

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL**  
**UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE NOVA ANDRADINA**  
**CURSO DE MATEMÁTICA, LICENCIATURA**

**INTRODUÇÃO AO SISTEMA DINÂMICO DISCRETO**

**WELLINGTON LUÍS DE MELO BARROS**

**Nova Andradina - MS**  
**2019**

# INTRODUÇÃO AO SISTEMA DINÂMICO DISCRETO

WELLINGTON LUÍS DE MELO BARROS

Trabalho de Conclusão de Curso, apresentado ao curso de Matemática/Licenciatura, da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Unidade Universitária de Nova Andradina, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Licenciado em Matemática, sob a orientação do Professor Dr. Oyran Silva Rayzaro.

Nova Andradina - MS

2019

# INTRODUÇÃO AO SISTEMA DINÂMICO DISCRETO

WELLINGTON LUÍS DE MELO BARROS

Aprovado por:

*Oyran Silva Rayzaro*

Professor Dr. Oyran Silva Rayzaro - UEMS

*gustavo antonio Pavani*

Professor Dr. Gustavo Antonio Pavani - UEMS

*Luiz Oreste Luiz*

Professor Me. Luiz Oreste Luiz - UEMS

Nova Andradina - MS

2019

## **Dedicatória**

Aos meus pais Cleide e Luiz, e a minha irmã Laiane, dedico.

## **Agradecimentos**

Primeiramente agradeço à Deus, por estar sempre presente na minha vida. Agradeço aos meus pais Cleide e Luiz, e a minha irmã Laiane, pelo amor e incentivo. Agradeço meu orientador, Oyran Silva Rayzaro, por sua paciência e dedicação durante a realização deste trabalho. Agradeço à todos os professores por seus ensinamentos. Agradeço aos meus amigos, que estiveram ao meu lado no decorrer desses quatro anos, em especial, Emilly, Renata, Sara e Tuane. E por fim, agradeço à todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação. Muito obrigado.

*“Se cheguei até aqui foi porque me apoiei no ombro dos gigantes.”*

*Isaac Newton*

## Resumo

Este trabalho apresenta uma breve introdução aos sistemas dinâmicos discretos. No primeiro momento para se familiarizar com a teoria abordamos alguns fatos históricos e alguns exemplos relacionados a tais sistemas. Posteriormente serão apresentadas algumas definições elementares e conceitos essenciais para o desenvolvimento desses sistemas, tais como: evolução de um sistema dinâmico discreto, iterações e órbitas, retratos de fase, pontos fixos e periódicos, ponto fixo hiperbólico, atratores e repulsores, bifurcação, dinâmica da função quadrática e caos.

**Palavras-chave:** sistemas dinâmicos, órbitas, pontos periódicos, bifurcação, atratores e repulsores.

## **Abstract**

This dissertation presents a brief introduction to discrete dynamic systems. In the first moment to get acquainted with the theory, we present some historical facts and some examples related to such systems. Later, some elementary definitions and concepts which are essential for the development of these systems will be presented, such as: evolution of a discrete dynamical system, iterations and orbits, phase portraits, fixed and periodic points, hyperbolic fixed points, attractors and repulsors, bifurcation, dynamics of the quadratic function, and chaos.

**Keywords:** dynamical systems, orbits, periodic points, bifurcation, attractors and repulsors.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Sistemas dinâmicos</b>	<b>12</b>
1.1	História dos sistemas dinâmicos . . . . .	12
1.2	Exemplos de sistemas dinâmicos . . . . .	16
1.2.1	Método de Newton . . . . .	16
1.2.2	Exemplo de encontrar raízes . . . . .	17
1.2.3	Exemplo de finanças . . . . .	18
1.3	Sistemas dinâmicos discretos . . . . .	19
1.3.1	Evolução de sistemas dinâmicos discretos . . . . .	20
<b>2</b>	<b>Órbitas</b>	<b>21</b>
2.1	Iterações . . . . .	21
2.2	Órbitas . . . . .	22
2.3	Pontos fixos e periódicos . . . . .	22
2.3.1	Pontos fixos . . . . .	22
2.3.2	Teorema do ponto fixo . . . . .	24
2.4	Retrato de fase . . . . .	26
2.5	Atratores e repulsores . . . . .	26
2.5.1	Atratores . . . . .	27
2.5.2	Repulsores . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Bifurcações</b>	<b>31</b>
3.1	Dinâmica da função quadrática . . . . .	32
3.2	Bifurcação sela-nó . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Caos</b>	<b>38</b>
4.1	Dinâmica Simbólica . . . . .	38
4.2	Sistema Caótico . . . . .	40
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>46</b>

# Lista de Figuras

1.1	Conjunto de Julia . . . . .	14
1.2	Conjunto de Mandelbrot . . . . .	15
1.3	Evolução de $F(y_n) = \cos(y_n)$ , com $y_0 = 2$ . . . . .	20
2.1	Gráfico de $F(x) = x^3$ e $y = x$ . . . . .	23
2.2	Gráfico de $F(x) = x^2$ e $y = x$ . . . . .	23
2.3	Gráfico de $F(x) = \sqrt{x}$ e $y = x$ . . . . .	24
2.4	Retrato de fase da função $F(x) = x^3$ . . . . .	26
2.5	Retrato de fase da função $F(x) = x^2$ . . . . .	26
2.6	Diagrama de degraus para $y_{n+1} = y_n^2$ . . . . .	27
2.7	Diagrama de degraus para $y_{n+1} = \cos(y_n)$ . . . . .	28
2.8	Diagrama de degraus para $y_{n+1} = \frac{1}{2} y_n$ . . . . .	28
2.9	Diagrama de degraus para $y_{n+1} = -2 y_n$ . . . . .	29
3.1	Gráfico da função $F_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ . . . . .	32
3.2	Gráfico da função $S_\lambda(x) = \lambda \sin(x)$ . . . . .	32
3.3	Gráfico da função $E_\lambda(x) = e^x + \lambda$ . . . . .	32
3.4	Gráfico da função $Q_c(x) = x^2 + c$ , para $c > \frac{1}{4}$ . . . . .	33
3.5	Gráfico da função $Q_c(x) = x^2 + c$ , para $c \leq \frac{1}{4}$ . . . . .	34
3.6	Gráfico da função $Q_c(x) = x^2 + c$ , para $-\frac{3}{4} < c < 0$ . . . . .	34
3.7	Gráfico da função $Q_c(x) = x^2 + c$ , para $0 \leq c < \frac{1}{4}$ . . . . .	34
3.8	Gráfico da função $F_\lambda(x) = e^x + \lambda$ , para $\lambda > -1$ . . . . .	37
3.9	Gráfico da função $F_\lambda(x) = e^x + \lambda$ , para $\lambda = -1$ . . . . .	37
3.10	Gráfico da função $F_\lambda(x) = e^x + \lambda$ , para $\lambda < -1$ . . . . .	37

# Introdução

Neste trabalho desenvolveremos um estudo sobre Sistemas Dinâmicos Discretos. No Capítulo 1 apresentaremos a história dos sistemas dinâmicos discretos e alguns exemplos relacionados a estes sistemas. No Capítulo 2 apresentamos os conceitos básicos dos sistemas dinâmicos discretos, tais como, iterações, órbitas, pontos fixos, pontos periódicos, retrato de fase, atratores e repulsores, dentre outros. No Capítulo 3 apresentamos a teoria da bifurcação, cujo objetivo é estudar as variações que as aplicações sofrem, através de um parâmetro. É apresentada a dinâmica da função quadrática e a bifurcação sela-nó, neste capítulo e no Capítulo 2 se fez necessário a presença de alguns gráficos para melhor entendimento das definições apresentadas. No Capítulo 4 apresentamos o conceito de caos. Em geral, existem muitos sistemas dinâmicos que são caóticos, mas que podem ser completamente entendidos.

# Capítulo 1

## Sistemas dinâmicos

### 1.1 História dos sistemas dinâmicos

Sistemas dinâmicos tem uma história longa e distinta como um ramo da matemática, começando com o trabalho de Isaac Newton, no qual as equações diferenciais tornaram-se a principal técnica matemática para descrever processos que evoluem continuamente com o tempo. Nos séculos XVIII e XIX, os matemáticos inventaram numerosas técnicas para resolver explicitamente equações diferenciais. Esses métodos incluíram transformações de Laplace, soluções das séries de potências, variação de parâmetros, métodos algébricos lineares e muitas outras técnicas.

Entretanto, havia uma grande falha nesse desenvolvimento, pois todas as técnicas analíticas para resolver equações eram relacionadas as equações diferenciais lineares. As equações diferenciais não-lineares mostraram-se muito mais difíceis de se resolver, e a maioria dos processos mais importantes na natureza são não-lineares.

Um exemplo disto é fornecido pela motivação original de Newton para desenvolver cálculos diferenciais e equações diferenciais. As leis de Newton nos permitem escrever as equações que descrevem o movimento dos planetas no sistema solar, entre muitos outros fenômenos físicos importantes. Conhecidas como o problema dos  $n$ -corpos, essas leis nos dão uma equação diferencial cuja solução descreve o movimento de  $n$  massas pontuais movendo-se no espaço, sujeitas apenas à sua própria atração gravitacional mútua. Se conhecemos as posições e velocidades iniciais dessas massas, então tudo o que temos a fazer é resolver a equação diferencial de Newton para podermos prever onde e como essas massas se moverão no futuro.

Isso acaba por ser uma tarefa formidável. Se houver apenas um ou dois planetas, então essas equações podem ser resolvidas explicitamente, como muitas vezes é feito em uma aula de física. Para três ou mais massas, o problema hoje permanece completamente sem solução, apesar dos esforços de inúmeros matemáticos durante os últimos três séculos.

É verdade que as soluções numéricas das equações diferenciais pelos computadores nos permitiram aproximar o comportamento das soluções reais em muitos casos, mas ainda existem casos no problema dos  $n$ -corpos, onde as soluções são tão complicadas ou caóticas que desafiam até mesmo os valores numéricos da computação.

Embora a solução explícita de equações diferenciais ordinárias não-lineares tenha se mostrado imprecisa, houve três eventos de marco no século passado que revolucionaram a maneira como estudamos sistemas dinâmicos. Talvez o evento mais importante ocorreu em 1890, quando o Rei Oscar II da Suécia anunciou um prêmio para o primeiro matemático que poderia resolver o problema dos  $n$ -corpos e, assim, provar a estabilidade do sistema solar. Ninguém resolveu o problema original, mas o grande matemático francês Henri Poincaré chegou mais perto. Em um artigo de grande alcance, Poincaré renovou totalmente a forma como abordamos equações diferenciais ordinárias não-lineares. Em vez de buscar soluções explícitas dessas equações, Poincaré defendeu o trabalho qualitativo, usando técnicas topológicas e geométricas, para descobrir a estrutura global de todas as soluções. Para ele, o conhecimento de todos os possíveis comportamentos do sistema sob investigação era muito mais importante do que o estudo bastante especializado de soluções individuais.

O artigo premiado de Poincaré continha uma nova e importante visão sobre o comportamento das soluções de equações diferenciais. Ao descrever essas soluções, alguns matemáticos haviam feito anteriormente a suposição de que variedades estáveis e instáveis sempre se correspondem. Poincaré questionou essa suposição. Ele trabalhou arduamente para mostrar que este não era sempre o caso, mas ele não poderia produzir uma prova. Ele finalmente concluiu que as variedades estáveis e instáveis podem não corresponder. Quando finalmente admitiu essa possibilidade, Poincaré percebeu que isso faria com que as soluções se comportassem de uma forma muito mais complicada do que alguém imaginaria anteriormente. Poincaré descobriu o que agora chamamos de caos, ou seja, quando uma sequência não segue nenhum padrão de convergência ou divergência criando uma situação caótica. Anos mais tarde, depois de muitas tentativas de entender o comportamento caótico das equações diferenciais, ele se perguntou se alguém jamais entenderia a complexidade que estava encontrando. Assim, a teoria do caos, como é agora chamada, realmente remonta há mais de 100 anos para a obra de Henri Poincaré.

As realizações de Poincaré em matemática foram muito além do campo dos sistemas dinâmicos. Sua defesa das técnicas topológicas e geométricas abriu novos temas em matemática. Na verdade, com base em suas ideias, os matemáticos desviaram sua atenção aos sistemas dinâmicos e para esses campos relacionados nas décadas seguintes. Áreas de matemática como a topologia algébrica e diferencial nasceram e floresceram no século XX, mas ninguém podia lidar com o comportamento caótico que Poincaré tinha observado,

assim como o estudo da dinâmica.

Havia duas exceções notáveis a isto. Um deles foi o trabalho dos matemáticos franceses Pierre Fatou e Gaston Julia nos anos 1920 sobre a dinâmica de aplicações analíticas complexas. Eles também viram um comportamento caótico, desta vez no que agora chamamos de conjunto de Julia. Na verdade, eles perceberam quão interessantes poderiam ser esses conjuntos de Julia, mas eles não tinham computadores disponíveis para ver esses conjuntos através de gráficos, e dessa forma, este trabalho parou nos anos próximos à 1930.

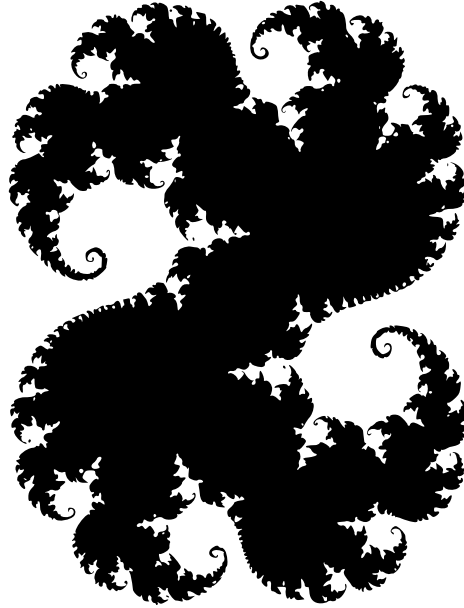


Figura 1.1: Conjunto de Julia

Ao mesmo tempo, o matemático americano G. D. Birkhoff adotou o ponto de vista qualitativo de Poincaré sobre a dinâmica. Ele defendeu o estudo de processos iterativos como uma maneira mais simples de entender o comportamento dinâmico das equações diferenciais. O segundo grande desenvolvimento em sistemas dinâmicos ocorreu na década de 1960, quando o matemático americano Stephen Smale reconsiderou o trabalho de Poincaré em relação às variedades estáveis e instáveis do ponto de vista da iteração e mostrou por um exemplo que o comportamento caótico que confundiu seus antecessores poderia de fato ser compreendido e analisado completamente, e a técnica que ele usou para analisar isso é chamada dinâmica simbólica. Ao mesmo tempo, o meteorologista norte-americano E. N. Lorenz, usando um computador muito primitivo, descobriu que equações diferenciais muito simples poderiam exibir o tipo de caos que Poincaré observou. Lorenz, que foi orientado no doutorado por Birkhoff, passou a observar que seus modelos meteorológicos simples exibiram o que agora é chamado de dependência sensível sobre

condições iniciais. Para ele, isso significava que a previsão do tempo a longo prazo era quase impossível e mostrou que o tópico matemático do caos era importante em outras áreas da ciência.

Isso levou a uma tremenda agitação de atividade na dinâmica não-linear na década de 1970. O ecólogo Robert May descobriu que processos iterativos muito simples que surgem na biologia e matemática podem produzir um comportamento incrivelmente complexo e caótico. O físico Mithell Feigenbanm, através do trabalho de Smale, observou que apesar da complexidade do comportamento caótico, havia alguma semelhança de ordem na maneira dos sistemas se tornarem caóticos. Os físicos Harry Swinney e Jerry Gollub mostraram que esses desenvolvimentos matemáticos poderiam realmente ser observados em aplicações físicas, principalmente na área mecânica de fluídos. Mais recentemente, outros sistemas, como o movimento de Plutão ou a batida do coração humano, exibiram padrões caóticos semelhantes. Na matemática, entretanto, novas técnicas foram desenvolvidas para ajudar a compreender o caos. John Guckenheimer e Robert F. Willians empregaram a teoria dos atratores para explicar o fenômeno que Lorenz havia observado uma década antes. E instrumentos como a derivada Schwarziana, a dinâmica simbólica e a teoria da bifurcação mostraram desempenhar um papel importante na compreensão do comportamento dos sistemas.

O terceiro e mais recente desenvolvimento importante em sistemas dinâmicos foi a disponibilidade de computadores de alta velocidade, particularmente a computação gráfica. O principal resultado gerado por um computador foi a descoberta de Mandelbrot em 1980 do que agora é chamado de conjunto de Mandelbrot.

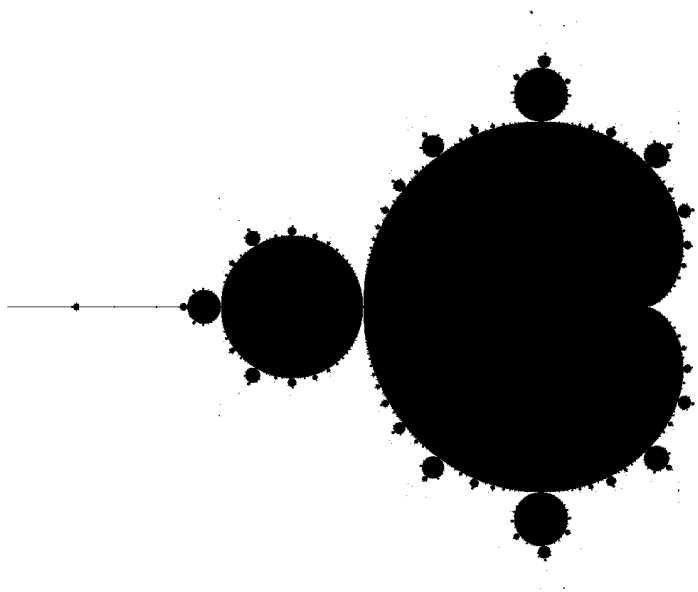


Figura 1.2: Conjunto de Mandelbrot

Esta bela imagem imediatamente despertou o interesse na velha obra de Julia e Fatou. Usando as imagens de computador como um guia, matemáticos como Adrien Douady, John Hubbard e Dennis Sullivan avançaram muito a teoria clássica. Outras imagens de computação gráfica, como o diagrama de órbita e o atrator de Lorenz, geraram um interesse considerável entre os matemáticos e levaram a novos avanços.

Um dos efeitos mais interessantes da disponibilidade de computação de alta velocidade e computação gráfica, é o desenvolvimento de um componente experimental no estudo dos sistemas dinâmicos. Enquanto os antigos mestres tinham que confiar unicamente na sua imaginação e no seu intelecto, agora os matemáticos têm um recurso adicional inestimável para investigar a dinâmica: o computador. Esta ferramenta abriu perspectivas totalmente novas para os dinamicistas.

## 1.2 Exemplos de sistemas dinâmicos

Nosso objetivo neste trabalho é descrever o belo assunto matemático conhecido como teoria dos sistemas dinâmicos. Iremos, na maior parte, concentrar-nos na matemática em si e não nas aplicações do assunto. No entanto, por motivação, nesta seção descreveremos alguns exemplos de sistemas dinâmicos que surgem na prática.

### 1.2.1 Método de Newton

A aplicação prática do Método de Newton para encontrar as raízes de um polinômio é um exemplo de sistema dinâmico, pois para a maioria da escolha dos valores iniciais de  $x_0$ , a sequência  $x_0, x_1, x_2, \dots$  converge para a raiz do polinômio.

Newton descobriu um método para aproximar os valores das raízes de uma equação algébrica. Esse método, hoje conhecido como Método de Newton, diz o seguinte:

Se  $f(x) = 0$  tem apenas uma raiz no intervalo  $[a, b]$  e se  $f'(x)$  e  $f''(x)$  não se anulam nesse intervalo, escolhido  $x_0$  inicial entre  $a$  e  $b$  para o qual  $f(x_0)$  e  $f'(x_0)$  tem mesmo sinal então a sequência  $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$ , tende a raiz de  $f(x)$ , onde:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

**Definição 1.2.1.** *Seja  $f(x) \in C^2$  (conjunto das funções com até a segunda derivada contínua) uma função definida em um intervalo  $[a, b]$ . Dizemos que  $\bar{x} \in [a, b]$  é uma raiz aproximada, com precisão  $\varepsilon > 0$  se  $|f(\bar{x})| < \varepsilon$ .*

**Exemplo 1.2.1.** *Para determinar a aproximação de  $\sqrt{3}$  pelo Método de Newton, com precisão de  $\varepsilon = 1 \times 10^{-4}$ , consideramos a função  $f(x) = x^2 - 3$ , definida no intervalo  $[1, 2]$ ,*



pois  $\sqrt{3}$  está situada entre 1 e 2. Note que  $f'(x) = 2x$ ,  $f''(x) = 2$  e  $f(x) \in C^2$ . Como esta função satisfaz as condições do Método de Newton, tomando como aproximação inicial  $x_0 = 1,5$  e utilizando a Equação 1.1, temos:

$$x_1 = 1,5 - \frac{f(1,5)}{f'(1,5)} = 1,75$$

Note que  $|f(x_1)| = |1,75^2 - 3| > \varepsilon$ , dessa forma continuamos as iterações.

$$x_2 = 1,75 - \frac{f(1,75)}{f'(1,75)} = 1,732142857$$

Note que  $|f(x_2)| = |1,732142857^2 - 3| > \varepsilon$ , dessa forma continuamos as iterações.

$$x_3 = 1,732142857 - \frac{f(1,732142857)}{f'(1,732142857)} = 1,73205081$$

Note que  $|f(x_3)| = |1,73205081^2 - 3| < \varepsilon$ , dessa forma paramos as iterações e assumimos  $x_3$  como aproximação de  $\sqrt{3}$ .

### 1.2.2 Exemplo de encontrar raízes

Como você encontra o valor de  $\sqrt{5}$  exatamente? Acredite ou não, o método mais simples remonta ao tempo dos babilônios e envolve uma iteração simples. Vamos assumir  $x_0$  como um valor inicial para determinar  $\sqrt{5}$ , considerando  $x_0 > 0$  e  $x_0 \neq \sqrt{5}$ . Se  $x_0 \neq \sqrt{5}$ , então temos  $x_0 < \sqrt{5}$  ou  $x_0 > \sqrt{5}$ . No primeiro caso, temos:  $\sqrt{5} x_0 < 5 \Rightarrow \sqrt{5} < \frac{5}{x_0}$ , para  $x_0 \neq 0$ . Por outro lado, se  $x_0 > \sqrt{5}$ , então:  $\sqrt{5} > \frac{5}{x_0}$ . Assim temos,  $x_0 < \sqrt{5} < \frac{5}{x_0}$  ou  $\frac{5}{x_0} < \sqrt{5} < x_0$ . Portanto, se fazemos a média de  $x_0$  e  $\frac{5}{x_0}$ , ou seja,  $x_1 = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{5}{x_0} \right)$ , o valor resultante ficará entre  $x_0$  e  $\frac{5}{x_0}$ , assim esperamos uma melhor aproximação para  $\sqrt{5}$ . Então usamos  $x_1$  como nosso próximo valor para determinar  $\sqrt{5}$ . Continuando, formamos as seguintes médias sucessivas:  $x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{5}{x_1} \right)$ ,  $x_3 = \frac{1}{2} \left( x_2 + \frac{5}{x_2} \right)$ , ...,  $x_n = \frac{1}{2} \left( x_{n-1} + \frac{5}{x_{n-1}} \right)$ . Intuitivamente, a sequência de números  $x_0, x_1, x_2, \dots$ , deve eventualmente se aproximar de  $\sqrt{5}$ .

Vamos ver como isso funciona na prática. Suponhamos  $x_0 = 1$ . Então nós temos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} (1 + 5) = 3 \\ x_2 &= \frac{1}{2} \left( 3 + \frac{5}{3} \right) = \frac{7}{3} = 2,333 \dots \\ x_3 &= \frac{1}{2} \left( \frac{7}{3} + \frac{15}{7} \right) = \frac{47}{21} = 2,238095 \dots \\ x_4 &= 2,236068 \dots \end{aligned}$$

$$x_5 = 2,236067 \dots$$

$$x_6 = 2,236067 \dots$$

E vemos que, muito rapidamente, essa sequência tende para a resposta correta, pois  $\sqrt{5} = 2,236067\dots$

### 1.2.3 Exemplo de finanças

Considere a seguinte situação. Suponhamos que depositemos R\$ 1000,00 em um banco a 10% de juros. Se deixarmos esse dinheiro intacto por  $n$  anos, quantos teremos em nossa conta no final deste período? Assumimos que a participação de 10% é adicionada à nossa conta uma vez por ano.

Este é um dos exemplos mais simples de um processo iterativo ou sistema dinâmico. Vamos denotar a quantidade que temos no banco no final do  $n$ ésimo ano por  $A_n$ . Nosso problema é determinar  $A_n$  para um número de  $n$  anos. Sabemos que  $A_0$ , nosso depósito inicial, é de R\$ 1000,00. Após 1 ano, adicionamos 10% a esse valor para obter nosso novo saldo. Isto é,  $A_1 = A_0 + 0.1A_0 = 1.1A_0$ .

No nosso caso específico,  $A_1 = \text{R\$ } 1100,00$ . No final do segundo ano, realizamos a mesma operação,  $A_2 = A_1 + 0.1A_1 = 1.1A_1$ , de modo que  $A_2 = \text{R\$ } 1210,00$ . Continuando:

$$A_3 = 1.1A_2$$

$$A_4 = 1.1A_3$$

·

·

·

$$A_n = 1.1A_{n-1}$$

Assim, podemos determinar recursivamente o montante  $A_n$ , uma vez que sabemos o saldo do ano anterior.

A equação  $A_n = 1.1A_{n-1}$  é um exemplo de uma equação de diferença (de primeira ordem). Em tal equação, usamos informações do ano anterior (ou outro intervalo de tempo fixo) para determinar as informações atuais.

Nós resolvemos essa equação de diferença pelo processo de iteração. O processo iterativo envolvido é a multiplicação por 1.1. Ou seja, se definirmos a função  $F(x) = 1.1x$ , nossos saldos de poupança são determinados pela aplicação repetida desta função:

$$A_1 = F(A_0)$$

$$A_2 = F(A_1)$$

$$A_3 = F(A_2)$$

e assim por diante. Note que também podemos escrever:

$$\begin{aligned} A_2 &= F(F(A_0)) = F \circ F(A_0) \\ A_3 &= F(F(F(A_0))) = F \circ F \circ F(A_0) \end{aligned}$$

para indicar claramente que aplicando repetidamente a função  $F$  conseguimos obter os valores sucessivos.

Visto que  $F(x) = 1.1x$ , temos:

$$\begin{aligned} F(F(x)) &= (1.1)^2x \\ F(F(F(x))) &= (1.1)^3x \end{aligned}$$

e, em geral, a  $n$ ésima iteração da função produz:

$$\underbrace{F \circ \dots \circ F(x)}_{n \text{ vezes}} = (1.1)^n x$$

Então, para encontrar o valor de  $A_n$ , calculamos  $(1.1)^n$  e multiplicamos por  $A_0$ . Por exemplo, usando uma calculadora, podemos verificar facilmente que  $A_{10} = \text{R\$ } 2593,74$  e  $A_{50} = \text{R\$ } 117.390,85$ .

### 1.3 Sistemas dinâmicos discretos

Sistema dinâmico discreto é um sistema em que seu estado depende do tempo, ou seja, só muda durante os instantes  $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$ , permanecendo constante no intervalo de tempo entre dois desses instantes. O valor da variável de estado nos instantes  $\{t_0, t_1, t_2, \dots\}$  será uma sequência  $\{y_0, y_1, y_2, \dots\}$ . A evolução de um sistema dinâmico discreto permite calcular por recorrência o estado  $y_{n+1} = F(y_n)$ , num instante  $t_{n+1}$ , a partir do estado  $y_n$ , no instante anterior  $t_n$ .

Utilizando uma linguagem formal, um sistema dinâmico é um par ordenado  $(X, T)$  em que  $T$  é o espaço dos estados e  $T : X \rightarrow X$  é uma transformação que leva um estado a outro estado seguindo uma lei de evolução (tempo).

**Observação 1.3.1.** *Quanto à variável temporal, um sistema dinâmico pode ser de tempo contínuo ou de tempo discreto. Um sistema dinâmico é de tempo discreto se o tempo  $t$  é um número inteiro. Normalmente, toma-se  $t \in \mathbb{Z}_+$ , ou seja, assume-se que  $t$  é um*

número inteiro não negativo. Um sistema dinâmico é de tempo contínuo se o tempo  $t$  é um número real. Normalmente, toma-se  $t \in \mathbb{R}_+$ , ou seja, assume-se que  $t$  é um número real não negativo.

### 1.3.1 Evolução de sistemas dinâmicos discretos

Seja  $F$  uma função conhecida. A evolução de um sistema dinâmico discreto para a função  $F$  é obtida aplicando sucessivamente a função ao estado inicial  $y_0 = c$ , ou seja,  $\{c, F(c), F(F(c)), F(F(F(c))), \dots\}$  ou, em forma mais compacta:  $\{c, F(c), F^2(c), F^3(c), \dots, F^n(c)\}$ .

Dado um estado inicial  $y_0$ , aplicações sucessivas da função  $F$  permitem obter facilmente a sequência de estados  $y_n$ , a equação anterior obtida é uma **equação de diferenças**.

**Exemplo 1.3.1.** Considere  $F(y) = \cos(y)$ . Para obter os 4 primeiros termos da evolução do sistema  $y_{n+1} = \cos(y_n)$ , com estado inicial  $y_0 = 2$ , devemos aplicar a equação de diferenças três vezes, assim obtemos os quatro primeiros termos na sucessão:  $\{2, \cos(2), \cos(\cos(2)), \cos(\cos(\cos(2)))\} = \{2, -0,4161\dots, 0,9146\dots, 0,6100\dots\}$ . Observe graficamente na figura abaixo a evolução deste sistema dinâmico com estado inicial  $y_0 = 2$ .

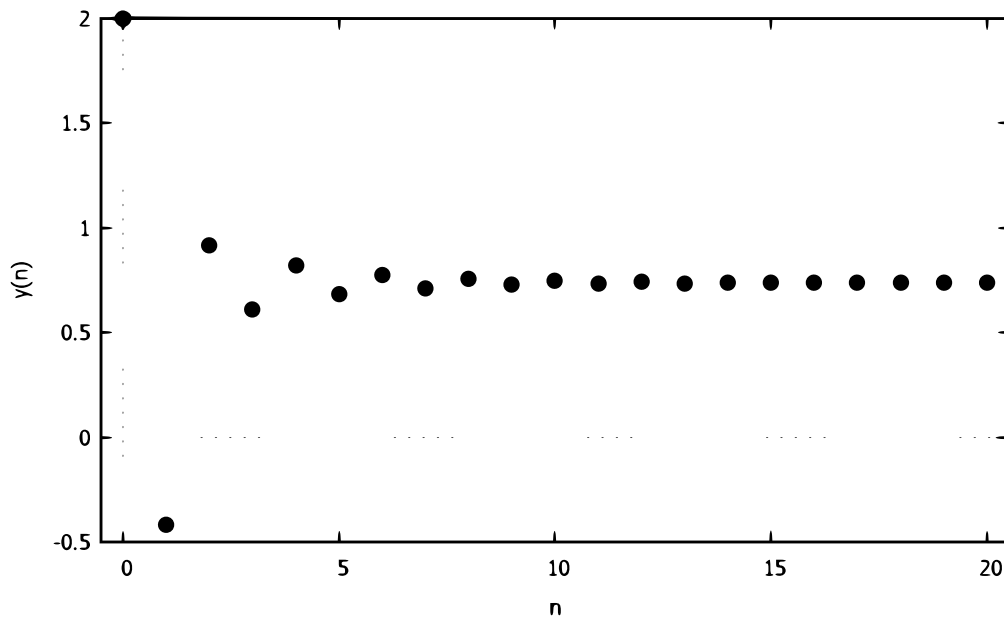


Figura 1.3: Evolução de  $F(y_n) = \cos(y_n)$ , com  $y_0 = 2$

# Capítulo 2

## Órbitas

### 2.1 Iterações

Como vimos no capítulo anterior, existem muitos tipos de problemas na ciência e na matemática que envolvem iteração. Iteração significa repetir um processo. Na dinâmica, o processo repetido é a aplicação de uma função.

Neste e nos próximos capítulos, consideraremos apenas as funções de uma variável real. Discutiremos as funções quadráticas  $Q_c(x) = x^2 + c$ , onde  $c \in \mathbb{R}$  é uma constante. Outras funções que surgem frequentemente são as funções logísticas  $F_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ , as exponenciais  $E_\lambda(x) = \lambda e^x$  e as funções senoidais  $S_\mu(x) = \mu \operatorname{sen}(x)$ . Aqui,  $\lambda$  e  $\mu$  são constantes. As constantes  $c$ ,  $\mu$  e  $\lambda$  são chamadas de parâmetros. Uma das questões importantes que abordaremos mais adiante é como a dinâmica dessas funções muda à medida que esses parâmetros são variados.

Para iterar uma função devemos aplicá-la repetidamente, usando a saída da aplicação anterior como entrada para a próxima. Este é o mesmo processo que acontece quando digitamos um número em uma calculadora científica e, em seguida, apertarmos em umas das teclas, como *sen* ou *cos*. Matematicamente, este é o processo de compor repetidamente a função consigo mesma.

Nós escrevemos isso da seguinte maneira: para uma função  $F$ ,  $F^2(x)$  é a segunda iterada de  $F$ , isto é  $F(F(x))$ ,  $F^3(x)$  é a terceira iterada de  $F$ , isto é  $F(F(F(x)))$ , e, em geral,  $F^n(x)$  é a  $n$ -ésima composição de  $F$  consigo mesma.

Por exemplo, se  $F(x) = x^2 + 1$ , então:

$$F^2(x) = (x^2 + 1)^2 + 1$$

$$F^3(x) = ((x^2 + 1)^2 + 1)^2 + 1$$

Analogamente, se  $F(x) = \sqrt{x}$ , então:

$$F^2(x) = \sqrt{\sqrt{x}}$$

$$F^3(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$$

É importante perceber que  $F^n(x)$  não significa elevar  $F$  à  $n$ -ésima potência (uma operação que nunca usaremos). Pelo contrário,  $F^n(x)$  é a  $n$ -ésima iterada de  $F$  calculada em  $x$ .

## 2.2 Órbitas

Dado  $x_0 \in \mathbb{R}$ , definimos a órbita de  $x_0$  em relação à função  $F$ , como a sequência de pontos  $x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F^2(x_0), \dots, x_n = F^n(x_0)$ . O ponto  $x_0$  é chamado de ponto inicial da órbita.

**Exemplo 2.2.1.** Se  $F(x) = \sqrt{x}$  e  $x_0 = 256$ , os primeiros pontos na órbita de  $x_0$  são:  $x_0 = 256, x_1 = \sqrt{256} = 16, x_2 = \sqrt{16} = 4, x_3 = \sqrt{4} = 2, x_4 = \sqrt{2} = 1,4142 \dots$ . Se continuarmos a obter os pontos dessa órbita, eles tenderão a 1.

**Exemplo 2.2.2.** Se  $S(x) = \sin(x)$  e  $x_0 = 123$ , os pontos na órbita de  $x_0$  são:  $x_0 = 123, x_1 = -0,4599 \dots, x_2 = -0,4436 \dots, \dots, x_{300} = -0,0975 \dots, x_{301} = -0,0974 \dots$ . Se continuarmos a obter os pontos dessa órbita, eles tenderão a 0.

**Exemplo 2.2.3.** Se  $C(x) = \cos(x)$  e  $x_0 = 123$ , os pontos na órbita de  $x_0$  são:  $x_0 = 123, x_1 = -0,8879 \dots, x_2 = 0,6309 \dots, \dots, x_{50} = 0,739085 \dots, x_{51} = 0,739085 \dots, x_{52} = 0,739085 \dots$ . Após apenas algumas iterações, os pontos dessa órbita se aproximam de 0,739085 ...

## 2.3 Pontos fixos e periódicos

Uma noção muito importante para o estudo de sistemas dinâmicos é a de pontos fixos e pontos periódicos.

### 2.3.1 Pontos fixos

Um ponto fixo do sistema dinâmico discreto é um ponto  $x_0$  onde o estado do sistema  $F$  permanece constante, ou seja,  $F(x_0) = x_0$ , isto é, sucessivas aplicações da função  $F$

não modificam o valor inicial. A órbita do sistema, com valor inicial  $x_0$ , é uma sequência constante:  $\{x_0, x_0, x_0, \dots\}$ . Gráficamente um ponto fixo é a coordenada  $x$  do ponto onde o gráfico de  $f(x)$  encontra a diagonal  $y = x$ .

Observe o gráfico da função  $F(x) = x^3$ , onde é fácil verificar que possui como pontos fixos 0 e  $\pm 1$ , pois os mesmos interceptam a reta  $y = x$ .

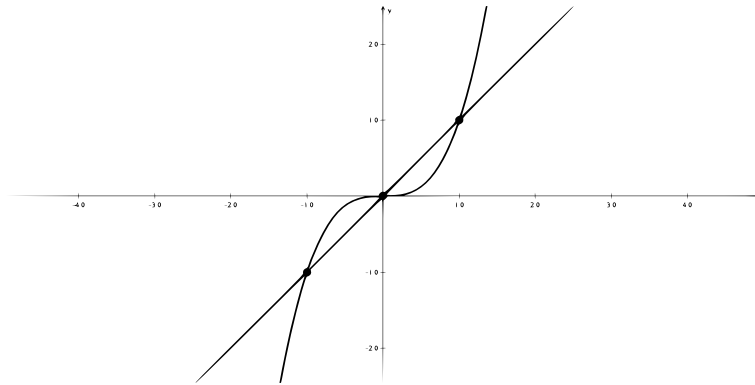


Figura 2.1: Gráfico de  $F(x) = x^3$  e  $y = x$

Observe o gráfico da função  $F(x) = x^2$ , onde é fácil verificar que possui como pontos fixos 0 e 1, pois os mesmos interceptam a reta  $y = x$ .

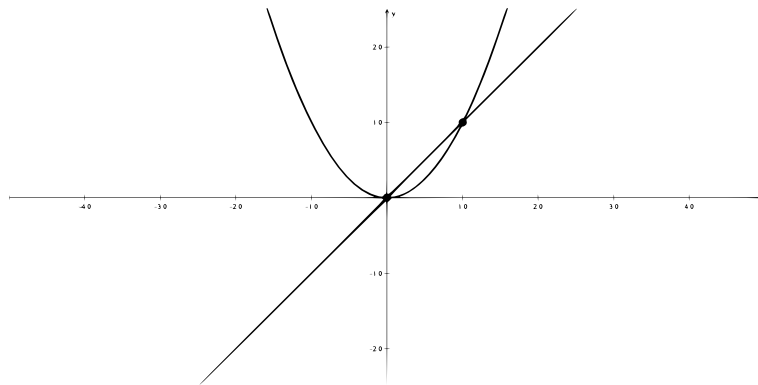


Figura 2.2: Gráfico de  $F(x) = x^2$  e  $y = x$

Observe o gráfico da função  $F(x) = \sqrt{x}$ , onde é fácil verificar que possui como pontos fixos 0 e 1, pois os mesmos interceptam a reta  $y = x$ .

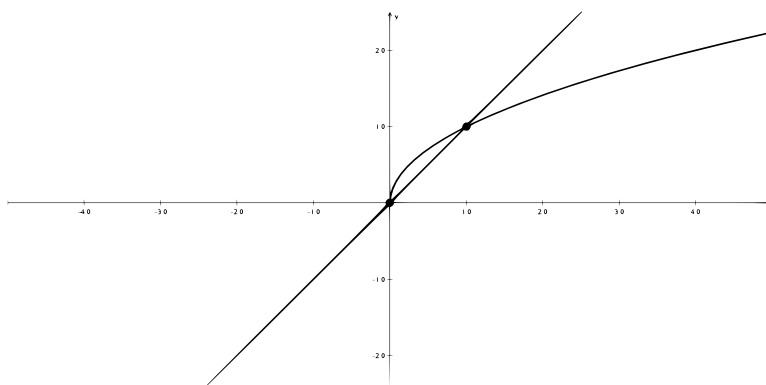


Figura 2.3: Gráfico de  $F(x) = \sqrt{x}$  e  $y = x$

### 2.3.2 Teorema do ponto fixo

Um dos critérios mais simples para encontrar pontos fixos é uma consequência imediata do seguinte fato importante do cálculo:

**Teorema 2.3.1.** *Teorema do valor intermediário: Suponha que  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  seja contínua. Suponha que  $y_0$  fica entre  $F(a)$  e  $F(b)$ . Então há um  $x_0$  no intervalo  $[a, b]$  com  $F(x_0) = y_0$ .*

**Demonstração 2.3.1.** *Seja  $A = \{x \in [a, b]; F(x) < y_0\}$ .  $A$  não é vazio pois  $F(a) < y_0$ . Afirmamos que nenhum elemento de  $A$  é maior do que todos os outros. Com efeito, seja  $\alpha \in A$ . Como  $F(\alpha) < y_0$ , vemos que  $\alpha \neq b$  e, portanto,  $\alpha < b$ . Tomando  $\epsilon = y_0 - F(\alpha)$ , a continuidade de  $F$  no ponto  $\alpha$  nos dá um  $\delta > 0$  (que tomaremos pequeno, de modo a ter  $[\alpha, \alpha + \delta] \subset [a, b]$ ) tal que, para todo  $x \in [\alpha, \alpha + \delta]$  tem-se  $F(x) < F(\alpha) + \epsilon$ , ou seja,  $F(x) < y_0$ . Assim, todos os pontos do intervalo  $[\alpha, \alpha + \delta]$  pertencem a  $A$ . Agora consideramos  $x_0 = \sup A$ , como  $x_0$  é limite de uma sequência de pontos  $x_n \in A$ , temos  $F(x_0) = \lim F(x_n) \leq y_0$ . Como  $A$  não possui maior elemento, não se tem  $x_0 \in A$ . Logo não vale  $F(x_0) < y_0$ , portanto  $F(x_0) = y_0$ .*

Simplificando, este teorema nos diz que uma função contínua assume todos os valores entre  $F(a)$  e  $F(b)$  no intervalo  $[a, b]$ . Uma consequência imediata é:

**Teorema 2.3.2.** *Teorema do ponto fixo: Suponha que  $F : [a, b] \rightarrow [a, b]$  seja contínua. Então há um ponto fixo para  $F$  em  $[a, b]$ .*

**Demonstração 2.3.2.** *Definimos,  $H : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , por  $H(x) = F(x) - x$ . Como  $F$  é contínua, temos que  $H$  é contínua. Note que  $F(a), F(b) \in [a, b]$ , logo  $F(a) \geq a$  e  $F(b) \leq b$ , daí  $H(a) = F(a) - a \geq 0$  e  $H(b) = F(b) - b \leq 0$ . Pelo teorema do valor intermediário, existe  $x_0 \in [a, b]$  tal que  $H(x_0) = 0$ , ou seja,  $H(x_0) = F(x_0) - x_0 = 0$ , logo  $F(x_0) = x_0$ . Portanto,  $x_0$  é um ponto fixo de  $F$  em  $[a, b]$ .*



### Observação 2.3.1.

1 - Este teorema afirma a existência de pelo menos um ponto fixo para  $F$  em  $[a, b]$ ; claro que pode haver mais. Por exemplo, todos os pontos em qualquer intervalo  $[a, b]$  são fixados pela função identidade  $F(x) = x$ .

2 - Há várias hipóteses importantes neste teorema, as duas primeiras são a continuidade e o fato de  $F$  tomar o intervalo  $[a, b]$  em si mesmo. A violação de qualquer um deles pode resultar em uma função sem pontos fixos.

3 - Além disso, é importante que o intervalo  $[a, b]$  seja fechado. Por exemplo, a função  $F(x) = x^2$  toma o intervalo  $(0, 1/2)$  dentro de si e é contínua, mas não há pontos fixos nesse intervalo aberto (o ponto fixo 0 fica fora de  $(0, 1/2)$ ).

4 - Enquanto o Teorema do Ponto Fixo afirma a existência de pelo menos um ponto fixo, infelizmente não nos dá um método de como realmente encontrar este ponto. No entanto, na prática, muitas vezes não precisamos saber exatamente onde está o ponto fixo. Apenas o conhecimento de que está presente em um determinado intervalo é suficiente para nossos propósitos.

**Definição 2.3.1.** Dizemos que  $x$  é um **ponto periódico** de período  $n$ , se  $n$  é o menor inteiro positivo tal que  $f^n(x) = x$ . Quando  $n = 1$  temos  $f(x) = x$ , então dizemos simplesmente que  $x$  é um ponto fixo para  $f$ .

Quando  $x$  é periódico então sua órbita  $\{x, f(x), f^2(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$  é um conjunto finito, conhecido como órbita periódica.

**Exemplo 2.3.1.** Considere  $f(x) = x^2 - 1$ . Neste caso  $f^2(x) = x^4 - 2x^2 = x^2(x^2 - 2)$ , cujos pontos fixos são dados pela equação  $x^2(x^2 - 2) = x$ , que nos fornece duas opções:  $x = 0$  ou  $x = -1$  que são pontos de órbita periódica de período 2.

**Definição 2.3.2.** Um ponto  $x_0$  é chamado **eventualmente fixo** ou **eventualmente periódico** se  $x_0$  não for fixo ou periódico, mas algum ponto na órbita de  $x_0$  é fixo ou periódico.

**Exemplo 2.3.2.** O ponto  $-1$  é eventualmente fixo para  $F(x) = x^2$ , pois  $F(-1) = 1$ , que é um ponto fixo.

**Definição 2.3.3.** Dizemos que  $x$  é um **ponto fixo hiperbólico** se  $|f'(x)| \neq 1$ . Se  $|f'(x)| < 1$  dizemos que é um **ponto fixo atrator**, se  $|f'(x)| > 1$  dizemos que é um **ponto fixo repulsor** e se  $|f'(x)| = 1$  dizemos que é um **ponto fixo neutro**. Se  $x$  é ponto periódico de período  $n$ , dizemos que  $x$  é **ponto periódico hiperbólico** (atrator ou repulsor) se  $x$  é ponto fixo hiperbólico (atrator ou repulsor) de  $f^n$ .

## 2.4 Retrato de fase

Um método sucinto para descrever todas as órbitas de um sistema dinâmico é o retrato de fase do sistema. Esta é uma imagem na linha real das órbitas. No caso unidimensional, o retrato de fase não nos dá mais informações do que a análise gráfica. No caso bidimensional, quando a análise gráfica não é mais possível, dependemos do retrato de fase para descrever o comportamento da órbita. No retrato de fase, representamos pontos fixos por pontos sólidos e a dinâmica ao longo das órbitas por setas.

**Exemplo 2.4.1.** Para  $F(x) = x^3$ , os pontos fixos ocorrem em 0 e  $\pm 1$ . Se  $|x_0| < 1$ , então  $F^n(x_0) \rightarrow 0$ , enquanto que, se  $|x_0| > 1$ ,  $F^n(x_0) \rightarrow \pm \infty$ . O retrato de fase para esta aplicação é:

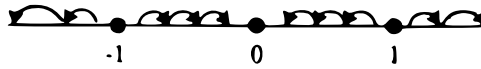


Figura 2.4: Retrato de fase da função  $F(x) = x^3$

**Exemplo 2.4.2.** A função  $F(x) = x^2$  tem dois pontos fixos, em 0 e 1, e um ponto eventualmente fixo em -1. Note que se  $x_0 < 0$ , então  $F(x_0) > 0$  e todos os pontos subsequentes na órbita de  $x_0$  são positivos. Se  $0 < x_0 < 1$ , então  $F(x_0) \rightarrow 0$ , enquanto que, se  $x_0 > 1$ ,  $F(x_0) \rightarrow +\infty$ . O retrato de fase de  $F(x) = x^2$  é:

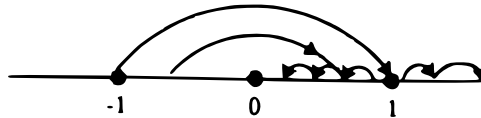


Figura 2.5: Retrato de fase da função  $F(x) = x^2$

## 2.5 Atratores e repulsores

Outra noção muito importante para o estudo de sistemas dinâmicos é a de atratores e repulsores. Existem dois tipos diferentes de pontos fixos: ponto fixo atrator e ponto fixo repulsor, que será abordado mais adiante, mas, por enquanto, a ideia por trás desses conceitos é ilustrada pela função quadrática  $F(x) = x^2$ . Como vimos anteriormente, esta função possui dois pontos fixos, 0 e 1. Mas observe o que acontece com as órbitas dos pontos próximos. Se escolhermos  $x_0$  com  $|x_0| < 1$ , a órbita de  $x_0$  rapidamente se aproxima de 0. Por exemplo, a órbita de 0.1 é 0.1, 0.01, 0.0001, 0.00000001, ...

De fato, qualquer  $x_0$  com  $0 \leq x_0 < 1$ , não importa quão próximo de 1, leva a uma órbita que se aproxima de 0. Por exemplo, a órbita de 0.9 é 0.9, 0.81, 0.6561, 0.4304..., 0,1853..., 0.0343..., 0.0011..., ... Mais precisamente, se  $0 \leq x_0 < 1$ , então  $F^n(x_0) \rightarrow 0$  com  $n \rightarrow \infty$ . Por outro lado, se  $x_0 > 1$ , a órbita se afasta de 1. Por exemplo, a órbita de 1.1 é 1.1, 1.21, 1.4641, 2.1435..., 4.5949..., 21.1137..., 445.7915..., ... Portanto, se  $x_0 > 1$ , temos  $F^n(x_0) \rightarrow \infty$  com  $n \rightarrow \infty$  e conseqüentemente a órbita se afasta de 1.

A análise gráfica dessa função (figura 2.6), mostra a diferença entre esses pontos. O ponto 0 é um ponto fixo atrator para  $F(x) = x^2$ , enquanto 1 é ponto fixo repulsor.

O diagrama de degraus será muito útil para analisar o comportamento dos pontos fixos, o mesmo consiste em representar as funções  $y = F(x)$  e  $y = x$ , e uma série alternada de segmentos verticais e horizontais que unem os pontos  $(y_0, y_0)$ ,  $(y_0, y_1)$ ,  $(y_1, y_1)$ ,  $(y_1, y_2)$ , etc.

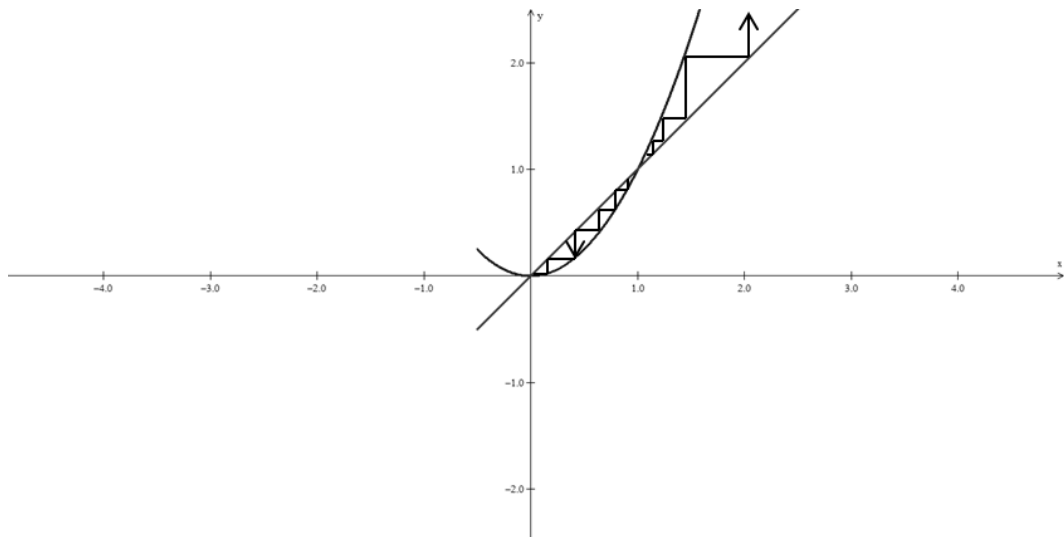


Figura 2.6: Diagrama de degraus para  $y_{n+1} = y_n^2$

### 2.5.1 Atratores

Dizemos que um conjunto  $A \subset X$  é um atrator para um ponto  $x$  se  $f(A) = A$ , ou seja, é um conjunto invariante para  $f$ , e a órbita de  $x$  se aproxima de pontos de  $A$ , mais precisamente  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), A) = 0$ , no qual  $d(f^n(x), A)$  é a distância entre  $f^n(x)$  e  $A$ . Note que uma vez que a órbita de  $x$  entra no conjunto  $A$  ela não pode mais sair. O conjunto de pontos cujas órbitas se aproximam de  $A$  é chamado de bacia de atração de  $A$ :  $B(A) = \{x \in X : \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), A) = 0\}$ . Quando  $B(A) = X$ , ou seja, todos os pontos tem sua órbita futura atraída para  $A$  então dizemos que  $A$  é um atrator global.

Observe na figura a seguir que as órbitas de  $y_{n+1} = \cos(y_n)$  se aproximam do ponto fixo da função.

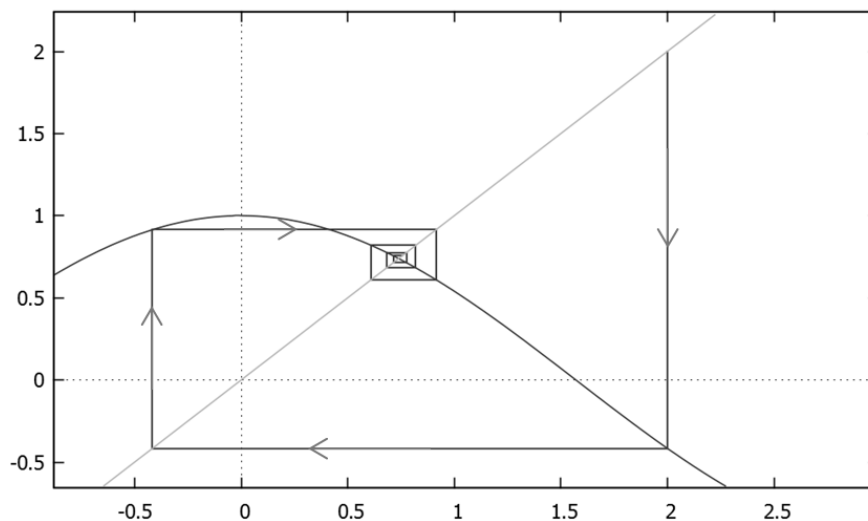


Figura 2.7: Diagrama de degraus para  $y_{n+1} = \cos(y_n)$

Observe na figura a seguir que as órbitas de  $y_{n+1} = \frac{1}{2} y_n$  se aproximam do ponto fixo da função.

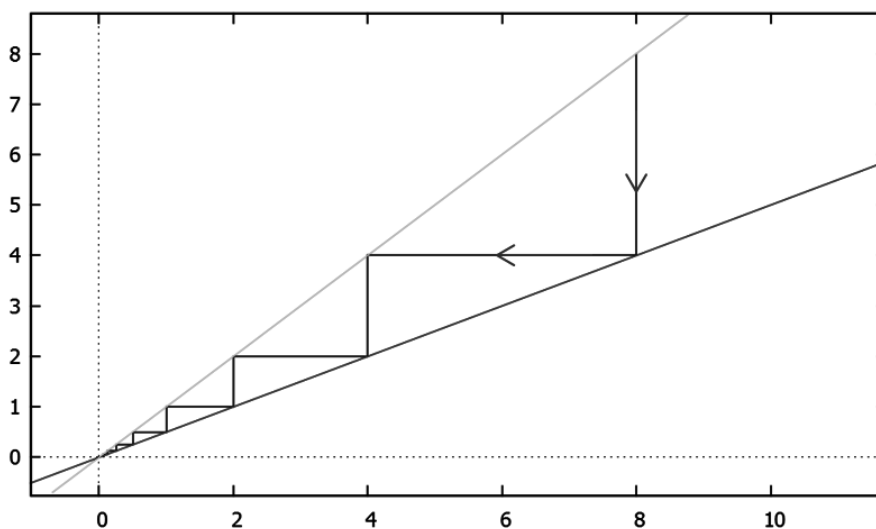


Figura 2.8: Diagrama de degraus para  $y_{n+1} = \frac{1}{2} y_n$

## 2.5.2 Repulsores

Um conjunto  $R \subset X$  é um repulsor para um ponto  $x$  se  $f^{-1}(R) = R$  e a órbita de  $x$  se aproxima de  $R$  no passado, ou seja, se  $d(f^{-n}(x), R)$  tende a zero quando  $n$  tende a

infinito, no qual  $d(f^{-n}(x), R)$  é a distância entre  $f^{-n}(x)$  e  $R$ .

Observe na figura a seguir que as órbitas de  $y_{n+1} = -2y_n$  se afastam do ponto fixo da função.

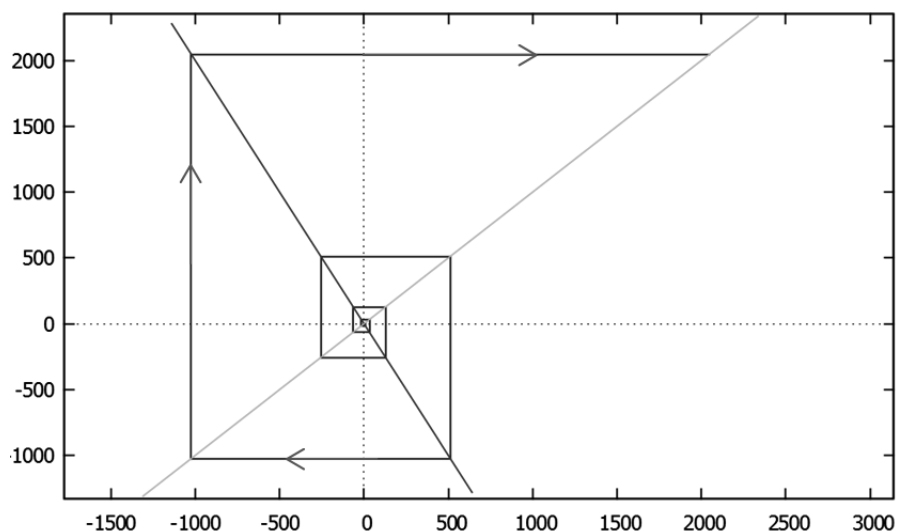


Figura 2.9: Diagrama de degraus para  $y_{n+1} = -2y_n$

As análises gráficas são evidências convincentes de que o ponto fixo  $x_0$  pode ser atrator ou repulsor. Mas como sabemos que isso é verdade? A resposta é fornecida por um dos teoremas mais úteis do cálculo, o Teorema do Valor Médio.

**Teorema 2.5.1.** *Teorema de Rolle: Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua, tal que  $f(a) = f(b)$ . Se  $f$  é derivável em  $(a, b)$  então existe um ponto  $c \in (a, b)$  onde  $f'(c) = 0$ .*

**Teorema 2.5.2.** *Suponha que  $F$  seja uma função diferenciável no intervalo  $a \leq x \leq b$ . Então existe  $c$  entre  $a$  e  $b$  para o qual a seguinte equação é verdadeira:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Demonstração 2.5.1.** *Seja  $g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$  o polinômio de grau  $\leq 1$  tal que  $g(a) = f(a)$  e  $g(b) = f(b)$ . Então  $g'(x)$  é constante e, de fato,  $g'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  para todo  $x \in [a, b]$ . A função  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ , satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, logo existe  $c \in (a, b)$ , tal que  $\varphi'(c) = 0$ , o que dá a conclusão desejada.*

Para nossos propósitos, a importância do Teorema do Valor Médio está em seus dois corolários.

A seguir temos o teorema do ponto fixo atrator e o teorema do ponto fixo repulsor.

**Teorema 2.5.3.** *Suponha que  $x_0$  seja um ponto fixo atrator para  $F$ . Então há um intervalo  $I$  que contém  $x_0$  em seu interior e em que a seguinte condição é satisfeita: se  $x \in I$ , então  $F^n(x) \in I$  para todo  $n$  e, além disso,  $F^n(x) \rightarrow x_0$  quando  $n \rightarrow \infty$ .*

**Demonstração 2.5.2.** *Por hipótese,  $|F'(x_0)| < 1$ , pois  $x_0$  é ponto fixo atrator. Logo existe  $\lambda < 1$ , tal que  $|F'(x_0)| < \lambda < 1$ . Pela continuidade de  $F'(x_0)$ , existe  $\delta > 0$ , tal que  $\forall x \in I = [p - \delta, p + \delta]$  então  $|F'(c)| < \lambda$ . Pelo Teorema do Valor Médio existe  $c$  entre  $x$  e  $p$  tal que  $|F'(c)| = \frac{|F(p) - F(x)|}{|p - x|} \Leftrightarrow |F(p) - F(x)| = |F'(c)||p - x|$ .*

**Teorema 2.5.4.** *Suponha que  $x_0$  é um ponto fixo repulsor para  $F$ . Então há um intervalo  $I$  que contém  $x_0$  no seu interior e em que a seguinte condição é satisfeita: se  $x \in I$  e  $x \neq x_0$ , então há um número inteiro  $n > 0$  tal que  $F^n(x) \notin I$ .*

**Demonstração 2.5.3.** *A demonstração deste teorema segue de forma análoga ao teorema do ponto fixo atrator.*

# Capítulo 3

## Bifurcações

Em sistemas dinâmicos, o objetivo da teoria da bifurcação é estudar as variações que as aplicações sofrem, através de um parâmetro. Basicamente bifurcação é uma mudança na natureza de um ponto fixo, devido à variação de um parâmetro do sistema. Vamos considerar famílias de funções de valores reais que dependem suavemente do parâmetro. Para sermos mais precisos, vamos considerar funções,  $F$  e  $f$ , de duas variáveis definidas da forma:

$$F(x, \lambda) = f_\lambda(x)$$

onde para um  $\lambda$  fixo,  $f_\lambda(x)$  é uma função na variável  $x$ . Vamos supor que  $F_\lambda$  depende suavemente de  $\lambda$  e  $x$  em tal família, a menos que seja indicado o contrário.

Exemplos de funções que dependem de um parâmetro:

1.  $F_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ ,
2.  $S_\lambda(x) = \lambda \operatorname{sen}(x)$ ,
3.  $E_\lambda(x) = e^x + \lambda$ ,
4.  $Q_c(x) = x^2 + c$ .

As bifurcações ocorrem em uma família de funções quando há uma mudança na estrutura de pontos fixos ou periódicos à medida que  $\lambda$  passa por algum valor de parâmetro específico.

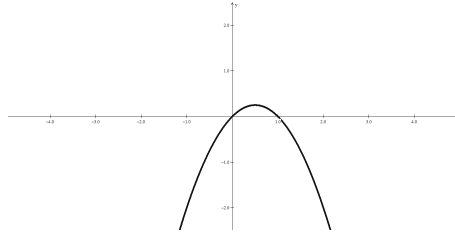


Figura 3.1: Gráfico da função  $F_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$

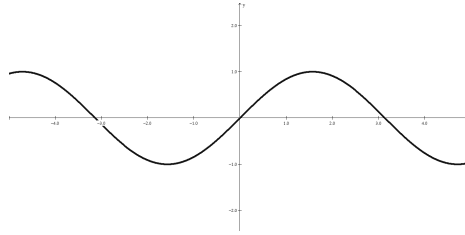


Figura 3.2: Gráfico da função  $S_\lambda(x) = \lambda \text{sen}(x)$

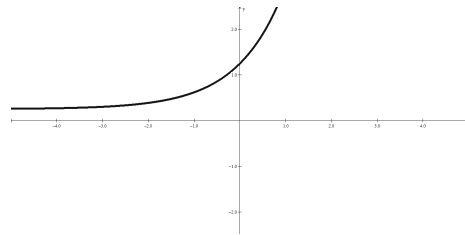


Figura 3.3: Gráfico da função  $E_\lambda(x) = e^x + \lambda$

### 3.1 Dinâmica da função quadrática

Consideremos a seguinte família de funções quadráticas reais, indexadas por um número real  $c$  :

$$Q_c(x) = x^2 + c ,$$

isto significa que para cada valor  $c$  temos uma função quadrática distinta. O objetivo é dizer como varia a dinâmica desta família com a variação do parâmetro  $c$ .

Vejamos inicialmente como se comportam os pontos fixos. A expressão  $x^2 - x + c = 0$  nos fornece os pontos fixos da função  $Q_c(x)$ :

$$p_+ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c})$$



$$p_- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4c})$$

Como estamos buscando pontos fixos reais, segue imediatamente que  $c \leq \frac{1}{4}$  e ainda  $p_+ \geq p_-$  e a igualdade só ocorre se  $c = \frac{1}{4}$ . Neste caso temos  $p_- = p_+ = \frac{1}{2}$ . No caso em que  $c > \frac{1}{4}$  a dinâmica é muito fácil de ser analisada através do gráfico e vê-se claramente que todas as órbitas tendem ao infinito, pois o gráfico de  $Q_c$  está acima da reta  $y = x$ .

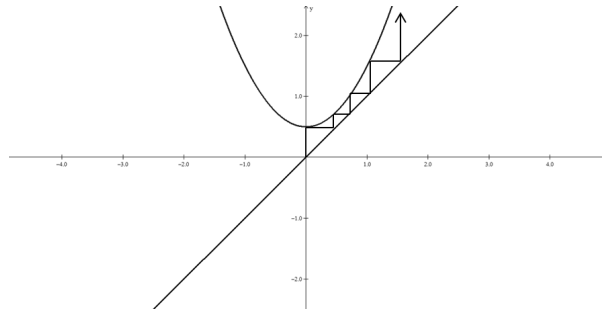


Figura 3.4: Gráfico da função  $Q_c(x) = x^2 + c$ , para  $c > \frac{1}{4}$

Assim ao variar o valor de  $c$  passamos da situação em que não há pontos fixos,  $c > \frac{1}{4}$ , para o caso em que há somente um ponto fixo,  $c = \frac{1}{4}$ , e depois para o caso onde há dois pontos fixos,  $c < \frac{1}{4}$ . Por este motivo dizemos que há uma bifurcação em  $c = \frac{1}{4}$ .

Em relação se o ponto fixo será atrator ou repulsor, como  $Q'_c(x) = 2x$ , o ponto fixo  $p_+$  é sempre repulsor se  $c < \frac{1}{4}$  e o ponto fixo  $p_-$  é atrator se  $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$ , neutro se  $c = -\frac{3}{4}$  e repulsor se  $c < -\frac{3}{4}$ . Para verificar isto basta analisar a desigualdade  $-1 < Q'_c(p_-) = 1 - \sqrt{1 - 4c} < 1$ . Assim temos a proposição da primeira bifurcação.

**Proposição 3.1.1.** *Considere a família de funções quadráticas  $Q_c(x) = x^2 + c$ , com  $c \in \mathbb{R}$ . Pode se afirmar que:*

1. *Se  $c > \frac{1}{4}$ , então todas as órbitas tendem ao infinito.*
2. *Se  $c = \frac{1}{4}$ , então  $Q_c$  tem um único ponto fixo em  $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$  e este ponto fixo é neutro.*
3. *Se  $c < \frac{1}{4}$ , então  $Q_c$  tem dois pontos fixos em  $p_+$  e  $p_-$  e, além disso  $p_+$  é sempre repulsor. Quanto a  $p_-$  temos 3 sub-casos a considerar:*
  - a. *Se  $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$ , então  $p_-$  é atrator.*
  - b. *Se  $c = -\frac{3}{4}$ , então  $p_-$  é neutro.*
  - c. *Se  $c < -\frac{3}{4}$ , então  $p_-$  é repulsor.*

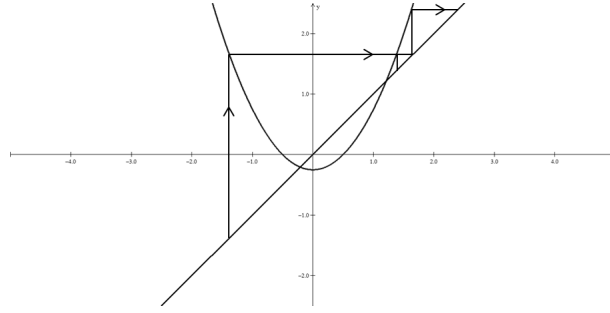


Figura 3.5: Gráfico da função  $Q_c(x) = x^2 + c$ , para  $c \leq \frac{1}{4}$

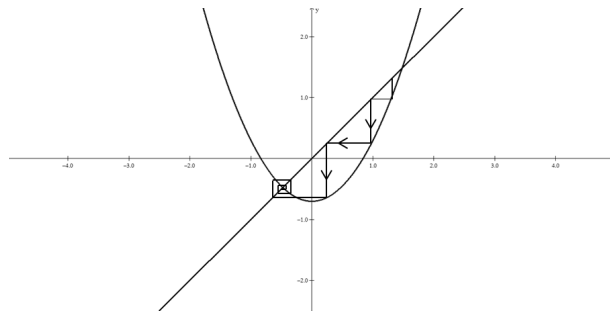


Figura 3.6: Gráfico da função  $Q_c(x) = x^2 + c$ , para  $-\frac{3}{4} < c < 0$

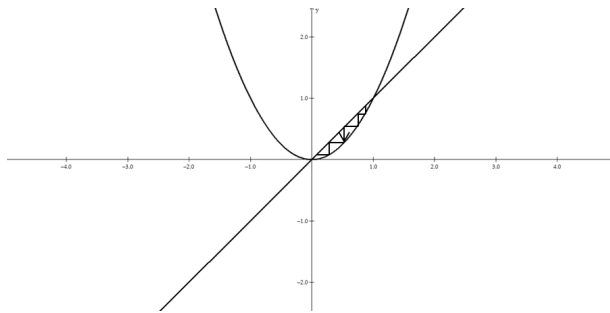


Figura 3.7: Gráfico da função  $Q_c(x) = x^2 + c$ , para  $0 \leq c < \frac{1}{4}$

Agora vamos estudar como se altera o comportamento de  $p_-$  quando  $c$  decresce para valores menores que  $-\frac{3}{4}$ . Quando isto ocorre, o ponto  $p_-$  passa de ponto atrator para ponto repulsor. Investiguemos quando aparecem as órbitas 2-periódicas, para isso devemos resolver a equação  $Q_c^2(x) = x$ , note que  $Q_c^2(x) = x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = 0$ , como  $p_+$  e  $p_-$  são raízes de tal equação, podemos escrever:

$$\frac{x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c}{x^2 - x + c} = x^2 + x + c + 1, \text{ ou seja,}$$

$$x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = (x^2 - x + c)(x^2 + x + c + 1)$$

As soluções de  $x^2 + x + c + 1 = 0$  dão pontos fixos de  $Q_c^2$ , que também são pontos periódicos de período 2 para  $Q_c$ . As soluções dessa equação, são as raízes:

$$q_{\pm} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-4c - 3})$$

Como estamos tratando somente com números reais, estes pontos só existem se  $c \leq -\frac{3}{4}$ . Assim, temos um novo tipo de bifurcação quando  $c$  decresce passando pelo ponto  $c = -\frac{3}{4}$ . Neste valor, duas coisas ocorrem: o ponto  $p_-$  passa de atrator para repulsor e um 2-ciclo aparece nos pontos  $q_{\pm}$ . Observe que quando  $c = -\frac{3}{4}$  temos  $q_+ = q_- = p_- = -\frac{1}{2}$  de modo que estes dois pontos periódicos se originam em  $p_-$  quando  $c = -\frac{3}{4}$ . Temos então a seguinte proposição, chamada de segunda bifurcação.

**Proposição 3.1.2.** *Considere a família de funções quadráticas  $Q_c(x) = x^2 + c$ , com  $c \in \mathbb{R}$ . Pode se afirmar que:*

1. *Se  $-\frac{3}{4} < c < \frac{1}{4}$ , então  $Q_c$  tem um ponto fixo atrator em  $x = p_-$  e nenhuma órbita 2-periódica.*
2. *Se  $c = -\frac{3}{4}$ , então  $Q_c$  tem um ponto fixo neutro em  $x = p_- = q_{\pm}$  e nenhuma órbita 2-periódica.*
3. *Se  $-\frac{5}{4} < c < -\frac{3}{4}$ , então  $Q_c$  tem pontos fixos repulsores em  $x = p_{\pm}$  e uma órbita 2-periódica atratora em  $x = q_{\pm}$ .*

## 3.2 Bifurcação sela-nó

Entre as bifurcações mais importantes está a bifurcação do tipo sela-nó.

**Definição 3.2.1.** *Uma família de funções  $F_{\lambda}$  à um parâmetro  $\lambda$ , é submetida a uma bifurcação do tipo sela-nó no valor do parâmetro  $\lambda_0$  se houver um intervalo  $I$  e  $\epsilon > 0$  tal que:*

1. *Para  $\lambda_0 - \epsilon < \lambda < \lambda_0$ ,  $F_{\lambda}$  não tem pontos fixos no intervalo  $I$ .*
2. *Para  $\lambda = \lambda_0$ ,  $F_{\lambda}$  tem um ponto fixo em  $I$  e este ponto fixo é neutro.*
3. *Para  $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \epsilon$ ,  $F_{\lambda}$  tem dois pontos fixos em  $I$ , um atrator e um repulsor.*

O que a definição acima está dizendo é que o ponto  $\lambda_0$  tem a propriedade de que ao variarmos o parâmetro  $\lambda$  passando por ele, nossa dinâmica tem 0,1 ou 2 pontos fixos dependendo da posição de  $\lambda$  em relação a  $\lambda_0$ .

**Observação 3.2.1.**

1 - Uma bifurcação do tipo sela-nó também ocorre se a direção da bifurcação é invertida, isto é, não há pontos fixos para  $\lambda_0 + \epsilon > \lambda > \lambda_0$  e assim por diante.

2 - Pontos periódicos podem sofrer uma bifurcação do tipo sela-nó. Estes são descritos simplesmente substituindo  $F_\lambda$  por  $F_\lambda^n$  para um ciclo de período  $n$  na definição acima.

3 - A bifurcação do tipo sela-nó geralmente ocorre quando o gráfico de  $F_{\lambda_0}$  tem uma tangência quadrática com a diagonal em  $(x_0, x_0)$  (portanto,  $F'_{\lambda_0}(x_0) = 1$ , mas  $F''_{\lambda_0}(x_0) \neq 0$ ). Esta condição implica que o gráfico de  $F_{\lambda_0}$  seja côncavo para cima ou para baixo, de modo que perto de  $x_0$ ,  $F_{\lambda_0}$  tenha apenas um ponto fixo  $x_0$ .

4 - O fato de que  $F_{\lambda_0}$  é tangente à diagonal a  $x_0$  é a razão para a terminologia bifurcação tangente. O termo sela-nó vem de uma descrição desta bifurcação em dimensões mais altas e no campo de equações diferenciais. Em nossa configuração simples, essa terminologia não é muito transparente, mas no entanto, é padrão.

5 - A Teoria da Bifurcação é uma teoria local na medida em que estamos apenas preocupados com mudanças na estrutura pontual periódica perto do valor do parâmetro  $\lambda_0$ . Essa é a razão para o  $\epsilon$  na definição. Normalmente,  $\epsilon$  é pequeno.

**Exemplo 3.2.1.** *Analisando a função  $F_\lambda(x) = e^x + \lambda$ , neste caso na busca por pontos fixos teríamos que resolver a equação não trivial  $e^x + \lambda - x = 0$ . Para evitarmos as dificuldades que apareceriam, vamos nos valer de nosso conhecimento de cálculo I a respeito da função envolvida, ou seja,  $F_\lambda(x) = e^x + \lambda$  é a função exponencial transladada para cima se  $\lambda > 0$  ou para baixo se  $\lambda < 0$  e o gráfico desta função só intercepta o gráfico da identidade  $y = x$  se  $\lambda \leq -1$ . Na verdade se  $\lambda = -1$  a interseção é um único ponto. Se  $\lambda < -1$  então há sempre dois pontos de interseção. Esta descrição do comportamento dos pontos fixos a medida que o parâmetro  $\lambda$  varia, nos garantem que para esta família de funções temos uma bifurcação sela-nó em  $\lambda = -1$ . Observe as figuras que se seguem abaixo para melhor compreensão.*

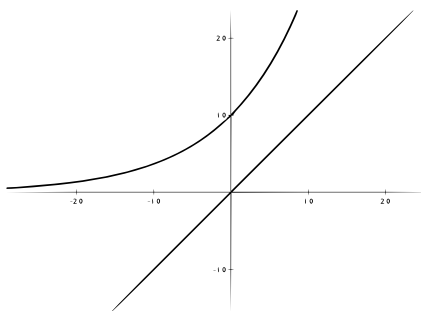


Figura 3.8: Gráfico da função  $F_\lambda(x) = e^x + \lambda$ , para  $\lambda > -1$

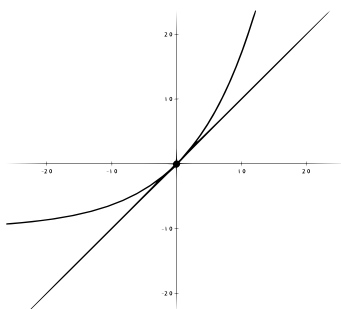


Figura 3.9: Gráfico da função  $F_\lambda(x) = e^x + \lambda$ , para  $\lambda = -1$

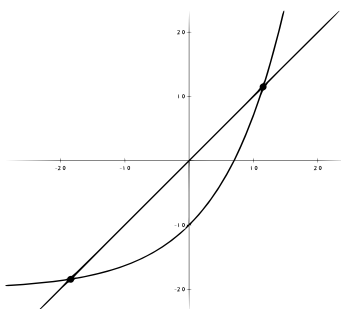


Figura 3.10: Gráfico da função  $F_\lambda(x) = e^x + \lambda$ , para  $\lambda < -1$

**Exemplo 3.2.2.** Para  $F_\lambda(x) = \lambda x(1 - x)$ , observe que  $x = 0$  é um ponto fixo para  $F_\lambda$  para todo valor de  $\lambda$ . Também  $F'_\lambda(0) = \lambda$  de forma que se  $-1 < \lambda < 1$  então o ponto fixo é atrator e se  $\lambda = 1$  o ponto fixo é neutro. Contudo para qualquer valor de  $\lambda$  próximo e distinto de 1 há sempre um outro ponto fixo próximo a 0. Assim não temos uma bifurcação do tipo sela-nó. Vamos encontrar este novo ponto fixo:  $\lambda x(1 - x) = x$  nos leva a  $x(\lambda(1 - x) - 1) = 0$  e temos duas soluções,  $x_0 = 0$  que sempre será um ponto fixo ou  $x_1 = 1 - 1/\lambda$  (note que no caso particular de  $\lambda = 1$ , então  $x_0 = x_1$ ). O ponto fixo  $x_1$  será atrator se  $1 < \lambda < 3$  e o ponto fixo  $x_0$  será sempre atrator.

# Capítulo 4

## Caos

Neste capítulo, introduziremos o conceito de caos. Em geral, existem muitos sistemas dinâmicos que são caóticos, mas que podem ser completamente entendidos. Primeiramente começaremos com um exemplo envolvendo a dinâmica simbólica.

### 4.1 Dinâmica Simbólica

Nesta seção, nós trabalharemos com as funções quadráticas  $Q_c(x) = x^2 + c$ , com  $c < -2$ . Lembramos que para estas funções, as dinâmicas interessantes ocorrem sobre o intervalo  $I = [-p_+, p_+]$ , onde  $p_+$  é o ponto fixo de  $Q_c$  dado por:

$$p_+ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c}).$$

Definimos o conjunto  $\Lambda$ , como o conjunto de pontos cuja a órbita nunca deixa o intervalo  $I$ , ou seja:

$$\Lambda = \{x \in I \mid Q_c^n(x) \in I, \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Neste intervalo, existe um subintervalo  $A_1$  que consiste de todos que saem deste intervalo  $I$  na primeira iterada sob iteração de  $Q_c$ . Dessa forma, o conjunto  $I - A_1$  consiste de dois intervalos fechados que serão denotados por  $I_0$  e  $I_1$ , com  $I_0$  a esquerda de  $I_1$ . Note que estes intervalos dependem de  $c$  e para cada  $c < -2$  estes intervalos são disjuntos e simetricamente localizados sobre a origem.

**Definição 4.1.1.** *Seja  $x \in \Lambda$ . O itinerário de  $x$  é a sequência infinita de 0's e 1's dada por:*

$$S(x) = (s_0 s_1 s_2 \dots),$$

onde  $s_j = 0$  se  $Q_c^j(x) \in I_0$  e  $s_j = 1$  se  $Q_c^j(x) \in I_1$ .

**Definição 4.1.2.** O espaço de sequência em dois símbolos, é o conjunto  $\Sigma = \{(s_0s_1s_2\dots) | s_j = 0 \text{ ou } 1\}$ .

**Definição 4.1.3.** Sejam  $s = (s_0s_1s_2\dots)$  e  $t = (t_0t_1t_2\dots)$  dois pontos em  $\Sigma$ . A distância entre  $s$  e  $t$  é dada por:

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}. \quad (4.1)$$

**Definição 4.1.4.** Uma função  $d$  é chamada uma métrica sobre um conjunto  $X$  se para qualquer  $x, y, z \in X$ , as seguintes propriedades são verdadeiras:

- $d[x, y] \geq 0$  e  $d[x, y] = 0$  se, e somente se,  $x = y$ .
- $d[x, y] = d[y, x]$ .
- $d[x, z] \leq d[x, y] + d[y, z]$ .

O par  $(X, d)$  é chamado de espaço métrico.

**Teorema 4.1.1.** A função dada pela equação 4.1 é uma métrica em  $\Sigma$ .

*Demonstração:*

1. Se  $s = t$ , pela definição de distância temos  $d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = 0$ . Suponhamos que exista  $i < n$  tal que  $s_i \neq t_i$ . Logo  $\frac{|s_i - t_i|}{2^i} \neq 0$ , e daí  $d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \neq 0$ , o que não pode ocorrer, assim  $s = t$ .

2. Sabemos que  $|s_i - t_i| = |t_i - s_i|$  para todo  $i$ , então  $d[s, t] = d[t, s]$ .

3. Da desigualdade triangular temos:  $|s_i - t_i| = |s_i - r_i + r_i - t_i| \leq |s_i - r_i| + |r_i - t_i|$ . Dessa forma concluímos que  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - r_i + r_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - r_i|}{2^i} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|r_i - t_i|}{2^i}$ , ou seja,  $d[s, t] \leq d[s, r] + d[r, t]$ .

Logo,  $d[s, t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$  é uma métrica em  $\Sigma$ .

□

**Teorema 4.1.2. (Teorema da Proximidade)** Seja  $s, t \in \Sigma$  e suponhamos  $s_i = t_i$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ . Então  $d[s, t] \leq \frac{1}{2^n}$ . Consequentemente, se  $d[s, t] < \frac{1}{2^n}$  então  $s_i = t_i$  para  $i \leq n$ .

*Demonstração.* Se  $s_i = t_i$ , para  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ , então

$$d[s, t] = \sum_{i=0}^n \frac{|s_i - s_i|}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^n}$$

Por outro lado se  $s_j \neq t_j$  para algum  $j \leq n$  então devemos ter  $d[s, t] \geq \frac{1}{2^j} \geq \frac{1}{2^n}$ , o que é um absurdo.

Consequentemente, se  $d[s, t] < \frac{1}{2^n}$  então  $s_i = t_i$ , para todo  $i \leq n$ .  $\square$

**Definição 4.1.5.** A função deslocamento (shift)  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  é definida por :

$$\sigma(s_0s_1s_2s_3\dots) = (s_1s_2s_3\dots). \quad (4.2)$$

**Definição 4.1.6.** Seja  $F : X \rightarrow X$  uma função e  $X$  um conjunto munido de uma métrica  $d$ . Então  $F$  é contínua em  $x_0 \in X$  se, para qualquer  $\epsilon > 0$ , existe um  $\delta > 0$ , tal que, se  $d[x, x_0] < \delta$  então  $d[F(x), F(x_0)] < \epsilon$ . Dizemos que  $F$  é uma função contínua, se  $F$  for contínua para todo ponto  $x_0 \in X$ .

**Teorema 4.1.3.** A função deslocamento  $\sigma$  é contínua para todo ponto em  $\Sigma$ .

*Demonstração.* Seja  $\epsilon > 0$  e  $s = (s_0s_1s_2\dots)$ . Vamos escolher  $n$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \epsilon$  e tomemos  $\delta = \frac{1}{2^{n+1}}$ . Se  $t = (t_0t_1t_2\dots)$  satisfizer  $d[s, t] < \delta$ , então pelo teorema da proximidade temos que  $s_i = t_i$ ,  $i \leq n + 1$ . Assim todas as  $i$ -ésimas primeiras entradas de  $\sigma(s)$  e  $\sigma(t)$  são iguais para  $i \leq n$ , e dessa forma temos que  $d[\sigma(s), \sigma(t)] < \frac{1}{2^n} < \epsilon$ .  $\square$

## 4.2 Sistema Caótico

Existem muitas definições para caos, dessa forma não existe um consenso dentro da comunidade científica sobre o que constitui um sistema dinâmico caótico. A definição que introduziremos aqui, tem a vantagem de poder ser verificada para importantes exemplos de sistemas dinâmicos. Para isso, precisaremos de noções básicas de topologia.

**Definição 4.2.1.** Suponha que  $X$  é um conjunto e  $Y$  é um subconjunto de  $X$ . Dizemos que  $Y$  é denso em  $X$  se, para qualquer ponto  $x \in X$ , existe um ponto  $y$  no subconjunto  $Y$ , arbitrariamente próximo de  $x$ .

**Observação 4.2.1.** Equivalente a definição 4.2.1, dizemos que um conjunto  $Y$  é denso em  $X$ , se para qualquer ponto  $x \in X$ , existir uma sequência  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de pontos de  $Y$ , tal que  $y_n \rightarrow x$ .



**Exemplo 4.2.1.** O conjunto dos números racionais  $\mathbb{Q}$  é denso no conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$ . Pela observação 4.2.1, para mostrar que os racionais são densos nos reais, temos que mostrar que para qualquer  $x \in \mathbb{R}$  existe uma sequência de números racionais que convergem para  $x$ . De fato, se este número  $x$  for racional, basta considerar a sequência constante ( $x$ ). Suponha que  $x$  seja um número irracional, isto significa que  $x$  tem uma expansão decimal infinita da forma:

$$x = a_n \dots a_1 a_0 . b_1 b_2 b_3 \dots,$$

onde os  $a_j$  e  $b_j$  são dígitos entre  $0, 1, \dots, 9$ . Agora, para  $j = 1, 2, 3, \dots$ , seja

$$x_j = a_n \dots a_1 a_0 . b_1 b_2 b_3 \dots b_j.$$

Pela definição de  $x_j$ , vemos que  $x_j$  tem uma expansão decimal finita, ou seja,  $x_j$  é um número racional. Claramente,  $x_j \rightarrow x$ , quando  $j \rightarrow \infty$ .

**Exemplo 4.2.2.** Sobre a dinâmica da função deslocamento  $\sigma$  no espaço de sequência  $\Sigma$ , podemos fazer a observação sobre esta função que o subconjunto de  $\Sigma$  de todos os pontos periódicos de  $\Sigma$  é um subconjunto denso. Para mostrar que isto é verdadeiro temos que dado qualquer ponto  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots)$  em  $\Sigma$ , podemos encontrar um ponto periódico arbitrariamente próximo de  $s$ . Dado  $\epsilon > 0$ , escolhemos um  $n$  inteiro tal que  $1/2^n < \epsilon$ . Podemos agora escrever um ponto periódico que está a uma distância  $1/2^n$  de  $s$ . Seja  $t_n = (\overline{s_0 s_1 \dots s_n})$  tal ponto. As primeiras  $n + 1$  entradas de  $s$  e  $t_n$  são as mesmas. Daí, pelo **Teorema da Proximidade** temos que:

$$d[s, t_n] \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

Como  $t_n$  é uma sequência que repete as  $n + 1$  primeiras coordenadas, assim ela é um ponto periódico de período  $n + 1$  para  $\sigma$ . Como  $\epsilon$  e  $s$  são arbitrários, a afirmação está verificada. Note que a sequência  $(t_n)$  converge para  $s$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

A segunda e mais interessante propriedade de  $\sigma$ , é que existe um ponto cujo a órbita é densa em  $\Sigma$ . Isto é, podemos encontrar uma órbita a qual fica arbitrariamente próximo de qualquer ponto de  $\Sigma$ . Claramente, este tipo de órbita não pode ser periódica. Vamos descrever tal órbita. Considere o ponto

$$s' = (0\ 1\ 00\ 01\ 10\ 11\ 000\ 001\dots),$$

ou seja,  $s'$  é a sequência que consiste de todos os possíveis blocos de 0's e 1's de comprimento 1, em seguida de comprimento 2 e assim sucessivamente.

O ponto  $s'$  tem uma órbita que forma um subconjunto denso de  $\Sigma$ . Escolhemos novamente  $s = (s_0 s_1 s_2 \dots) \in \Sigma$  e um  $\epsilon > 0$ . Também escolhemos um  $n$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ .

Agora mostraremos que a órbita de  $s'$  está a uma distância de  $\frac{1}{2^n}$  de  $s$ . Temos que um dos blocos de  $s'$  de comprimento  $n+1$  que consiste dos dígitos  $s_0s_1 \dots s_n$ . Suponhamos que a entrada  $s_0$  é o  $k$ -ésimo dígito na sequência. Logo se aplicarmos  $\sigma^k$  em  $s'$ , teremos que as primeiras  $n+1$  entradas de  $\sigma^k(s')$  será  $s_0s_1 \dots s_n$ . Então, pelo **Teorema da Proximidade** temos:

$$d[\sigma^k(s'), s] \leq \frac{1}{2^n} < \epsilon.$$

O conceito de transitividade que apresentaremos a seguir, está intimamente relacionado com a propriedade de órbita densa.

**Definição 4.2.2.** *Um sistema dinâmico é transitivo se para quaisquer dois pontos  $x$  e  $y$  e para qualquer  $\epsilon > 0$  existe um terceiro ponto  $z$ , cuja distância a  $x$  é menor do que  $\epsilon$  e tal que sua órbita passa a uma distância de  $y$ , menor que  $\epsilon$ .*

**Observação 4.2.2.** *Em outras palavras, um sistema dinâmico transitivo tem a propriedade que, dado quaisquer dois pontos, podemos encontrar uma órbita que está arbitrariamente próximo a ambos. Além disso, pode-se verificar que um sistema dinâmico que possui uma órbita densa é transitivo e reciprocamente todo sistema dinâmico transitivo possui uma órbita densa.*

A terceira propriedade exibida pela função deslocamento  $\sigma$  é a dependência sensítiva das condições iniciais.

**Definição 4.2.3.** *Um sistema dinâmico  $F$  depende sensítivamente das condições iniciais se existe  $\beta > 0$  tal que para qualquer  $x$  e qualquer  $\epsilon > 0$  existe um  $y$ , cuja distância a  $x$  é menor do que  $\epsilon$  e existe um  $k$  tal que a distância entre  $F^k(x)$  e  $F^k(y)$  é, no mínimo  $\beta$ .*

Veremos que a aplicação  $\sigma$  depende sensítivamente das condições iniciais, para isso, tomemos  $\beta = 1$  e para algum  $s \in \Sigma$  e  $\epsilon > 0$  escolheremos  $n$  tal que  $\frac{1}{2^n} < \epsilon$ . Suponhamos  $t \in \Sigma$  que satisfaz  $d[s, t] < \frac{1}{2^n}$ , mas  $t \neq s$ .

Como  $d[s, t] < \frac{1}{2^n}$  então  $s_i = t_i$  para  $i \leq n$ , daí temos que existe  $k > n$ , tal que  $s_k \neq t_k$ . Se aplicarmos  $\sigma$  em  $s$  e em  $t$ ,  $k$  vezes, as primeiras entradas de  $\sigma^k(s)$  e  $\sigma^k(t)$  são respectivamente  $s_k$  e  $t_k$ . Como  $s_k \neq t_k$ , temos que  $|s_k - t_k| = 1$ . Daí,

$$d[\sigma^k(s), \sigma^k(t)] \geq \frac{|s_k - t_k|}{2^0} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \frac{1}{1} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{0}{2^i} = 1 = \beta.$$

Isto prova que a função deslocamento depende sensítivamente de condições iniciais.

**Definição 4.2.4.** *Um sistema dinâmico  $F$  é caótico se:*

- 1 - Pontos periódicos para  $F$  são densos.
- 2 -  $F$  é transitivo.
- 3 -  $F$  depende sensítivamente das condições iniciais.

Temos que a função deslocamento satisfaz as três condições necessárias para um sistema dinâmico ser caótico. Logo, provamos o seguinte teorema:

**Teorema 4.2.1.** *A função deslocamento  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$  é um sistema dinâmico caótico.*

**Proposição 4.2.1.** *Seja  $F : X \rightarrow Y$  uma função contínua e sobrejetora. Suponhamos que  $D \subset X$  é um subconjunto denso em  $X$ . Então  $F(D)$  é denso em  $Y$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $y_0 \in Y$  e  $\epsilon > 0$ . Então devemos encontrar um ponto  $z \in F(D)$  que esteja a uma distância menor que  $\epsilon$  de  $y_0$ .

Como  $F$  é sobrejetora, existe  $x_0 \in X$  que é a pré-imagem de  $y_0$ , isto é,  $F(x_0) = y_0$ . Como  $F$  também é contínua, existe  $\delta > 0$ , tal que, se  $d[x, x_0] < \delta$ , então  $d[F(x), F(x_0)] < \epsilon$ . Como  $D$  é denso em  $X$ , podemos escolher um  $\bar{x} \in D$ , tal que  $d[\bar{x}, x_0] < \delta$ . Portanto  $F(\bar{x})$  está em  $F(D)$ , com  $d[F(\bar{x}), F(x_0)] < \epsilon$ , ou seja,  $d[F(\bar{x}), y_0] < \epsilon$ . Como ambos  $y_0$  e  $\epsilon$  são arbitrários, a prova está completa.  $\square$

Agora temos nosso sistema modelado e a função deslocamento  $\sigma$  no espaço de sequência  $\Sigma$ . Vamos então relacionar o sistema dinâmico  $Q_c$  com  $\Lambda$  e a função que relaciona esses dois sistemas é a função itinerário  $S : \Lambda \rightarrow \Sigma$ , onde  $\Lambda = \{x \in I \mid Q_c^n \in I, \forall n \in \mathbb{N}\}$ , ver definição 4.1.1.

**Definição 4.2.5.** *Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma função. Dizemos que  $f$  é um homeomorfismo de  $f$  e uma bijeção contínua, cuja inversa  $f^{-1} : Y \rightarrow X$  também seja contínua.*

Nossa observação, é que  $\Lambda$  e  $\Sigma$  são definidas de modo diferente, mas são essencialmente espaços idênticos. O caminho para mostrar que estes espaços são idênticos é exibindo um homeomorfismos entre eles. De um ponto de vista qualitativo, dois conjuntos que são homeomorfos, são essencialmente o mesmo.

**Teorema 4.2.2.** *Suponha que  $c < -\frac{(5 + 2\sqrt{5})}{4}$ . Então  $S : \Lambda \rightarrow \Sigma$  é um homeomorfismo.*

*Demonstração.* Ver demonstração na referência [1].  $\square$

**Definição 4.2.6.** *Sejam  $F : X \rightarrow X$  e  $G : Y \rightarrow Y$  duas funções. Dizemos que  $F$  e  $G$  são conjugadas se existir um homeomorfismo  $h : X \rightarrow Y$ , tal que  $h \circ F = G \circ h$ . A função  $h$  é chamada de conjugação.*

**Teorema 4.2.3.** *Se  $x \in \Lambda$ , então  $S \circ Q_c(x) = \sigma \circ S(x)$ .*

A identidade acima nos afirma que  $S$  transforma órbitas de  $Q_c$  em órbitas de  $\sigma$ .

**Teorema 4.2.4. Teorema da Conjugação** *A função deslocamento  $\sigma$  em  $\Sigma$  é conjugada a  $Q_c(x)$  sobre  $\Lambda$ , onde  $c < -\frac{(5 + 2\sqrt{5})}{4}$ .*

*Demonstração.* Seja  $x$  um ponto arbitrário de  $\Lambda$  e  $S(x) = (s_0s_1s_2\dots)$  seu itinerário. Assim, segue da definição de itinerário que  $x \in I_{s_0}$ ,  $Q_c(x) \in I_{s_1}$ ,  $Q_c^2(x) \in I_{s_2}$  e assim sucessivamente. Fazendo  $y = Q_c(x)$  e  $S(y) = (s_1s_2s_3\dots)$  seu itinerário, ou seja:  $S(Q_c(x)) = \sigma(S(x))$  como queríamos demonstrar.  $\square$

**Teorema 4.2.5.** *Suponha que  $c < -\frac{(5 + 2\sqrt{5})}{4}$ . Então a aplicação quadrática  $Q_c(x) = x^2 + c$  é caótica no conjunto  $\Lambda$ .*

*Demonstração.* Seja  $S : \Lambda \rightarrow \Sigma$ , temos que  $S$  é uma conjugação para valores de  $c < -\frac{(5 + 2\sqrt{5})}{4}$ . Daí, temos que  $S$  é um homeomorfismo. Portanto a proposição 4.2.1 garante que o conjunto de pontos periódicos de  $Q_c$  é denso em  $\Lambda$ , desde que  $S^{-1}$  leve pontos periódicos de  $\sigma$  para pontos periódicos de  $Q_c$ . Também, se  $s'$  é uma órbita densa para  $\sigma$ , então a proposição 4.2.1 garante que a órbita de  $S^{-1}(s')$  é uma órbita densa para  $Q_c$  e então  $Q_c$  é transitivo.

Para provar que  $Q_c$  é caótico, precisamos exibir a dependência sensitiva. Lembremos que  $\Lambda$  está contido na união de dois intervalos fechados  $I_0$  e  $I_1$  os quais são disjuntos. Escolhemos  $\beta$  menor que a distância mínima entre estes intervalos. Seja  $x, y \in \Lambda$  com  $x \neq y$ . Desde que  $S$  é um homeomorfismo,  $S(x) \neq S(y)$ . Como consequência, estas duas sequências se diferem em alguma entrada, digamos na  $k$ -ésima. Isto significa que  $Q_c^k(x)$  e  $Q_c^k(y)$  permanece cada um em um intervalo  $I_j$ . Daí, a distância entre  $Q_c^k(x)$  e  $Q_c^k(y)$  é ao menos  $\beta$ .

Portanto, qualquer órbita próxima de  $x$ , em algum momento se separa da órbita de  $x$  a uma distância pelo menos  $\beta$ . Logo  $Q_c$  depende sensitivamente das condições iniciais. Assim, a família quadrática  $Q_c(x) = x^2 + c$  é caótica no conjunto  $\Lambda$ .  $\square$

# Considerações Finais

O desenvolvimento deste Trabalho de Conclusão de Curso consistiu no estudo de alguns Sistemas Dinâmicos Discretos. Através desse estudo, foi possível aprimorar e aprofundar os conhecimentos matemáticos, estudando desde a história dos sistemas dinâmicos e algumas definições elementares. Além disso, este trabalho proporcionou uma introdução à pesquisa matemática, amadurecimento no trato da literatura científica e o preparo para pesquisas mais avançadas, como mestrado e doutorado. Temos a consciência de que apresentamos uma pequena parte da teoria dos sistemas dinâmicos, tendo assim, motivação para continuar os estudos sobre esse tópico. Para finalizar, esperamos que este trabalho seja útil a outras pessoas como um material de auxílio e consulta.

# Referências Bibliográficas

- [1] DEVANEY, Robert Luke. **A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment**. Westview Press. 1992.
- [2] DEVANEY, Robert Luke. **An introduction chaotic dynamical systems**. Westview Press. 2003.
- [3] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. IMPA. 2016.
- [4] MELO, Welington de; PALIS, Jacob. **Introdução aos sistemas dinâmicos**. IMPA. 1978.
- [5] MONTEIRO, Luiz Henrique Alves. **Sistemas dinâmicos**. Livraria da Física. 2011.