UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL

Graduação em Matemática – licenciatura

LETICIA PAULA CIRQUEIRA MARTINS

O METODO DE ENSINO VAN-HIELE NA CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE PLATÃO

NOVA ANDRADINA - MS

2019

LETICIA PAULA CIRQUEIRA MARTINS

O METODO DE ENSINO VAN-HIELE NA CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE PLATÃO

Monografia apresentada a Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Graduação em Licenciatura em matemática

Orientador: Fábio Rodrigues Lucas

Nova Andradina – MS

2019

LETICIA PAULA CIRQUEIRA MARTINS

O METODO DE VAN-HIELE NA CONSTRUÇÃO DOS POLIEDROS DE PLATÃO

Monografia de conclusão de curso apresentada ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial à conclusão do curso.

Aprovada em 12 de Novembro de 2019.

Prof. Dr. Fábio Rodrigues Lucas

Orientador

Prof. Me. Luiz Orestes Cauz

Examinador UEMS

Prof. Me. Sandra Albano da Silva

Examinadora UEMS

Nova Andradina - MS

2019

DEDICATÓRIA

Este trabalho é fruto da pertinência de meu orientador e fruto, também, da persistência de minha família aos quais dedico o resultado do meu estudo.

EPÍGRAFE

“A matemática é o alfabeto no qual Deus escreveu o universo."

- Galileu Galilei

RESUMO

No Ensino Fundamental, assim como no Ensino Médio encontra-se uma lacuna no que se diz respeito ao ensino de geometria, o declínio desse conteúdo tem se declínio no movimento da matemática moderna, onde a mesma deixa de ser uma disciplina e se torna apenas um conteúdo, normalmente encontrado no fim do livro didático, esse déficit acompanha a contemporaneidade fazendo assim, com que os profissionais da educação se indaguem qual o real motivo desse fato, a luz da teoria de Van Hiele, realizamos assim um trabalho de pesquisa bibliográfica, acompanhada de uma experiência em sala de aula de cunho qualitativa, onde posteriormente vemos resultados quantitativos também. A experiência em sala de aula conta com o guia o experimento de Hiele- Geldof, abordando a geometria espacial, mas especificamente os poliedros regulares, ou melhor se dizendo, os poliedros de Platão. Toda uma estrutura é formulada, formando a além do sistema de pensamento dos alunos um sistema de ensino, ambos divididos por níveis citados na pesquisa bibliográfica. Esse experimento tem a sua conclusão, no quarto nível de pensamento geométrico adquirido pelo aluno, denominado dedução formal. E tem como objetivo principal, que o aluno consiga distinguir e identificar os poliedros platônicos e suas propriedades.

Palavras- chave: Geometria Espacial; Van-Hiele; Poliedros.

ABSTRACT

In elementary school, as in high school there is a gap in the teaching of geometry, the decline of this content has been declining in the movement of modern mathematics, where it same to be a discipline and becomes only a content, usually found at the end of the textbook, this deficit accompanies the contemporaneity thus making, with the education professionals wonder what the real reason for this fact, in light of Van Hiele's theory, we carry out a work of bibliographical research, accompanied from a qualitative classroom experience, where we later see quantitative results as well. The classroom experience is guided by Hiele Geldof's experiment, addressing spatial geometry, but specifically the regular polyhedra, or rather Plato's polyhedra. A whole structure is formulated, forming beyond the students' thought system a teaching system, both divided by levels cited in the bibliographic research. This experiment has its conclusion in the fourth level of geometric thinking acquired by the student, called formal deduction. And its main objective is that the student can distinguish and identify the platonic polyhedra and their properties.

Keywords: Spatial Geometry; Van-Hiele; Polyhedra.

Lista de Ilustrações

Sumário

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem o intuito de desvendar os motivos pelos quais o ensino de geometria se encontra devassado no Brasil, com uma breve análise histórica pelo percurso na qual o conteúdo geométrico passa através da educação pontuamos algumas possíveis falhas, em contrapartida apresentamos os resultados obtidos através de um projeto realizado na escola estadual Marechal Rondon, dentro do Programa Residência Pedagógica; este programa é uma das ações que integram a Política Nacional de Formação de Professores e tem por objetivo induzir o aperfeiçoamento da formação prática nos cursos de licenciatura, promovendo a imersão do licenciando na escola de educação básica, a partir da segunda metade de seu curso. O projeto visa suprir o déficit presentes de alunos, de duas turmas do segundo ano, o curso de geometria não se faz obrigatório, e é realizado em contra turno com o horário de aula.

Pela falta de um sistema mental construído apropriadamente em fases que contem a linguagem e conhecimento familiares do aluno, vamos reconstruir um sistema sobre geometria, começando com a matéria do zero, utilizando da metodologia de Van Hiele, passando por descrição, analise, abstração e por último, prova. Utilizando de materiais concretos para facilitar a compreensão sem surgir a dúvida “De onde veio?”, utilizaremos de investigação matemática tendo apenas o professor como orientador, passando pelas formulas e observações da geometria plana e finalizando com a construção dos sólidos platônicos regulares.

À luz da teoria de Van Hiele, esquematizamos um processo pelo qual o aluno progride através dos níveis de pensamentos geométrico, com o enfoque na abstração de conhecimento através da ajuda de materiais concretos, em específicos temos como objetivos principal a construção dos Poliedros de Platão.

O trabalho encontra-se esquematizado da seguinte forma: o iniciamos com uma pesquisa bibliográfica que aborda a teoria de Van-Hiele, a concepção do casal sobre como e em seguida como é aplicada no Brasil, onde apresentam falhas de acordo com a teoria e aplicar no final em uma experiência em sala de aula.

Iniciando com conceitos básicos da geometria, tais como, ponto, reta, plano, trabalha-se uma base sórdida para o prosseguimento da matéria, iniciamos a geometria plana, formandos polígonos, utilizando o software Geogebra, e a partir dos polígonos, formamos planificações que se transformam nos Poliedros de Platão, complementando ainda a construção dos poliedros com outros materiais concreto, tais como o trabalho com dobraduras de papeis, o Origami.

CAPÍTULO 1 - O casal Van-Hiele

Professores em uma escola secundaria, Dina e Pierre Van Hiele, ficaram decepcionados com o baixo conhecimento dos estudantes em geometria, dado pela falta de comunicação adequada entre professor e aluno, eles construíram, em suas teses de doutorado um processo de aprendizagem por meio de níveis diferentes de pensamento; enquanto Pierre formulava um sistema desses níveis, Dina focava em um experimento para elevar os mesmos, após um ano da conclusão de sua tese, Dina veio a falecer, ficando a cargo de Pierre a transmissão de tal teoria.

1.1 Van-Hiele e suas respectivas teses.

Van Hiele- Geldof(1957), concluiu sua tese com dados coletados em um experimento de ensino, que observa –se que no ensino não há como isolar um auno, ou uma variável, o objetivo era investigar os métodos de ensino do qual obtinha-se melhorias na aprendizagem. Todas as situações apresentadas eram do cotidiano em sala de aula, e que além do professor necessita-se de apoio para êxito em suas tarefas diárias, de cooperação entre pesquisadores de psicologia do desenvolvimento e dos didatas.

Segundo a autoria, com fundamentação em seu orientador Freudenthal[1], seu orientador, afirma que a aprendizagem de geometria é um caminho para que o aluno conheça sua própria mente. Uma das observações ressaltadas é de que a essência para a elaboração de conceitos haja uma contextualização é levar em consideração a visão que o aluno tem sobre o assunto.

Em sua tese distingue-se três tipos de estruturas para objetos geométricos: A estrutura global, que se encontra ao nosso redor, e pode ser vista de diferentes ângulos de cada indivíduo, A estrutura geométrica visual, que passa por um meio de contextualização geométrica, e por último as estruturas mais abstratas de pensamento, onde o aluno partindo da estrutura anterior, prova que compreende a estrutura geométrica como um todo. Sendo assim para concluir as decisões do qual deve tomar relevando o pensamento do aluno, o professor deve, observar, teorizar e experimentar.

1.2 O Insight

Van Hiele, apresenta a tese denominada Problematick van het inzicht. Gedemonstreerd aan het inzicht van sschoolkinderen in meetkunde- leerstof. Que em uma tradução livre ficaria, O problema do insight. Uma conexão com a compreensão dos estudantes na aprendizagem da geometria. Onde ele apresenta o Insight, a palavra não apresenta tradução para o português, mas que se aproxima de algo como "compreensão", porém com não se tem uma unanimidade opta-se por utilizar a palavra em inglês "insight".

[1] Hans **Freudenthal**

Em sua tese o autor comenta sobre a diferença entre o “insight” em geometria e o da matemática em geral. Identifica-se também que há inúmeros pontos em comum o *insight* na matemática geral e em conteúdo não matemáticos.

Segundo o autor a criança tem um *insight* quando a partir de relações e dados geométricos consegue chegar a uma terminação de uma condição da qual nunca esteve antes, ou seja, atuar de forma adequada e intencionada frente a novas situações. Ou seja, a compreensão implica em obter o insight.

O insight é a meta na qual o ensino de matemática quer obter, a ligação entre aluno e professor deve ser de confiança, uma vez que o professor que introduzir as informações que os alunos devem sistematizar, e ao mesmo tento o orientador deve ter a percepção dessas informações pelo ponto de vista do estudante, a maneira da qual ele enxerga essas informações, sem que o seu nível elevado de estruturas interfira na sua percepção, pois ele que direciona o processo, a partir das respostas dadas pelos alunos.

O processo para o êxito no ensino de geometria, segue por meios de níveis que passam por percepção, linguagem, e logo após a união de ambas, quando esses três objetivos são abstraídos pelos alunos, dizemos que ocorreu um insight. A partir dessa etapa, o aluno vai perdendo a percepção e obtendo uma linguística mais refinada, associando-a com símbolos, e não palavras, que tem um significado mais preciso, que a própria palavra.

No *insight,* pode ser classificado em dois tipos, os estruturantes e os logarítmicos, no qual podemos observar três tipos distintos de alunos: os que tem condições e habilidades para a completa compreensão da matéria; os que tem boa percepção do campo utilizado, obtendo a compreensão suficiente para o entendimento, mas que não utiliza de algoritmos; e aqueles que não possuem percepção bem estruturada, mas são capazes de aplicar princípios matemáticos quando indicado a situação na qual se encaixam. E por essa distinção de casos, deve ocorrer a organização didática para que o ensino consiga abranger a todos os tipos de alunos, tal pensamento de que o ensino deve ser inclusivo com todas as classes de alunos, temos que a avaliação escrita, não é um dos métodos mais precisos para se medir conhecimento, e sim um diálogo individual, entretanto pela demora que leva, se torna restritivos em um ambiente cotidiano de sala de aula.

O ensino e aprendizagem se dá pelas relações que o aluno associa o âmbito de suas experiências, com o mundo matemático, de modo que se relacione que a teoria vem da pratica, da experiência.

Apesar de a transmissão da teoria não ter atingido as expectativas desejadas a princípios, a teoria foi adotada de acordo com Passos (2015) para criar um novo currículo de matemática na União das Repúblicas Socialistas Soviéticas (URSS), em seguida também foi utilizada na Holanda e na América do Norte.

1.3 A tese de Pierre Van-Hiele

A Tese consiste numa análise de que o conhecimento é obtido com a ajuda de um sistema de relações mentais, a construção da aprendizagem é feita através do ensino e independe da maturidade biológica; O déficit presente na realidade do ensino de geometria se deve a que o professor está em um nível superior, impossibilitando o entendimento e comunicação de ambas as partes, contribuindo para que o aluno atinja apenas a memorização e não o entendimento.

Para Van Hiele é necessário para que haja uma transmissão apropriada de conhecimento entre professor e aluno, que o profissional tenha além de conhecimento pedagógico da matéria a ser aplicada, também uma ciência da parte matemática, a fim de que no processo de aprendizagem o aluno adquira pensamento matemático com a união dos dois. É de consciência do professor ofertar uma experiência vasta para que seja possível estabelecer suas estruturas mentais que podem ser utilizadas em situações-problemas. É necessário que além da expectativa de aprendizado que o professor espera, o mesmo leve em consideração aspectos únicos do aluno, a respeito de assuntos não relacionados aos aspectos matemáticos e pedagógicos, tais como pensamentos individuais dos alunos.

A teoria é caracterizada por sua descontinuidade entre os níveis, uma vez que suas competências mudam e avançam progressivamente através dos mesmos, de acordo com Van Hiele, o sistema é hierárquico e vai se refinando com a própria evolução a respeito de descrição, analise, abstração e prova. Van Hiele (1957) afirma que o sucesso depende da boa estruturação dos níveis, e também de que o professor entenda a dificuldade do aluno e procure um intermédio de evitar erros, sem introduzir um novo nível. Apesar de haver 4 estágios concretos para se progredir na geometria, há pesquisas, como a de Usiskin (1982), que afirmam existir um nível antes do primeiro, um nível base, somando 5 níveis de pensamento. O objetivo é de que ao chegar no nível mais alto o aluno consiga utilizar apenas de suas relações mentais para resolução dos problemas, sem a necessidade do objeto geométrico ao qual o problema se relaciona.

Para que haja aproveitamento da teoria, é necessário que o orientador do conteúdo matemático leve em consideração as individualidades dos estudantes, visto que alunos de uma mesma classe podem apresentar níveis de pensamentos presentes em fases distintas. É necessário uma preparação técnica para que o professor saiba a maneira correta de fazer uma organização pedagógica dos pensamentos, relacionando-os com os respectivos níveis da teoria.

Além dos níveis que discutiremos logo abaixo, a teoria também é caracterizada por ordem fixa, adjacência, distinção e separação; definindo assim que o estudante não consegue progredir entre os níveis sem abster as competências necessárias do anterior, onde cada fase terá sua própria linguagem, sistema de pensamento e reações mentais, impossibilitando a comunicação com total compreensão entre alunos presentes em níveis distintos.

A aquisição da linguagem apropriada da parte do estudante é essencial, pois sem ela o estudante é incapaz de formar sistemas de pensamentos a transitar entre os níveis. Van Hiele detectou este problema ainda no magistério quando entrou em contato com a sala de aula e notou a dificuldade de compreensão do aluno, e por mais que ele explicassem inúmeras vezes, mesmo mudando as estratégias de ensino, não conseguia o resultado esperado. Isso se dava pela diferença entre a linguagem utilizada por ele, que se encontrava em um nível superior, ao que tentava aplicar aos alunos, pois quando é inserido um novo vocabulário sem antes o aluno compreender seus conceitos, impede-se que a intuição matemática seja construída.

1.4 Níveis de pensamento geométrico

Os níveis de desenvolvimento mentais descritos pela teoria são os seguintes:

Visualização (1) onde ocorre as primeiras discussões utilizando de linguagem adequada, nível caracterizado pela intuição onde os alunos reconhecem por figuras sem fazer distinção de suas propriedades, ou seja a figura é reconhecida como um todo e não como uma série de definições, nesse nível é de grande relevância atividades com manipulações de materiais concretos para que o estudante aprenda a lidar com objetos matemáticos, para que os mesmos façam a separação das figuras geométricas que precede a transição para o próximo nível (2)

Também nomeado como Nível de Analise, onde temos reconhecimento das propriedades relacionadas aos objetos em questão, divide as formas em classes, mas ainda não conseguem fazer a distinção e relação entre as mesmas, nesse nível o estudante consegue definir a figura por características, mas se restringindo há uma só para cada caso, impossibilitando por exemplo a inclusão de um quadrado na classe dos retângulos.

No nível (3) da Dedução informal ou classificação, o estudante consegue ter um refinamento em sua linha de pensamento, fazendo inclusão de figuras em mais de uma classe, é capaz de entender uma demonstração, com associações relacionadas com as suas propriedades, mas não consegue desenvolve-la, pois ainda utiliza de linguagem informal para a justificativa de suas afirmações.

No nível seguinte, (4) o de Dedução formal, o aluno tem a necessidade de ter um sistema mental organizado com base em axiomas, teoremas e demonstrações, já sendo capaz de utilizar seus conhecimentos para desenvolver provas e demonstrações sem auxilio, conseguem compreender que para chegar a determinado resultado podemos utilizar de mais de uma forma de resolução, nesse nível eles utilizam de linguagem precisa e são capazes tanto de compreender enunciados maiores e mais complexos, como também formular os seus próprios.

E o por último (5) o Rigor, este nível não recebe tanta atenção dos educadores uma vez que esse geralmente não é apresentado para alunos em ensino regular, é caracterizado, por uma fase onde os alunos já não visualizam a figura como algo dedutivo, mas sim como um sistema de axiomas, demonstrações e teoremas.

Exemplificados os níveis de pensamentos passamos então aos níveis de aprendizagem, onde o professor deve dosar o contato do aluno com o conhecimento, esses também são divididos em etapas das quais contamos com cinco níveis distintos. No primeiro nível (1) é onde professor e estudante conversam sobre as figuras, sendo possível assim a classificação dos níveis de aprendizagem, onde o aluno se encontra, por meio dessa conversa; Na próxima fase (2) acontece a orientação dirigida, onde o professor apresenta desafio em ordem de dificuldade crescente, são feitas perguntas com o intuito de que o aluno de respostas objetivas a respeitos das propriedades, conceitos e definições.

É necessário que o aluno sinta a necessidade de ordenação dos conhecimento, mas que essa competência seja introduzido através de tarefas condizentes com sua evolução, o raciocínio logico a princípio será utilizado, mas o aluno se expressará por meio de definições primárias, evoluindo e se refinando de acordo com o crescimento de seus níveis de pensamento, para isso é necessário que o aluno faça suas próprias constatações, que consiga adquirir conhecimento por meio de seus próprios questionamentos, preenchendo as lacunas de acordo com o seu modo de pensar, e no seu próprio tempo.

Na fase (3) de Explicitação, o aluno consegue demonstrar o que aprendeu verbalmente, ou de forma escrita, nessa fase o professor corrigi pequenas imperfeições no vocabulário, mas não introduz nenhum novo conhecimento. Na fase (4) de Orientação livre, o professor introduz exercícios que utilizem de conhecimentos aprendidos anteriormente, sendo então atividades mais complexas, nesta fase o professor interfere o mínimo possível, deixando a cargo do estudante a formalização de conceitos. E por último temos a fase (5) de Integração, onde resume-se tudo que foi aprendido, afim de fazer uma relação global para retomar os conhecimentos que poderiam estar esquecidos pelos estudantes.

Um dos pontos que Van Hiele da ênfase em sua teoria é de que o ensino de geometria requer uma harmonia, de que métodos relativos a serem aplicados no ensino médio dependem do sucesso do mesmo método aplicado, em nível de pensamento equivalente ao ensino fundamental.

O ensino de matemática é visto como uma ciência não empírica em sua totalidade, entretanto a geometria entra como uma interseção entre uma ciência, por se dizer mental, com uma parte empírica, ou seja uma matemática “palpável”. De acordo com Van Hiele (1957) a aprendizagem é apresentada como uma organização sensível do campo mental e de percepção, como uma nova geração de estruturas mentais e perceptivas.

O processo de ensino consiste em uma aprendizagem do professor por meio da aprendizagem do aluno, pois o orientador deve ser apto a expandir sua linha de pensamento utilizando tanto de conhecimentos matemáticos como também de conhecimentos pedagógicos, de psicologia da aprendizagem, isso gera um momento teórico-prático que induz o professor a chegar na essência do ensino desejado, podendo assim identificar fatores no processo, que impedem ou auxiliam, mesmo que aparentemente não se relacionam com o conteúdo aplicado.

CAPÍTULO 2. A geometria no Brasil

Passando por esta fase de conhecimento da teoria, nos deparamos com a pergunta: “O Ensino de geometria no Brasil é realmente eficaz?” Para responder a essa pergunta devemos fazer uma breve análise, de como anda esse conteúdo em nosso currículo?

A princípio Van Hiele culpa a fata de comunicação adequada sendo o maior obstáculo para aprendizado do estudante, mas como o professor consegue ter uma fala adequada para com o aluno, se ele próprio tem uma falta de contato com a geometria ainda na sua licenciatura? Chegamos a pergunta crucial que define o rumo já muito obscuro sobre o destino na geometria, o professor leciona, muitas vezes sem ter conhecimentos necessário a respeito da matéria, ou ele não ensina?

O ensino deve apresentar a geometria como uma matemática acessível, e que convive com o estudante em seu dia a dia, fazendo uma contextualização da matéria a ser aplicada com o meio do qual o aluno convive; Apesar de toda uma reestruturação na Educação Matemática ao longos dos anos, que incluem a geometria no currículo de matemática, temos percebido que os estudantes apresentam déficit em conceitos primários relativos a geometria. Mesmo com o auxílio dos livros didáticos não conseguimos o êxito desejado, pois esses apresentam poucos conteúdos referentes a geometria e deixam de relaciona-los com o cotidiano.

O PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) (2000) dizem que a geometria é uma matéria presente no cotidiano do aluno e que isso dá a ela uma enorme importância, onde a criança deve ter um pensar geométrico, a fim de identificar situações cotidianas, tais como áreas profissionais que exigem esses conhecimentos, primeiramente no ensino militar e agora em profissões atuais, tais como arquitetura. A geometria em si por ser uma área da matemática mais palpável, o aluno deve através dessa matéria perceber o mundo ao seu redor, como algo a ser estudado. Mas apesar disso, a mesma não é entendida como produção de conhecimento matemáticos, uma vez que é pouco relacionado com o cotidiano do curso de matemática ofertado no ensino básico.

O ensino de geometria ganhou força em 1782, na época de Ensino Militar, denominado Curso Real dos Guardas Marinha, onde todo militar que quisesse ter um ser um oficial deveria fazer um curso referente a matéria, para que tivesse conhecimento relativos a engenharia. Tal curso iniciava de acordo com Meneses (2007) com definições de conceitos básicos como: pontos, retas e afins, e após avançavam progressivamente pelas construções geométricas, num primeiro momento do curso eram construídos de conceitos primórdios citados anteriormente com exercícios de respostas e perguntas, sem muita abordagem pedagógica.

Num segundo momento, já utilizando outra material de apoio para nortear o conhecimento, vemos conteúdos mais aprofundados relacionando geometria e a trigonometria.

Ainda falando de formações militares, a geometria utilizada na época era a de Bézout, como se tinha como uma apresentação a qual não se necessitava de conhecimento prévio de Álgebra, mas somente as 4 operações fundamentais. Sendo assim utilizava da intuição para que o aluno tivesse proveito da pesquisa; substitui-se assim a geometria de Bézout pela de Vilela Barbosa, que já critica em seu livro a até então utilizada dizendo que o método anterior ensina apenas o básico para profissões que contribuíssem para o bem público, e não produzia assim verdadeiros matemáticos.

A nova metodologia utilizada abrange axiomas, corolários, teoremas e também são introduzidos novos conceitos e termos que anteriormente foram deixados de lado, tendo agora um rigor matemático com definições acerca da geometria, e com uma abertura maior para um modelo didático-pedagógico de ensino.

Passando a analisar outros cursos ainda da época militar, temos o da Academia Real Militar, onde desde o início temos como base a geometria Euclidiana, visando substituir as obras de Bézout, utilizando de outras obras que se preocupavam mais com o rigor.

Essas duas academias que formaram a base do ensino de matemática no Brasil, onde o primeiro curso citado se relaciona com o ensino secundário e o segundo fora apresentado em um curso de ensino superior, e somente após esses dois veio a geometria no primário, com o intuito da criança saber noções elementares, mas infelizmente essa opção no ensino básico foi dado como inviável. Mas a frente vemos que ela foi dada como responsável pelo desenvolvimento de pensar com exatidão e método, se tornando indispensável em cursos de carreira jurídica para o aluno abster a ideia exata em Economia Política, tirando assim a visão da geometria como uma matéria militar e passando a ser um pré-requisito para o ingresso no nível superior.

Um dos motivos para que Van Hiele (1957) voltasse sua pesquisa para a geometria, é de que alegavam que a mesma era de pouca importância para o estudante. Sendo assim, em sua tese, ele se compromete a convencer o aluno de que a geometria é uma maneira de provar a validade da matemática em seu cotidiano, fazendo assim com que o aluno adote tal conceito matemático, com base em uma experiência empírica.

O declino da geometria no Brasil se dá, segundo PAVANELLO (1993), por uma influência do movimento da matemática moderna que visa aproximar a matemática do ensino básico à matemática do ensino superior, priorizando a álgebra, e trazendo as noções de figuras, intersecções, conjuntos de pontos no plano, representada pela linguagem da teoria dos números, sem uma preocupação real com a geometria em um campo empírico.

De acordo com Lorenzato (1995), a geometria está quase excluída da sala de aula pois dois principais motivos: O primeiro é de que os professores não detém o conhecimento necessário, um déficit provindo de sua falta de contato com a geometria em sua licenciatura, reproduzindo assim sua deficiência de conhecimento cientifico e consequentemente pedagógico, dentro da sala de aula. A segunda causa, é a priorização do livro didático, que é uma consequência da longa jornada de trabalho dos professores, e a enorme gama de conteúdo a serem passados no ano letivo, esse por sua vez tem a geometria como via de regra como último conteúdo a ser abordado, e apresenta tal matéria como uma aglomerado de definições, propriedades e formulas desvinculando-a assim dos demais campos matemáticos e sem a menor aplicação empírica do conteúdo.

A intervenção do Governo Militar na Educação se deu por meio das leis 5540/68 e 5692/17 que reformulou tanto o ensino superior quanto o ensino primário e secundário. A justificativa que apresentam é o aumento da demanda pela procura dos cursos superiores e ainda assim, tantos os professores como os alunos ainda continuam em uma má condição para que se tenha qualidade em ensino e aprendizagem.

A Reforma na Universidade, amparada pelo decreto 477/69, criando, entre inúmeras outas mudanças, como a licenciatura curta, que estabeleceu critérios pouco rigorosos para o ingresso, de onde formavam a maioria dos professores de matemática, que necessitavam de uma formação adicional para atuar em campo. A geometria continuou no currículo mas, com a formação incompleta do professor, o ensino da mesma ficou devassado.

A falta do conhecimento geométrico impede o aluno de desenvolver pensamentos concebidos através da visualização, a álgebra acomoda o aluno a reproduzir operações sem questioná-las, a falta de atividades empíricas obstruiu a capacidade de pensamento crítico e autônomo dos estudantes.

Pavanello(1993) termina seu texto indicando o abandono da geometria como consequência de medidas governamentais, que revelam as verdadeiras intenções e compromissos com o real ensino oferecido a população.

Em nosso pais, o conhecimento geométrico não progride do nível de visualização onde distinguem as figuras por aspectos visuais e não por definições.

Para que essa progressão siga adiante, usamos neste trabalho o ideal de espaço usando material concreto, restringindo nossas pesquisas, ao campo da geometria espacial, mais precisamente, para os poliedros de Platão.

CAPÍTULO 3. Os Poliedros de Platão

3.1. Platão e sua trajetória

Platão, que nasceu por volta de 427 a. C., em Atenas, vindo de família importante, sendo Aristo, seu pai, sucessor do último rei de Atenas, e sua mãe descendente de grande legislador ateniense, onde por volta de 20 anos de idade, veio a conhecer e se tornar discípulo de Sócrates.

Apesar de ser lembrado, principalmente, pelo ramo da filosofia foi fundador da academia platônica, que foi considerada a primeira universidade do mundo, onde na porta havia os dizeres:

"*Que aqui não adentrem aqueles não versados em geometria"*

Academia esta onde Platão foi sepultado quando morreu aos 80 anos, está se manteve em pé até 529 d. C., quando o império a destruiu em nome do cristianismo.

3.2 Os poliedros de Platão

Enquanto grandes filósofos voltaram seus estudos, como a escola pitagórica, para o estudo de números, Platão voltava seus estudos para a geometria, onde ele foi o primeiro matemático a provar que existiam apenas 5 sólidos geométricos, convexos (quando todo seguimento de reta que liga dois pontos quaisquer dele está inteiramente contido nele.) e regulares (poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares iguais e que todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas), que ficaram mais conhecidos como Poliedros de Platão.

Os poliedros que tem como evidência de suas primeiras aparições datadas há mais de mil anos antes de Platão, esculpidos pelos Povos Neolíticos, onde podemos encontrar esses sólidos no museu Ashmolean em Oxford, Reino Unido.

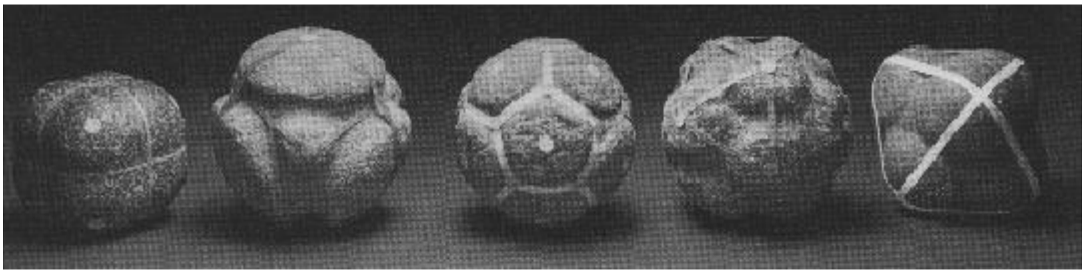


Figura 1 - Sólidos platônicos da era neolítica

Fonte: Museu Ashmoleam

Desde o início da geometria, os poliedros encontram seus estudiosos, que encantados pelas suas simetrias, são atraídos a desvendarem seus mistérios. Estes sólidos foram muitas vezes associados aos 4 elementos da natureza, uma vez que os gregos consideravam que todo corpo que ocupava lugar no espaço era comporto pelos 4 elementos, A misticidade das associações dos poliedros para com os elementos, se dá embasado em medidas de suas superfícies, onde relacionando-as com conceitos de secura para os menores e umidade para os maiores, temos assim, que o tetraedro é associado ao fogo, e o icosaedro a agua, o hexaedro devido a sua fácil construção de base, fora relacionado com a terra, o octaedro pela sua instabilidade fora relacionado com o ar, e por último, o icosaedro definido como o cosmo relacionando-o com as 12 estações do zodíacos.

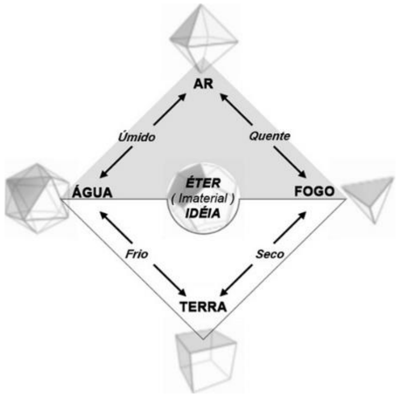


Figura 2- Poliedros de Platão e os elementos

Fonte: Marcus Valerio

Na busca de ideias perfeitas, segundo FERREIRA (2009), Platão destaca a importância da reta do círculo, e principalmente do triângulo. Para Platão a face dos poliedros, nada mais eram do que combinações de triângulos retângulos menores, como por exemplo a planificação do tetraedro, uma vez que a mesma é formada por seis triângulos retângulos em cada face, sendo um total de 6 triângulos retângulos cada multiplicando por 4 faces triangulares, que resulta em 24 triângulos.

Segundo Dolce & Pompeo (1995), para que um poliedro seja denominado Poliedro de Platão, se e somente se, satisfazer as três seguintes condições:

a) Todas as faces têm o mesmo número (n) de arestas,
b) Todos os ângulos poliédricos têm o mesmo número (m) de arestas,
c) Vale a relação de Euler ($V - A + F = 2$).

Onde:

V representa Vértices;

A representa Arestas e

F representa Faces.

Assim, existe cinco, e somente cinco, classes de poliedros de Platão.

Demonstração

Usando as condições que devem ser verificadas por um poliedro de Platão, temos

A) Cada uma das F faces tem n arestas ($n \geq 3$), e como cada aresta está em duas faces:

(1)

$$n * F = 2 * A \Rightarrow \mathrm{F} = \frac{2 * A}{n}$$

B) Cada um dos V ângulos poliédricos tem *m* arestas (m≥3), e como cada aresta contém dois vértices:

(2)

$$m * V = 2 * A \Rightarrow \mathrm{V} = \frac{2 * A}{m}$$

C) (3)

V – A + F = 2

Substituindo (1) e (2) em (3) e depois dividindo em 2ª, obtemos:

(4)

$$\frac{2A}{m} - A + \frac{2A}{n} = 2 \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = \frac{1}{A}$$

Sabemos que *n≥3* e *m≥3*. Notemos, porém, que se *m* e *n* fossem simultaneamente maiores que 3 teríamos:

$$\begin{cases} \mathrm{m} > 3 \Rightarrow \mathrm{m} \geq 4 \Rightarrow \dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{4} \\ n > 3 \Rightarrow \mathrm{n} \geq 4 \Rightarrow \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{m} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq 0$$

O que contraria a igualdade (4), pois A é um número positivo.

Concluímos então que, nos poliedros de Platão, m = 3 ou n = 3 (isto significa que um poliedro de Platão possui, obrigatoriamente, triedro ou triangulo):

1º.) Para m = 3 (supondo que tem triedro).

Em (4) vem:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{6} \Rightarrow \mathrm{n} < 6$$

Então, n = 3 ou n = 4 ou n = 5

(Respectivamente faces triangulares ou quadrangulares ou pentagonais).

2º.) Para n = 3 (supondo que tem triângulo).

Em (4):

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{m} > \frac{1}{6} \Rightarrow \mathrm{m} < 6.$$

Então, m = 3 ou m = 4 ou m = 5

(Respectivamente ângulos triédricos ou tetraédricos ou pentaédricos).

Resumindo os resultados encontrados no 1° e no 2°, concluímos que os poliedros de Platão são determinados pelos pares (*m*, *n)*, sendo, portanto, cinco e somente cinco, as classes de poliedros de Platão.

Consequência

Para saber o número de arestas A, o número de faces F e o número de vértices V de cada poliedro de Platão, basta substituir em (4) os valores de *m* e *n* encontrados e depois trabalhar com (1) e (2).

Exemplo

Uma das possibilidades encontradas para *m* e *n* foi *m* = 3 e *n* = 5.

Com esses valores em (4). Temos:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{1}{A} \Rightarrow \frac{1}{30} = \frac{1}{A} \Rightarrow A = 30$$

Em (2): V = $\frac{2*30}{3} \Rightarrow V = 20.$

Em (1): F = $\frac{2*30}{3} \Rightarrow F = 12.$

Como é o número de faces que determina nome, o poliedro de nosso exemplo é *dodecaedro.*

Notemos que *m* = 3 significa ângulos triédricos (ou triedros) e *n* = 5, faces pentagonais.

Posto isso, apresentamos em resumo a tabela abaixo acerca dos cinco poliedros de Platão:

A	**V**	**F**	**Nome**
6	4	4	Tetraedro
12	8	6	Hexaedro
12	6	8	Octaedro
30	20	12	Dodecaedro
30	12	20	Icosaedro

Sendo que estes sólidos deram origem ao primeiro modelo do Sistema Solar, elaborado por Johannes Kepler (1571 a 1630), onde as 6 orbitas, conhecidas até então naquela época, eram segundo, Tossato (2003), uma junção de inscrições e circunscrição dos cinco sólidos perfeitos nas seis órbitas planetárias conhecidas até então, Kepler (1571 a 1630) afirma que o sistema solar deveria ter movimentos circulares e uniformes, procurando pois, órbitas que projetassem tais harmonias ele criou o sistema com base nos sólidos platônicos, e apesar de não ser o modelo adotado hoje em dia, tivemos algumas descobertas importantes, tais como, as hipóteses heliocêntricas supralunares e a ideia de que a astronomia é uma ciência influenciada por explicações naturais e não instrumentais, como era considerada antes de tal modelo.

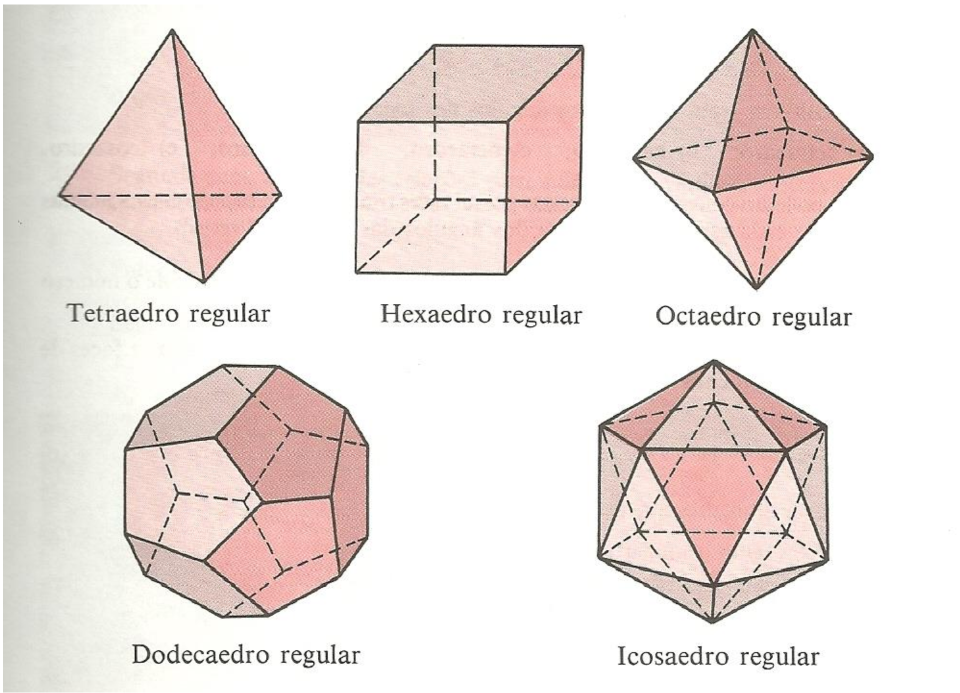


Figura 3 - Poliedros regulares

Fonte: Fundamentos da Matemática Elementar vol.10

3.3 A formula de Euler para poliedros regulares

Após um estudo da parte dos gregos, a respeito dos poliedros, durante muito tempo o assunto continuou estagnado, sendo retomado apenas pelo Suíço Ludwig Schiafli (1814 a 1895) que elaborou a notação para os poliedros regulares como {p, q} onde p é o número de lados dos poliedros e q o número de polígonos que coincidem em cada vértice do sólido.

Segundo FERREIRA(2009), o primeiro que tentou chegar a uma fórmula geral, relacionando os números de arestas, vértices e faces dos poliedros, foi Arquimedes de Siracura (287 a.C. a 212 a.C.). Este nunca conseguiu chegar a formula na qual utilizamos atualmente, porém, logo em seguida, Rene Descarte (1596 a 1650) chegou perto da formula mas não conseguiu realizar sua demonstração, Descartes foi o percursor na unificação de áreas distintas da matemática, sendo elas, álgebra e geometria, dando origem ao que hoje chamamos de geometria analítica.

A formula utilizada atualmente fora publicadas em 1752, e teve sua demonstração elaborada e apresentada com maestria pelo matemático Leonard Euler (1707 a 1783) a formula gera dos poliedros convexos apresentado foi:

$$V - A + F = 2$$

Euler (1707 a 1783), foi um grande matemático, publicando mais de 800 trabalhos durante sua vida, em diversas áreas.

Apesar de a primeira demonstração oficial ter sido feita por Euler, houve um manuscrito, datado de 1639, pertencente a descartes encontrado por um alemão, Gottfried Wilhelm von Leibniz (1649 a 1716), em 1675, que continha anotações na qual se chegava ao produto imediato da formula de Euler, entretanto não foi finalizada, e este manuscrito só foi revelado em Lima, no ano de 2000, em um evento.

Inicialmente, Euler afirmou que sua formula se enquadrava para todos os poliedros, fato este que foi refutado pelo matemático francês Jules Henri Poincaré (1854 à 1912), que provou que a formula seria válida apenas para poliedros convexos.

Segundo Dolce & Pompeo , em Fundamentos da Matemática Elementar (vol 10) (1995), superfície poliédrica limitada convexa é a reunião de um número finito de polígonos planos e convexos (ou regiões poligonais convexas), tais que:

a) Dois polígonos não estão num mesmo plano;
b) Cada lado de polígono não está em mais que dois polígonos;
c) Havendo lados de polígonos que estão em um só polígono, eles sevem formar uma única poligonal fechada, plana ou não, chamada contorno;
d) O plano de cada polígono deixa os demais num mesmo semi-espaço (condição de convexidade).

As superfícies poliédricas limitadas convexas que têm contorno são chamadas *abertas*. As que não tem contorno são chamadas *fechadas*.

Elementos: uma superfície poliédrica limitada convexa tem:

Faces: são os polígonos;

Arestas: são os lados dos polígonos;

Vértices: são os vértices dos polígonos;

Ângulos: são os ângulos dos polígonos.

Uma superfícies poliédrica limitada convexa aberta ou fechada não é uma região convexa.

Consideremos um número finito *n (n* ≥4) de polígonos planos convexos (ou regiões poligonais convexas) tais que:

a) Dois polígonos não estão num mesmo plano;
b) Casa lado de polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
c) O plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semi-espaço.

Nessas condições, ficam determinados *n* semi-espaços, cada um dos quais tem origem no plano de um polígono e contém os restantes. A interseção desses semi-espaços é chamado *poliedro convexo.*

Um poliedro convexo possui: *faces*, que são os polígonos convexos; *arestas*, que são os lados dos polígonos e *vértices*, que são os vértices dos polígonos.

A reunião das faces é a superfícies do poliedros.

Congruência

Dois poliedros são congruentes se, e somente se, é possível estabelecer uma correspondência entre seus elementos de modo que as faces e os ângulos poliédricos de um sejam ordenadamente congruentes às faces e ângulos poliédricos do outro.

Da congruência entre dois poliedros sai a congruência das faces, arestas, ângulos e diedros.

Para todo poliedro convexo, ou para sua superfície, vale a relação:

$$V - A + F = 2$$

Em que V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro.

Demonstração:

Por indução finita referente ao número de faces, vamos provar em caráter preliminar, que, para uma superfície poliédrica limitada convexa aberta, vale a relação

$$V_a - A_a + F_a = 1$$

V_a Em que

V_a É o número de vértices,

A_a É o número de arestas e

F_a É o números de faces

Da superfícies poliédrica limitada aberta.

1)Para F_a = 1.

Neste caso a superfície se reduz a um polígono plano convexo de *n* lados e, então,

$$V_a = \text{n,}{*}A_a = \text{n}$$

Temos:

$$V_a - A_a + F_a = n - n + 1 = 1 \Rightarrow V_a - A_a + F_a = 1.$$

Logo, a relação está verificada para $F_a = 1.$

2) Admitindo que a relação vale para uma superfície de F’ faces (que possui V’ vértices e A’ arestas), vamos provar que também vale para uma superfície de F’ +1 faces (que possui F’ +1=F, faces, V_a vértices e A_a arestas).

b) Por hipótese, para a superfície de F’ faces, A’ arestas e V’ vértices vale:

$$V' - A' + F' = 1$$

Acrescentando a essa superfície (que é aberta) uma face de *p* arestas (lados) e considerando que *q* dessas arestas (lados) coincidem com arestas já existentes, obtemos uma n ova superfície com F_a faces, A_a vértices tais que:

$$F_a = \text{F' +1}$$

$$V_a = A' + p - q$$

$$V_a = V' + p - (q + 1)$$

(*q* arestas coincidiram)

(q arestas coincidindo, *q* + 1 vértices coincidem)

Formando a expressão $V_a - A_a + F_a$ e substituindo os valores acima, vem:

$$V_a - A_a + F_a = \text{V' + p - –q+1) - –A' + p – q) + (F' +1) =}$$

$$\text{=V' + p – q - —A' – p + q-F' +1 = V' - –' + F'}$$

Com $V_a - A_a + F_a = V' - A' + F'$ provamos que essa expressão não se altera se acrescentamos (ou retiramos) uma face da superfície.

Como, por hipótese, V’ – A’ + F’ = 1, vem que

$$V_a - A_a + F_a = 1$$

O que prova a relação preliminar.

b) Tomemos a superfície de qualquer poliedro convexo ou qualquer superfície poliédrica limitada convexa fechada (com V vértices, A arestas e F faces) e dela retiremos uma face. Ficamos, então, com uma superfície aberta (com V_a vértices, A_a arestas e F_a faces) para qual vale a relação

$$V_a - A_a + F_a = 1$$

Como

$V_a = V, A_a = A \; e \; F_a = F - 1, vem \; V - A \; (F - 1) = 1, ou \; seja$

$$V - A + F = 2$$

CAPÍTULO 4 A experiência em sala de aula

A pesquisa de campo ocorreu dentro do Programa Residência Pedagógica, na Escola Estadual Marechal Rondon, no município de Nova Andradina/ Ms com duas turmas do 2º ano do ensino médio, do período matutino; O projeto foi intitulado “A Academia Platônica” e ocorria as terças-feiras, em contra turno, das 18:00 as 21:00hrs; A turma era composta por uma média de 8 alunos, uma vez que o projeto não era obrigatório.

O projeto tinha como principal objetivo construir os poliedros de Platão para um entendimento global das figuras geométricas; entretanto já de início percebeu-se uma lacuna em conceitos básicos relacionados a geometria plana, tais como, ponto, reta, plano e ângulo, logo, o nível inicial seguindo a teoria de Van-Hiele compreende a iniciação desses conceitos. A fim de criar uma base solida, também foi passado a etimologia da palavra geometria. Pesquisamos também o significado de Axiomas, uma vez que as definições do nível 1, a visualização, foram apresentadas como axiomas fundamentais da geometria.

Por se tratar de um tema composto por definições surgiram comentários tais como: “Me falaram que era um curso de matemática, e só estamos escrevendo, não vejo nenhuma conta”, que reforça o que já foi dito no Capitulo 1, em Geometria no Brasil, onde a mesma é vista como uma matéria desvinculada da matemática apresentada em sala de aula, e mesmo que essas turmas já tivessem estudado geometria no primeiro bimestre, ainda assim gerou os referidos questionamentos.

Foi percebido alguns conceitos apresentados na aula, apesar de todos concordarem que haviam entendido, não conseguiam de certa forma visualizar, ou desenhar somente com as definições. Para auxiliar o entendimento apresentamos os conceitos aplicados em sala de aula com a ajuda do Software Geogebra, onde após a assimilação dos conceitos já passados anteriormente, começamos a formar polígonos com tais elementos. Momento este no qual passamos para o nível 2, a análise. Introduzir a partir desta atividade a transição através dos níveis de pensamento geométrico. Definindo conceitos de aresta, vértice, face e espaço.

Já com os conceitos base bem definidos passamos assim para a construção de polígonos, onde a metodologia aplicada, foi transmitir as definição sobre o que é polígono, suas características e respectivas nomenclaturas; apresentar figuras (obras de artes e formas) impressas aos estudantes e pedir para que eles identificarem os polígonos presentes e compararem os resultados. Para finalizar a aula, foi solicitado que reunissem as mesas formando uma mesa que comporte todos os alunos no centro a sala, com o intuito de maior interação Ofertou-se o tangran e possíveis desenhos a serem feitos.

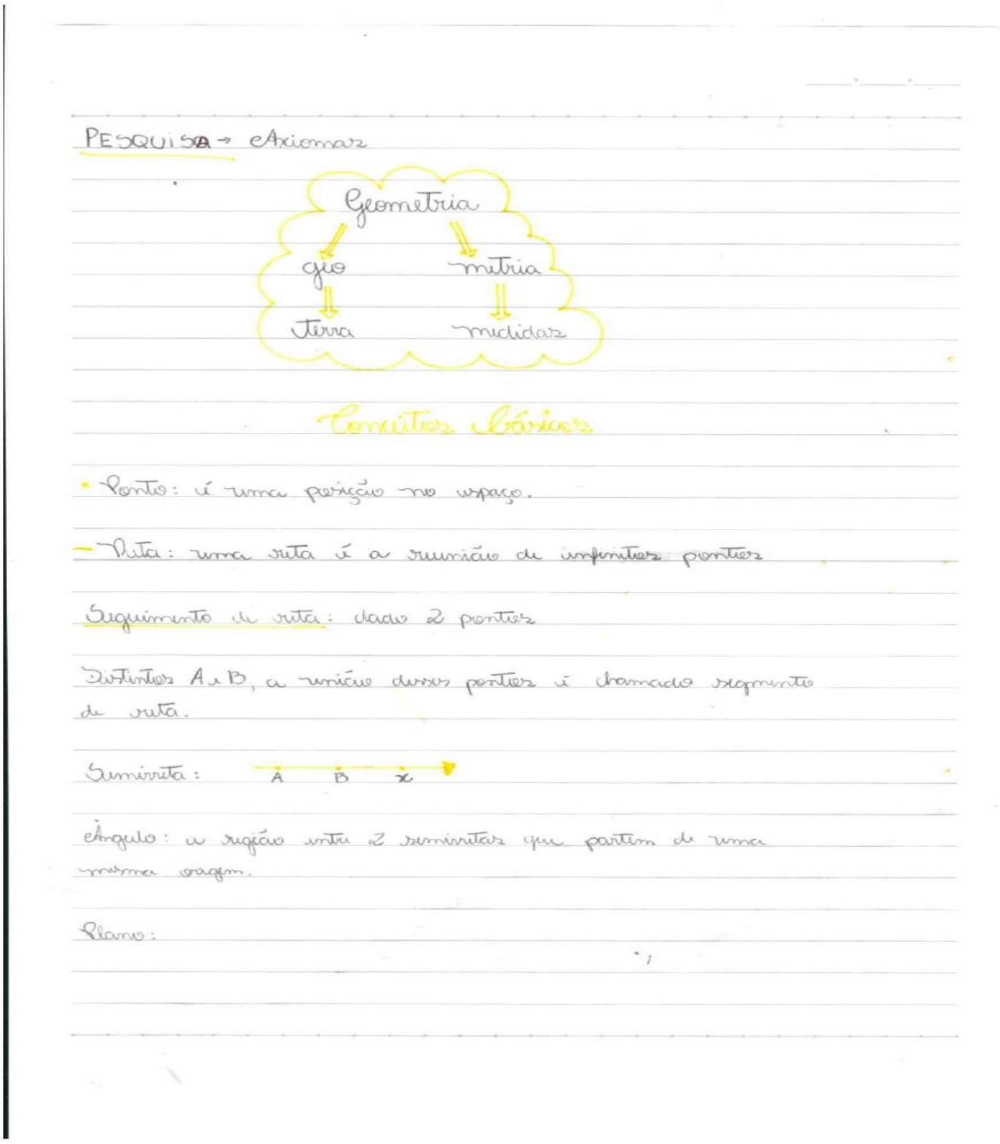


Figura 4 - Etimologia e axiomas da geometria

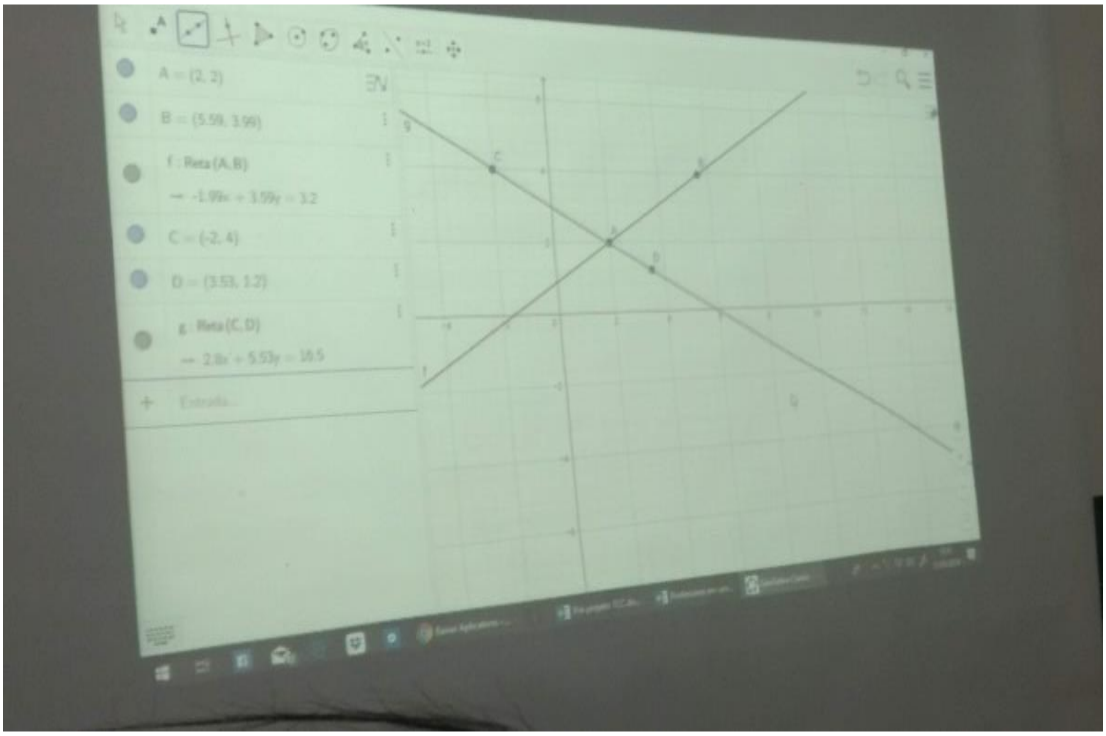
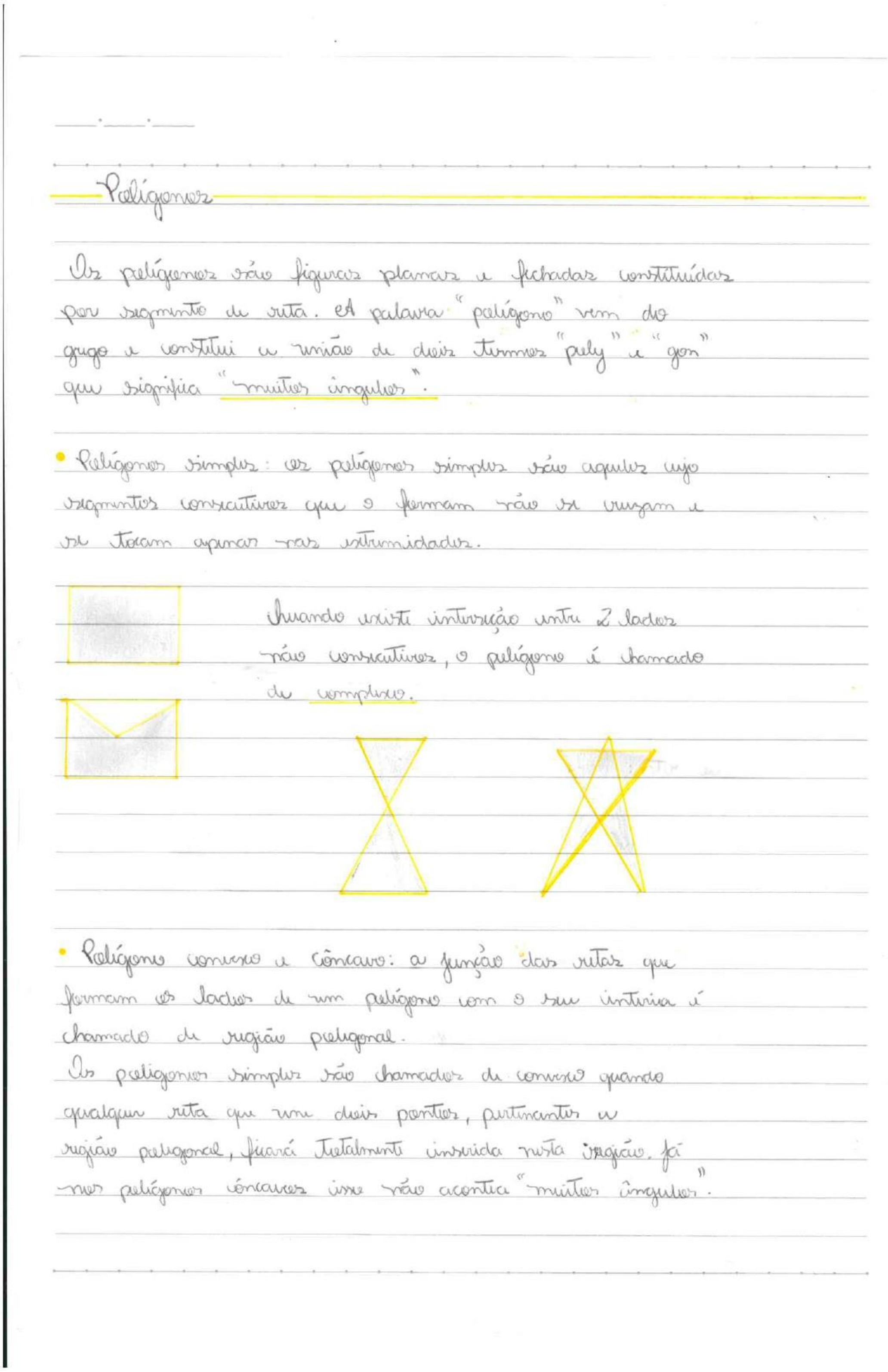


Figura 5 - Aula com o auxílio tecnológico do software Geogebra



Polígonos

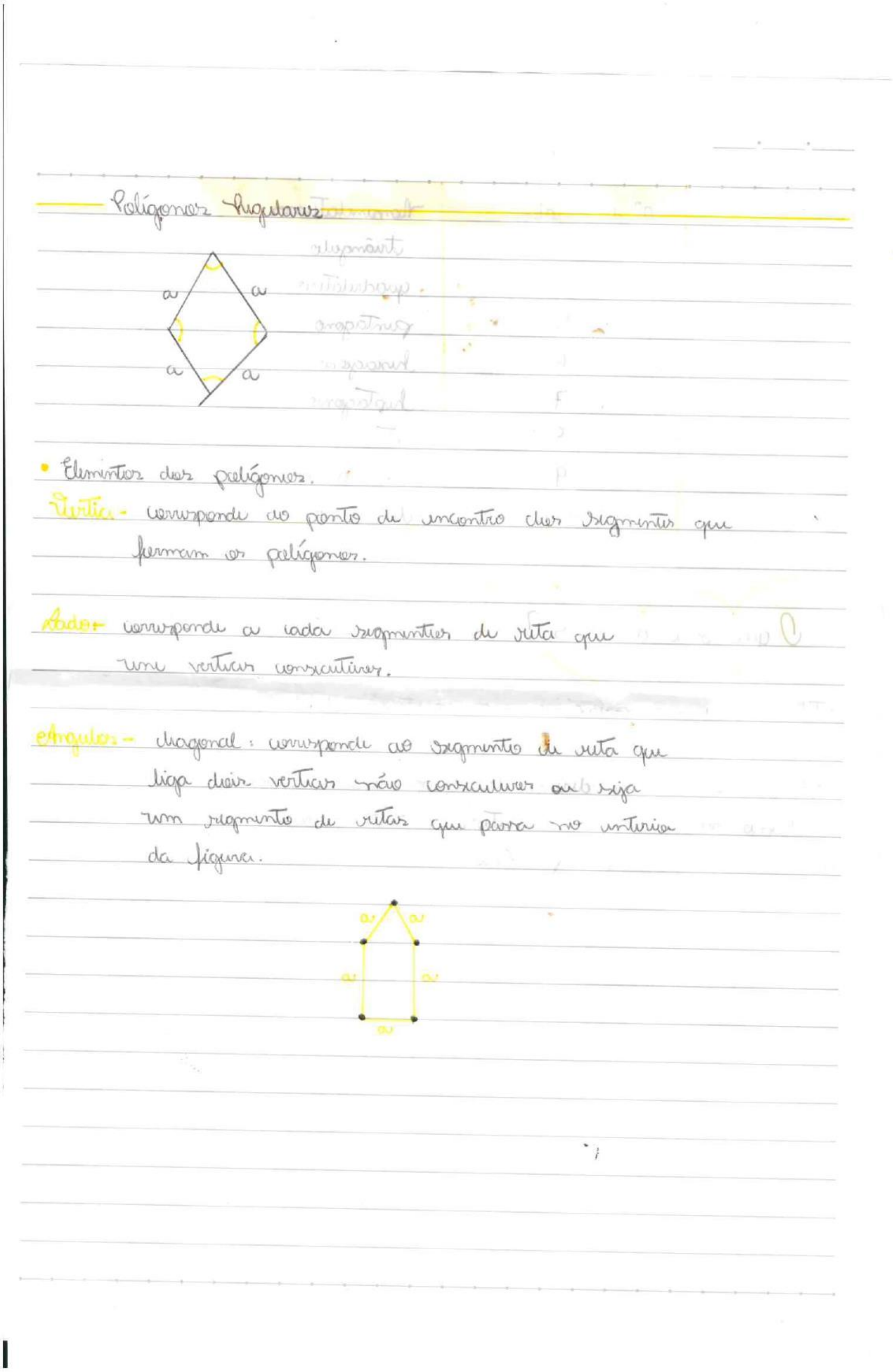
Os polígonos são figuras planas e fechadas constituídas por segmento de reta. A palavra "polígono" vem do grego e constitui a união de dois termos "poly" e "gon" que significa "muitos ângulos".

• Polígonos simples: os polígonos simples são aqueles cujo segmentos consecutivos que o formam não se cruzam e se tocam apenas nas extremidades.

Quando existe intersecção entre 2 lados não consecutivos, o polígono é chamado de complexo.

• Polígono convexo e côncavo: a junção das retas que formam os lados de um polígono com o seu interior é chamado de região poligonal.
Os polígonos simples são chamados de convexo quando qualquer reta que une dois pontos, pertencentes a região poligonal, ficará totalmente inserida nesta região. Já nos polígonos côncavos isso não acontece "muitos ângulos".

Figura 6 – Definição de Polígonos



Polígonos regulares

a a a a

• Elementos dos polígonos.

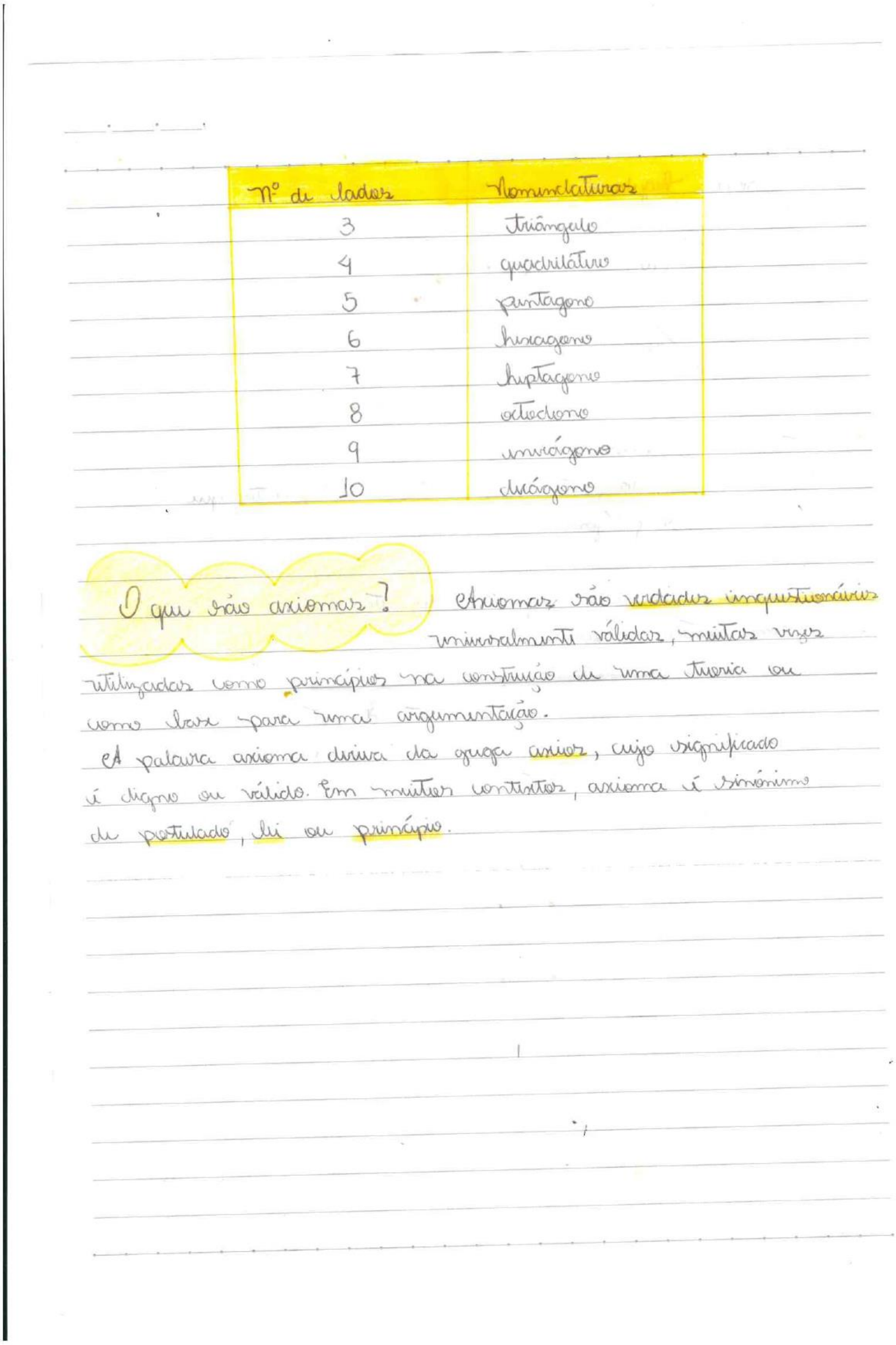
Vértice - corresponde ao ponto de encontro dos segmentos que formam os polígonos.

Lados - corresponde a cada segmentos de reta que une vértices consecutivos.

Ângulos - diagonal: corresponde ao segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos ou seja um segmento de retas que passa no interior da figura.

a a a a a

Figura 7 - Polígonos regulares



Nº de lados	Nomenclaturas
3	triângulo
4	quadrilátero
5	pentágono
6	hexágono
7	heptágono
8	octodono
9	eneágono
10	decágono

O que são axiomas? Axiomas são verdades inquestionáveis universalmente válidas, muitas vezes utilizadas como princípios na construção de uma teoria ou como base para uma argumentação.

A palavra axioma deriva da grega axios, cujo significado é digno ou válido. Em muitos contextos, axioma é sinônimo de postulado, lei ou princípio.

Figura 8 - Nomenclatura dos polígonos

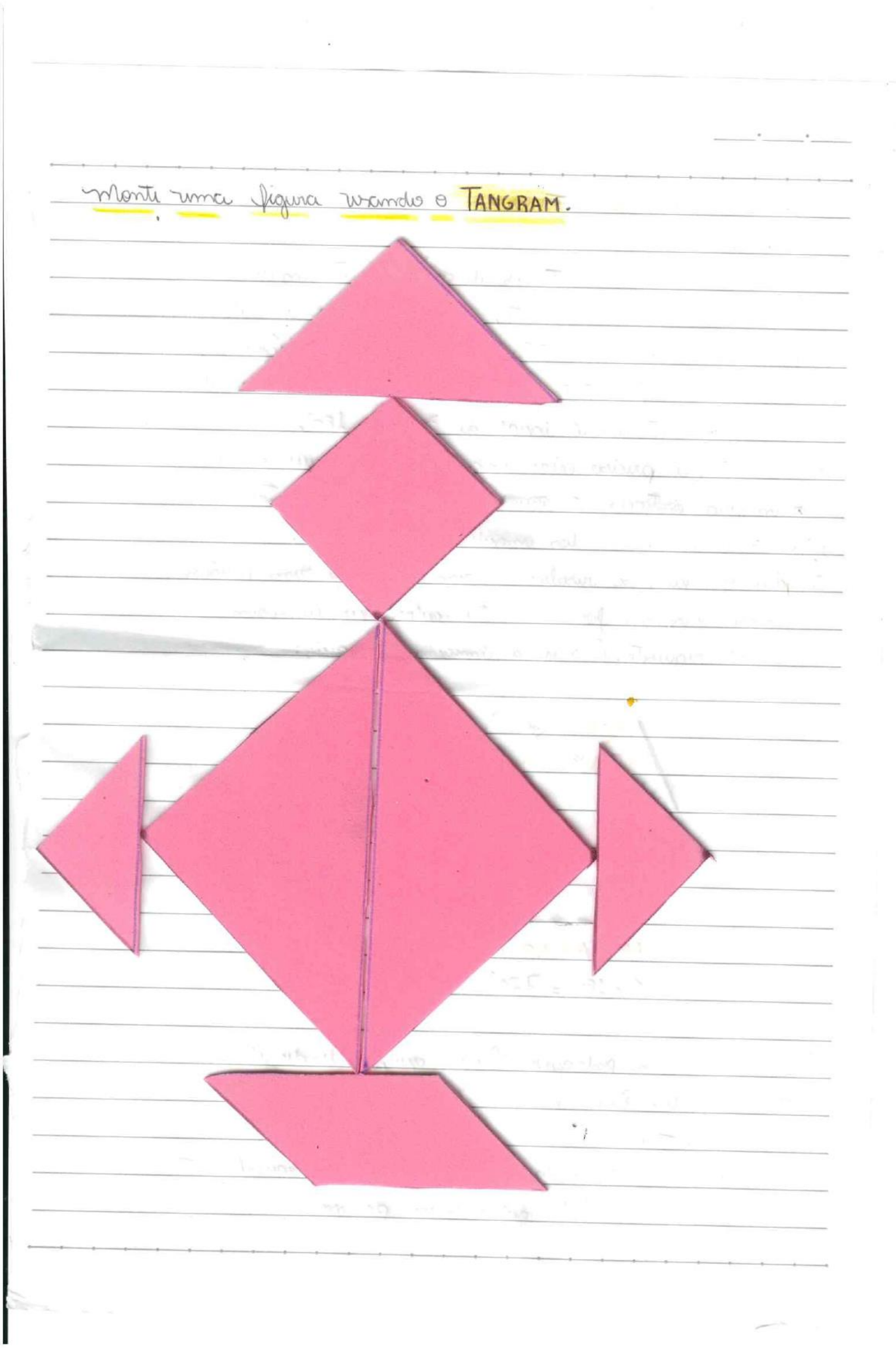


Figura 9 - Tangran

No nível 3, denominado de classificação ofertamos aos alunos material impresso com polígonos distintos para que identificassem, Lados, vértices, ângulos e diagonais e classificassem em regulares e irregulares, em convexo ou côncavo.

Investigamos polígonos regulares e seus ângulos, a fim de chegar a fórmula dos ângulos internos ((n-2) *180º), por meio de informação: dados 3 polígonos, 2 com especificações de cada angulo da figura e sua somatória, e o ultimo com somente a somatória dos ângulos internos, com essa foi solicitado deles utilizarmos o aplicativo Geogebra como ferramenta lúdica, para melhora fixação do conteúdo já aplicado, incentivando o aluno a utilizar a tecnologia para auxílio na aprendizagem da matemática. Identificar os comandos com base na explicação dada em aula. Explorar figuras polinomiais através de recursos no software. Induzir os alunos a explorar figuras através da visualização e construção; Reforçando as propriedades de um polígono e Compreender nomenclatura dos polígonos.

Essas atividades induziram os alunos a geometria espacial explorando as figuras através da visualização e construção; por meio de planificações,

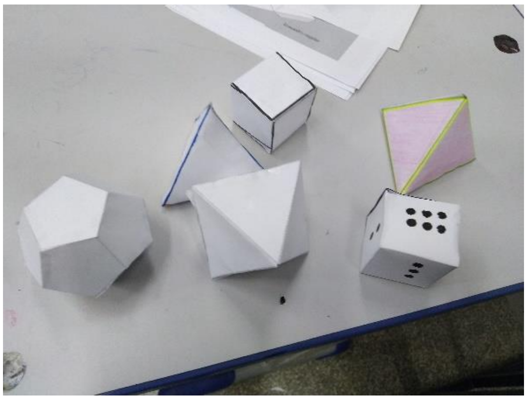


Figura 10 e 11 - Construção dos poliedros através de planificações

Acompanhando esta atividade também expomos as definições de poliedros: “As figuras geométricas espaciais também recebem o nome de sólidos geométricos, que são divididos em: poliedros e corpos redondos. Abordarmos as definições e propriedades dos poliedros. Poliedros são sólidos geométricas formadas por três elementos básicos: vértices, arestas e faces. Um poliedro é considerado regular quando suas faces são polígonos regulares e congruentes. Dentre os poliedros existentes, existem alguns considerados Poliedros de Platão, pois todas as faces possuem o mesmo número de arestas, todos os ângulos poliédricos possuem o mesmo número de arestas e se enquadram na relação de Euler. ”

Tivemos como transição para o nível 4, uma aula onde os alunos confeccionaram o tetraedro em origami para distinguirem empiricamente as suas características, seguida para nosso último estágio no qual queremos chegar, onde o aluno distingue o poliedro através do enunciado de um exercício, sem a necessidade da visualização da forma geométrica, conferindo assim por meio da fórmula de Euler (1707 a 1783) sua regularidade e só então distinguindo de qual dos 5 poliedros se tratava.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Além das atividades já citadas acima, realizamos também: associações dos poliedros presentes na sala de aula; esculturas de sabão em forma de poliedros regulares e construção dos poliedros por meio de palitos e balas de goma, como formato de esqueleto para obtenção de noção de espaço, que se trata a geometria espacial. Atividades essas que demonstraram a princípio de familiaridade com a geometria manipulável e a importância do material concreto para alcançarmos o objetivo da compreensão da geometria pelo estudante.

Entre as inúmeras dificuldades nas quais encontramos ao decorrer do curso, as que mais se destacaram foram: A visão que o aluno tem da geometria ser desvinculada da matemática; o calendário do curso que permitia apenas um dia da semana para sua realização e por último a falta de sintonia entre os níveis de pensamentos geométricos entre o professor e os alunos.

O projeto abrange quatro dos cinco níveis de aprendizado da geometria, uma vez que o último é abordado preferencialmente no ensino superior, todos os alunos que acompanharam a atividade desde o início conseguiram chegar ao objetivo de distinguir os poliedros através de m enunciado e aplica-lo na formula de Euler, os estudantes faltosos apresentaram certa dificuldade, mas que foram supridas através do auxílio de seus colegas, tornando assim nossa pesquisa tanto quantitativa, como também qualitativa.

Importante frisar que as notas da quais se foram citadas na pesquisa bibliográfica, foram confirmadas na sala de aula: a geometria é ensinada de forma tecnicista, ignorando a parte “palpável” do conteúdo; o aluno não a vê como um conteúdo dentro da matemática, uma vez que no curso utilizamos formulas apenas no ultimo nível apresentado; a linguagem apropriada é de total importância e por último, a sincronia de níveis de pensamentos entre alunos e professores colabora não só na aprendizagem do aluno, como também no seu bem estar em sala de aula, eliminando qualquer medo do professor/mediador.

Com isso, terminamos este trabalho reforçando que o ensino de geometria consegue ser produtivo, desde que introduzindo abordagens diferentes da tradicional que temos como base no Livro didático ofertado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais. ensino médio. Ministério da Educação, 2000.

2. CLEMENTS, D. H. Perspective on “The child’s thought and geometry”. **Classics in mathematics education research**, p. 60-78, 2004.

3. CORREIA, Ana Magda Alencar; FERREIRA, Bruno Leite. Poliedros platônicos: dualidade simétrica. **Graf Tec (Florianópolis)**, 2009.

4. DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar. **São Paulo: Atual**, v. 9, p. 7, 1995.

5. LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? A Educação Matemática em Revista. São Paulo, ano III, p. 3 -13, 1.sem. 1995.

6. MENESES, Ricardo Soares de et al. Uma história da geometria escolar no Brasil: de disciplina a conteúdo de ensino. 2007.

7. PASSOS, ADRIANA QUIMENTÃO. VAN HIELE, EDUCAÇÃO MATEMÁTICA REALÍSTICA E GEPEMA: ALGUMAS APROXIMAÇÕES.

8. PAVANELLO, Regina Maria. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. **Zetetiké**, v. 1, n. 1, 1993.

9. TOSSATO, Claudemir Roque; MARICONDA, Pablo Rubén. Força e harmonia na astronomia física de Johannes Kepler. 2003.

10. USISKIN, Zalman. Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. CDASSG Project. 1982.

11. VAN HIELE, Pierre M. Structure and insight: A theory of mathematics education. 1986.