá uma explicação coerente para um fenômeno ou um fato. Outra referência deste obstáculo é a referência constante a pensamentos sexuais que estão presentes em todos os espíritos científicos na formação integral para enfrentar novos fatos ou fenômenos*;*
- O*bstáculo epistemológico*: A ideia do obstáculo epistemológico**,** identifica e expressa elementos psicológicos que dificultam a aprendizagem de novos conceitos para a ciência**,** e está presente em pessoas sujeitas a enfrentar novas realidades, poderíamos dizer que o obstáculo epistemológico é um conjunto de dificuldades psicológicas que não permitem acesso correto ao conhecimento objetivo que por sua vez é considerado barreiras para a formação de um espírito científico, esse vamos analisar com maior clareza.

A noção de obstáculo epistemológico abrange aspectos do desenvolvimento histórico do pensamento cientifico como da pratica educacional (BACHELARD,1996).

Segundo Gaston Bachelard (1996), os obstáculos epistemológicos são obstáculos que os professores devem estar atentos, para que não persistam no ambiente da sala de aula, no seu modo de ensinar nem nos recursos didáticos usados, como por exemplo, o livro didático. O professor também precisa estar ciente do que cada um trata, pois somente assim poderá identificá-los e superá-los, ou, também, poderá ajudar os seus alunos a superá-los, caso os obstáculos estejam presentes neles próprios.

Bachelard (1996), questiona o modo dos professores ensinar em ciências não levando em conta o processo histórico, para assim ir construindo o conhecimento fazendo uma relação entre conhecimento científico e o senso comum.

> Os professores de ciências imaginam que o espírito começa como uma aula, que é sempre possível reconstruir uma cultura falha pela repetição da lição, que se pode fazer entender uma demonstração repetindo-a ponto por ponto. Não levam em conta que o adolescente entra na aula de física com conhecimentos empíricos já construídos: não se trata, portanto, de adquirir uma cultura experimental, mas sim de mudar de cultura experimental, de derrubar os obstáculos já sedimentados pela vida cotidiana (BACHELARD, 1996, p.23).

Para Bachelard (1996), o conhecimento cientifico implica sempre ruptura com a experiência primeira e o conhecimento comum, ele é superação de obstáculos epistemológicos.

Assim temos que obstáculo epistemológico está associado a barreiras que impedem o saber, mas que quando superados conseguimos atingir o conhecimento cientifico.

CAPÍTULO III

3. Obstáculo na Aprendizagem Matemática

Durante a história a utilização dos números inteiros sempre teve várias lacunas, pois havia a falta de compreensão ou apenas a compreensão parcial de objeto de estudo matemático.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais Brasil (1998),

> A análise da evolução histórica dos números negativos mostra que por muito tempo não houve necessidade de pensar em números negativos e por isso a concepção desses números representou para o homem um grande desafio. O uso pioneiro dos números negativos é atribuído aos chineses e aos hindus, que conceberam símbolos para as faltas e diferenças. A adoção do zero teve um papel-chave na construção dos inteiros, possibilitando operar com grandezas negativas, mudando o caráter de zero nada para zero origem, favorecendo, assim, a ideia de grandezas opostas ou simétricas. (BRASIL, 1998, p.97).

Obstáculo epistemológico tem suma importância na educação matemática, pois a epistemologia e a didática da matemática permite a interdependência existente entres elas. Brousseau (1983) afirma que o obstáculo é da mesma natureza do conhecimento com objetos, relações, métodos de entendimento, previsões, com evidência, consequências esquecidas, ramificações inesperadas, etc.

Em 1976, Brousseau expõe numa conferencia sua pesquisa *"Os obstáculos epistemológicos e os problemas em matemática"* ele traz a noção de obstáculo epistemológico como estando ligado a uma resistência do conhecimento. Logo ele é responsável a inserção de obstáculos epistemológicos na educação matemática, o obstáculo é a maneira que podemos ter um aproveitamento e fazer uma construção o conhecimento mesmo ele sendo mal adaptado.

> O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se crê nas teorias empíricas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seus sucessos, mas que agora se revela falso, ou simplesmente, mal adaptado. (Anotação de aula[1])

[1] Anotações de aula da disciplina de história da matemática do 4º ano

Segundo Brousseau a noção de obstáculo epistemológico é um conhecimento, e não uma dificuldade ou falta de conhecimento, produzindo respostas adaptadas em um contexto, mas quando usado fora deste contexto, se faz, ineficaz, tendo respostas incorretas; o aluno resiste às contradições que o obstáculo lhe produz e a sua modificação por um novo conhecimento, o que torna todo conhecimento possível de ser um obstáculo à aquisição de novos conhecimentos.

> [...] mas estes erros não são devido ao acaso, fugazes, erráticos, eles são reprodutíveis, persistentes. Além do mais, estes erros, em um mesmo sujeito, estão ligados entre si por uma fonte comum, uma maneira de conhecer, uma concepção característica, coerente, se não correto, um conhecimento antigo e que obteve êxito em todo um domínio de ação (BROUSSEAU, 1983, p.165).

Brousseau(1998) especifica 3 tipos de obstáculos na aprendizagem obstáculos de origem ontogênica, obstáculos de origem didática, e por fim Obstáculos de origem epistemológica, vamos falar um pouco de cada.

Obstáculos de origem ontogênica que são proporcionados por alguma limitação do sujeito devido ao seu desenvolvimento tardio, o que não permite ao aluno compreender um determinado conceito por completo, ocorrem quando a maturidade não é suficiente, ou quando outras dificuldades do desenvolvimento psicogenético do sujeito o impedem de compreender um conceito novo. Ele precisa adquirir uma maturidade mental, para compreender um assunto, a qual não necessariamente precisa estar ligada à idade cronológica.

Obstáculos de origem didática são aqueles originados por alguma ação educativa, didática ou do sistema educativo, ou seja, uma ação externa do professor ou um projeto de ensino que possibilita um conceito errado, como consequência das relações escolhidas para serem trabalhadas com um determinado conceito.

Os Obstáculos Epistemológicos são aqueles aos quais não se pode nem se deve fugir, devido ao seu papel constitutivo em questões do conhecimento desejado, decorre da falta de conhecimento aprofundado do conteúdo ou da compreensão do seu processo de desenvolvimento ao longo da História. Por sua vez são encontrados no decorrer da História da Matemática, na construção histórica onde se estabeleceram 54 em barreiras, em que por vez demoraram anos, décadas e até séculos para serem ultrapassados. Estas limitações do conhecimento de um conceito continuam a se apresentar no processo de aprendizado do aluno, na disciplina de Matemática, onde o professor tem que ter um cuidado ao distinguir as barreiras no raciocínio do aluno.

No processo de ensino e aprendizagem é importante analisar os obstáculos, pois se não houver uma construção correta do conhecimento, pode impedir ou aumentar a dificuldade na assimilação de novos conhecimentos.

> A aprendizagem é feita por tentativas de conceitos sucessivos, temporária e relativamente bons, que ele [o aluno] irá rejeitar ou transformar em uma verdadeira nova gênese de cada vez (BROUSSEAU, 1998, p. 119, tradução nossa).

Os alunos apresentam muitas dúvidas nas operações com números inteiros, pois até então os números foram apresentados como concreto, para o aluno é um absurdo a operação 2-4, já que associado ao seu conhecimento de construção de número. Assim para ele dificulta a aprendizagem e se torna um obstáculo.

Neto (2010) faz uma observação e diz que é preciso que o professor faça uso de uma metodologia com o objetivo de passar de um nível a outro por meio de uma didática que apresente os obstáculos e planeje formas de superá-los.

> Na aprendizagem de números inteiros imagina-se a construção de vários esquemas de significados diferentes, de tal forma que surgem vários obstáculos e muitas dificuldades, que para serem superados é necessário se abstrair e generalizar de tal maneira que se passe dos aspectos periféricos para os aspectos centrais da ação. (NETO, 2010, p.26).

Sobre os conhecimentos prévios dos alunos, relacionado aos números inteiros, Borba e Nunes (2004) observam que:

> Os alunos, quando iniciam a aprendizagem formal dos números inteiros relativos, já possuem conhecimentos em algumas dimensões desse conceito. Crianças bem antes da introdução formal ao conceito de números relativos já entendem o significado de inteiro como medida e já são capazes de resolver problemas diretos utilizando-se representações explícitas para números positivos e negativos e de corretamente operar nessas representações bem antes de aprenderem a fazer uso das representações formalizadas. (BORBA; NUNES, p.97- 98).

Uma estratégia para a melhor compreensão dos números inteiros e suas operações, é a memorização das regras e esta costuma se ser eficiente. Cabe ao professor de matemática fazer um planejamento da abordagem desse conteúdo fazendo com que o aluno sinta a importância de ter essa construção do conhecimento, também a necessidade de analisar a compreensão dos alunos a situações que envolvem os números negativos as suas operações antes da formalização desse objeto matemático.

Os seis principais obstáculos ao entendimento dos números relativos são:

- Inaptidão para manipular quantidades isoladas;
- Dificuldade em dar sentido a quantidades negativas isoladas;
- Dificuldade em unificar a reta numérica;
- Ambiguidade dos dois zeros;
- Estagnação no estágio das operações concretas;
- Busca por um modelo unificador que viesse a funcionar tanto em modelos aditivos quanto em modelos multiplicativos.

Agora vamos explorar cada um desses obstáculos.

Inaptidão para manipular quantidades isoladas: Quando operamos sem que haja necessidade de um contexto nós ultrapassamos esses obstáculos, exemplo: 2+3 quanto da duas laranjas com mais três laranjas?

Dificuldade em dar sentido a quantidades negativas isoladas: Seria dar sentido a um número negativo sem que para isso se use um contexto.

Segundo Maclaurin Chamam se quantidades positivas, ou afirmativas, as que são precedidas do sinal +, e negativas, as que são precedidas do sinal -.

Dificuldade em unificar a reta numérica: Isto se manifesta, por exemplo, quando se insiste nas diferenças qualitativas entre as quantidades negativas e os números positivos; ou quando se descreve a reta como justaposição de duas semirretas opostas com sinais heterogêneos; ou quando não se consideram simultaneamente as características dinâmicas e estáticas dos números.

Ambiguidade dos dois zeros: este não era um assunto extremamente simples para a época era um obstáculo de difícil superação, pois durante séculos, os matemáticos acreditaram no zero como absoluto e essa resistência resultou em dificuldades ainda maiores para aceitar e compreender o zero de origem.

Exemplificando o zero absoluto e o zero de origem. Zero absoluto: O nada, abaixo do nada é concebível, ou seja, não se pode ser mais pobre que o pobre absoluto. Zero de origem: segundo Maclaurin números negativos e positivos só diferem porque são tomados em sentidos opostos a uma origem (zero origem). Um exemplo: nascimento de Jesus em nosso calendário como zero origem, podemos contar o tempo em antes e depois de Cristo.

Estagnação no estágio das operações concretas: É a dificuldade de desunir um sentido “concreto” atribuído aos números.

A operação: 7 - 10 = -3 é perfeitamente possível ao papel, mas como saberíamos se estivéssemos atribuindo esse número a uma distância em metros? Será que poderíamos falar que andamos -3 metros?

Busca por um modelo unificador que viesse a funcionar tanto em modelos aditivos quanto em modelos multiplicativos: É a intenção de fazer funcionar um “bom” modelo aditivo, igualmente válido para ilustrar o campo multiplicativo, em que esse modelo é inoperante. [...] (GLAESER, 1985, p. 39-40).

> Os obstáculos de origem epistemológica são inerentes ao saber e podem ser identificados nas dificuldades que os matemáticos encontraram, na história, para a compreensão e utilização desses conceitos. (ALMOULOUD, 2007, p.139).
>
> As pesquisas em didática, história e epistemologia da matemática identificam um conjunto de fatores e de concepções que deram origem a obstáculos epistemológicos, sendo a maioria desses fatores e concepções, ainda hoje, observados em nossos alunos. (ALMOULOUD, 2007, p.139).

Podemos destacar a respeito da ambiguidade do zero que, foi de difícil superação para os matemáticos, pois eles tinham o zero sendo como absoluto, assim havendo uma certa resistência para compreensão para o zero origem. Apesar de vários matemáticos terem um certo desenvolvimento com a manipulação de quantidades negativas, eles sempre se deparavam com eles nos cálculos o que dificultava mais a compreensão desse objeto de estudo durante anos.

Costa (1981) salienta:

> Os sinais + e – qualificam assim os números positivos e negativos, e fazem parte integrante de sua notação. A rigor, esses sinais se deveriam distinguir dos sinais operatórios, escrevendo-se, por exemplo, (+3) + (+2) = +5; (-3) – (+2) = -5. (COSTA, 1981, p. 234).

Para os grandes matemáticos era inaceitável que esse estudo apresentava-se tantas dificuldades, houve uma época no decorrer da história em que eles preferiam evitar os números negativos.

Gleaser baseia se em Bacherlard (1996) em relação aos obstáculos e os números relativos, assim ele desenvolve seu estudo, analisando as dificuldades encontradas no decorrer da construção da matemática em relação aos números relativos a superação de cada obstáculo. Agora analisaremos o quadro abaixo que mostra a compreensão dos 10 grandes matemáticos e os 6 obstáculos citados acima.

	Obstáculos					
Autores	1	2	3	4	5	6
Diofantes (214-284)	-					
Simon Stevim (1548-1620)	+	-	-	-	-	-
René Descartes (1569-1650)	+	?	-	?		
Colin Maclaurin (1698-1746)	+	+	-	-	+	+
Leonard Euler (1707-1783)	+	+	+	?	-	-
Jean D'Alembert (1717-1783)	+	+	-	-	-	-
Lazare Carnot (1753-1823)	+	-	-	-	-	-
Pierre de Laplace (1749-1827)	+	-	+	?	-	?
Augustin Cauchy (1789-1857)	+	+	-	-	+	?
Hernan Hankel (1839-1873)	+	+	+	+	+	+

- : Obstáculo não assimilado;

+: Obstáculo ultrapassado;

? : Obstáculo cuja situação é indefinida, por falta de informações suficientes nos textos pesquisados.

Agora faremos um estudo desses autores e os obstáculos por eles não assimilados, ultrapassados ou até mesmo estudado, mas que por falta de informação fazia com que a pesquisa não evoluisse.

Diofanto: Um cultor da aritmética, e sobretudo da geometria, como o foram os matemáticos gregos anteriores, deve considerar-se um precursor da álgebra, e, em certo sentido, mais vinculado com a matemática dos povos orientais (Babilónia, Índia...) que com a dos gregos.

No desenvolvimento histórico da álgebra considera-se, em geral, que podem ser reconhecidos três estádios: o primitivo ou retórico, em que tudo era completamente escrito em palavras, um intermédio ou sincopado, em que foram adaptadas algumas abreviaturas e convenções, e um final ou simbólico, em que são usados somente símbolos. A "Arithmetica" de Diofanto deve ser colocada no segundo estádio; nos seus seis livros há um uso sistemático de abreviaturas para potências de números e para relações e operações.

Percursor das regras dos sinais, não fez qualquer referência aos números negativos, em um dos seus livros foi encontrada a seguinte citação: O que está em falta multiplicado pelo que está em falta dá o que é positivo, enquanto o que está em falta multiplicado pelo que é positivo, dá o que está em falta.

Ele não chegou a demostrar a sua afirmação.

Simon Steven: Matemático, mecânico e engenheiro militar flamengo nascido em Bruges, a quem se deve a popularização do uso do sistema decimal de frações, o que viabilizou o uso divisionário das moedas, pesos e medidas em geral. Teve uma grande contribuição científica no desenvolvimento da mecânica. Em suas obras destacam-se três publicações, todas editadas em Leiden e em holandês (1586): Princípios de estática, uma espécie de continuação dos trabalhos de Arquimedes (teoria da alavanca, centro de gravidade dos corpos, etc).

Simon Stevin expos duas demonstrações para a regra dos sinais. Numas delas, ele se baseia numa interpretação geométrica, Ele fez a seguinte afirmação:

"Mais multiplicado por mais dá produto mais, e menos multiplicado por menos, dá produto mais, e mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos.

Explicação do dado: Seja 8-5 multiplicado por 9-7, deste modo: - 7 vezes -5 faz + 35 (+ 35, porque, como diz o teorema, - por -, faz +). Depois - 7 vezes 8 faz -56 (-56, porque, como está dito no teorema, - por +, faz -). E similarmente seja 8-5 multiplicado pelo 9, e darão produtos 72 - 45; depois juntem +72+35, fazem 107. Depois juntem os -56 - 45, fazem -101; e subtraído o 101 de 107 resta 6, para produto de tal multiplicação. Da qual a disposição dos caracteres da operação é este ao lado:

Explicação do quesito:

É preciso demonstrar pelo dito dado, que + multiplicado por +, faz +, e que - por -, faz +, e que + por -, ou - por + faz -.

Demonstração:

O multiplicador 9-7 vale 2; mas multiplicando 2 por 3, o produto é 6, logo, o produto ao lado acima, também 6, é o verdadeiro produto; mas o mesmo é obtido por multiplicação, lá onde dizemos que + multiplicado por +, dá produto +, e - por - dá produto +, e + por -, ou - por +, dá produto -, portanto o teorema é verdadeiro.

Conclusão:

“Portanto mais multiplicado por mais, dá produto mais. E menos multiplicado por menos, dá produto mais, e mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos; como queríamos demonstrar”.

Rene Descartes (1596-1650) foi um filósofo e matemático francês. Criador do pensamento cartesiano, sistema filosófico que deu origem à Filosofia Moderna, Descartes utilizou o Plano Cartesiano no intuito de representar planos, retas, curvas e círculos através de equações matemáticas, porém só manipulava curvas limitadas ao primeiro quadrante. Os estudos iniciais da Geometria Analítica surgiram com suas teorias, que representavam de forma numérica as propriedades geométricas.

Colin Maclaurin quase obteve a compreensão dos números relativos, o que podemos ver em um de seus relatos. “ Entre o valor do dinheiro devido a um homem, e o dinheiro que ele deve; entre uma linha traçada a direita, e uma linha traçada a esquerda; entre a elevação sobre o horizonte e o posicionamento abaixo dele. Assim, a quantidade negativa, longe de ser rigorosamente menor que nada, não é menos real na sua espécie do que a positiva, mas é tomada num sentido oposto”

Colin Maclaurin. No "Tratado dos Fluxos (1742), ele escreve: "O uso do sinal negativo, em álgebra, dá origem a numerosas consequências difíceis de admitir, em princípio, e que propiciara ideias aparentemente sem qualquer fundamento real". Ele faz um grande avanço tratando se do entendimento dos números relativos, mas tem dificuldade em representar a unificação da reta numérica.

> “Quando a quantidade positiva não tem outra que lhe seja oposta, não se poderia subtrair outra maior. Por exemplo: seria absurdo querer subtrair uma quantidade de matéria de outra menor” (Anotação de aula[2])

O “Tratado de Álgebra", publicado em 1748, dois anos após a morte de Maclaurin. Eis como ele apresenta as quantidades negativas:

[2] Anotações de aula da disciplina de história da matemática do 4º ano

> "Chamam-se quantidades positivas, ou afirmativas, as que são precedidas do sinal +, e negativas, as que são precedidas do sinal -. Para se ter uma ideia clara e exata desses dois tipos de quantidades, deve-se notar que toda quantidade pode entrar num cálculo algébrico, acrescentada, ou subtraída, ou seja, como aumento, ou como diminuição; ora, a oposição que se observa entre aumento e diminuição ocorre na comparação das quantidades. Por exemplo: entre o valor do dinheiro devido a um homem, e o do dinheiro que ele deve; entre uma linha traçada à direita, e uma linha traçada à esquerda; entre a elevação sobre o horizonte e o posicionamento abaixo dele. Assim, a quantidade negativa, longe de ser rigorosamente menor que nada, não é menos real na sua espécie do que a positiva, mas é tomada num sentido oposto; segue-se daí que uma quantidade considerada isoladamente não poderia ser negativa, pois ela só o será por comparação; e que quanto a quantidade que chamamos positiva não tem outra que lhe seja oposta, não se poderia dela subtrair outra maior. Por exemplo: seria absurdo querer subtrair uma quantidade maior de matéria, de outra menor". (Anotação de aula[3])

Contudo o autor percebe subentendido o que é legitimo com o zero origem é absurdo para o zero absoluto.

> Poder-se-ia deduzir daí a regra dos sinais tal como se costuma enunciá-la, ou seja, que os sinais iguais nos termos do multiplicador e do multiplicando dão + no produto, e os sinais diferentes dão -. Evitamos esta maneira de apresentar a regra, para poupar aos iniciantes a revoltante expressão - por - dá +, que, todavia, é uma consequência necessária da regra. Pode-se, como fizemos, disfarçá-la, mas não a anular, nem a contradizer; o leitor, sem perceber, observou todo o seu sentido nos exemplos precedentes. Familiarizado com a coisa, como iria perturbar-se com as palavras? Se ainda conserva alguma dúvida, que preste atenção à seguinte demonstração, que ataca diretamente a dificuldade. +a - a = 0; assim, multiplicando +a por qualquer quantidade, o produto deve ser 0; se multiplico por n, terei como primeiro termo +na, portanto o segundo será -na, pois é preciso que os dois termos se destruam. Logo sinais diferentes dão-no produto. Se multiplico +a - a pôr - n, de acordo com o caso precedente, obterei -na como primeiro termo; logo terei +na como segundo, pois é sempre necessário que os dois termos se destruam. Logo - multiplicado por - dá + no produto". (Anotação de aula[4])

[3] Anotações de aula da disciplina de história da matemática do 4º ano

[4] Anotações de aula da disciplina de história da matemática do 4º ano

O texto mostra formalmente a demonstração da regra dos sinais, a distributividade em ligação a adição.

Em outro trecho desta mesma obra Maclaurin define a regra de sinais da seguinte forma:

$+a - a = 0$ e n uma quantidade positiva ou negativa

$n(+a - a) = 0$

se $n > 0$

$+n.(+a) + n.(-a) = 0$

Logo

$+n.(-a) = -na$

Assim, $(+).(-) = (-)$

Se $n < 0$

$-n(+a) - n(-a) = 0$

Logo

$-n(-a) = +n$

Assim, $(-).(-) = (+)$

Essa dedução deu início ao formalismo, que até então era inexistente. Com essa citação acima MacLaurin mostra se em vantagem se comparado com todos os outros matemáticos, assim sendo até o século XIX.

Léonard Euler (1707-1783) foi, seguramente, um virtuose do cálculo. Em seus artigos científicos, ele maneja os números relativos e complexos com engenhosidade, sem levantar muitas questões a respeito da legitimidade de suas construções. Foi em 1770 que lançou sua obra que foi destinada aos principiantes, seu objetivo era de justificar a regra dos sinais. Sua argumentação pode ser dividida em 3 partes:

1. A multiplicação de uma dívida por um número positivo não apresenta qualquer dificuldade: três dívidas de a escudos fazem uma dívida de 3a escudos. Logo $b \times (-a) = -ab$. Observamos que a multiplicação é uma

operação externa. O argumento fica, pois, sem valor, se o multiplicador não for um inteiro natural.

2. Por comutatividade, Euler deduz daí que (-a) x b = -ab. Se formos considerar o argumento valido, que significa (-3) ganhos de a escudos?
3. Finalmente a sua visão para determinar o produto de (-a) por (-b) Euler diz que o valor (-a) por (-b) = ab. Note que ele faz isso por eliminação: Como (-a) x b = -ab, assim a única possibilidade restante é de que (-a) x (-b) = + ab. (!!!)

Euler declara que a representação de um numero relativo é uma letra precedida de sinal (-), sendo assim percebemos que o mesmo não conseguiu fez a compreensão da unificação da reta numérica. Conseguimos entender as ideias do autor, porém os seus argumentos não foram tão específicos e claros, sendo assim sua obra não teve grande conhecimento naquele século.

D' Alembert (1717-1783) escreveu para a enciclopédia Diderot, o “Artigo negativo” um dos textos que mais revela questões sobre os números negativos, onde deixa claro a sua dificuldade na compreensão dos números relativos.

> Deve-se confessar que não é fácil fixar a ideia das quantidades negativas e que algumas pessoas engenhosas chegaram a contribuir para confundi-la, pelas noções pouco exatas que divulgaram. Dizer que as quantidades negativas estão abaixo do nada é afirmar uma coisa que não se pode conceber. (Anotação de aula[5])

Percebemos a sua dificuldade em assimilar a unificação da reta numérica.

> Para tentar descobrir a verdadeira noção, deve-se, primeiro, notar que as quantidades a que chamamos negativas e que falsamente consideramos como abaixo de zero, são comumente representadas por quantidades reais, como na Geometria, onde as linhas negativas só diferem das positivas por sua situação em relação a qualquer linha no ponto comum. Veja CURVA. Daí, é natural concluir que as quantidades negativas encontradas no cálculo são, de fato, quantidades reais, mas quantidades reais a que se deve associar uma ideia diferente daquela que fazíamos. Imaginemos, por exemplo, que estamos procurando o valor de um número x, que somado a 100 perfaça 50. Pelas regras da Álgebra, teremos x + 100 = 50 e x = - 50. Isto mostra que a quantidade x é igual a 50 e que, em vez de ser acrescida a 100, ela deve ser retirada. Enunciaríamos, portanto, o

[5] Anotações de aula da disciplina de história da matemática do 4º ano

> problema dessa maneira: encontrar uma quantidade x que, retirada de 100, deixe como resto 50: enunciado assim o problema, teremos 100 – x = 50, e x = 50, e a forma negativa de x não subsistiria mais. Assim, as quantidades negativas, no cálculo, indicam realmente quantidades positivas que supusemos numa falsa posição. 0 sinal - que encontramos antes de uma quantidade serve para retificar e corrigir um erro que cometemos na hipótese, como o exemplo acima demonstra claramente. (Anotação de aula[6])

Neste trecho o autor expõe a sua evitação quando se trata do número negativo, fazendo uma insistência na não existência de quantidade negativas isoladas.

Percebemos aqui que não importou não foi tanto o nível de compreensão de um matemático, pois ele não fez muitas contribuições para a compreensão dos números relativos, porem causou um impacto que sobre os seus leitores.

Vamos trazer outro trecho do artigo Quantidade, do mesmo autor para a Enciclopédia. "Quantidades negativas são aquelas que são consideradas como menores que nada, e que são precedidas do sinal –"

Lazare Carnot (1753-1823), membro da Academia de Ciências de Paris, "Organizador da Vitória" era considerado, no seu tempo, como um dos maiores matemáticos franceses depois, de Lagrange, Laplace, Legendre e Monge, teve um papel importante, pois foi o provocador na compreensão dos números relativos, todavia não apontou soluções para as questões apresentadas.

> Algumas amostras de sua obra: "Para obter realmente uma quantidade negativa isolada, seria preciso retirar uma quantidade efetiva do zero, privar o nada de alguma coisa: operação impossível. Como, portanto, conceber uma quantidade negativa isolada?" (Anotação de aula[7])

Acrescenta:

> "As noções até agora conhecidas das quantidades negativas isoladas se reduzem a duas: aquela de que acabamos de falar, saber que são quantidades menores que zero; e aquela que consiste em dizer que as quantidades negativas têm a mesma natureza que as quantidades positivas, mas tomadas em sentido contrário" (Anotação de aula[8])

Tem se da mesma obra:

[6] Anotações de aula da disciplina de história da matemática do 4º ano
[7]Anotações de aula da disciplina de história da matemática do 4º ano
[8] Anotações de aula da disciplina de história da matemática do 4º ano

> "Uma multidão de paradoxos, ou antes de palpáveis absurdos resultaria da mesma noção; por exemplo: -3 seria menor que 2; contudo, (-3)^2 seria maior que 2^2, ou seja, entre duas quantidades diferentes, o quadrado da maior seria menor que o quadrado da menor, o que afronta todas as ideias clara que se poderiam formar sobre a quantidade. (Anotação de aula[9])

Carnot nos fala que as quantidades negativas se diferenciam das positivas por serem opostas em relação à zero origem. Contudo ele supera o obstáculo da ambiguidade dos 2 zeros, e constrói a ideia de uma reta orientada.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), professor da escola Normal, demostrava a mesma dificuldade dos seus antecessores, Ele entrevê, contudo, os elementos da solução:

> "(A regra dos sinais) apresenta algumas dificuldades: custa conceber que o produto de -a por -b seja o mesmo que o de a por b. Para tornar sensível essa ideia observaremos que o produto de -a por +b e -ab (porque o produto nada mais é que -a repetido tantas vezes quantas são as unidades existentes em b). Observaremos, a seguir, que o produto de -a por (b-b) é nulo, pois o multiplicador é nulo; assim já que o produto de -a por +b é -ab, o produto de -a por -b deve ser de sinal contrário, ou igual a + ab para destruí-lo". (Anotação de aula[10])

Porém, não evoluiu.

August Cauchy (1789-1857) publicou seu curso destinado à Escola Politécnica, faz uma clara distinção entre os números (positivos) e quantidades (números relativos).

> "Do mesmo modo que se vê a ideia de número nascer da medida de grandezas, adquire-se a ideia de quantidade (positiva ou negativa), se considerarmos cada grandeza de uma espécie dada capaz de servir para o crescimento ou a diminuição de outra grandeza fixa da mesma espécie. Para indicar essa destinação, indicam-se as grandezas que servem para aumentar por números precedidos do sinal +, e as grandezas que servem de diminuição por números precedidos do sinal -. Isto posto, os sinais + ou - colocados antes dos números podem-se comparar, segundo a observação feita, a adjetivos colocados junto a seus substantivos. Designam-se os números

---

[9] Anotações de aula da disciplina de história da matemática do 4º ano

[10] Anotações de aula da disciplina de história da matemática do 4º ano

> precedidos do sinal + pelo nome de quantidades positivas, e os números precedidos do sinal - pelo nome de quantidades negativas". (Anotação de aula[11])

Foi o autor responsável pela confusão entre os sinais (+ ou -) operatórios e predicativos.

Cauchy tem a ideia de que quantidades (aumentar, diminuir) e os segundos qualificam um estado (positivo, negativo), ele compara positivo = aumento; negativo = diminuição, porem essa ideia não obteve sucesso, assim ele adotou um novo ponto de vista, a multiplicação de modo formal, fazer operações com símbolos (formados por um sinal e um valor absoluto) e expõe as regras operacionais a que tais símbolos serão submetidos.

Ele demonstra: "Com base nessas convenções, se representamos por A, seja um número, seja uma quantidade qualquer, e se fazemos

A = + A, b = - A

teremos,

+ a = + A, + b = - A,

- a = - A, - b = + A.

Assim,

+ (+ A) = + A = A,

+ (- A) = - A = b,

- (+ A) = - A = b,

- (- A) = + A = - b

1° teorema: O produto de dois sinais iguais é sempre +, e o produto de dois sinais opostos é sempre."

[11] Anotações de aula da disciplina de história da matemática do 4º ano

Herman Hankel, na "Teoria dos sistemas dos números complexos”, conseguiu com que todos os obstáculos referentes à teoria dos números fossem ultrapassados.

A existência e unicidade dessa extensão resulta do seguinte teorema: a única multiplicação em IR, que estende a multiplicação usual em IR +, respeitando a distributividade (à esquerda e à direita), está de acordo com a regra dos sinais. Uma vez formulado o problema, a demonstração é trivial:

0 = a x 0 = a x (b + o p . b) = a b + a x (o p . b) [1]

0 = 0 x (o p . b) = (a + o p . a) x (o p . b) = (o p . a) x (o p . b) + a x (o p . b) [2]

0 = 0 x b = (a + o p . a) x (b) = a b + (o p . a) x b [3]

Comparando as equações [1] e [2], termo a termo, conclui-se que

(o p . a) x (o p . b) = a b

Logo, (-) . (-) = +

Comparando as equações [1] e [3], termo a termo, conclui-se

A x (op.b) = (op.a) x b

Logo, (-) . (+) = (+) . (-)

Assim finalizou a questão dos sinais.

Com essa análise vimos que esses matemáticos encontraram grande dificuldades, as vezes chegavam perto de fazer a assimilação do conteúdo, mas não conseguiam, e com muitos estudos percebemos que com o decorrer da história eles fizeram uma melhor manipulação com quantidades negativas chegando bem perto de superar todos os obstáculos. Mas foi Herman Hankel que conseguiu resolver e sanar as dúvidas relacionados aos números relativos.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Desde os primórdios o homem tem a necessidade de quantificar a matéria, para uma organização lógica, a quantificação sempre foi por meios de símbolos, cada era e cada civilização com suas representações, com o passar dos anos e a unificação de todos os povos, se fez necessário também a unificação da escrita numérica, onde chegamos aos símbolos atuais. Desde que se quantifica a matéria, não se usa apenas a soma como processo, apenas na era atual se foi estudado observando a negatividade dos números, onde na antiguidade o negativo só era compreendido como perca ou falta nas suas quantificações.

Os obstáculos epistemológicos são de umas barreiras que impedem o total entendimento, no qual há um bloqueio no avanço compreensivo por múltiplos fatores, tanto o pouco conhecimento aprofundado do assunto, ou até mesmo uma dificuldade em assimilar um tema extremamente complexo. Quando o obstáculo é ultrapassando e desfeito, o estado de inercia se altera, a capacidade de entendimento por determinado assunto se amplia de forma que, abrem-se vários campos no âmbito cientifico.

Pela observação dos aspectos analisados percebemos que por muito tempo as limitações do entendimento dos números relativos se fizeram por meio do apego de situações concretas. Para se ter um bom entendimento desse conteúdo é necessário que haja uma abstração. Não devemos limitar os estudantes apenas com argumentos práticos e concretos, pois assim, pode acarretar em problemas futuros, todavia não é conveniente levar a criança a uma abstração profunda.

Portanto, cabe ao professor buscar uma maneira que possa possibilitar ao aluno o progresso do conhecimento cientifico, fazendo o uso de práticas pedagógicas que irá o ajudar no processo de desenvolvimento. Deixo os seguintes questionamentos: Ao falarmos de números relativos e os obstáculos epistemológicos, será que o mesmo só afeta alunos do ensino fundamental e médio, ou também os alunos da graduação? Será que a forma que nos foi apresentado a regra dos sinais é a adequada para nos ancorar nas aprendizagens de conteúdos matemáticos ao longo do nosso processo de escolarização?

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

BACHELARD, Gaston. **A formação do espírito científico**. São Paulo: Contraponto, 1996.

BROUSSEAU, Guy. **Les obstacles épistemologiques et les problémes en mathématiques.** Grenoble, Recherches en didactique des mathematiques. v. 4, n. 12. p. 165-198. 1983.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba, Ed. UFPR, p.167-185, 2007.

ALEMBERT, J. (d'). **Artigos Négatif et Quantité na Enciclopédia**

BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa; NUNES, Terezinha. **Como significados, propriedades invariantes e representações simbólicas influenciam a compreensão do conceito de número inteiro relativo**. Educ. Mat. Pesquisa, São Paulo, v. 6, n. 1, p.73100, abr. 2004.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental**. Brasília: MEC / SEF, p. 148, 1998

NETO, Francisco Tavares da Rocha. **Dificuldades na aprendizagem operatória de números inteiros no ensino fundamental**. 81 f. Dissertação (Mestrado Profissional no Ensino de Ciências e Matemática) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, 2010.

CARNOT, Lazare. **Géométrie de Position**. Paris: (1803) Duprat. CAUCHY, Augustin. Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. Paris: De Bure(1821).

DESCARTES, René. **La Géom chétrie**. (1628) Paris: Hermann, 1927.

EULER, Léonard. **Vollstandige Anleitung zur Álgebra Opera Omnia(1770)**. Series Prima. Volumen Primum, 1911.

FERMAT, Pierre de. **Ouevres complètes**. Paris: Gauthier-Villars. (1891).

FREUDENTHAL, Hans. **Mathématics as an Education Task.** Dordrecht Reidel. (1973).

GLAESER, Georges. **Mathematiques pour 1' eleve Professeur (1969)**. Paris: Hermann. HANKEL, Hermann (1867). Theorie des Complexen Zahlsysteme. Leipzig: Leopold Voss.

MACLAURIN, Colin. **Traité des Fluxions (1742)**. (Transleted by P. Pezenas, 1749).

MACLAURIN, Celin. **Traité d'Algèbre et de la manière de l'appliquer**. Paris: C.A. Jombert, 1753.

Nova Andradina, dezembro de 2018

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974

https://psicoativo.com/2016/04/gaston-bachelard-e-os-obstaculos-epistemologicos-resumo.html.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba, Ed. UFPR, p.167-185, 2007.

COSTA, Manoel Amoroso. **As Ideias Fundamentais da Matemática e outros Ensaios**. São Paulo: Editora Convívio, Editora da universidade de São Paulo, EDUSP, (1981)

https://psicoativo.com/2016/04/gaston-bachelard-e-os-obstaculos-epistemologicos-resumo.html

Nova Andradina, dezembro de 2018