UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

SUELEN FURTADO DE OLIVEIRA SOCABE

TOPICOS DE ESPAÇOS MÉTRICOS

Cassilândia-MS

2018

SUELEN FURTADO DE OLIVEIRA SOCABE

TÓPICOS DE ESPAÇOS MÉTRICOS

Trabalho de graduação apresentado ao curso de licenciatura em Matemática do Departamento de Matemática, da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para obtenção do grau de licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ailton Ribeiro de Oliveira

Cassilândia

2018

S662t Socabe, Suelen Furtado de Oliveira
Tópicos de espaços métricos /Suelen Furtado de Oliveira Socabe. Cassilândia, MS: UEMS, 2018.
60p. ; 30 cm.

Monografia (Graduação) – Matemática – Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2018.
Orientador: Prof. Dr. Ailton Ribeiro de Oliveira.

1. Espaços métricos 2. Topologia 3. Matemática I. Título.

CDD 23.ed. 514.3

Tópicos de Espaços Métricos

Suelen Furtado de Oliveira Socabe

Trabalho de Graduação apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Estado de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Ailton Ribeiro de Oliveira ....
(Orientador)

Prof. Dr. Marco Aparecido Queiroz Duarte ....

Prof^a Dr^a Regina Litz Lamblém ....

Cassilândia

Novembro - 2018

“O temor do senhor é o princípio da sabedoria

e o conhecimento do santo é entendimento. ”

Provérbios 9:10.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me dar condições e forças para continuar em frente nas dificuldades e assim poder concluir esse trabalho.

Á minha família por sempre estar ao meu lado, e me apoiar em cada momento e nas escolhas que tive que tomar. A todos os colegas de curso, que começamos juntos, tivemos uma caminhada difícil até o último ano, principalmente a Milena, o Bruno, Ederson e o Daniel, pois eles foram muito importante nos anos finais, e o meu aprendizado passou também por eles.
A todos os professores que contribuíram para o meu aprendizado, em especial, ao meu orientador, pela parceria durante esse último ano, pelos esclarecimentos, paciência, atenção e disponibilidade para me atender, e aos professores que aceitaram a participar da banca examinadora Marco e Regina. À todas as pessoas que não mencionei mas que de uma forma ou de outra contribuíram para a conclusão desse trabalho.

Resumo

Um espaço métrico é um conjunto munido de uma distância, que chamamos de métrica. Neste trabalho apresentamos os espaços métricos bem como suas propriedades principais. Após a introdução desses conceitos e exemplos, trabalha-se com topologia, conjuntos abertos e fechados, para então introduzirmos funções contínuas e suas propriedades. E a partir dessa ideia definiremos homeomorfismos que é a noção principal de igualdade em topologia.

Palavras chave: Espaços métricos, topologia, matemática.

Abstract

A metric space is a set with a distance, whick we call metric. In this work we intent to present the metric spacces and their main properties. After the introduction of these concepts and examples, we work with topology, opened and closed sets, in order to presente the continuous functions and their properties. And from this idea we want to define homeomorphisms as the main notion of equality in topology.

Key words: Metric spaces, topology, mathematics

Sumário

Introdução

Tanto no cálculo como na geometria, para citar dois exemplos apenas, mesmo quando estudados de maneira elementar ou intuitiva, é fundamental o papel que desempenha a noção de distância entre dois pontos ou conceitos derivados dessa noção, como o de vizinhança de um ponto, por exemplo. Citemos entre outras, as definições de ponto de acumulação, limite, função contínua e comprimento de arco que, direta ou indiretamente, dependem da noção de distância (ou da noção de vizinhança). Assim, parece lógico, quando se busca uma generalização do Cálculo, da Análise ou da Geometria, visando a resolver problemas mais amplos, buscar antes uma generalização do conceito de distância que não dependa das particularidades dos diversos tipos de espaço em que intervêm tal noção.

Foi Cantor (1845-1918), por volta de 1870, quem deu os primeiros passos significativos nesse sentido. Estudando por essa época a representação de funções reais por meio de séries trigonométricas, Cantor procurou estender a unicidade da representação de funções dotadas de infinitos pontos singulares. Assim, chegou a noção de conjunto derivado na qual está subjacente a ideia de ponto de acumulação. Tais pesquisas, inclusive, ensejavam-lhe, posteriormente, a criação da aritmética transfinita e da teoria dos conjuntos com o que se consagrou, apesar das incompreensões iniciais, como um dos grandes da matemática em todos os tempos. Pouco depois, na década de 1880, alguns matemáticos italianos como Ascoli (1887-1957) e Pincherle (1853-1936), por exemplo fizeram uso das ideias de Cantor para o estudo de espaços não-convencionais, espaços em que um ponto poderia ser uma curva ou uma função.

O passo seguinte, e decisivo, foi dado por Frechet (1878-1973) em 1906 com sua tese de doutoramento. Neste trabalho, que marca o ínicio do cálculo funcional, Frechet formulou uma generalização dos conceitos de limite, derivada e continuidade para espaços de funções e, vislumbrando a economia de trabalho e o grau de generalização que poderiam advir de um estudo conjunto dos mais diversos espaços, sugeriu uma definição geral e abstrata do conceito de distância e pesquisou várias maneiras de conseguir tal objetivo, sendo este o ponto de partida da teoria dos espaços métricos. Este assunto foi posteriormente desenvolvido por Hausdorff (1868-1942) em 1914 ganhou sua contextura praticamente atual com Urysohn (1898-1924).

No curso de licenciatura em matemática há uma série de disciplinas que trabalham com a noção de distância, como o cálculo diferencial e integral, as geometrias Euclidiana e analítica e a análise real, ver referência[8] . Nestes casos, o cálculo da distância entre dois pontos fica restrito ao comprimento do segmento de reta que une esses pontos. Como os elementos de um espaço métrico têm natureza bastante arbitrária, desejamos estudar um conceito de distância entre objetos mais gerais que números, pontos e vetores, como funções, conjuntos, matrizes e outros. Neste trabalho, veremos que a distância entre dois pontos de um conjunto qualquer é uma função de duas variáveis que satisfaz três propriedades, denominada de métrica do conjunto.

A motivação de estudar tal assunto é que os espaços métricos servem de base para o entendimento dos espaços topológicos, que são os espaços estudados em topologia. Atualmente os espaços métricos são considerados casos específicos, mas muito importantes, de espaços topológicos. Esses espaços estão presentes em quase todos os ramos da matemática o que permitiu que a topologia se tornasse uma ponte entre diversas teorias matemáticas, ver em [11].

Além disso, a topologia permeia muitas áreas além da matemática, dentre elas a biologia celular; a física, incluindo a termodinâmica de supercondutores e cristais líquidos; a engenharia de materiais; a química; a computação, abrangendo análise de imagem e robótica; a mecânica estatística, entre outras. Em uma aplicação prática, por exemplo, para classificar como uma proteína se dobra, precisa-se compará-la com alguma estrutura conhecida. Para isso, é usada a descrição topológica da proteína.

Uma outra contribuição importante e recente da topologia foi dada pelos cientistas britânicos David J. Thouless, F. Duncan M. Haldane e J. Michael Kosterlitz ganhadores do prêmio nobel de física de 2016. Eles obtiveram descobertas teóricas das transições de fases topológicas da matéria. Suas pesquisas permitiram avanços na compreensão teórica dos mistérios da matéria e criaram novas perspectivas para o desenvolvimento de materiais inovadores, podendo ser usadas em novas gerações de eletrônicos e supercondutores, ou em futuros computadores quânticos.

O principal objetivo deste texto é apresentar os espaços métricos e suas características de forma detalhada, abordar as propriedades topológicas desses espaços, para, enfim, explorar as noções de continuidade e de homeomorfismos.

Neste trabalho apresentaremos os espaços métricos, que são conjuntos munidos de uma distância, que chamamos de métrica. Após a introdução desses conceitos e exemplos, trabalha-se com a noção de bolas abertas, métricas equivalentes e sequências, que são temas fundamentais para o desenvolvimento do trabalho, ver em [3]. Além disso, exploraremos a topologia desses espaços, como conjuntos abertos, conjuntos fechados, pontos de acumulação e ponto aderente. E, ainda, estudaremos as funções contínuas e suas propriedades. Por fim, veremos os espaços homeomorfos, que são espaços topologicamente equivalentes.

Como os espaços métricos podem ser pensados como uma generalização de alguns conceitos de cálculo e geometria, o leitor, familiarizado com essas disciplinas, vai se deparar com alguns conceitos conhecidos, como as noções de conjuntos abertos, interior de um conjunto, vizinhança, conjuntos fechados, sequências e continuidade, só que numa visão bem mais geral.

Este trabalho está organizado da seguinte forma.

No Capítulo 1, serão apresentados os principais resultados sobre espaços métricos, bolas abertas, métricas equivalentes e sequência em espaços métricos.

No Capítulo 2, trabalhamos as noções topológicas dos espaços métricos, como conjuntos abertos, conjuntos fechados, pontos de acumulação e ponto aderente, juntamente com várias propriedades que caracterizam esses assuntos.

No Capítulo 3, serão trabalhadas as funções contínuas e algumas de suas propriedades, destacando as funções Lipschitzianas, as imersões isométricas e as contrações. Este tema é fundamental para o estudo dos homeomorfismos que serão estudados no capítulo seguinte.

No Capítulo 4, serão apresentados conceitos de espaços homeomorfos, que nada mais é do que espaços que possuem as mesmas propriedades topológicas, e exemplos.

Capítulo 1

Espaços Métricos

Neste capítulo será apresentado o conceito de espaços métricos bem como algumas de suas propriedades e um vasto número de exemplos. Depois, faremos um estudo das bolas abertas em espaços métricos, métricas equivalentes e sequência em espaços métricos.

Este capítulo foi baseado na referência [3].

1.1 Espaços Métricos

Definição 1.1. *Seja M um conjunto qualquer, não vazio. Dizemos que $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ é uma métrica se satisfaz as seguintes propriedades para $x, y, z \in M$:*
(i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$
(ii) $d(x,y) = d(y,x)$
(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Nas condições acima, $d(x,y)$ é chamada de distância de x a y.

Um par (M,d), em que M é um conjunto não vazio e d uma métrica em M, é chamado de espaço métrico.

A propriedade (iii) é conhecida como desigualdade triangular e tem origem no fato de que na geometria do plano euclidiano, cada lado de um triângulo tem medida menor que a soma das medidas dos outros dois lados.

Para um melhor entendimento dos espaços métricos vamos apresentar alguns exemplos.

Exemplo 1.2. *A aplicação $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definida por $d(x,y) = |x - y|$ é uma métrica sobre $\mathbb{R}$. De fato,para todo $x, y \in \mathbb{R}$, temos que* *(i)* $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$,

pois

$$d(x,y) = |x-y| = 0 \Longrightarrow x - y = 0 \Longrightarrow x = y.$$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$

$$d(x,y) = |x-y| = |(-1)(y-x)| = |-1|.|y-x| = |y-x| = d(y,x).$$

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ $(|x-y| \leq |x-z| + |z-y|)$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x-y| \\ &= |x-z+z-y| \\ &= |(x-z)+(z-y)| \\ &\leq |x-z| + |z-y| \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Portanto, d é uma métrica sobre $\mathbb{R}$.

Exemplo 1.3 (Subespaço métrico)**.** *Se (M,d) é um espaço métrico, então todo subconjunto S de M pode ser considerado um espaço métrico com a métrica induzida de (M,d). É natural chamar (S,d) de subespaço métrico de (M,d).*

Exemplo 1.4 (Métrica discreta ou métrica zero-um)**.** *Consideremos um conjunto M qualquer e definimos a métrica $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ dada por*

$$d(x,x) = 0, \ \forall x \in M \qquad\qquad e \qquad\qquad d(x,y) = 1, \ para \ x \neq y.$$

Assim, (M,d) é um espaço métrico. Com efeito,

i) $d(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y$ *(por definição).*

ii) Se $x = y$, então $d(x,x) = 0$.

Se $x \neq y$, temos que

$$d(x,y) = 1 = d(y,x), \ \ ou \ seja, \ \ d(x,y) = d(y,x).$$

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Temos que analisar algumas alternativas.

Se $x = y$*, então* $d(x,y) = 0 \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Considere $x \neq y$*. Assim* $d(x,y) = 1$.

a) Se $x = z$ *e* $y \neq z$*, então* $d(x,z) = 0$ *e* $d(y,z) = 1$ *e*

$$d(x,y) = 1 \leq 0 + 1 = d(x,z) + d(y,z).$$

b) Se $y = z$ *e* $x \neq z$*, então* $d(y,z) = 0$ *e* $d(x,z) = 1$ *e*

$$d(x,y) = 1 \leq 1 + 0 = d(x,z) + d(y,z).$$

No próximo exemplo a métrica d, se inspira na fórmula da distância entre dois pontos no espaço usual. As métricas d_1 e d_2, apesar de não parecerem tão naturais, no ponto de vista prático são muito utilizadas.

Exemplo 1.5. *Considere o conjunto:* $\mathbb{R}^n\{(x_1, x_2, \cdots, x_n); x_i$ *está em* $\mathbb{R}\}$

Sendo $x = (x_1, \cdots, x_n)$*,* $y = (y_1, \cdots, y_n)$ *e* $z = (z_1, \cdots, z_n)$ *pontos arbitrários do* $\mathbb{R}^n$*, vamos definir três métricas sobre o* $\mathbb{R}^n$*, chamada de métrica Euclidiana, métrica da soma e métrica do máximo, respectivamente:*

$$a)\ d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}.$$
$$b)\ d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n|.$$
$$c)\ d_2(x,y) = max\{|x_1 - y_1|, \cdots, |x_n - y_n|\}.$$

Vamos verificar as propriedades de métrica para o caso particular $\mathbb{R}^2$.

(a) *para a métrica d ou métrica Euclidiana*

i) $d(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= 0 \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x_1 - y_1) = 0 \quad e \quad (x_2 - y_2) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x_1 = y_1 \ e \ x_2 = y_2 \\ &\Longleftrightarrow x = y. \end{aligned}$$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

Temos que $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. *Por outro lado,*

$$\begin{aligned} d(y, x) &= \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2} \\ &= \sqrt{((y_1 - x_1).(-1))^2 + ((y_2 - x_2).(-1))^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2} \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

$$\begin{aligned} [d(x, y)]^2 &= (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \\ &= (x_1 - z_1 + z_1 - y_1)^2 + (x_2 - z_2 + z_2 - y_2)^2 \\ &= (x_1 - z_1)^2 + 2(x_1 - z_1)(z_1 - y_1) + (z_1 - y_1)^2 \\ &+ (x_2 - z_2)^2 + 2(x_2 - z_2)(z_2 - y_2) + (z_2 - y_2)^2 \\ &\leq (x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2 + (z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 \\ &+ 2[(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2]^{\frac{1}{2}}[(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &= [\sqrt{(x_1 - z_1)^2 + (x_2 - z_2)^2} + \sqrt{(z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2}]^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$$

(b) *Para a métrica* d_1 *ou métrica da soma*

i) $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$.

De $d(x, y) = 0$, *obtemos*

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| = 0 \Longleftrightarrow |x_1 - y_1| = 0 \ e \ |x_2 - y_2| = 0.$$

Segue que $x_1 - y_1 = 0$ *e* $x_2 - y_2 = 0$, *ou seja,* $x_1 = y_1$ *e* $x_2 = y_2$

portanto,

$$d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y.$$

ii) $d(x, y) = d(y, x)$

$$\begin{aligned} d(y, x) &= |y_1 - x_1|.|-1| + |y_2 - x_2|.|-1| \\ &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| \\ &= |x_1 - z_1 + z_1 - y_1| + |x_2 - z_2 + z_2 - y_2| \\ &\leq |x_1 - z_1| + |z_1 - y_1| + |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2| \\ &= (|x_1 - z_1| + |x_2 - z_2|) + (|z_1 - y_1| + |z_2 - y_2|) \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Assim $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ *para todos* x, y, z *em* $\mathbb{R}^2$.

(c) *Para métrica* d_2 *ou métrica do máximo*

i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$

$d(x,y) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} = 0 \iff |x_1 - y_1| = 0$ *e* $|x_2 - y_2| = 0 \iff x_1 = y_1$ *e* $x_2 = y_2 \Longrightarrow x = y$.

ii) $d(x,y) = d(y,x)$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \\ &= max\{|-1||y_1 - x_1|, |-1||y_2 - x_2|\} \\ &= max\{|y_1 - x_1|, |y_2 - x_2|\} = d(y,x). \end{aligned}$$

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

$$\begin{aligned} d(x,y) &= max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \\ &= max\{|x_1 - z_1 + z_1 - y_1|, |x_2 - z_2 + z_2 - y_2|\} \\ &\leq max\{|x_1 - z_1| + |z_1 - y_1|, |x_2 - z_2| + |z_2 - y_2|\} \\ &\leq max\{|x_1 - z_1| + |x_2 - z_2|, |z_1 - y_1| + |z_2 - y_2|\} \\ &\leq max\{|x_1 - z_1, |x_2 - z_2|\} + max\{|z_1 - y_1|, |z_2 - y_2|\} \\ &\leq d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Observação 1.6. *A métrica Euclidiana é a métrica natural de* $\mathbb{R}^2$ *e, por isso, também é conhecida como métrica usual em* $\mathbb{R}^2$

Exemplo 1.7 (Espaços vetoriais normados)**.** *Dizemos que* $\|\cdot\|\colon E \to \mathbb{R}$*, definida por* $\|\cdot\|(x) = \|x\|$*, para todos* $x \in \mathbb{R}$*, é uma norma em* E *quando, para quaisquer* $x, y \in \mathbb{R}$ *e* $a \in \mathbb{R}$*, tem-se*

(n_1) $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

(n_2) $\|ax\| = |a|.\|x\|$.

(n_3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Se E é um espaço vetorial normado então $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ definida por $d(x,y) = \|x-y\|$ é uma métrica sobre E.

i) $d(x,y) = 0 \Rightarrow \|x-y\| = 0 \Rightarrow x = y$.

ii) $d(x,y) = \|x-y\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1|.\|y-x\| = \|y-x\| = d(y,x)$.

iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, de fato

$$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x-y\| \\ &= \|(x-z)+(z-y)\| \\ &\leq \|x-z\| + \|z-y\| \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Portanto, a aplicação $d(x,y) = \|x-y\|$ é uma métrica sobre E.

1.2 Bolas Abertas

O conceito de bola aberta desempenha papel fundamental na teoria de espaços métricos, e, é importante para prosseguirmos nos estudos desse trabalho. Veremos que ao tratarmos de bola em espaços métricos, dependendo das métricas teremos formas diferentes, mas esta bola propriamente dita não se refere a esfera. Esta seção foi baseado nas referências [2] e [12]

Definição 1.8. *Seja p um ponto de um espaço métrico (M,d). Sendo $\epsilon > 0$ um número real, a bola de centro p e raio ϵ, que indicaremos por $B(p,\epsilon)$, é o seguinte subconjunto de M*

$$B(p,\epsilon) = \{x \in M |\ d(x,p) < \epsilon\}.$$

Para entendermos melhor o conceito de bola aberta vamos ver alguns exemplos.

Exemplo 1.9. *Seja (M,d) um espaço métrico, onde d é a métrica zero-um. Seja $p \in M$.*
1) Se $0 < \epsilon \leq 1$, então

$$d(x,p) < \epsilon \Longrightarrow B(p,\epsilon) = \{p\},$$

pois o único ponto cuja distância a p é menor que 1 é o próprio ponto p.

2) Se $1 < \epsilon$, então

$$d(x,p) < \epsilon \Longrightarrow B(p,\epsilon) = M,$$

porque todos os pontos de M estão a uma distância de p igual a zero ou igual a um e, portanto, menor que ϵ.

Exemplo 1.10. *Com a métrica usual da reta, para todo $p \in \mathbb{R}$ e todo $\epsilon > 0$, a bola de centro p e raio ϵ é o intervalo aberto $(p-\epsilon, p+\epsilon)$. De fato,*

$$\begin{aligned} B(p,\epsilon) &= \{x \in \mathbb{R}; d(x,p) < \epsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}; |x-p| < \epsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}; p-\epsilon < x < p+\epsilon\} \\ &= (p-\epsilon, p+\epsilon). \end{aligned}$$

Exemplo 1.11. *No espaço Euclidiano $\mathbb{R}^2$, já foram definidas as três métricas abaixo:*

$$a)\ d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$
$$b)\ d_1(x,y) = |x_1-y_1| + |x_2-y_2|$$
$$c)\ d_2(x,y) = max\{|x_1-y_1|, |x_2-y_2|\},$$

onde $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ são pontos arbitrários de $\mathbb{R}^2$.

Sendo $p = (x_0, y_0)$ um ponto fixo de $\mathbb{R}^2$, uma bola de centro p e raio $\epsilon > 0$ segundo a métrica d é o conjunto:

$$B[(x_0,y_0),\epsilon] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; d[(x,y),(x_0,y_0)] < \epsilon\}.$$

Mas,

$$\begin{aligned} d[(x,y),(x_0,y_0)] &= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \epsilon \\ &= (\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2})^2 < (\epsilon)^2 \\ &= (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \epsilon^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$B[(x_0,y_0),\epsilon] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < \epsilon^2\},$$

que é o interior de uma circunferência centrada em (x_0, y_0) e raio ϵ.

Quando consideramos a métrica d_1, uma bola de centro p e raio ϵ é dada por

$$\begin{aligned} B(p,\epsilon) &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; d_1((x,y),(x_0,y_0)) = \epsilon\} \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; |x-x_0| + |y-y_0| = \epsilon\}, \end{aligned}$$

é um quadrado aberto de diagonais paralelas aos eixos coordenados. Por último na métrica d_2*, temos*

$$\begin{aligned} B(p,\epsilon) &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; d_2((x,y),(x_0,y_0))=\epsilon\} \\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2; max\{|x-x_0|+|y-y_0|\}=\epsilon\}, \end{aligned}$$

que representa no plano o interior de um quadrado, cujos lados são paralelos aos eixos coordenados. Para uma visão geométrica das bolas abertas descritas acima, ver a Figura 1.1

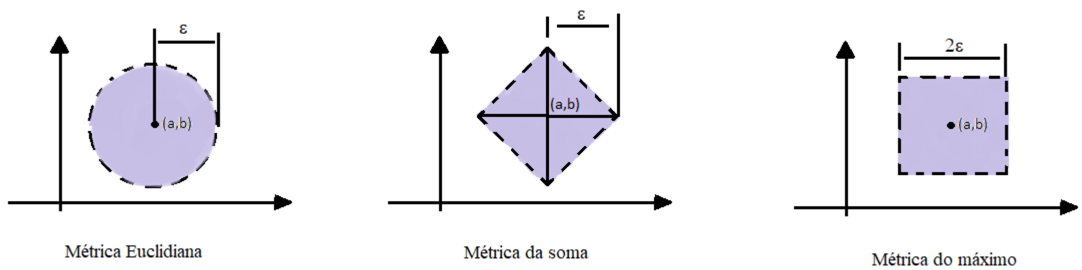

Figura 1.1: Bolas abertas. Fonte: referência [3]

Observação 1.12. *Geometricamente, essas bolas representam o interior de uma circunferência de centro* $p=(a,b)$ *e raio* $\epsilon>0$ *na métrica* d*; o interior de um quadrado de centro* $p=(a,b)$*, cujas diagonais possuem comprimento* 2ϵ *e são paralelas aos eixos da métrica* d_1*; o interior de um quadrado de centro* $p=(a,b)$*, cujos lados possuem comprimento* 2ϵ *e são paralelos ao eixo da métrica* d_2*.*

Exemplo 1.13. *O espaço das funções contínuas definidas em um intervalo fechado é representado por* $C[a,b]=\{f:[a,b]\to\mathbb{R} : f \text{ é contínua}\}$*. O conjunto* $(C[a,b],d)$*, onde* d *é a métrica do supremo,*

$$d(f,g)=sup\{|f(x)-g(x)|; x\in[a,b]<\epsilon\},$$

é um espaço métrico. Se $g\in(C[a,b],d)$*, então a bola aberta em* $(C[a,b],d)$ *é dada por:*

$$B(g,\epsilon)=\{f\in C[a,b]; d(f,g)<\epsilon\}.$$

Exemplo 1.14. *Seja* (M,d) *um espaço métrico e* $N\subset M$ *um subespaço métrico de* M*.*

Dado $p \in N$, uma bola de centro p e raio $\epsilon > 0$, em relação a N, é dada por:

$$\begin{aligned} B(p,\epsilon) &= \{x \in N; d(x,p) < \epsilon\} \\ &= B(p,\epsilon) \cap N. \end{aligned}$$

Vejamos: se $M = \mathbb{R}$ e $N = [2,5]$, vamos calcular a bola aberta $B(2,1)$ em relação a N (denotada por $B_N(2,1)$). Primeiramente, calculamos a $B(2,1)$ em relação a M:

$$\begin{aligned} B(2,1) &= \{x \in \mathbb{R}; d(x,2) < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}; |x-2| < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}; 1 < x < 3\}. \end{aligned}$$

Agora, calculamos $B_N(2,1)$:

$$\begin{aligned} B_N(2,1) &= B(2,1) \cap [2,5] \\ &= \{x \in \mathbb{R}; 2 < x < 3\} \\ &= (2,3). \end{aligned}$$

Definição 1.15. *Dado um espaço métrico (M,d), um ponto $p \in M$ se diz ponto isolado de M se existir $\epsilon > 0$ de maneira que $B(p,\epsilon) = \{p\}$. Observemos que um ponto $p \in M$ não ser isolado, significa dizer que para todo $\epsilon > 0$ pode-se encontrar um ponto $p_0 \in M$, onde $p \neq p_0$ tal que $0 < d(p_0,p) < \epsilon$ ou seja $p_0 \in B(p,\epsilon)$.*

Exemplo 1.16. *Seja (M,d) um espaço métrico cuja métrica é a zero-um. Então, todo ponto de M é isolado pois tomando $\epsilon \in \mathbb{R}$ de modo que $0 < \epsilon \leq 1$, tem-se que $B(p,\epsilon) = \{p\}$, para $p \in M$.*

Exemplo 1.17. *Seja $\mathbb{Z} = \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\}$ o conjunto dos números inteiros. $\mathbb{Z}$ é um subespaço métrico de $\mathbb{R}$, com a métrica usual da reta. Todo ponto $p \in \mathbb{Z}$ é isolado, pois não existe x em $\mathbb{Z}$, tal que $x \in B(p,1)$, uma vez que*

$$x \in B(p,1) \Rightarrow d(x,p) < 1 \Rightarrow |x-p| < 1 \Rightarrow x = p.$$

Observe que

$$\begin{aligned} B(0,1) &= \{x \in \mathbb{Z}; d(x,0) < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}; |x| < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z}; -1 < x < 1\} \\ &= \{0\}. \end{aligned}$$

Exemplo 1.18. *No produto cartesiano* $M = M_1 \times M_2$ *tomemos a métrica*

$$d(x, y) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\},$$

para quaisquer $x = (x_1, x_2)$ *e* $y = (y_1, y_2)$ *de* $\mathbb{R}^2$*. Se tomamos* $p = (a, b)$*, então*

$$B(p, \epsilon) =]a - \epsilon, a + \epsilon[\times]b - \epsilon, b + \epsilon[,$$

ou seja, $B(p, \epsilon)$ *é o produto cartesiano das bolas de centro* a, b *e raio* ϵ*, que denotaremos como*

$$B(p, \epsilon) = B(a, \epsilon) \times B(b, \epsilon).$$

Proposição 1.19. *Sejam* $(M_1, d_1), \ldots, (M_n, d_n)$ *espaços métricos e* $M = M_1 \times \ldots \times M_n$ *com a métrica do máximo,*

$$D_2(x, y) = max\{d_1(x_1, y_1), \cdots, d_n(x_n, y_n)\},$$

para quaisquer $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $y = (y_1, \ldots, y_n)$ *de* M*. Nessas condições, vale*

$$B(a, \epsilon) = B(a_1, \epsilon) \times \cdots \times B(a_n, \epsilon),$$

onde $a = (a_1, \ldots, a_n) \in M$*.*

De fato, seja $p = (p_1, \ldots, p_n)$ *um ponto arbitrário de* M*, então* $p \in B(a, \epsilon) \iff d(p, a) < \epsilon \iff max\{|p_1 - a_1|, \ldots, |p_n - a_n|\} < \epsilon \iff |p_i - a_i| < \epsilon, \forall i = 1, \ldots, n \iff p_i \in B(a_i, \epsilon), \forall i = 1, \ldots, n \iff p \in B(a_1, \epsilon) \times B(a_2, \epsilon) \times, \ldots, \times B(a_n, \epsilon)$*.*

Agora, mostraremos as propriedades de bolas abertas, pois, será de suma importância para o desenvolvimento do trabalho, e para isso usaremos a bolas quaisquer de um espaço métrico arbitrário (M, d).

1. $B(p, \epsilon)$ e $B(p, \delta)$ se $\epsilon \leq \delta$, então $B(p, \epsilon) \subset B(p, \delta)$.

   Demonstração. Se $x \in B(p, \epsilon)$, temos que $d(x, p) < \epsilon$, mas, como $\epsilon \leq \delta$, então $d(x, p) < \delta$. Portanto $x \in B(p, \delta)$. □

2. Dado $q \in B(p, \epsilon)$ então existe $\delta > 0$ de maneira que $B(q, \delta) \subset B(p, \epsilon)$.

Demonstração. Tome $\delta = \epsilon - d(p,q)$ que é maior que zero, pois $q \in B(p,\epsilon)$. Seja $x \in B(q,\delta)$.

Pela desigualdade triangular, garantimos que $d(x,p) \leq d(x,q) + d(q,p)$. Como vimos $d(x,p) < \delta = \epsilon - d(p,q)$, então podemos dizer que $d(x,p) \leq \epsilon - d(p,q) + d(q,p)$ e, assim, $d(x,p) \leq \epsilon$. O que nos garante que $x \in B(p,\epsilon)$. □

3. Considere as bolas $B(p,\epsilon)$ e $B(p,\delta)$ tais que $B(p,\epsilon) \cap B(q,\delta) \neq 0$. Se $t \in B(p,\epsilon) \cap B(q,\delta)$, então existe uma bola contida na intersecção, ou seja, $B(p,t) \subset B(p,\epsilon) \cap B(q,\delta)$, para $t > 0$.

   Demonstração. Como $t \in B(p,\epsilon) \cap B(q,\epsilon)$, tem-se que

$$\exists \lambda_1 > 0 \text{ tal que } B(t,\lambda_1) \subset B(p,\epsilon) \tag{1.1}$$

$$\exists \lambda_2 > 0 \text{ tal que } B(t,\lambda_2) \subset B(p,\delta). \tag{1.2}$$

   Tomemos $\lambda = min\{\lambda_1, \lambda_2\}$. Segue, pela $(P1)$:
   $B(t,\lambda) \subset B(t,\lambda_1)$ e $B(t,\lambda) \subset B(t,\lambda_2)$ então, pelas equações (1.1) e (1.2), podemos concluir que

$$B(t,\lambda) \subset B(p,\epsilon) \ e \ B(q,\delta).$$

□

4. Sejam p, q dois pontos distintos entre si de um espaço M. Se $d(p,q) = \epsilon$, então $B(p,\frac{\epsilon}{2}) \cap B(q,\frac{\epsilon}{2}) = \emptyset$.
   Suponhamos que $d(x,p) < \frac{\epsilon}{2}$ e $d(x,p) < \frac{\epsilon}{2}$. Se $x \in B(p,\frac{\epsilon}{2}) \cap B(q,\frac{\epsilon}{2})$, então

$$\epsilon = d(p,q) \leq d(p,x) + d(x,q) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

   ou seja $\epsilon < \epsilon$, o que é um absurdo.

5. Dados as bolas $B(p,\epsilon)$ e $B(q,\delta)$. Se $\epsilon + \delta \leq d(p,q)$ então $B(p,\epsilon) \cap B(q,\delta) = \emptyset$.
   Suponhamos que $x \in B(p,\epsilon) \cap B(q,\delta)$. Assim, $d(x,p) < \epsilon$ e $d(x,q) < \delta$. Segue que

$$d(p,q) < d(p,x) + d(q,x) < \epsilon + \delta \leq d(p,q)$$

   e, portanto, $d(p,q) < d(p,q)$, o que é absurdo.

6. O diâmetro de uma bola $B(p, \epsilon)$ é menor ou igual a 2ϵ.

   De fato, tomando dois pontos arbitrários x, y tais que $x, y \in B(p, \epsilon)$, temos que

$$d(x, y) \leq d(x, p) + d(y, q) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

1.3 Métricas equivalentes

Definição 1.20. *Sejam d e d' métricas sobre o mesmo espaço métrico M. Diz-se que d e d' são equivalentes se, para cada $p \in M$, valem as afirmações a seguir:*

I) qualquer que seja a bola $B_d(p, \epsilon)$, existe $\lambda > 0$ tal que $B_{d'}(p, \lambda) \subset B_d(p, \epsilon)$.

II) qualquer que seja a bola $B_{d'}(p, \epsilon)$, existe $\lambda > 0$ tal que $B_d(p, \lambda) \subset B_{d'}(p, \epsilon)$.

Podemos notar que métricas equivalentes possuem as mesmas propriedades, pois uma bola associada a uma dessas métricas está contida em uma outra bola associada a outra métrica.

Proposição 1.21. *Considere as métricas d, d' sobre um espaço métrico M. Se existirem $r, s > 0$ tais que:*

$$rd(x, y) \leq d'(x, y) \leq sd(x, y), \quad \textit{para quaisquer } x, y \in M,$$

então d e d' são equivalentes.

Demonstração. Dado $p \in M$, considere a bola aberta $B_d(p, \epsilon)$ e mostremos que $B_{d'}(p, r\epsilon) \subset B_d(p, \epsilon)$.
Seja $x \in B_{d'}(p, r\epsilon)$. Então, $d'(x, p) < r\epsilon$ e, usando a hipótese, temos que $rd(x, p) \leq d'(x, p) < r\epsilon$, ou seja, $d(x, p) < \epsilon$. Logo $x \in B_d(p, \epsilon)$.

Por outro lado, dado $p \in M$, considere a bola aberta $B_{d'}(p, \epsilon)$ e mostremos que $B_d(p, \frac{\epsilon}{s}) \subset B_{d'}(p, \epsilon)$. Seja $x \in B_d(p, \frac{\epsilon}{s})$. Temos que $d(x, p) < \frac{\epsilon}{s}$ e, usando a hipótese, chegamos a $d'(x, y) \leq sd(x, p) < \epsilon$, isto é, $d'(x, p) < \epsilon$ e, portanto, $x \in B_{d'}(p, \epsilon)$. □

Exemplo 1.22. *As métricas:*

$$\begin{aligned}
d(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} \\
d_1(x, y) &= |x_1 - y_1| + \ldots + |x_n - y_n| \\
d_2(x, y) &= max\{|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|\},
\end{aligned}$$

são equivalentes.

De fato, valem as relações:

$$d_2(x,y) \leq d(x,y) \leq d_1(x,y) \leq nd_2(x,y) \leq nd(x,y).$$

Para uma noção geométrica dos fatos acima, ver a Figura 1.2.

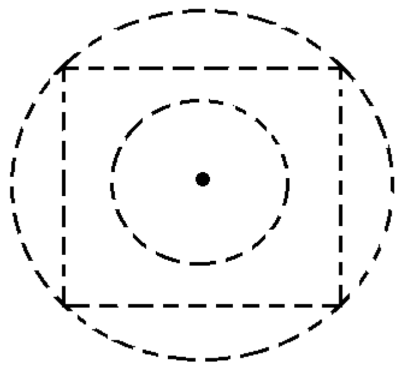

Figura 1.2: Métricas equivalentes. Fonte: referência [3]

1.4 Sequências em Espaços Métricos

Para o leitor deve ser familiar o conceito de sequência no conjunto dos números reais. Nesta seção, vamos estudar sequência em espaços mais gerais do que o conjunto dos números reais. Para mais informações sobre o conceito de sequência em $\mathbb{R}$, ver [9] e [5].

Dado um espaço métrico (M,d), toda aplicação $n \to x_n$, de $\mathbb{N}^*$ em M, é chamada de sequência de elementos de M e sua notação é dada por (x_n).

Dada uma sequência (x_n), cada imagem x_n chamada de Termo da Sequência e seu conjunto de valores é $\{x_n | n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exemplo 1.23. *Definindo a aplicação* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *tal que* $x_n = 2$*, obtemos a sequência* $(2, 2, 2, \ldots)$ *cujo o conjunto dos valores é* $\{2\}$.

Sequências em um espaço métrico tais que $x_n = p$*, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, isto é,* $(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (p, p, p, p, \ldots)$ *é chamada de sequência constante.*

Exemplo 1.24. *Se definirmos* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *pondo* $x_n = (-1)^n$, *então obteremos a sequência* $(-1, 1, -1, 1, \ldots)$ *cujo conjunto dos valores é* $\{-1, 1\}$.

Definição 1.25. *Seja* (M, d) *um espaço métrico. Dizemos que um ponto* $p \in M$ *é limite de uma sequência* (x_n) *de pontos de* M *se para toda bola* $B(p, \epsilon)$ *existe um índice* $r \in \mathbb{N}^*$ *tal que* $n \geq r$ *implicar* $x_n \in B(p, \epsilon)$.

Seja x_n uma sequência num espaço métrico M. Dizemos que o ponto $p \in M$ é limite da sequência (x_n), e denota-se por $p = \lim x_n$ ou $x_n \longrightarrow p$, se para todo $\epsilon > 0$ pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implicar $d(x_n, p) < \epsilon$.

Sendo M um espaço métrico, $\lim x_n = p_n$, se e somente se, existe $\epsilon > 0$ tal que $x_n \in B(p, \epsilon)$. Quando o limite existe,e é igual a p dizemos que a sequência é convergente em M, e converge para $p \in M$.

Proposição 1.26. *Uma sequência* x_n *de elementos de* M *converge para* $p \in M$ *se, e somente se, para qualquer* $\epsilon > 0$ *existe um índice* r *tal que* $n \geq r$ *implicar que* $d(x_n, p) < \epsilon$.

Demonstração. Segue diretamente da definição de convergência, pois $x_n \in B(p, \epsilon)$ é equivalente a $d(x_n, p) < \epsilon$. □

Exemplo 1.27. *Toda sequência constante* $x_n = p$ *é convergente e converge para* p.
De fato, para todo $\epsilon > 0$ *e* $n \in \mathbb{N}$, *temos que* $d(x_n, p) = d(p, p) = 0 < \epsilon$. *Portanto* $lim x_n = p$.

Uma sequência estacionária de um espaço métrico M *é dada por uma sequência* x_n *de pontos de* M *tal que* $x_n = p$ *a partir de um certo índice, ou seja,* $(x_n) = (x_1, \ldots, x_r, \ldots, p, p, \ldots)$ *com* $x_{r+1} = x_{r+2} = \ldots = p \ldots$. *Neste caso,* $x_n \to p$, *pois, para todo* $\epsilon > 0$:

$$n \geq r + 1 \Rightarrow d(x_n, p) = d(p, p) = 0 < \epsilon.$$

Exemplo 1.28. *Suponha que um espaço métrico* M *possui dois pontos distintos* a *e* b. *Assim, existe em* M *uma sequência divergente. Basta tomarmos* $x_{2n+1} = a$ *e* $x_{2n} = b$. *Nenhum ponto* $c \in M$ *pode ser limite da sequência* $(a, b, a, b, \ldots)$. *Se tomarmos* $\epsilon = \dfrac{d(a,b)}{2}$, *a bola aberta de centro* c *e raio* ϵ, *não contém os termos* a *e* b. *Portanto não existe* n_0 *tal que* $x_n \in B(c, \epsilon)$, *para todo* $n > n_0$.

Exemplo 1.29. *Em $\mathbb{R}$ com a métrica usual, a sequência $(x_1, x_2, \ldots)$ onde $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ converge para o ponto 1.*
De fato, dado $\epsilon > 0$, tomamos $r \in \mathbb{N}^*$ de maneira que $\dfrac{1}{r+1} < \epsilon$. Então para todo $n \geq r$ temos

$$d(x_n, 1) = |\frac{n}{n+1} - 1| = |\frac{n-n-1}{n+1}| = |\frac{-1}{n+1}| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{r+1} < \epsilon,$$

ou seja, dado ϵ, existe $r \in \mathbb{N}^*$ tal que $d(x_n, 1) < \epsilon$ para $n \geq r$.

Exemplo 1.30. *Num espaço métrico munido da métrica zero um, uma sequência x_n em M converge se, e somente se, é estacionária.*

Com efeito, suponhamos que $lim x_n = p \in M$. Tomando $0 < \epsilon \leq 1$ então existe um índice r tal que $x_r, x_{r+1}, \ldots \in B(p, \epsilon) = \{p\}$, isto é, $x_r = p, x_{r+1} = p, x_{r+2} = p, \ldots$ e a sequência é estacionária.

Por outro lado, se a sequência é estacionária então obviamente é convergente.

Proposição 1.31. *Se x_n é uma sequência convergente de um espaço métrico M, então o limite dessa sequência é único.*

Demonstração. Suponhamos que existam $a, b \in M$ distintos tais que o $lim x_n = a$ e $lim x_n = b$. Seja $\epsilon = \dfrac{d(a,b)}{2}$ que é maior que zero, pois $a \neq b$. Pela definição de limite,

i) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \epsilon$;

ii) existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_1 \Rightarrow d(x_n, b) < \epsilon$.

Tomando $m = max\{n_0, n_1\}$. Para todo $n > m$, segue que

$$d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon = d(a, b),$$

o que é absurdo. □

Proposição 1.32. *Sejam d e d' métricas equivalentes sobre um conjunto M. Então uma sequência (x_n) de pontos de M, converge no espaço (M, d) para um ponto $p \in M$ se, e somente se, a sequência converge em (M, d') para o mesmo ponto p.*

Demonstração. Suponhamos que (x_n) converge no espaço (M, d) para um ponto $p \in M$, ou seja, existe $r > 0$ tal que $n \geq r \Longrightarrow x_n \in B_d(p, \lambda)$. Como $d \sim d'$, existe $\lambda > 0$ de maneira que

$$B_d(p, \lambda) \subset B_{d'}(p, \epsilon).$$

Logo $x_n \in B_{d'}(p, \epsilon)$ e, consequentemente, $x_n \longrightarrow p$ em (M, d').

A recíproca é feita de maneira similar. Por hipótese, temos que $x_n \to p$ no espaço (M, d'), ou seja, existe $s > 0$ tal que $n \geq s \Longrightarrow x_n \in B_{d'}(p, \lambda)$. Como $d \sim d'$, existe $\lambda > 0$ de maneira que

$$B_{d'}(p, \lambda) \subset B_d(p, \epsilon).$$

Logo $x_n \in B_d(p, \epsilon)$ e, consequentemente, $x_n \longrightarrow p$ em (M, d).

□

Proposição 1.33. *Se uma sequência (x_n) de pontos de um espaço métrico M converge para $p \in M$, então toda subsequência de (x_n) também converge para p.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, considere a subsequência $(x_{r_1}, x_{r_2}, \ldots)$. Da hipótese de que $lim x_n = p$ decorre que existe k tal que

$$n \geq k \text{ implica } d(x_n, p) < \epsilon.$$

Como cada $r_i \in \mathbb{N}$ e $r_1 < r_2 < \ldots$, então existe $r_t > k$. Assim, para todo $r_i \geq r_t$ temos

$$d(x_{r_i}, p) < \epsilon$$

e, portanto, $lim x_{r_i} = p$. □

Observação 1.34. *A recíproca da proposição anterior não é válida. Em $\mathbb{R}$ a sequência $(1, 2, 1, 2, \ldots)$ não é convergente, mas suas subsequências $(1, 1, \ldots)$ e $(2, 2 \ldots)$ são convergentes.*

Definição 1.35. *Uma sequência (x_n) de pontos de um espaço métrico M é dita limitada se o conjunto $\{x_n | \; n = 1, 2, \ldots\}$ dos termos dessa sequência é limitado, isto é, existe $k > 0$ tal que $d(x_r, x_g) < k$, para quaisquer termos x_r e x_g da sequência dada.*

Proposição 1.36. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de pontos de um espaço M, converge para $p \in M$. Dada a bola $B(p,1)$ existe então um índice r tal que

$$n \geq r \ \text{ implica que } \ x_n \in B(p,1).$$

Seja $k > max\{d(x_i,p)|\ i = 1,\dots,r-1\}$. Se considerarmos a bola $B(p,\epsilon)$ onde $\epsilon = max\{1,k\}$, todos os pontos do conjunto $\{x_n | n = 1,2,\dots\}$ vão pertencer a essa bola. Segue que, para quaisquer termos x_i, x_j da sequência,

$$d(x_i,x_j) \leq d(x_i,p) + d(p,x_j) < 2\epsilon,$$

o que prova que a sequência x_n é limitada. □

Observação 1.37. *Observe que nem toda sequência limitada é convergente. De fato em* $\mathbb{R}$ *a sequência* $(1,2,1,2\dots)$ *é limitada mas não é convergente.*

Proposição 1.38. *Uma sequência* (x_n,y_n) *de pontos do produto* $M \times N$*, de dois espaços métricos* M *e* N*, converge para* $(p,q) \in M \times N$ *se, e somente se,* $x_n \longrightarrow p$ *em* M *e* $y_n \longrightarrow p$ *em* N*.*

Demonstração. Usaremos a métrica D_1 da soma para fazer a demonstração, e indicaremos por d tanto a métrica de M quanto a de N.

($\Longrightarrow$) Seja $\epsilon > 0$, então existe um índice r tal que:

$$n \geq r \Rightarrow d_1((x_n,y_n);(p,q)) = d(x_n,p) + d(y_n,q) < \epsilon.$$

Assim,

$$d(x_n,p) < \epsilon \ \text{ e } \ d(y_n,q) < \epsilon,$$

o que nos garante que $lim x_n = p$ e $lim y_n = q$.

($\Longleftarrow$) Seja $\epsilon > 0$. Por hipótese existem índices r,s tais que:

$$n \geq r \Longrightarrow d(x_n,p) < \frac{\epsilon}{2} \ \text{ e } \ n \geq s \Longrightarrow d(y_n,q) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Considerando $t = max\{r,s\}$, então:

$$n \geq t \Longrightarrow d_1((x_n,y_n);(p,q)) = d(x_n,p) + d(y_n,q) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

. Portanto, $(x_n,y_n) \longrightarrow (p,q)$. □

Exemplo 1.39. *No espaço* $\mathbb{R}^2$ *a sequência*

$$\Big((1,2);(\frac{1}{2},2);(\frac{1}{3},2),\ldots\Big)$$

converge para $(0,2)$*, uma vez que* $lim\frac{1}{n}=0$ *e* $(2,2,2,\ldots)\longrightarrow 2$*.*

CAPÍTULO 2

A Topologia dos Espaços Métricos

A topologia entende os objetos como se fosse de borracha e pudessem ser transformado. E este capítulo mostra a importância da topologia aos espaços métricos, que esta relacionado as propriedades básicas dos conjuntos abertos do espaço, ou seja, o que realmente importa, seste caso é a coleção de abertos que a métrica determina. A bibliografia utilizada para elaboração deste capítulo foi [10] e [11].

2.1 Conjuntos abertos

Definição 2.1. *Seja (M, d) um espaço métrico, um subconjunto $A \subset M$ se diz aberto se para todo $p \in A$ existe um $\epsilon > 0$ tal que a $B(p, \epsilon) \subset A$.*

Observe que a partir da definição acima, se $A \neq \emptyset$ é um conjunto aberto, então A é uma união de bolas abertas. E se A é uma união de bolas abertas, A é um conjunto aberto.

De fato, suponhamos que $A = \cup B_i$ onde cada B_i é uma bola aberta. Então dado um $p \in A$ existe um índice s tal que $p \in B_s$. Mas, de acordo com a propriedade $(P2)$ de bolas abertas, existe $\delta > 0$ tal que $B(p, \delta) \subset B_s$. Portanto $B(p, \delta) \subset A$, o que prova a afirmação.

Chama-se o interior de X em M, escrevemos $intX$, ao conjunto formado pelos pontos interiores a X. Se $b \in X$ não é interior a X, então toda bola aberta de centro b contém algum ponto que não pertence a X. Neste caso diz-se que b pertence à fronteira de X.

Exemplo 2.2. *Todo intervalo aberto limitado (a, b) é m subconjunto aberto da reta, pois é a bola aberta de centro no seu ponto médio $\frac{(a+b)}{2}$ e raio $\frac{(b-a)}{2}$. Ainda as semirretas $(-\infty, a)$ e $(b, +\infty)$ também são conjuntos abertos em $\mathbb{R}$. Com efeito se $c \in (-\infty, a)$ então pondo*

$r = b - c$ temos que $(c - r, c + r) \subset (-\infty, a)$. Analogamente vê-se que $(b, +\infty)$ é aberto.

Exemplo 2.3. *Seja $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais. Não existe ponto interior de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$, pois não existe intervalo aberto de centro num racional formado apenas por números racionais, ou seja, qualquer intervalo aberto de $\mathbb{R}$ centrado num racional contém números racionais e irracionais. Notemos que a fronteira de $\mathbb{Q}$ é toda a reta $\mathbb{R}$.*

Exemplo 2.4. *Seja M um espaço métrico munido da métrica zero-um. Então todo conjunto $A \subset M$ é aberto.*

De fato, se $A = \emptyset$ é imediato. Se $A \neq \emptyset$, então $A = \cup_{p \in A}\{p\}$ e, como cada $\{p\}$ é uma bola aberta de centro p e raio $\epsilon \leq 1$, concluímos que A é aberto, pois é a união de bolas abertas.

Exemplo 2.5. *No espaço $\mathbb{R}^n$ o conjunto*
$A = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n |\ x_1 > 0, \ldots, x_n > 0\}$
é aberto em relação a qualquer das métricas usuais d, d_1, d_2 de $\mathbb{R}^n$. Faremos a demonstração para a métrica $d = d_2$.
Seja $p = (p_1, \ldots, p_n\}$ um ponto de A e tomemos $\epsilon \in \mathbb{R}$ de maneira que $0 < \epsilon < min\{p_i\}$.
Mostremos que $B(p, \epsilon) \subset A$. Se $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B(p, \epsilon)$, então

$$d(x, p) = max\{|x_1 - p_1|, \ldots, |x_n - p_n|\} < \epsilon,$$

e, daí, $|x_i - p_i| < \epsilon$, ou seja, $p_i - \epsilon < x_i < p_i + \epsilon$ $(1 \leq i \leq n)$. Mas, como cada $p_i - \epsilon > 0$, temos que $x_i > 0$. Portanto, $x \in A$.

Proposição 2.6. *Seja M um espaço métrico e seja N um subespaço de M. Um subconjunto $A \in N$ é aberto (em relação a N) se, e somente se, $A = G \cap N$, onde G é um subconjunto aberto de M.*

2.2 Topologia

A topologia é o ramo da matemática que estuda as propriedades de objetos geométricos. Ela se divide em três principais ramificações: Topologia Geral, Topologia Algébrica e Topologia Diferencial. Mas só abordaremos alguns elementos da Topologia Geral, que são conceitos bases para o estudo de outras topologias.

A topologia é baseada em uma série de princípios teóricos e abstratos, podendo ser aplicada em várias áreas do conhecimento. E um espaço topológico é um espaço dotado de uma noção de proximidade, e uma maneira de dar essa noção de proximidade e de modo quantitativo,como no caso os espaços métricos, o que faz com que os espaços métricos servem de base para o estudo dos espaços topológicos. Para esta seção utilizamos a referência bibliográfica [6] e [11]

Proposição 2.7. *Seja $\mathscr{A}$ a coleção dos abertos de um espaço métrico (M, d). Então:*

(i) $\emptyset, M \in \mathscr{A}$;

(ii) $A, B \in \mathscr{A} \Longrightarrow A \cap B \in \mathscr{A}$;

(iii) Se (A_i) é uma família de conjuntos abertos de M, ou seja, se cada $A_i \in \mathscr{A}$, então $\cup A_i \in \mathscr{A}$.

Demonstração. (i) É claro que $\emptyset$ é aberto, pelo fato de não conter pontos e de não contrariar a definição dada.

Em relação a M, temos que toda bola de centro num ponto $p \in M$ é um subconjunto de M por definição.

(ii) Seja $p \in A \cap B$. Então existem $\epsilon > 0$ e $\lambda > 0$ tais que $B(p, \epsilon) \subset A$ e $B(p, \lambda) \subset B$. Supondo $\epsilon \leq \lambda$, a propriedade $(P1)$ das bolas abertas nos garante que

$$B(p, \epsilon) \subset B(p, \lambda),$$

iato é $B(p, \epsilon) \subset A \cap B$.

(iii) Seja $p \in \cup A_i$. Então existe um índice t tal que $p \in A_t$ e, como A_t é aberto, para um $\epsilon > 0$, vale a relação $B(p, \epsilon) \subset A_t$. Então $B(p, \epsilon) \subset A_t \subset \cup A_i$. □

Observação 2.8. *Podemos dizer que $\mathscr{A}$ é uma topologia sobre M e que $(M, \mathscr{A})$ é um espaço topológico.*

A interseção de uma família infinita de conjuntos abertos pode não ser um conjunto aberto. De fato na família $A_i = \left]-\frac{1}{i}, \frac{1}{i}\right[$, $i = 1, 2, \ldots$, cada A_i é aberto em $\mathbb{R}$ (métrica usual). Então,

$$\cap A_i = \{0\}$$

não é aberto, pois não existe nenhum intervalo em $\mathbb{R}$ formado apenas pelo ponto 0. Num espaço métrico (M, d) qualquer, dado $p \in M$, se fizermos $B_n = B\left(p, \frac{1}{n}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, então $\cap B_n = \{p\}$. Assim toda vez que o ponto p não é ponto isolado, a família B_n mostra que nem sempre uma interseção de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Proposição 2.9. *Sejam d e d' métricas equivalentes sobre M. Se $\mathscr{A}$ é a coleção dos conjuntos abertos de (M, d) e $\mathscr{A}'$ é a coleção dos conjuntos abertos de (M, d'), então $\mathscr{A} = \mathscr{A}'$.*

Demonstração. Seja $A \in \mathscr{A}$ e tomemos $p \in A$. Assim, existe $\epsilon > 0$ tal que $B_d(p, \epsilon) \subset A$. De $d \sim d'$ decorre que existe $\lambda > 0$ de modo que $B_{d'}(p, \lambda) \subset B_d(p, \epsilon)$. Logo $B_{d'}(p, \lambda) \subset A$, o que nos mostra que $A \in \mathscr{A}'$ e, consequentemente, $\mathscr{A} \subset \mathscr{A}'$. $\square$

Observação 2.10. *A proposição acima nos mostra que métricas equivalentes determinam a mesma estrutura topológica.*

Definição 2.11. *Seja (M, d) um espaço métrico e considere um conjunto $A \subset M$, um ponto $p \in A$ é chamado ponto interior ao conjunto A se existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \subset A$. O conjunto dos pontos interiores a A é chamado de interior de A e denotado por $\mathring{A}$.*

Observação 2.12. *Note que se todos os pontos de A são interiores, isto é, $A = \mathring{A}$, então A é aberto. De fato, dado $p \in A$, temos que $p \in \mathring{A}$. Assim, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \subset A$. Reciprocamente, se A é aberto e $p \in A$, então existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \in A$ e, assim, $p \in \mathring{A}$. É claro que $\mathring{A} \subset A$, o que conclui a prova. Então A é aberto se, e somente se, $A = \mathring{A}$.*

Exemplo 2.13. *Na reta real consideremos os intervalos $A = [a, b[$ e $B = [a, +\infty[$. Notemos que em ambos os intervalos o ponto a não é interior. A bola $B(a, \epsilon) =]a - \epsilon, a + \epsilon[$ não está contida nem em A e nem em B. Então $\mathring{A} =]a, b[$ e $B^\circ =]a, +\infty[$. Logo $A = [a, b[\neq \mathring{A} =]a, b[$ e $B = [a, +\infty[\neq B^\circ =]a, +\infty[$.*

2.3 Conjuntos fechados

Definição 2.14. *Seja (M, d) um espaço métrico. Um subconjunto $F \subset M$ se diz fechado se, e somente se, seu complementar F^c for aberto.*

Observe que um conjunto ser fechado não significa que ele não é aberto, existem conjuntos que são abertos e fechados, não abertos e não fechado. Dependendo do espaço métrico M, podemos obter um subconjunto que não é nem aberto e nem fechado. Este é o caso do conjunto $\mathbb{Q}$ na reta real, não é aberto. Como existem números racionais em qualquer intervalo $]p-\epsilon, p+\epsilon[$, então tomando $p \in \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ o intervalo $]p-\epsilon, p+\epsilon[\nsubseteq \mathbb{R}-\mathbb{Q}$, o que mostra que $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ não é aberto, isto é, $(\mathbb{R}-\mathbb{Q})^c = \mathbb{Q}$ não é fechado. Logo, $\mathbb{Q}$ não é aberto nem fechado.

Exemplo 2.15. *Na reta real são fechados todos os intervalos do tipo $[a, b], [a+\infty[$ ou $]-\infty, a]$. De fato, $[a, b]^c =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ e cada um destes intervalos é aberto,*

$[a, +\infty[^c =]-\infty, a[$ é aberto

e

$]-\infty, a]^c =]a, +\infty[$ uma vez que é aberto.

Exemplo 2.16. *Seja $M \neq \emptyset$ um conjunto munido da métrica zero um. Então todo subconjunto F de M é fechado. Com efeito, seja F um conjunto de M e considere F^c que é um conjunto de M. Pelo exemplo 2.4, F^c é aberto e, assim, F é fechado.*

Proposição 2.17. *Seja $\mathscr{F}$ a coleção dos conjuntos fechados de um espaço métrico M. Então:*

(*i*) *$\emptyset$, $M \in \mathscr{F}$.*

(*ii*) *Se $F_1, \cdots, F_n \in \mathscr{F}$, então $F_1 \cup \ldots \cup F_n \in \mathscr{F}$.*

(*iii*) *Se (F_i) é uma família de conjuntos fechados de M, então $\cap F_i \in \mathscr{F}$.*

Demonstração. (*i*) $\emptyset$, $M \in \mathscr{F}$ porque $\emptyset^c = M$ e $M^c = \emptyset$ pertencem a $\mathscr{A}$ (coleção dos abertos).

(*ii*) Como $(F_1 \cup \ldots\ldots \cup F_n)^c = F_1^c \cap \ldots \cap F_n^c$ é aberto, pois $F_i \in \mathscr{F}$ para $i = 1, \cdots, n$, então $F_1 \cup \ldots \cup F_n$ é fechado.

(*iii*) Como F_i é fechado, então F_i^c (seu complementar) é aberto. Portanto $\cup F_i^c = (\cap F_i)^c$ é aberto e, por consequência, $\cap F_i$ é fechado. □

Definição 2.18. *Seja A um subconjunto de um espaço métrico M. Um ponto $p \in M$ se diz ponto aderente ao conjunto A se, para todo $\epsilon > 0$ vale a relação*

$$B(p, \epsilon) \cap A \neq \emptyset.$$

Chamamos de fecho de um conjunto A em um espaço métrico M, o conjunto dos pontos aderentes ao subconjunto A e é indicado por $\overline{A}$, é imediato que $A \subset \overline{A}$. Se $p \in \overline{A}$ significa que o ponto p é aderente a A em M.

Exemplo 2.19. *Na reta temos que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.*
De fato: dado $p \in \mathbb{R}$, para todo $\epsilon > 0$ o intervalo $]p-\epsilon, p+\epsilon[$ contém números racionais, isto é,

$$B(p,\epsilon) =]p-\epsilon, p+\epsilon[\cap \mathbb{Q} \neq \emptyset.$$

Portanto, $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{Q}}$. A inclusão contrária é óbvia.

Proposição 2.20. *Seja (M,d) um espaço métrico, então para todo $A \subset M$, vale que o complementar do fecho de A é igual ao interior do complemento de A. Simbolicamente, $(\overline{A})^c = (A^c)^\circ$.*

Demonstração. Como $p \in (\overline{A})^c$, temos que p não pertence $\overline{A}$ e, assim, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p,\epsilon) \cap A = \emptyset$. Segue que $B(p,\epsilon) \subset A^c$, ou seja, $p \in (A^c)^\circ$. □

Corolário 2.21. *Um conjunto $F \subset M$ é fechado se, e somente se, $\overline{F} = F$.*

Demonstração. Temos que F é fechado se, e somente se, o seu complementar F^c for aberto. Assim, pela observação 2.12, $(F^c)^\circ = F^c$. Pela proposição 2.20, conclui-se que $(\overline{F})^c = F^c$. Logo, $\overline{F} = F$. □

Para a próxima proposição denotaremos aqui o ínfimo, para melhor esclarecimento.

Definição 2.22. *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Suponha que X seja limitado inferiormentee seja m a maior cota inferior de X. Dizemos que m é o ínfimo de X.*

Proposição 2.23. *Seja (M,d) um espaço métrico e $A \subset M$, então $p \in \overline{A}$ se, e somente se, $d(p,A) = d(p,A^c) = 0$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que $p \in \overline{A}$. Se $\epsilon > 0$, então $B(p,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$, isto é, existe $x \in A$ tal que $d(p,x) < \epsilon$. Como $\epsilon > 0$ é qualquer, tomando o ínfimo obtemos $d(p,A) = 0$. Analogamente, temos que $d(p,A^c) = 0$.
$(\Leftarrow)$ Suponha que $d(p,A) = d(p,A^c) = 0$. Seja $\epsilon > 0$, como $d(p,A) = 0$, existe $x \in A$ tal

que $d(p,x) < \epsilon$, isto é, $x \in B(p,\epsilon) \cap A$ e, assim, $B(p,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$. Analogamente, temos que $B(p,\epsilon) \cap A^c \neq \emptyset$. Portanto $p \in \overline{A}$. $\square$

Proposição 2.24. *Se A é um subconjunto de um espaço métrico M e se p é um ponto de $\overline{A}$, então existe uma sequência $(x_1, x_2, \ldots)$ de pontos de A tal que $lim x_n = p$.*

Demonstração. Como $p \in \overline{A}$, então cada uma das bolas abertas $B(p, \frac{1}{n})$, com $(n = 1, 2, \ldots)$ contém pontos de A. A sequência $x_n \in A \cap B(p, \frac{1}{n})$, com $n \geq 1$, converge para p.

De fato, toda bola $B(p,\epsilon)$ contém a bola $B(p, \frac{1}{r})$, desde que $\frac{1}{r} < \epsilon$. Esta bola, por sua vez, contém $(x_r, x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots)$ e, assim, $x_n \to p$. Como (x_n) é uma sequência de A, a proposição está provada. $\square$

Definição 2.25. *Dado um espaço métrico (M,d), um subconjunto $A \subset M$ é denso em M se $\overline{A} = M$.*

Por exemplo, $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

A definição significa, que para todo $p \in M$ e todo $\epsilon > 0$, existe $a \in A$ de maneira que $d(a,p) < \epsilon$. Instantaneamente, para cada ponto $p \in M$ existe, arbitrariamente próximo de p, um ponto $a \in A$.

Seja M um espaço métrico. Se $A \subset M$ é denso em M, então $G \cap A \neq \emptyset$ para todo aberto $G \neq \emptyset$ de M.

De fato: dado $p \in G$, existe $\epsilon > 0$ de maneira que a bola $B(p,\epsilon) \subset G$. Mas como $\overline{A} = M$, então existe $a \in A$ tal que $d(p,a) < \epsilon$ (pois $p \in G \subset M$), ou seja, $a \in B(p,\epsilon) \subset G$ e, portanto, $G \cap A \neq \emptyset$.

Definição 2.26. *Seja (M,d) um espaço métrico e A um subconjunto de M. Diz-se que um ponto $p \in M$ é ponto de acumulação de A se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, $(B(p,\epsilon) - \{p\}) \cap A \neq \emptyset$. Isto quer dizer que toda bola de centro p deve conter infinitos pontos de A distintos do ponto p, o que nos remete que é um conjunto infinito.*

O conjunto dos pontos de acumulação de A é chamado de conjunto derivado e se indica por A'.

Observemos que nem todo ponto de aderência é ponto de acumulação. Por exemplo: considere o conjunto $A = \{p\}$ que possui um só elemento. Como $p \in A$ então é ponto aderente, mas não é de acumulação, pois não há nenhum outro elemento diferente de p em A.

Exemplo 2.27. *Em $\mathbb{R}$ o único ponto de acumulação de A, sendo $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ é o ponto 0.*
De fato: veja que uma $B(0,\epsilon) =]-\epsilon, +\epsilon[$, contém todos os elementos da forma $\frac{1}{r} \in A$, onde $\frac{1}{r} < \epsilon$.

Por outro lado, se pegarmos outro ponto $p \in \mathbb{R}$, existem bolas $]p-\epsilon, p+\epsilon[$ cuja interseção com A é vazia, assim $A' = \{0\}$.

Exemplo 2.28. *Tomamos d como a métrica zero-um sobre M, então para todo $A \subset M$ temos que $A' = \emptyset$.*
De fato, para qualquer $p \in M$ podemos tomar $0 < \epsilon \leq 1$ tal que $B(p,\epsilon) = \{p\}$. Logo,

$$(B(p,\epsilon) - \{p\}) \cap A = \emptyset \cap A = \emptyset,$$

e p não pertence a A'.

Proposição 2.29. *Seja M um espaço métrico, um conjunto $F \subset M$ é fechado se, e somente se, $F' \subset F$.*
($\Rightarrow$) Suponhamos que exista $p \in F'$ tal que p não pertence a F. Logo $p \in F^c$, que sabemos que é aberto. Portanto, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p,\epsilon) \subset F^c$, isto é, $B(p,\epsilon) \cap F = \emptyset$. Mas temos que $p \in F'$, ou seja, o conjunto $(B(p,\epsilon) - \{p\}) \cap F$ é infinito, o que é absurdo.
($\Leftarrow$) Seja $p \in F^c$. Como $F' \subset F$, temos que $F^c \subset (F')^c$ e então $p \in (F')^c$. Assim existe $\epsilon > 0$ de maneira que $B((p,\epsilon) - \{p\}) \cap F = \emptyset$, mas como p não pertence a F, temos que a igualdade $(B(p,\epsilon) - \{p\}) \cap F = \emptyset$ equivale a $B(p,\epsilon) \subset F^c$, o que garante que todos os pontos de F^c são interiores. Portanto, F^c é aberto e, consequentemente, F é fechado.

2) Se um conjunto aberto A é disjunto de S, então A é disjunto do fecho de S.

Seja $x \in A$. Provemos que $x \notin \overline{S}$, isto é, existe um $\epsilon > 0$ tal que $B(x,\epsilon) \cap S = \emptyset$. como A é aberto, existe $B(x,\epsilon) \subset A$. Como $A \cap S = \emptyset$, temos que a $B(x,\epsilon) \cap S = \emptyset$.

Capítulo 3

Funções Contínuas

Nesta parte do trabalho, vamos avançar mais nos estudos e buscar uma maneira de relacionar os espaços métricos através das aplicações contínuas, onde veremos definições e exemplos. Usamos como base as referência bibliográfica [4] e [3]

3.1 Definição

Para nos situar no tema de funções contínuas, lembremos que uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua num ponto p se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(p)| < \epsilon.$$

Veremos a baixo que a definição de continuidade entre espaços métricos é uma generalização do conceito de continuidade em $\mathbb{R}$.

Definição 3.1. *Sejam M e N espaços métricos, uma função $f : M \longrightarrow N$ se diz contínua no ponto $p \in M$ se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que*

$$d(x, p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) < \epsilon.$$

Dizer que essa função é contínua, é o mesmo que dizer que a função é contínua em todos os pontos de M.

Proposição 3.2. *Uma função $f : M \longrightarrow N$ é contínua no ponto $p \in M$ se, e somente se, dada uma bola $B(f(p), \epsilon))$, existe uma bola $B(p, \delta)$ tal que*

$$f(B(p, \delta)) \subset B(f(p), \epsilon).$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Dado $\epsilon > 0$, considere a bola $B(f(p),\epsilon)$. Por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,p) < \delta \Longrightarrow d(f(x),f(p)) < \epsilon.$$

Afirmamos que $f(B(p,\delta)) \subset B(f(p),\epsilon)$. De fato, tomemos $y \in f(B(p,\delta))$. Assim, existe $x \in B(p,\delta)$ tal que $y = f(x)$. De $x \in B(p,\delta)$, segue que $d(x,p) < \delta$ o que implica (por hipótese) que $d(f(x),f(p)) < \epsilon$, ou seja, $y = f(x) \in B(f(p),\epsilon)$.

($\Leftarrow$) Suponha que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(p,\delta)) \subset B(f(p),\epsilon)$. Se $d(x,p) < \delta$, segue que $x \in B(p,\delta)$ e, assim, $f(x) \in B(f(p),\epsilon)$, pois $f(B(p,\delta) \subset B(f(p),\epsilon)$. Logo, $d(f(x),f(p)) < \epsilon$. $\square$

Proposição 3.3. *Seja $f : (M,d) \longrightarrow (N,d')$ uma função contínua. Se d_1 e d'_1 são métricas sobre M e N, respectivamente, tais que $d \sim d_1$ e $d' \sim d'_1$, então a função $f : (M,d_1) \longrightarrow (N,d'_1)$ é contínua.*

Demonstração. (i) Mostremos que $f : (M,d) \longrightarrow (N,d'_1)$ é contínua. Dado $p \in M$ tomemos uma $B = B_{d'_1}(f(p),\epsilon)$, com $\epsilon > 0$ e arbitrário. Como $d' \sim d'_1$, então existe $\lambda > 0$ tal que $B_1 = B_{d'}(f(p),\lambda) \subset B$. Por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que $B_2 = B_d(p,\delta)$ satisfaz $f(B_2) \subset B_1$. Logo,

$$f(B_d(p,\delta)) \subset B_1 = B_{d'}(f(p),\lambda) \subset B = B_{d'_1}(f(p),\epsilon).$$

(ii) Dado $p \in M$ consideremos uma bola $B = B_{d'}(f(p),\epsilon)$ onde $\epsilon > 0$ é arbitrário. Existe uma bola $B_1 = B_{d'_1}(f(p),\lambda) \subset B$ com $\lambda > 0$, pois d' e d'_1 são equivalentes. Tomemos $\delta > 0$ tal que $B_2 = B_{d_1}(p,\delta)$. Podemos dizer que $f(B_{d_1}(p,\delta)) \subset B_1 = B_{d'_1}(f(p),\lambda) \subset B$ e, assim, $f(M,d_1) \longrightarrow (N,d')$ é contínua.

De (i) e (ii) decorre o resultado desejado. $\square$

3.2 Exemplos

A seguir apresentaremos alguns exemplos clássicos de funções contínuas.

1. Imersão isométrica: Sejam M e N espaços métricos. Uma imersão isométrica é uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ tal que $d(f(x),f(y)) = d(x,y)$, para quaisquer $x,y \in \mathbb{R}$.

Para qualquer $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon$ temos que

$$d(x,p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) = d(x,p) < \delta = \epsilon,$$

para qualquer $p \in M$. Logo, toda imersão isométrica é continua.

Observe que toda imersão isométrica é injetora. De fato, se

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow d(f(x), f(y)) = 0 \Longrightarrow d(x,y) = 0 \Longrightarrow x = y.$$

As imersões isométricas sobrejetoras são chamadas de isometrias. Como toda imersão isométria é contínua segue que toda isometria é contínua.

Vejamos alguns exemplos de imersão isométrica.

Exemplo 3.4 (Inclusão)**.** *Seja a inclusão $j : X \longrightarrow M$ definida por $j(x) = x$, para todo $x \in X$, onde X é um subespaço de M. Para quaisquer $x, y \in X$,*

$$d(j(x), j(y)) = d(x,y).$$

Lembrando que j é contínua por ser uma imersão isométrica.

Exemplo 3.5 (Produto Cartesiano)**.** *Seja o produto cartesiano $M \times N$, onde M e N são espaços métricos. Tomemos a métrica d sobre $M \times N$. Para cada $a \in M$ a aplicação $j_a : N \longrightarrow M \times N$ dada por $j_a(y) = (a, y)$ é uma imersão isométrica.*
De fato: para quaisquer $y_1, y_2 \in N$, temos

$$\begin{aligned} d(j_a(y_1), j_a(y_2)) &= d((a, y_1), (a, y_2)) \\ &= \sqrt{d(a,a)^2 + d(y_1, y_2)^2} \\ &= d(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Para $b \in N$, considere $j_b : M \longrightarrow M \times N$ dada por $j_b = (x, b)$. A demonstração de que j_b é imersão isométrica é feita analogamente. Com efeito, para quaisquer $x_1, x_2 \in M$, temos

$$\begin{aligned} d(j_b(x_1), j_b(x_2)) &= d((x_1, b), (x_2, b)) \\ &= \sqrt{d(b,b)^2 + d(x_1, x_2)^2} \\ &= d(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Exemplo 3.6 (Translações)**.** *Uma translação num espaço vetorial normado E é uma aplicação $T : E \longrightarrow E$ definida, para cada $a \in E$, como $T_a(x) = x + a$, para todo $x \in E$.*

Temos que

$$\begin{aligned} d(T_a(x), T_a(y)) &= \|T_a(x) - T_a(y)\| \\ &= \|x + a - (y + a)\| \\ &= \|x + a - y - a\| \\ &= \|x - y\| \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Observe que uma translação é sempre sobrejetora (e, portanto, é isometria). De fato, dado $y \in E$ tome $x = y - a \in E$ e, assim,

$$T_a(x) = T_a(y - a) = y - a + a = y.$$

2. Contração Fraca. Sejam M e N espaços métricos. Uma contração fraca é uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ tal que, para quaisquer $x, y \in M$,

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y).$$

Dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \epsilon$, obtemos

$$d(x, p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) \leq d(x, p) < \delta = \epsilon,$$

para todo $p \in M$. Logo, toda contração fraca é contínua.

Veja alguns exemplos de contração fraca.

Exemplo 3.7. *Sejam $(M_1, d_1), \ldots, (M_n, d_n)$ espaços métricos. Para cada $i \in (1, 2, \ldots, n)$ definimos a projeção*

$$p_i : M_1 \times M_2, \times \ldots, \times M_n \to M_i, \text{ pondo } p_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i.$$

Considere $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ munido com a métrica d, definida por

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) + \ldots + d_n(x_n, y_n).$$

Para todo $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ vemos que

$$d_i(p_i(x), p_i(y)) = d_i(x_i, y_i) \leq d(x, y),$$

ou seja, p_i é uma contração fraca.

Exemplo 3.8. *Seja E um espaço vetorial real normado. Então a aplicação $s : E \times E \to E$, dada por $s(x, y) = x + y$ é uma contração fraca.*

De fato,

$$\begin{aligned} d(s(x_1, y_1), s(x_2, y_2)) &= d(x_1 + y_1, x_2 + y_2) \\ &= \|(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2)\| \\ &= \|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\| \\ &\leq \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| \\ &= d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) \\ &= D_1((x_1, y_1), (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

Exemplo 3.9. *Seja E um espaço vetorial normado, toda norma $f : x \longrightarrow \|x\|$ é uma contração fraca. De fato, para qualquer $x, y \in E$*

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y))| &= d(\|x\|, \|y\|) \\ &= |\ \|x\| - \|y\|\ | \\ &= |d(x, 0) - d(y, 0)| \\ &\leq d(x, y) \text{ (pela desigualdade triangular)}. \end{aligned}$$

3. Aplicações Lipschitzianas. Sejam M e N espaços métricos. Uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ é dita Lipschitziana quando existe uma constante $c > 0$, chamada constante de Lipschitz, tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y), \quad \text{para todos } x, y \in M.$$

Toda aplicação Lipschitziana é contínua. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\epsilon}{c}$ tais que

$$d(x, p) < \delta \Longrightarrow d(f(x), f(p)) \leq cd(x, p) < c\frac{\epsilon}{c} = \epsilon,$$

para qualquer $p \in M$.

Exemplo 3.10. *Seja E um espaço vetorial normado. Para $\alpha \neq 0$ defini-se uma aplicação (chamada de homotetia) $h_\alpha : E \longrightarrow E$ dada por $h_\alpha(x) = \alpha x$, para todo $x \in E$. Tomemos*

$c > 0$ de modo que $c \geq |\alpha|$. Assim,

$$\begin{aligned} d(h_\alpha(x), h_\alpha(y)) &= d(\alpha x, \alpha y) \\ &= \|\alpha x - \alpha y\| \\ &= |\alpha|\|x - y\| \\ &\leq c\|x - y\| \\ &= cd(x, y), \end{aligned}$$

para quaisquer $x, y \in E$. Portanto h_α é Lipschitziana.

A aplicação $f : M \longrightarrow N$ se diz localmente Lipschitziana se para $p \in M$ existe uma bola $B = B(p, \lambda)$ onde a restrição de f a B é Lipschitziana.

Uma aplicação localmente Lipschitziana f é contínua. De fato, se $p \in M$ existe uma bola $B = B(p, \lambda)$ e uma constante $c > 0$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq cd(x, y), \textit{para todo } x, y \in B.$$

Dada uma bola $B(f(p), \epsilon)$, com $\epsilon > 0$ arbitrário, tomemos $\delta > 0$ de maneira que $\delta < \lambda$ e $\delta < \dfrac{\epsilon}{c}$. Assim,

$$\begin{aligned} d(x, p) < \delta &\Longrightarrow d(x, p) < \lambda \\ &\Longrightarrow x \in B(p, \lambda) \\ &\Longrightarrow d(f(x), f(p)) \leq cd(x, p) \\ &\Longrightarrow d(f(x), f(p)) < c\delta \\ &\Longrightarrow d(f(x), f(p)) < c\frac{\epsilon}{c} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo f é contínua.

Exemplo 3.11. *Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$, onde $n \geq 1$ é um número natural.*

Mostremos que f é localmente Lipschitziana.

Dada uma bola $B = B(p, \lambda)$ com $\lambda > 0$, seja $b \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < b$, para todo $x \in B$. Pelo Teorema do Valor Médio, temos que, se $x, y \in B$, com $x \neq y$, existe $t \in \mathbb{R}$ situado entre x e y de maneira que

$$f(x) - f(y) = f'(t)(x - y) = nt^{n-1}(x - y).$$

Logo,

$$|f(x) - f(y)| = n|t|^{n-1}|x - y|, \textit{para todo } x, y \in B,$$

ou seja, $d(f(x), f(y)) = cd(x, y)$*, onde* $c = n|t|^{n-1} > 0$ *é a constante de Lipschitz.*

3.3 Propriedades de Continuidade

Proposição 3.12. *Uma função* $f : M \longrightarrow N$ *é contínua num ponto* $p \in M$ *se, e somente se, uma sequência* (x_n) *de pontos de* M *que converge para* p *implicar que* $(f(x_n))$ *converge para* $f(p)$*, isto é, se, e somente se,* $x_n \longrightarrow p$ *acarretar* $f(x_n) \longrightarrow f(p)$*.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Seja $B = B(f(p), \epsilon)$ com $\epsilon > 0$ arbitrário. Da continuidade de f se tem que existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(p, \delta)) \subset B.$$

Como $x_n \longrightarrow p$, existe um índice r tal que $x_n \in B(p, \delta)$ para $n \geq r$. Segue que

$$f(x_n) \in f(B(p, \delta)) \subset B,$$

para qualquer índice $n \geq r$, o que prova que $f(x_n) \longrightarrow f(p)$.

($\Leftarrow$) Se f não é contínua em p, então existe $\epsilon > 0$ tal que

$$f(B(p, \delta)) \subsetneq B(f(p), \epsilon), \quad \text{para todo } \delta > 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(B(p, 1)) &\subsetneq B(f(p), \epsilon) \\ f(B(p, \tfrac{1}{2})) &\subsetneq B(f(p), \epsilon) \\ f(B(p, \tfrac{1}{3})) &\subsetneq B(f(p), \epsilon), \ldots \end{aligned}$$

Logo, para cada $n \geq 1$, existe $x_n \in M$ tal que $x_n \in B(p, \frac{1}{n})$ e $f(x_n) \notin B(f(p), \epsilon)$. Desse modo a sequência $(x_1, x_2, \ldots) \longrightarrow p$, mas $(f(x_1), f(x_2), \ldots) \nrightarrow f(p)$, o que contradiz a hipótese. $\square$

Proposição 3.13. *Dada a função* $f : M \longrightarrow N$*, as seguintes afirmações são equivalentes:*

a) f *é contínua*

b) Para todo $q \in N$ *e todo* $\lambda > 0, f^{-1}(B(q, \lambda))$ *é um subconjunto aberto de* M*.*

c) Para todo aberto G *de espaço* $N, f^{-1}(G)$ *é um aberto de* M*.*

d) Para todo fechado F *do espaço* $N, f^{-1}(F)$ *é um subconjunto fechado de* M*.*

Demonstração. a) $\Longrightarrow$ b) Dado $p \in f^{-1}(B(q,\lambda))$, então $f(p) \in B(q,\lambda)$ e portanto existe $\epsilon > 0$ de maneira que $B(f(p),\epsilon) \subset B(q,\lambda)$. Mas sendo f contínua, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(p,\delta)) \subset B(f(p),\epsilon)$. Como, porém, $B(p,\delta) \subset f^{-1}(f(B(p,\delta)))$, tem-se

$$B(p,\delta) \subset f^{-1}(B(f(p),\epsilon)) \subset f^{-1}(B(q,\lambda)).$$

Assim, todo ponto $p \in f^{-1}(B(q,\lambda)$ é ponto interior e, portanto, $f^{-1}(B(q,\lambda))$ é aberto.

b) $\Longrightarrow$ c) Se G é aberto em N, então $G = \cup B_i$, onde (B_i) é a família das bolas abertas contidas em G, onde

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(\cup B_i) = \cup f^{-1}(B_i)$$

e, como cada $f^{-1}(B_i)$ é aberto, o mesmo ocorre com $f^{-1}(G)$.

$\Longrightarrow$ d) Sendo f fechado em N. Então $G = F^c$ é aberto. Logo $f^{-1}(F^c) = (f^{-1}(F))^c$ é aberto em M por hipótese, onde seu complementar $f^{-1}(F)$ é um conjunto fechado em M.

d) $\Longrightarrow$ a) Seja p um ponto arbitrário de M. Para um $\epsilon > 0$, considere a bola aberta $B = B(f(p),\epsilon)$. Então B^c é um fechado em N que não contém $f(p)$. Portanto, $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$ é um fechado de M que não contém p. Logo, $f^{-1}(B)$ é aberto e $p \in f^{-1}(B)$. Tomando então $\delta > 0$ de maneira que $B_1 = B(p,\delta) \subset f^{-1}(B)$, temos que $f(B_1) \subset f(f^{-1}(B)) \subset B$ e, por isso, f é contínua em todo ponto $p \in M$. □

Exemplo 3.14. *A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \textit{para} \quad x \leq 0 \\ x+1, & \textit{para} \quad x > 0, \end{cases}$$

não é contínua.

Com efeito, considere a bola $B =]-2,0[$. Temos que $f^{-1}(]-2,0[) =]-\infty,0]$ que não é um conjunto aberto de $\mathbb{R}$. Portanto, pela proposição anterior, f não é contínua.

Exemplo 3.15. *Sejam $M_1, M_2, \ldots, M_n$ espaços métricos. O produto $A_1 \times \ldots \times A_n$, onde cada $A_1 \subset M_1$ é um conjunto aberto $(i = 1, 2, \ldots, n)$, é aberto no espaço produto $M = M_1 \times M_n$ para qualquer métrica usual de M.*
De fato, como as projeções $p_i : M \longrightarrow M_i$ são contínuas, temos que cada $p_i^{-1}(A_i)$ é aberto em M e, como $A_1 \times \ldots \times A_n = p_1^{-1}(A_1) \cap \ldots \cap p_n^{-1}(A_n)$, segue que a intersecção finita de abertos, $A_1 \times \ldots \times A_n$, é aberta.

Exemplo 3.16. *Sejam f e g funções contínuas. Se $f : M \longrightarrow N$ é contínua no ponto a, e $g : N \longrightarrow P$ é contínua no ponto $f(a)$, então $g \circ f : M \longrightarrow P$ é contínua no ponto a. Ou seja, a composta de duas funções contínuas é contínua.*
Seja $\epsilon > 0$ dado. Como por hipótese, g é contínua em $f(a)$, podemos obter $\lambda > 0$ tal que, para $y \in N$,

$$d(y, f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(y), g(f(a))) < \epsilon$$

Agora para o $\lambda > 0$ acima, como f é contínua no ponto a, por hipótese, podemos obter $\delta > 0$ tal que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \lambda, \text{ para } x \in M.$$

Segue que

$$d(x, a) < \delta \Rightarrow d(g(f(x), g(f(a)))) < \epsilon.$$

ou seja gof é contínua.

Proposição 3.17. *Seja $f : M \longrightarrow M_1 \times \cdots \times M_n$ definida por $f(x) = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$, para todo $x \in M$. Então f é contínua em $p \in M$ se, e somente se, $f_1, \cdots, f_n$ são contínuas em p.*

Sejam M um espaço métrico e E um espaço vetorial normado. A soma de duas funções $f : M \longrightarrow E$ e $g : M \longrightarrow E$ é a função, indicada por $f + g$, dada por,

$$\begin{aligned} f+g : \ M &\longrightarrow \ E \\ x &\longmapsto \ f(x) + g(x). \end{aligned}$$

Se f e g são contínuas, então $f+g$ é contínua. Com efeito, basta notar que $f+g = s \circ h$, onde

$$\begin{aligned} s : \ E \times E &\longrightarrow \ E \\ (x, y) &\longmapsto \ x + y. \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} h : \ M &\longrightarrow \ E \times E \\ x &\longmapsto \ (f(x), g(x)). \end{aligned}$$

são contínuas.

Suponhamos que $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções quaisquer. O produto de f e g, indicado por $f \cdot g$, é definido por,

$$\begin{aligned} f \cdot g : \ M &\longrightarrow \ \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ f(x) \cdot g(x), \quad \text{para } x \in M. \end{aligned}$$

Se f e g são contínuas, então $f \cdot g$ é contínua. De fato, $f \cdot g = m \circ h$, onde

$$\begin{aligned} h: \quad M &\longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ x &\longmapsto (f(x), g(x)). \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} m: \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x \cdot y. \end{aligned}$$

é contínua, pois é composta de funções contínuas.

Suponhamos que $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções quaisquer. Se $g(x) \neq 0$, para todo $x \in M$, o quociente de f e g, indicado por $\dfrac{f}{g}$, é definido por

$$\begin{aligned} \tfrac{f}{g}: \quad M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tfrac{f(x)}{g(x)}, \quad \text{para } x \in M. \end{aligned}$$

Se f e g são contínuas e $g(x) \neq 0$, para todo $x \in M$, então $\frac{f}{g}$ é contínua. De fato, como $\frac{f}{g} = h_3 \circ h_2 \circ h_1$, onde

$$\begin{aligned} h_1: \quad M &\longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}^* \\ x &\longmapsto (f(x), g(x)). \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} h_2: \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto (x, \tfrac{1}{y}) \quad \text{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_3: \quad \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x \cdot y, \end{aligned}$$

com $y \neq 0$, são contínuas, conclui-se que $\frac{f}{g}$ é contínua.

CAPÍTULO 4

Homeomorfismos

Homeomorfismo entre espaços métricos é uma das noções topológicas mais importantes,pois são aplicações que preservam a noção de distância. Espaços homeomorfos são indistinguíveis do ponto de vista dos espaços métricos e de topologia. Neste capítulo foi utilizado a referência [8] e [3].

4.1 Definição de homeomorfismo

Para dar uma noção do conceito de homeomorfismo, forneceremos um exemplo.

Exemplo 4.1. *Consideremos um espaço vetorial normado E, um ponto $p \in B$ e uma bola $B(p, \epsilon)$. Imaginemos que esse espaço seja o $\mathbb{R}^2$.*

A aplicação $f : B(p, \epsilon) \longrightarrow E$ definida por $f(u) = \frac{1}{\epsilon}(u - p)$ é continua pois se compõe da translação $u \mapsto u - p$ e da homotetia $v \mapsto \frac{1}{\epsilon}v$, que são contínuas e é injetora, pois se pegarmos $f(u_1) = f(u_2) \Longrightarrow \frac{1}{\epsilon}(u_1 - p) = \frac{1}{\epsilon}(u_2 - p) \Longrightarrow u_1 = u_2$.
Como para qualquer bola $u \in B(p, \epsilon)$,

$$\|f(u)\| = \frac{1}{\epsilon}\|u - p\| < \frac{1}{\epsilon}\epsilon = 1.$$

Então a imagem de f, $Im(f) = B(0, 1)$. Assim $f : B(p, \epsilon) \longrightarrow B(0, 1)$ dada pela função $f(u) = \frac{1}{\epsilon}(u - p)$é bijetora e contínua, e a sua inversa é dada por $f^{-1}(u) = \epsilon u + p$, que também é contínua. Portanto, diremos, nesse caso, que a função $f : B(p, \epsilon) \longrightarrow B(0, 1)$ é um homeomorfismo. Vejamos a definição abaixo.

Definição 4.2. *Se M e N são espaços métricos, uma função $f : M \longrightarrow N$ é chamada homeomorfismo se, e somente se*
a)f é bijetora
b) f e sua inversa f^{-1} são contínuas. Neste caso, dizemos que os espaços métricos M e N são homeomorfos.

O fato de $f : M \longrightarrow N$ ser contínua e bijetora não assegura que $f^{-1} : N \longrightarrow M$ seja também contínua, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 4.3. *Seja $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$ o círculo unitário do plano euclidiano. A função*

$$f : [0, 2\pi) \to S^1$$

definida por

$$f(t) = (cost, sent)$$

é contínua, pois suas coordenadas, $cost$ e $sent$ são contínuas, e é bijetiva com inversa

$$g = f^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi).$$

Veja que f consiste em enrolar o segmento semi aberto $[0, 2\pi)$ sobre o círculo S^1, sem dobrar nem esticar, de modo que o ponto $t = 0$ caia sobre o ponto $p = (1, 0) \in S^1$.
A aplicação inversa g é descontinua em p. A aplicação g pode ser pensada fazendo um corte em p e desenrolando a circunferência sobre o segmento.

Provemos essa descontinuidade. Temos $g(p) = 0$. Tomamos $\epsilon = \pi$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, sejam $t_n = 2\pi - \frac{1}{n}$ e $z_n = f(t_n)$. A distância de z_n a p é menor do que $\frac{1}{n}$ pois o arco que liga z_n a p é maior do que a corda que os liga. Mas $g(z_n) = t_n$ é tal que $|g(z_n) - g(p)| = 2\pi - \frac{1}{n} > \pi = \epsilon$ para todo n. Neste caso temos que a inversa da função não é contínua.

Observação 4.4. *Se o espaço M gozar de uma determinada propriedade e essa for comum a todos os espaços homeomorfos a M, diz-se que é uma propriedade topológica. Propriedades topológicas são diferente de propriedades métricas de um espaço, pois aquelas são preservadas por homeomorfismos e estas por isometrias. Já vimos que a inversa de uma isometria também é uma isometria e que isometrias são contrações fracas. Logo, toda isometria é um homeomorfismo e, portanto, toda propriedade topológica é também métrica.*

Veremos agora exemplos de espaços homeomorfos.

4.2 Exemplos de homeomorfismo

Exemplo 4.5. *O gráfico de uma aplicação contínua é homeomorfo ao seu domínio. Seja $f : M \to N$ uma aplicação contínua. O gráfico de f é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $M \times N$, definido por*

$$G(f) = \{(x, f(x)); x \in M\}.$$

A aplicação $f_1 : M \to G(f) \subset M \times N$, dada por $f_1(x) = (x, f(x))$ é contínua, pois suas coordenadas são contínuas. Sua inversa, dada por

$$(x, f(x)) \to x,$$

é contínua, pois é igual á restrição p_1 da projeção $M \times N \to M$, assim $f_1 : M \to G(f)$ é um homeomorfismo.

Exemplo 4.6. *Sejam $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; (x, x) = 1\}$ a esfera unitária n-dimensional e $p = (0, \ldots, 0, 1) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o seu polo norte. A projeção estereográfica $\pi : S^n - \{p\} \to \mathbb{R}^n$ estabelece um homeomorfismo entre a esfera, menos o polo norte, e o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Geometricamente, $\pi(x)$ é o ponto em $\mathbb{R}^n$ tal que a semirreta que passa por p e x, cruza o hiperplano $x_{n+1} = 0$.*

Observação 4.7. *Hiperplano pode ser interpretado como a generalização do plano em diferentes números de dimensões.*

Precisamos obter uma formula para π para estabelecer tal homeomorfismo, os pontos da emirreta px têm a forma $p + t(x - p)$, em que t é um parâmetro positivo. O ponto dessa semirreta que pertence ao hiperplano $\mathbb{R}^n$ é aquele cuja última coordenada$1+t(x_{n+1}-1)$ é zero, ou seja, quando o parâmetro é dado por $t = \frac{1}{1-x_{n+1}}$. Convencionaremos por $x' = (x_1, \ldots, x_n)$ quando $x = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$.
Então, tomemos $\pi'(x) = p + \dfrac{x - p}{1 - x_{n+1}}$.

Podemos mudar essa expressão para

$$\pi'(x) = p + \frac{x-p}{1-x_{n+1}} = \frac{(1-x_{n+1}.p)+(x-p)}{1-x_{n+1}} = \frac{x-(x_{n+1}).p}{1-x_{n+1}}$$

Como $p = (0,\ldots,0,1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, *segue que* $x_{n+1}.p = (0,\ldots,0,x_{n+1})$. *Logo, basta tomar*

$$\pi(x) = \frac{x'}{1-x_{n+1}}$$

Como $\pi(x)$ *é quociente de funções contínuas e* $1-x_{n+1} \neq 0$, *segue que* $\pi : S^n - \{p\} \to \mathbb{R}^n$ *é contínua.*

Ainda precisamos verificar que π *é um homeomorfismo. Veja que a bijetividade de* π *é imediata devido ao modo que a definimos.*

Agora, consideremos a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^n \to S^n - \{p\}$, *definida por* $\varphi(y) = x$, *em que, na notação acima,* $x' = \frac{2y}{|y|^2+1}$ *e* $x_{n+1} = \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}$. *Note que* φ *é uma função contínua, pois é quociente de contínuas.*

Vamos mostrar que $\varphi(\pi(x)) = x$ *para todo* $x \in S^n - \{p\}$ *e que* $\pi(\varphi(y)) = y$ *para todo* $y \in \mathbb{R}^n$

Temos que

$$\pi(x) = \frac{x'}{1-x_{n+1}} = \frac{\frac{2y}{|y|^2+1}}{\frac{1-(|y|^2-1)}{(|y|^2+1)}} = \frac{\frac{2y}{|y|^2+1}}{\frac{(|y|^2+1-(|y|^2-1))}{|y|^2+1}} = \frac{2y}{2} = y$$

logo, $\varphi(\pi(x)) = \varphi(x) = x$. *Analogamente, determina se a igualdade* $\pi(\varphi(y)) = y$. *Isso mostra que* π *e* φ *são inversas, donde* π *é um homeomorfismo. Ver figura 4.1*

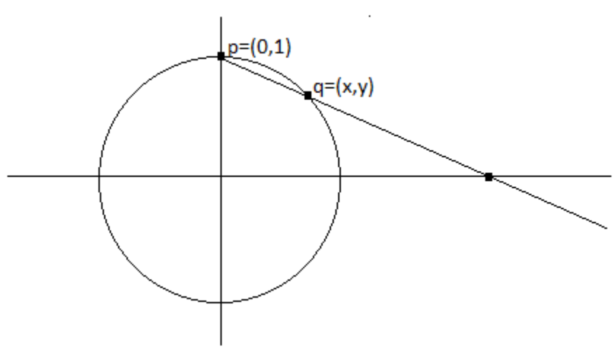

Figura 4.1: Caso n=1: homeomorfismo entre S^1 e $\mathbb{R}$. Fonte: referência [3]

Exemplo 4.8. *Se* E *é um espaço vetorial normado, então toda bola aberta* $B(p,\epsilon)$ *é homeomorfa ao espaço todo. Considerando que* $B(p,\epsilon)$ *é homeomorfa a* $B = B(0,1)$, *e portanto é*

suficiente provar que são homeomorfos a $B(0,1)$ *e o espaço* E*.*
Seja $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$*. Observe que* f *é contínua, pois é quociente de funções contínuas e* $1+|x| \neq 0$*. Além disso,* $|f(x)| = \dfrac{|x|}{1+|x|} < 1$ *para todo* $x \in E$*.*
Dado $y \in B$*, existe* $x \in E$*, sendo* $x = \dfrac{y}{1-|y|}$*, tal que* $f(x) = y$*. Logo,* f *é sobrejetora. sejam* $x_1, x_2 \in E$ *tais que* $f(x_1) = f(x_2)$*. Então*

$$\frac{x_1}{1+|x_1|} = \frac{x_2}{1+|x_2|}$$

Como o denominador é positivo em ambos os lados da igualdade, x_1, x_2 *tem o mesmo sinal. Logo,* $x_1, x_2 > 0$*, temos*

$$\frac{x_1}{1+|x_1|} = \frac{x_2}{1+|x_2|} \Rightarrow x_1 + x_1x_2 = x_2 + x_1x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Isso mostra que f *é injetora e, portanto, bijetora. Verifica-se facilmente que* $g(y) = \dfrac{y}{1-|y|}$*, satisfaz* $f(g(y)) = y$ *e* $g(f(x)) = x$ *e, portanto,* $g = f^{-1}$*. Analogamente, vê-se que* g *é contínua. Logo,* f *é homeomorfismo.*

Particularmente, todo intervalo aberto da reta é homeomorfo a $\mathbb{R}$. Se tomarmos o intervalo limitado (a,b), o homeomorfismo decorre do fato de que esse intervalo é a bola aberta na reta. Se tomarmos um intervalo ilimitado $(a,+\infty)$, basta considerar o homeomorfismo $f : \mathbb{R} \to (a,+\infty)$, definido por $f(x) = a + e^x$, cuja inversa $f^{-1} : (a,+\infty) \to \mathbb{R}$ tem a expressão $f^{-1}(y) = ln(y-a)$. Como a reta real é homeomorfa ao intervalo (a,b) concluímos que a propriedade de um espaço ser limitado não é topológica, pois (a,b) é limitado e $\mathbb{R}$ é ilimitado.

Exemplo 4.9. *O círculo unitário* $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 = 1\}$ *e o quadrado* $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ||x| + |y| = 1\}$ *do espaço euclidiano* $\mathbb{R}^2$ *são homeomorfos. Seja a função* $f : Q \to S^1$ *definida por*

$$f(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

é contínua, pois é, cociente de funções contínua. logo a sua inversa será definida por f^{-1} :

$S^1 \to Q$. *De fato,*

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x,y)) &= f^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|+\left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|}, \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|+\left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|}\right) \\ &= \left(\frac{x}{|x|+|y|}, \frac{y}{|x|+|y|}\right) \\ &= (x,y), \end{aligned}$$

lembrando que $|x|+|y| = 1$

Por outro lado temos que:

Seja a função $f^{-1} : Q \to S^1$*, assim*

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x,y)) &= f\left(\frac{x}{|x|+|y|}, \frac{y}{|x|+|y|}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{x}{|x|+|y|}}{\sqrt{\left(\frac{x}{|x|+|y|}\right)^2+\left(\frac{y}{|x|+|y|}\right)^2}}, \frac{\frac{y}{|x|+|y|}}{\sqrt{\left(\frac{x}{|x|+|y|}\right)^2+\left(\frac{y}{|x|+|y|}\right)^2}}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{x}{|x|+|y|}}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(|x|+|y|)^2}}}, \frac{\frac{y}{|x|+|y|}}{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{(|x|+|y|)^2}}}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{x}{|x|+|y|}}{\frac{1}{\sqrt{(|x|+|y|)^2}}}, \frac{\frac{y}{|x|+|y|}}{\frac{1}{\sqrt{(|x|+|y|)^2}}}\right) \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

utilizando $x^2+y^2 = 1$.

Exemplo 4.10. *O plano perfurado* $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}$ *e o cilindro circular reto* $C = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1$ *são homeomorfos. Ver figura 4.2.*

Considere a função $f : C \longrightarrow P$ *definida por* $f(x,y,z) = (xe^z, ye^z)$*. Esta função está bem definida (*$xe^z \neq 0$ *e* $ye^z \neq 0$*) e é contínua, pois suas funções coordenadas,* xe^z *e* ye^z*, são contínuas.*

Afirmamos que a inversa de f*,* $f^{-1} : P \longrightarrow C$*, é dada por*

$$f^{-1}(x,y) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ln(\sqrt{x^2+y^2})\right)$$

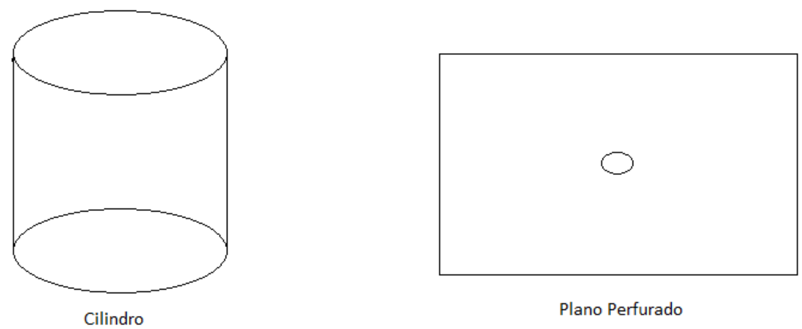

Figura 4.2: O plano perfurado e o cilindro. Fonte: referência [3]

Com efeito,

$$\begin{aligned} f(f^{-1}(x,y)) &= f\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ln(\sqrt{x^2+y^2})\right) \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{\ln(\sqrt{x^2+y^2})}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} e^{\ln(\sqrt{x^2+y^2})}\right) \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{x^2+y^2}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\right) \\ &= (x,y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x,y,z)) &= f^{-1}(xe^z, ye^z) \\ &= \left(\frac{xe^z}{\sqrt{x^2e^{2z}+y^2e^{2z}}}, \frac{ye^z}{\sqrt{x^2e^{2z}+y^2e^{2z}}}, \ln(\sqrt{x^2e^{2z}+y^2e^{2z}})\right) \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ln(\sqrt{x^2+y^2}e^z)\right) \\ &= (x,y,z). \end{aligned}$$

Note que f^{-1} está bem definida, uma vez que

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = 1.$$

Além disso, f^{-1} é contínua, pois suas funções coordenadas, $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\ln(\sqrt{x^2+y^2})$, são contínuas.

Logo, $f : C \longrightarrow P$ é bijetora, contínua com inversa contínua e, assim, C e P são homeomorfos.

A proposição a seguir caracteriza as métricas equivalentes através de homeomorfismo.

Proposição 4.11. *Sejam d e d' métricas sobre um conjunto M. Para que d e d' sejam equivalentes é necessário e suficiente que a aplicação $i : (M, d) \longrightarrow (M, d')$ definida por $i(x) = x$, para todo $x \in M$, seja um homeomorfismo.*

Demonstração. ($\Longrightarrow$) Como a função i é claramente bijetora, nos resta mostrar que i e i^{-1} são contínuas. Seja $p \in M$. Dado uma bola $B_{d'}(i(p), \epsilon)$, por hipótese existe uma bola

$$B_d(p, \delta) = B_d(i(p), \delta) \subset B_{d'}(i(p), \epsilon)$$

. Mas $B_d(p, \delta) = i(B_d(p, \delta))$, o que implica que

$$i(B_d(p, \delta)) \subset B_{d'}(i(p), \epsilon)$$

e, portanto, i é contínua em p. De maneira análoga se prova que a inversa de i é contínua.
($\Longleftarrow$) Dada uma bola $B_{d'}(p, \epsilon) = B_{d'}(i(p), \epsilon)$, como i é contínua em p existe $\lambda > 0$ tal que $B_d(p, \delta)$ satisfaz

$$i(B_d(p, \delta) = B_d(p, \delta) \subset B_{d'}(i(p), \epsilon)$$

Usando o fato de que a inversa de i e trabalhando de maneira semelhante se mostra que dado uma bola
$B_d(p, \epsilon)$ existe $\delta > 0$ tal que $B_{d'}(p, \delta) \subset B_d(p, \epsilon)$ □

Exemplo 4.12. *Sejam (M, d) e (N, d_1) espaços métricos e $f : M \to N$ um homeomorfismo. Então a aplicação $d' : M \times M \to \mathbb{R}$ definida por $d'(x, y) = d_1(f(x), f(y))$, para quaisquer $x, y \in M$, é equivalente à métrica d.*

Vamos mostrar que $d'(x, y) = d_1(f(x), f(y))$ é uma métrica.

i) $d'(x, x) = d_1(f(x), f(x)) = 0$

ii) $d'(x, y) = d_1(f(x), f(y)) = d_1(f(y), f(x)) = d'(y, x)$

iii) Note que, como f é sobrejetora, dado $w \in N$ existe $z \in M$ tal que $f(z) = w$. Assim,

$$\begin{aligned} d'(x, y) &= d_1(f(x), f(y)) \\ &= d_1(f(x), f(z)) + d_1(f(z), f(y)) \\ &= d_1(x, z) + d'(z, y). \end{aligned}$$

Seja $g : (M, d') \to (N, d_1)$ *dada por* $g(x) = f(x)$ *para todo* $x \in M$. *Como, para* $x, y \in M$ *arbitrários, temos que*

$$d'(x, y) = d_1(f(x), f(y)) = d_1(g(x), g(y)),$$

então g *é uma imersão isométrica e, portanto, é contínua. Pela definição de* g*, vemos que* g *é sobrejetora e, assim,* g *é uma isometria. Do fato, que toda imersão isométrica ser injetora, segue que* g *é bijetora. Além disso, inversa de isometria é isometria, donde concluimos que* g^{-1} *é contínua, ou seja,* g *é um homeomorfismo.*

Logo, $i = g^{-1} \circ f$ *e* $i^{-1} = f^{-1} \circ g$ *são contínuas e, por isso,* i *é um homeomorfismo, isto é,* $d \sim d'$.

Em particular, seja $E = \mathbb{R}$ *munido da métrica usual. Considere o homeomorfismo* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dado por* $f(x) = x^3$*, para todo* $x \in \mathbb{R}$.

Pelo desenvolvimento descrito acima podemos concluir que a métrica d' *definida por* $d'(x, y) = |x^3 - y^3|$ *é uma métrica sobre* $\mathbb{R}$ *equivalente à métrica usual.*

Considerações finais

O estudo dos Espaços Métricos dedica-se, basicamente, a formalizar a noção de distância. A importância do estudo dos Espaços Métricos torna-se evidente quando percebemos que foi construída toda uma teoria partindo da simples definição de métrica. Aliás, é essa definição que nos possibilitou construir vários exemplos, dos quais muitos confrontam nossas ideias intuitivas de distância. Durante o curso de licenciatura abordamos em várias disciplinas conceitos que dependem da noção de distância, contudo neste trabalho fomos além da matemática vista em nosso curso. Neste texto apresentamos apenas alguns conceitos introdutórios de espaços métricos, topologia, continuidade e homeomorfismo, mas ainda há muita teoria a ser estudada nesta área.

Apesar de não constituir disciplina curricular na UEMS, espaços métricos permeiam a maioria das disciplinas matemáticas de forma indireta. Vimos que espaços métricos é um par ordenado constituído de um conjunto e uma métrica. Em cálculo, geometria ou análise real, trabalha-se com os subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, e com sua métrica usual d.

O nosso objetivo nesse texto é conhecer as características dos espaços métricos, abordar algumas propriedades topológicas, para conseguirmos explorar a noção de homeomorfismo.

Neste trabalho tive a oportunidade de estudar algo mais abstrato e mais gerais do que os assuntos vistos em meu curso de licenciatura em matemática e, por isso, foi muito interessante conhecê-lo.

Bibliografia

[1] BOLDRINI, J. L., COSTA, S. I. R., FIGUEIREDO, V. L. e WETZLER, h. G., **Álgebra Linear**. Ed. Harbra Ltda., São Paulo, 3a. Edição 1986.

[2] CALLIOLI, C. A., DOMINGUES, H. H., COSTA, R. C. F., **Álgebra linear e aplicações**. Atual, 2007.

[3] DOMINGUES, H. H., **Espaços métricos e introdução à topologia**. Atual, 1982.

[4] GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo**, volume I. Rio de Janeiro. LTC?Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição, 2001.

[5] GUIDORIZZI, H. L., **Um curso de Cálculo**, vol. 2. Grupo Gen-LTC, 2000.

[6] HOFFMAN, K., KUNZE, R., **Álgebra linear**. Editora Polígono, São Paulo, 1971.

[7] LIMA, E. L., **Álgebra Linear**. IMPA, Rio de Janeiro, 2a. edição, 1996

[8] LIMA, E. L., **Espaços métricos**. Vol. 4. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.

[9] LIMA, E. L., **Curso de análise.** Vol. 1. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1992.

[10] LIMA, E. L., **Análise real**. Impa, 2004.

[11] LIMA, E. L., **Elementos de topologia geral**. Ao Livro Técnico, 1970.

[12] MUNKRES, J., **Topologia** 2E. 2002.

Índice