UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
UEMS

Matemática Licenciatura

Emilly Araújo Lima

Do Cálculo de Áreas ao Cálculo Diferencial e Integral através de Arquimedes, Cavalieri, Pascal, Fermat, Newton, Leibniz e Riemann

Nova Andradina - MS
Outubro/2019

Emilly Araújo Lima

Do Cálculo de Áreas ao Cálculo Diferencial e Integral através de Arquimedes, Cavalieri, Pascal, Fermat, Newton, Leibniz e Riemann

Orientador: Prof. Me. Marcio Demetrius Martinez

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - (UEMS), curso de Matemática - Licenciatura, para obtenção do título de Licenciando em Matemática.

UEMS

2019

Emilly Araújo Lima

Do Cálculo de Áreas ao Cálculo Diferencial e Integral através de Arquimedes, Cavalieri, Pascal, Fermat, Newton, Leibniz e Riemann

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - (UEMS), curso de Matemática - Licenciatura, para obtenção do título de Licenciando em Matemática.

Membros da banca:

Prof. Me. Marcio Demetrius Martinez
Presidente e Orientador

Luiz Oreste Cauz

Prof. Me. Luiz Oreste Cauz
Examinador

Prof. Dr. Sonner Arfux de Figueiredo
Examinador

Dedico este trabalho à Deus, à minha mãe Adriana e ao meu pai Nilson, toda minha família e amigos.

Agradecimentos

Agradeço à Deus por todas as oportunidades e bençãos que proporciona em minha vida.

Agradeço à minha mãe Adriana, meu pai Nilson e irmão, por todo amor, carinho e apoio, principalmente durante a minha formação acadêmica, acreditando sempre em meu potencial.

Agradeço ao Professor Mestre Marcio Demetrius Martinez por todos os ensinamentos, por ter aceito ser o meu orientador, pela paciência, atenção, e principalmente por ter me auxiliado na construção deste TCC. Muito Obrigada!

Agradeço à minha super amiga Renata Kovalski por estar sempre ao meu lado desde o início, dividindo conhecimentos e estágios, por ser minha dupla de estudos e trabalhos, obrigada pelo apoio de sempre!

Agradeço ao meu companheiro Nildo Junior por ser o meu porto seguro, por estar ao meu lado principalmente durante a construção deste trabalho, me apoiando, ajudando e incentivando a prosseguir com os estudos, buscando sempre o melhor pra mim.

Agradeço também a Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS), a todos os professores que foram essenciais, me proporcionando conhecimentos e me ensinando a ser melhor como pessoa.

Agradeço a todos os administradores dessa unidade de ensino, por ajudar a tornar nossos sonhos realidade.

A todos que fizeram parte da minha formação acadêmica, muito obrigada!

“O que é nascido de Deus vence o mundo; e esta é a vitória que vence o mundo: a nossa fé. (1 João 5:4)”

Resumo

Tendo em vista a importância do cálculo de áreas, temos por objetivo pesquisar sobre as contribuições de Arquimedes, Cavalieri, Pascal, Fermat, Newton, Leibniz e Riemann a fim de abordar a evolução e o desenvolvimento do cálculo de áreas no decorrer dos anos. Para tanto, é necessário fazer um passeio pela história, tentando compreender as ideias e abordagens desses matemáticos bem como a geometria utilizada por eles. Realiza-se então, uma breve pesquisa sobre a história da Matemática para compreender a evolução do cálculo. Diante disso verifica-se o método da exaustão, a quadratura da parábola, o princípio de Cavalieri, o método de Pascal e de Fermat, o uso do Teorema Fundamental do Cálculo por Newton e Leibniz e o cálculo de áreas e integrais através de limites de somas, descrito pelo matemático Riemann, o que impõe a constatação de que muitos matemáticos contribuíram para a invenção do Cálculo Diferencial e Integral que utilizamos na atualidade.

Palavras–chave: cálculo de áreas, história da Matemática, Cálculo Diferencial e Integral.

Abstract

Given the importance of area calculation, we aim to research the contributions of Archimedes, Cavalieri, Pascal, Fermat, Newton, Leibniz and Riemann to address the evolution and development of area calculation over the years. Therefore, it is necessary to take a walk through history, trying to understand the ideas and approaches of these mathematicians as well as the geometry used by them. A brief research on the history of mathematics is then performed to understand the evolution of calculus. In view of this, the exhaustion method, the square of the parable, the Cavalieri principle, the Pascal and Fermat method, the Newton and Leibniz fundamental calculus theorem and the area and integral calculus through sums, described by the mathematician Riemann, which imposes the realization that many mathematicians contributed to the invention of the Differential and Integral Calculus that we use today.

Keywords: area calculus, history of mathematics, differential and integral calculus.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

CAPÍTULO 1

Introdução

Tendo em vista o cálculo da área de regiões planas e o método em que este conceito é ensinado e trabalhado com estudantes do ensino médio e, como este conteúdo poderia ser abordado de outras maneiras, através de algumas demonstrações relacionadas às famosas e conhecidas fórmulas utilizadas para se calcular a área de superfícies como o triângulo, retângulo, quadrado, losango, trapézio, paralelogramo e o círculo. Articular os estudos desenvolvidos e as descobertas sobre as áreas ao longo dos tempos, desde: Arquimedes (287 a.C à 212 a.C) sendo estes o Método da Exaustão e a Quadratura da Parábola, lembrando que o método da exaustão foi desenvolvido primeiramente por Eudoxo (c.408 à c.355) e anos depois aprimorado por Arquimedes; Abordagem sobre o Princípio de Cavalieri e o método dos indivisíveis juntamente com suas aplicações para o conceito da área de regiões do plano. O princípio desenvolvido por Bonaventura Cavalieri (1598-1647) é utilizado tanto para determinar volumes de sólidos como também à área de regiões planas. Existem, inclusive versões mais gerais desse princípio, tanto para áreas como para volumes. Blaise Pascal (1623-1662) e o cálculo de áreas, no qual Pascal se baseou nos estudos desenvolvidos por Cavalieri e seu método dos indivisíveis, aprimorando-o. Trazemos também um estudo sobre Pierre de Fermat (1601-1665) e o cálculo de áreas, no qual Fermat obteve um método para calcular a área de uma região limitada por uma curva, também o Cálculo Diferencial e Integral que é utilizado na atualidade, e que merece também atenção, pois por meio do cálculo da integral podemos encontrar a área de uma determinada região. Por fim Bernhard Riemann (1826-1866) que desenvolveu a soma de retângulos para determinar áreas de regiões delimitadas por uma função em um intervalo, processo este utilizado para determinar a área na Integral Definida. Utilizamos dois softwares neste trabalho, a saber, o Maple para cálculos matemáticos com expressões algébricas e simbólicas, e o Winplot para plotação de gráficos de funções com uma ou duas variáveis.

1.1 Motivação

Ao observar os fundamentos da Geometria Plana, veio a curiosidade e vontade de desenvolver algum trabalho relacionado, mas não sabia sobre o que e nem como isto poderia ser realizado. Em um diálogo com o meu orientador Prof. Me. Marcio Demetrius Martinez, ele veio a falar sobre o princípio de Cavalieri e a sua importância, assunto esse no qual eu nunca tinha ouvido falar. Ao fazer algumas pesquisas ele me deu a ideia de desenvolver um trabalho utilizando a área de figuras geométricas comuns e outras mais complexas, e foi assim que resolvemos em conjunto abordar o desenvolvimento do cálculo de áreas ao longo do tempo.

1.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho de conclusão de curso é o cálculo da área de regiões planas, abordando um contexto histórico sobre o cálculo de áreas, trazendo ideias que foram desenvolvidas desde a antiguidade até os dias atuais para o Cálculo Diferencial e Integral. A história à ser desenvolvida sobre áreas, é claro, não passando por todos os matemáticos, seguirá de forma cronológica partindo de Arquimedes e Eudoxo com os feitos sobre o método da exaustão, abordando também o princípio de Cavalieri que é a base para o cálculo de áreas nos ensinos fundamentais e médio. Há também a ideia de Pascal e Fermat, para determinar a área entre uma função e o eixo das abcissas tendo como base a área de retângulos. E foram as contribuições dos mesmos que veio a surgir por Newton e Leibniz o Cálculo Diferencial e Integral, cujas contribuições de Bernhard Riemann foram essenciais também para concluir esse feito. Resumidamente é fazer um passeio pela história tentando compreender as ideias e abordagens de alguns matemáticos e analisar como a geometria utilizada por eles, ensinada nas escolas, incorpora uma série de regras e sequências lógicas responsáveis pelas suas definições e resoluções de problemas de cunho geométrico, conhecida como Geometria Científica ou Ocidental.

1.3 Organização do trabalho

Capítulo 2 **Área** - Faz uma generalização, e também aborda um pouco de história da área e conceitos essenciais para o entendimento do seu cálculo, tais como a importância da geometria e seus conceitos básicos mas essenciais e uma abordagem em relação as unidades de medidas, destacando o comprimento. Este capítulo tem como objetivo relembrar a importância do conceito de área, para compreender os avanços ao longo do tempo em relação a este conceito.

Capítulo 3 **Área das Figuras Planas** - Trás as principais figuras planas para a geometria e as fórmulas utilizadas para calcular as suas áreas, sendo essas figuras: o retângulo, o quadrado, o paralelogramo, o triângulo, o losango, o trapézio, os polígonos regulares em geral e o círculo.

Capítulo 4 **Arquimedes** - Trás uma abordagem sobre alguns fatos históricos da vida e obras de Arquimedes, e os estudos e descobertas como a Medida do Círculo, desenvolvida por Arquimedes pelo processo do Método da Exaustão de Eudoxo, que pode ser utilizado para determinar a área de um círculo e também a Quadratura da Parábola de Arquimedes.

Capítulo 5 **Bonaventura Cavalieri** - Diz um pouco sobre a vida de Cavalieri e os seus feitos importantes para o cálculo da área, como a sua descoberta sobre o método dos Indivisíveis e o Princípio de Cavalieri, utilizado tanto para calcular área de regiões, como também o volume dos sólidos geométricos.

Capítulo 6 **Blaise Pascal** - Este capítulo trás um pouco da história da vida de Blaise Pascal, e alguns de seus trabalhos para o cálculo da área. Os indivisíveis em Pascal e a Identidade de Pascal, fazem uma introdução de alguns conceitos como o binômio de Newton e a combinação, que são de extrema importância para o entendimento do método desenvolvido por ele para determinar a área de uma região. Com o conceito binomial e a combinação, Pascal desenvolveu uma identidade responsável pelo cálculo do limite em seu método.

Capítulo 7 **Pierre de Fermat** - Fermat, e sua contribuição para o cálculo de área, através do método utilizado por ele para determinar a área de uma região obtida pela função $y = x^k$, obtendo a fórmula $\frac{b^{k+1}}{k+1}$.

Capítulo 8 **Cálculo Diferencial e Integral** - Descreve um pouco da história do surgimento por Newton e Leibniz, bem como a noção dos números infinitesimais. Aborda o conceito inicial de Limite, Derivada e Integral (Definida e Indefinida) evidenciando o teorema fundamental do cálculo.

Capítulo 9 **Bernhard Riemann** - Riemann, desenvolveu um método conhecido como método do retângulo, que é a base para o cálculo da integral definida que temos na atualidade. Foi pela soma de Riemann que este conceito ficou mais claro para a matemática.

CAPÍTULO 2

Área

A área é um conceito matemático que pode ser definida como quantidade de espaço bidimensional, ou seja, de superfície. Na antiguidade, o homem necessitava determinar a medida de algumas superfícies com o intuito voltado a plantação, construção de moradias, criação de animais, entre muitas outras atividades do dia a dia. O conceito de área nasceu a partir das observações e necessidade humana no decorrer dos anos, dessa forma o homem observou e obteve uma melhor organização na ocupação de terrenos por meio da delimitação de uma determinada região (área). (EVES, 2011)

2.1 História da Área

O estudo da área tem como base a Geometria Plana ou Euclidiana como é conhecida, a Geometria Plana surgiu na Grécia Antiga. A geometria plana ou euclidiana é a parte da matemática que estuda as figuras que não possuem volume. A geometria plana também é chamada de euclidiana, uma vez que seu nome representa uma homenagem ao geômetra Euclides de Alexandria, considerado o "pai da geometria". (EVES, 2011)

O conhecimento geométrico como conhecemos hoje nem sempre foi assim. A geometria surgiu de forma intuitiva, e como todos os ramos do conhecimento, nasceu da necessidade e da observação humana. O seu início se deu de forma natural através da observação do homem à natureza. Ao arremessar uma pedra num lago, por exemplo, observou-se que ao haver contato dela com a água, formavam-se circunferências concêntricas (centros na mesma origem). Para designar esse tipo de acontecimento surgiu a *Geometria Subconsciente*. (EVES, 2011)

Conhecimentos geométricos também foram necessários aos sacerdotes. Por serem os coletores de impostos da época, a eles era incumbida a demarcação das terras que eram devastadas pelas enchentes do Rio Nilo. A partilha da terra era feita diretamente proporcional aos impostos pagos. Enraizada nessa necessidade puramente humana, nasceu o cálculo de área. (NETO, 2013)

Muitos acontecimentos se deram, ainda no campo da Geometria Subconsciente, até que a mente humana fosse capaz de absorver propriedades das formas antes vistas intuitivamente. Nasce com esse feito a *Geometria Científica ou Ocidental*. Essa geometria, vista nas instituições de ensino, incorpora uma série de regras e sequências lógicas responsáveis pelas suas definições e resoluções de problemas de cunho geométrico. Foi em 300 a.C. que o grande geômetra Euclides de Alexandria desenvolveu grandiosos trabalhos matemático-geométricos e os publicou em sua obra intitulada Os Elementos. Essa foi, e continua sendo, a maior obra já publicada desse ramo, de toda a história da humanidade. A Geometria plana, como é popularmente conhecida nos dias atuais, leva também o título de *Geometria Euclidiana* em homenagem ao seu grande mentor Euclides de Alexandria. (EVES, 2011)

As primeiras unidades de medidas a serem utilizadas foram a partir do "corpo humano como medida" onde se media usando o tamanho do comprimento dos braços, pés, palmos e passos, por exemplo, porém nem sempre era uma medida exata, até porque cada pessoa tem um tamanho de corpo e medidas diferentes. Por volta de 3500 a.C. o homem sentiu necessidade de fazer grandes construções e observou também que necessitavam de medidas mais exatas, sendo assim, ele decidiu então adotar como "medida" os membros do corpo humano de apenas um homem, podendo esse ser um rei ou sacerdote, foi onde obtiveram uma melhor simetria nas construções. Para isso, foram confeccionados na época alguns materiais e utilizados para medir, como nós em cordas, pedaços de madeiras e até mesmo de metais, com mesmas medidas, sendo essas as primeiras medidas oficiais de comprimento. (EVES, 2011)

2.2 A Geometria

O estudo da área de figuras planas tem como base a Geometria Plana ou (Euclidiana), cujo objetivo é estudar o espaço e as figuras que podem ocupá-lo. A palavra geometria significa geo (terra) metria (medida), ou seja, a terra como medida. No século III a.C., Euclides 300 a.C. (https://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides) professor, discípulo da escola platônica e escritor, conhecido como o "pai da Geometria" a colocou em forma de teoria dedutiva, e estabeleceu um padrão para a geometria que se seguiu por muitos anos. (EVES, 2011)

Os elementos básicos, mais conhecidos como as (noções primitivas) da geometria são: o ponto, a reta e o plano, destes se tem o conhecimento intuitivo, ou seja, por meio da observação. O ponto, a reta e o plano possuem (proposições primitivas, axiomas ou postulados) que são adotados e aceitos sem a necessidade das demonstrações, porém podem ser representados graficamente. A geometria também se preocupa com forma, tamanho e posição relativa de figuras e suas propriedades do espaço. Nos ensinos fundamental e médio, o estudo da geometria plana segue os padrões de ensino/aprendizagem de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que aborda as necessidades de cada ciclo de ensino (fundamental ou médio) e, é ensinado por meio de materiais didáticos disponibilizados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

O plano possui apenas largura e comprimento como dimensões, não possuem profundidade, e é representado por letras gregas minúsculas, como por exemplo: α, β e γ. Sendo assim, figuras, formas e definições são feitas para objetos que pertencem ao plano bidimensional. O ponto tem como notação letras maiúsculas latinas como A, B, C, D, por exemplo, já a reta tem definida sua notação pelas letras minúsculas latinas como: a, b, c, d. (DOLCE e POMPEO, 2005)

Entre os principais matemáticos responsáveis pelo desenvolvimento da geometria destacam-se Tales de Mileto VI a.C. (https://pt.wikipedia.org/wiki/Tales-de-Mileto) na Grécia, importando a geometria utilizada pelos antigos egípcios; Pitágoras 570-495 a.C. (https:// pt.wikipe dia.org/wiki/Pitágoras) conhecido pelo teorema aplicado ao triângulo retângulo, que recebeu o seu nome, conhecido como *Teorema de Pitágoras*, Pitágoras também aperfeiçoou o conceito de demonstração matemática da época e ainda nesse século, Euclides com à obra *Os Elementos* que trouxeram inovações consistentes quanto aos métodos geométricos utilizados na antiguidade, e que vêm contribuindo há muitos séculos para o desenvolvimento das ciências em geral. (FACCO, 2003)

2.3 Sistema Internacional de Unidades

Com o passar dos séculos o homem foi aprimorando os seus conhecimentos e os seus cálculos, determinando fórmulas e unidades de medidas até se chegar às que conhecemos hoje, foi criado então por volta de 1960 o Sistema Internacional de Unidades (SI), que contém sete grandezas de unidades básicas ou (unidades de base). O (SI) é a forma moderna do sistema métrico (sistema de medição internacional decimalizado) que surgiu durante a Revolução Francesa, e é o mais utilizado em quase todo o mundo. As principais grandezas das unidades básicas do Sistema Internacional são: *Comprimento* (distância entre dois pontos); *Massa* (associada ao peso de objetos); *Tempo* (período contínuo no qual os eventos acontecem); *Corrente Elétrica* (deslocamentos de cargas dentro de um condutor); *Temperatura Termodinâmica* (medida absoluta da temperatura); *Quantidade de Substância* (mede a quantidade de íons, átomos, moléculas, elétrons e partículas); e *Intensidade Luminosa* (medida pela potência emitida de uma fonte luminosa em uma direção). (BIPM, 2007), (EVES, 2011)

Grandezas	**Nome**	**Símbolo**
Comprimento	Metro	m
Massa	Kilograma	Kg
Tempo	Segundo	s
Corrente Elétrica	Ampère	A
Temperatura Termodinâmica	Kelvin	K
Quantidade de Substância	mol	mol
Intensidade Luminosa	candela	cd

Tabela 2.1: Unidades de Base do Sistema Internacional de Unidades
Fonte: (R.H.KRANE et al., 2003)

Além das Unidades de Base para o Sistema Internacional de Unidades, temos também algumas unidades Derivadas e Suplementares. Como o objetivo da pesquisa é trabalhar com o cálculo de área, temos o comprimento (grandeza física que expressa à distância entre dois pontos), como base. Para o cálculo da área no Sistema Internacional de Unidades, em relação à grandeza "comprimento", observa-se na tabela acima que a sua unidade de medida padrão é o metro (m), que por sua vez possui os seus múltiplos e submúltiplos. (R.H.KRANE et al., 2003)

Os *múltiplos do metro* correspondem a grandes distâncias como explica a tabela à seguir:

quilômetro	**hectômetro**	**decâmetro**
km	hm	dam
1.000 m	100 m	10 m

Tabela 2.2: Múltiplos do Metro
Fonte: (R.H.KRANE et al., 2003)

Já os *submúltiplos do metro*, correspondem a pequenas distâncias:

decímetro	**centímetro**	**milímetro**
dm	cm	mm
0,1 m	0,01 m	0,001 m

Tabela 2.3: Submúltiplos do Metro
Fonte: (R.H.KRANE et al., 2003)

Após conhecer o Sistema Internacional de Unidades e principalmente as unidades de medidas do Comprimento, vamos ver qual a relação (de acordo com o SI) entre as unidades de medidas de comprimento e as unidades de medida da área. A área de uma determinada região plana, um quadrado por exemplo, pode ser calculada a partir do produto entre suas duas dimensões, sendo essas: base e altura, ou também, comprimento e largura. Assim para as unidades de medidas da área, necessita-se que todas as dimensões dessa região estejam em uma única unidade de comprimento, ou seja, precisamos de uma unidade padrão, e também, saber analisar essas unidades. (EVES, 2011). Para explicar essa relação, suponhamos um (quadrado) com a altura igual à $1m$ (um metro) de comprimento de acordo com a imagem abaixo:

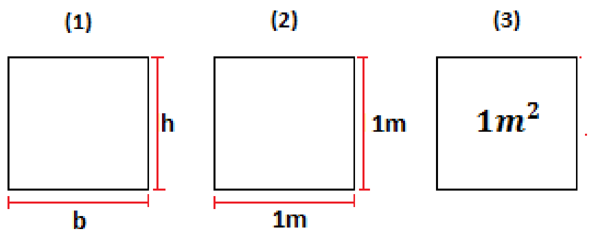

Figura 2.1: Transformar metro em metro quadrado
Fonte: Figura elaborada pela autora

Como o quadrado é um plano e tem todos os seus lados iguais (contém o mesmo comprimento), na figura 2.1, observa-se que, se a altura “h"do quadrado corresponde a $1m$ (um) metro, consequentemente a sua base “b"também terá $1m$ (um) metro de comprimento, como vemos no segundo quadrado (2). A partir daí, para saber a área deste quadrado, basta fazer o cálculo do produto em relação ao comprimento da base e da altura como segue abaixo: (DOLCE e POMPEO, 2005)

$$Área_{(quadrado)} = base \times altura$$

$$Área_{(quadrado)} = 1m \times 1m$$

$$Área_{(quadrado)} = 1m^2$$

Observa-se então, que ocorre a multiplicação entre os valores e também entre a unidade de medida do comprimento, metro. Assim, sabemos que o quadrado de lados com comprimento de $1m$ (um metro) terá área de $1m^2$ (um metro quadrado). (DOLCE e POMPEO, 2005)

Sendo assim, para se calcular a área de regiões planas, temos as unidades de medidas a seguir:

Nome	**Símbolo**
Quilômetro Quadrado	km^2
Hectômetro Quadrado	hm^2
Decâmetro Quadrado	dam^2
Metro Quadrado	m^2
Decímetro Quadrado	dm^2
Centímetro Quadrado	cm^2
Milímetro Quadrado	mm^2

Tabela 2.4: Unidades de medidas para Área
Fonte: (R.H.KRANE et al., 2003)

Há também o processo de conversão entre as unidades de medidas, onde podemos expressar qualquer outra unidade de comprimento sem alterações no valor. Nas tabelas 2.2 e 2.3 contém os múltiplos e submúltiplos do metro. As unidades à direita para convertê-las basta multiplicá-las por 10 (dez), já as que estão à esquerda faz-se a divisão por 10 (dez). Para converter uma unidade de medida para qualquer outra unidade, deve-se repetir sucessivas vezes as regras, como indicado na figura abaixo. (R.H.KRANE et al., 2003)

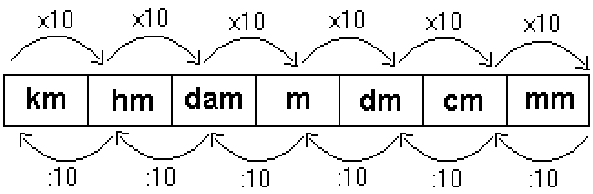

Figura 2.2: Conversão
Fonte: site *Só Matemática*

Na tabela abaixo há um exemplo do processo de conversão:

	cm	**Metro**	**km**
1 Centímetro	1	10^{-2}	10^{-5}
1 Metro	100	1	10^{-3}
1 Quilômetro	10^5	1000	1

Tabela 2.5: Conversão das unidades de comprimento
Fonte: (R.H.KRANE et al., 2003)

Observe que 1 centímetro foi convertido em metro e em quilômetro, assim como 1 metro foi convertido em centímetro e quilômetro, e 1 quilômetro convertido em centímetro e metro.

A unidade de medida de comprimento ao quadrado, é o que utiliza-se quando trabalhamos com áreas. No capítulo a seguir, veremos algumas figuras planas e como calcular as áreas de suas regiões.

CAPÍTULO 3

Área das Figuras Planas

As áreas medem o espaço, ou seja, o tamanho da superfície de uma figura plana. Sendo assim quanto maior for a superfície, maior será a sua área. Sabe-se pela geometria euclidiana que figuras planas possuem comprimento e largura, sendo essas bidimensionais, ou seja, possuem duas dimensões. Com o passar dos anos e com a necessidade do homem, foi preciso calcular a área de determinadas regiões, e ao longo do tempo foram desenvolvidas figuras e fórmulas para se calcular a área das mesmas. O homem à partir de observações criou diversas figuras tendo como base as noções primitivas, como por exemplo, com dois pontos se faz um segmento de reta, com três pontos podemos formar um plano (triângulo). Tais conceitos são abordados em livros didáticos do ensino fundamental e médio, sendo estes ensinados a partir de fórmulas utilizadas para calcular o valor da área de uma figura plana (polígono). A unidade padrão de medida da área é o metro quadrado e vamos partir dele para as definições a seguir. (DOLCE e POMPEO, 2005)

Os principais polígonos (figura plana formada pelo mesmo número de ângulos e lados) são: quadrado, retângulo, triângulo, paralelogramo, losango, trapézio e um polígono regular. (DOLCE e POMPEO, 2005). Além destes polígonos, como uma figura plana o círculo também merece atenção. Na sequência será feito uma breve explicação sobre cada uma dessas figuras e o método mais utilizado para calcular o valor de suas áreas nos ensinos fundamental e médio.

3.1 O Paralelogramo

O Paralelogramo é um polígono que possui quatro lados, seus lados opostos são paralelos e possuem a mesma medida. Possui também ângulos internos e externos, cuja soma de seus ângulos (internos ou externos) é igual à $360°$. (DOLCE e POMPEO, 2005)

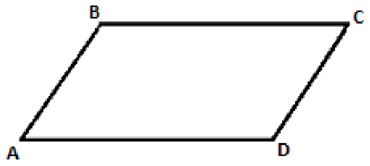

Figura 3.1: Paralelogramo I
Fonte: Figura elaborada pela autora

Os lados $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$, são paralelos e tem a mesma medida, assim como os lados $\overline{BA}$ e $\overline{CD}$. Levando em consideração essas informações é fácil perceber que todo quadrado, retângulo e losango também são paralelogramos, pois possuem lados paralelos entre si. (DOLCE e POMPEO, 2005)

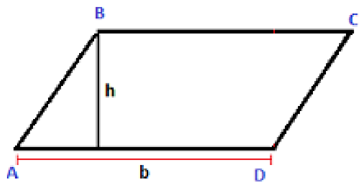

Figura 3.2: Paralelogramo II
Fonte: Figura elaborada pela autora

A área de um paralelogramo também pode ser calculada através da multiplicação entre as suas duas dimensões base e altura.

$$\acute{A}rea_{(paralelogramo)} = base \times altura$$

Teorema 3.1 *Dois Paralelogramos de bases e alturas respectivamente congruentes são equivalentes. (DOLCE e POMPEO, 2005) [pág.303]*

Em caso particular por definição de equivalência plana, temos que o retângulo também é um paralelogramo. Se observarmos um paralelogramo de base e altura, podemos compará-lo a um retângulo que possui a mesma medida de base e altura, assim ambos serão equivalentes. (DOLCE e POMPEO, 2005)

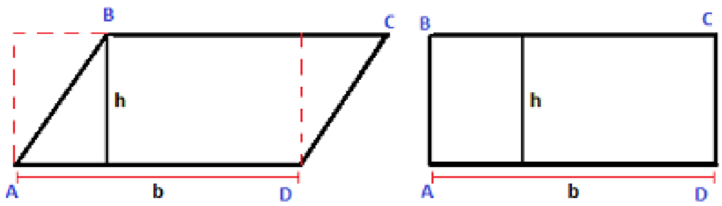

Figura 3.3: Paralelogramo e Retângulo
Fonte: Figura elaborada pela autora

Logo,

$$\acute{A}rea_{(paralelogramo)} = \acute{A}rea_{(retângulo)} = base \times altura$$

3.2 O Retângulo

O retângulo é um quadrilátero que possui todos os seus ângulos retos (iguais à $90°$). O retângulo possui base a altura, e para calcular a sua área basta observar a relação entre suas duas dimensões. Sendo assim, temos a fórmula para calcular sua área à partir do produto de suas dimensões, ou seja, $\acute{A}rea_{(ret\hat{a}ngulo)} = base \times altura$. (DOLCE e POMPEO, 2005)

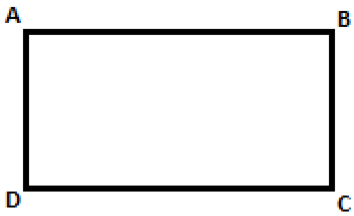

Figura 3.4: Retângulo
Fonte: Figura elaborada pela autora

Supondo um retângulo com medidas de base igual a $6m$ (seis metros) e altura de $2m$ (dois metros) de comprimento, sua área então será:

$$\acute{A}rea_{(ret\hat{a}ngulo)} = base \times altura$$

$$\acute{A}rea_{(ret\hat{a}ngulo)} = 6m \times 2m$$

$$\acute{A}rea_{(ret\hat{a}ngulo)} = 12m^2$$

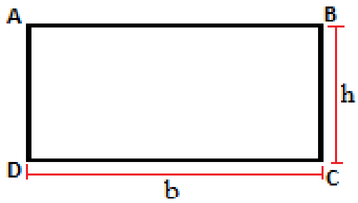

Figura 3.5: Retângulo: base e altura
Fonte: Figura elaborada pela autora

Observe na figura 3.5, que a base está representada pela letra (b) e a altura pela letra (h). Observe também nas expressões acima que não basta apenas multiplicar os valores, mas também realizar a multiplicação entre unidades de medida. Com base no exemplo acima temos que a fórmula utilizada para calcular a área total de um retângulo é: (DOLCE e POMPEO, 2005)

$$\acute{A}rea_{(ret\hat{a}ngulo)} = base \times altura$$

3.3 O Quadrado

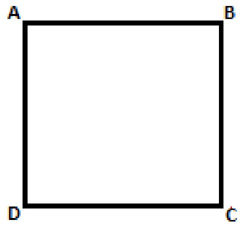

Figura 3.6: Quadrado
Fonte: Figura elaborada pela autora

O quadrado é uma figura plana formado por quatro lados congruentes, ou seja, todos os seus lados possuem a mesma medida de comprimento, o quadrado possui também seus quatro ângulos retos (ângulos internos iguais à $90°$), e é conhecido também como quadrilátero regular, pelo fato de ter quatro lados iguais e seus ângulos retos. (MACHADO, 1988)

Para calcular a área de um quadrado basta saber a medida do comprimento de um dos seus lados, já que ele possui todos os lados iguais de mesma medida e comprimento. Representando a medida do lado de um quadrilátero regular por (L). Sua área então poderá ser representada pela fórmula: $\acute{A}rea_{(quadrado)} = L^2$. (DOLCE e POMPEO, 2005)

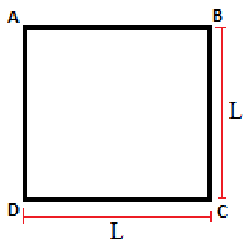

Figura 3.7: Quadrilátero Regular
Fonte: Figura elaborada pela autora

Para justificar esta fórmula suponha um quadrado com comprimento de lado igual $2m$ (dois metros), o quadrado como um plano possui base e altura, e para saber a área total basta calcular o produto da medida de sua base pela medida de sua altura.

$$\acute{A}rea_{(quadrado)} = base \times altura$$

Como o quadrado possui todos os lados iguais a $2m$, basta substituir as respectivas medidas na fórmula acima, substituindo então a medida de comprimento $2m$ no lugar da base e da altura temos que:

$$\acute{A}rea_{(quadrado)} = 2m \times 2m$$

$$\acute{A}rea_{(quadrado)} = 4m^2$$

Ocorreu então a multiplicação dos valores de comprimento e da unidade de medida utilizada o metro (m). (DOLCE e POMPEO, 2005). Como o quadrado tem todos os lados iguais, se chamarmos um de seus lados de L, então a $\acute{A}rea_{(quadrado)} = L \times L$. Portanto a área do quadrado pode ser representada por:

$$\acute{A}rea_{(quadrado)} = L^2$$

3.4 O Triângulo

O triângulo é uma figura plana (polígono) formado por três lados. Ele pode ser classificado a partir das medidas de seus lados e ângulos internos (medida da abertura entre dois seguimentos de reta). (DOLCE e POMPEO, 2005)

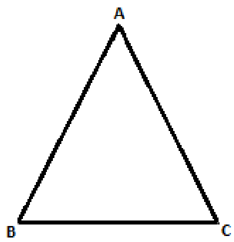

Figura 3.8: Triângulo
Fonte: Figura elaborada pela autora

Em relação aos lados, o triângulo pode ser classificado de três formas:

- Triângulo Equilátero: é um triângulo que possui todos os lados iguais e os seus ângulos internos também são iguais à $60°$;
- Triângulo Isósceles: apresenta apenas dois dos lados iguais, e apenas dois ângulos internos congruentes;
- Triângulo Escaleno: todos os lados e ângulos são diferentes. (DOLCE e POMPEO, 2005)

Há também a classificação para à medida dos ângulos internos de um triângulo:

- Triângulo Reto: o triângulo reto possui um de seus ângulos internos igual à $90°$;
- Triângulo Obtusângulo: possui dois ângulos internos agudos (menores que $90°$) e um ângulo interno obtuso (maior que $90°$);
- Triângulo Acutângulo: os três ângulos internos são agudos, ou seja, menores que $90°$. (DOLCE e POMPEO, 2005)

A área de um triângulo é calculada pelo produto entre as medidas do comprimento de sua base pelo de sua altura, e divide-se este produto por 2 (dois). Para se calcular a área de um triângulo qualquer é necessário que faça uma análise do tipo de triângulo (equilátero, isósceles, escaleno ou retângulo) para o qual será realizado o cálculo de sua área. (MACHADO, 1988)

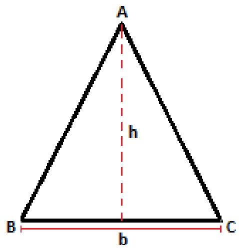

Figura 3.9: Triângulo de base (b) e altura(h)
Fonte: Figura elaborada pela autora

Em relação a medida da base e altura do triângulo, na figura temos que:

$$Área_{(triângulo)} = \frac{base \times altura}{2}$$

Podemos analisar esta informação à partir do seguinte teorema de equivalência plana:

Teorema 3.2 *Todo triângulo é equivalente a um paralelogramo de base congruente à do triângulo e altura metade da altura do triângulo. (DOLCE e POMPEO, 2005) [pág. 305]*

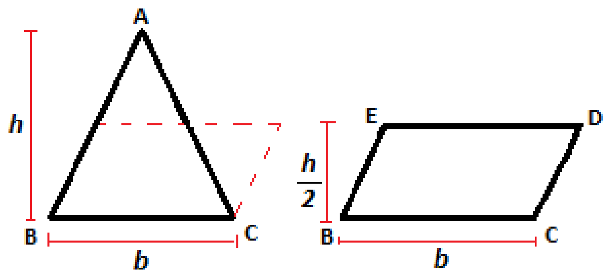

Figura 3.10: Triângulo / Paralelogramo
Fonte: Figura elaborada pela autora

Podemos observar na figura 3.10 o que o teorema diz. Se as bases do triângulo e paralelogramo forem iguais, e o paralelogramo ter altura igual a metade da medida da altura do triângulo, então: (DOLCE e POMPEO, 2005)

$$Área_{(triângulo)} = Área_{(paralelogramo)} \Longrightarrow Área_{(triângulo)} = \frac{base \times altura}{2}$$

Portanto,

$$Área_{(triângulo)} = \frac{base \times altura}{2}$$

3.4.1 Área do triângulo em função dos lados

A área de um triângulo pode ser determinada também em relação a medida de seus lados. Sabemos que ela é representada por,

$$\acute{A}rea_{(tri\hat{a}ngulo)} = \frac{base \times altura}{2}$$

se chamarmos a base de b e a altura de h teremos,

$$\acute{A}rea_{(tri\hat{a}ngulo)} = \frac{b \times h}{2}$$

Em função da medida de seus lados a área do triângulo pode ser determinada pela fórmula de Heron:

$$\acute{A}rea_{(tri\hat{a}ngulo)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

onde p representa o semiperímetro.

Heron 10 d.C. à 80 d.C. (https://pt.wikipedia.org/wiki/Heron-de-Alexandria) foi um matemático e mecânico, também conhecido pelo nome de Herão ou Heron de Alexandria. Viveu na Grécia antiga e ficou muito conhecido pela fórmula utilizada para calcular a área de um triângulo utilizando a medida de seus lados. (BOYER, 1996)

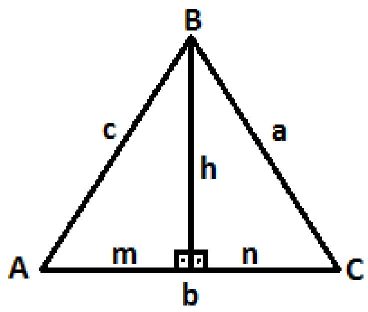

Figura 3.11: Área do Triângulo em função dos lados
Fonte: Figura elaborada pela autora

Com base na figura 3.11, temos um triângulo $\triangle ABC$ de lados a, b, c e altura h, podemos demonstrar a fórmula de Heron para calcular a área de um triângulo qualquer. (DOLCE e POMPEO, 2005)

Demonstração:

Temos que o semiperímetro p é dado pela fórmula:

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

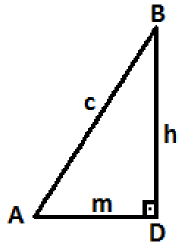

Figura 3.12: Relação entre os lados do triângulo
Fonte: Figura elaborada pela autora

Observando o triângulo e aplicando o teorema de Pitágoras, temos que:

$$c^2 = h^2 + m^2$$

Isolando m,

$$m^2 = c^2 - h^2$$

Pela relação de Euclides (https://pt.wikipedia.org/wiki/Euclides), temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm \Longrightarrow 2bm = b^2 + c^2 - a^2$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade

$$(2bm)^2 = (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

$$4b^2m^2 = (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

Substituindo m^2 obtemos,

$$4b^2(c^2 - h^2) = (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

Aplicando a propriedade distributiva

$$4b^2c^2 - 4b^2h^2 = (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

Agora, isolamos $4b^2h^2$,

$$4b^2h^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

$$4b^2h^2 = (2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$$

Utilizando a fatoração:

$$4b^2h^2 = (2bc + (b^2 + c^2 - a^2))(2bc - (b^2 + c^2 - a^2))$$

$$4b^2h^2 = (b^2 + 2bc + c^2 - a^2)(a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc))$$

$$4b^2h^2 = ((b + c)^2 - a^2)(a^2 - (b - c)^2)$$

$$4b^2h^2 = [(a + b + c)(b + c - a)][(a + b - c)(a - b + c)]$$

Dividindo ambos os membros por 16,

$$\frac{4b^2h^2}{16} = \frac{(a + b + c)}{2} \times \frac{(b + c - a)}{2} \times \frac{(a + b - c)}{2} \times \frac{(a - b + c)}{2}$$

Temos que

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

logo,

$$p - a = \frac{a + b + c}{2} - a \Longrightarrow p - a = \frac{a + b + c - 2a}{2} \Longrightarrow p - a = \frac{b + c - a}{2}$$

$$p - c = \frac{a + b + c}{2} - c \Longrightarrow p - c = \frac{a + b + c - 2c}{2} \Longrightarrow p - c = \frac{a + b - c}{2}$$

$$p - b = \frac{a + b + c}{2} - b \Longrightarrow p - b = \frac{a + b + c - 2b}{2} \Longrightarrow p - b = \frac{a - b + c}{2}$$

Substituindo,

$$\frac{b^2h^2}{4} = p(p - a)(p - b)(p - c)$$

Extraindo a raiz quadrada nos dois membros, temos:

$$\sqrt{\frac{b^2h^2}{4}} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

$$\frac{bh}{2} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Mas sabemos que $\frac{bh}{2}$ é a área do triângulo. Então:

$$Área_{(triângulo)} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}. \qquad \blacksquare$$

(DOLCE e POMPEO, 2005)

3.5 O Trapézio

O trapézio é definido como um quadrilátero cujo o mesmo tem dois lados paralelos entre si, sendo esses representados como suas duas bases, sempre uma maior e a outra menor como na figura 3.13. (DOLCE e POMPEO, 2005)

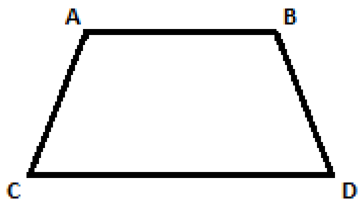

Figura 3.13: Trapézio
Fonte: Figura elaborada pela autora

Temos o trapézio $ABCD$, se traçarmos uma diagonal do ponto A ao ponto D, consequentemente teremos dois triângulos, o triângulo ACD com base B, e o triângulo ABD com base b. A área do Trapézio é representada à partir da área de um triângulo $Área_{(triângulo)} = \frac{base \times altura}{2}$. Como vimos, a partir de um trapézio obtemos dois triângulos, logo a área de um trapézio será a soma da área da superfície dos dois triângulos. (DOLCE e POMPEO, 2005)

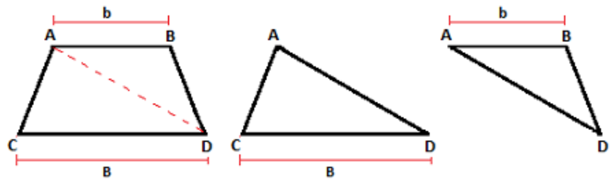

Figura 3.14: Área do Trapézio
Fonte: Figura elaborada pela autora

A área do triângulo ACD com a base maior B é dada por:

$$Área_{(triânguloACD)} = \frac{B \times h}{2}$$

A área do triângulo ABD com a base menor b é dada por:

$$Área_{(triânguloABD)} = \frac{b \times h}{2}$$

Como a área do trapézio é a soma das duas áreas, então basta somá-las,

$$Área_{(trapézio)} = \frac{B \times h}{2} + \frac{b \times h}{2}$$

$$Área_{(trapézio)} = \frac{B \times h + b \times h}{2} = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

Portanto,

$$Área_{(trapézio)} = \frac{(B + b) \times h}{2}$$

3.6 O Losango

O losango é um quadrilátero também conhecido como um paralelogramo, possui os seus quatro lados paralelos com a mesma medida de comprimento. Tem duas diagonais sendo uma maior D e outra menor d (como pode ser observado na figura 3.15), que se cruzam ao centro. O losango também tem como característica quatro ângulos internos congruentes, sendo dois agudos $(< 90°)$ e dois obtusos $(> 90°)$. (DOLCE e POMPEO, 2005)

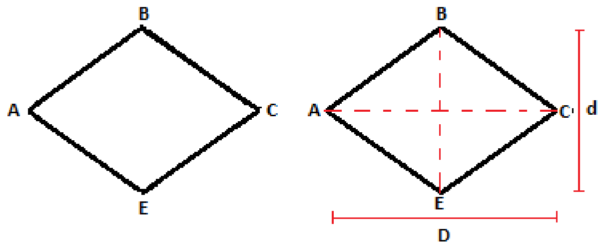

Figura 3.15: Losango
Fonte: Figura elaborada pela autora

A área do Losango é dada pela relação entre as suas diagonais.

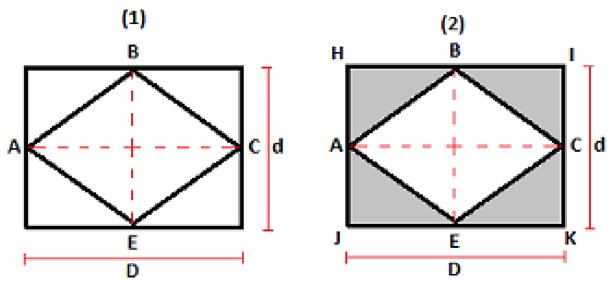

Figura 3.16: Área do Losango
Fonte: Figura elaborada pela autora

Se traçarmos retas paralelas as diagonais (maior D e menor d) do losango, encostando as retas paralelas nos pontos (vértices do losango) A, B, C e E, de forma que pareça um retângulo em torno do losango como na representação (1), podemos então observar que a área total do retângulo $HIJK$, será o dobro da área do losango $ABCE$. Então a área dos quatro triângulos coloridos, será a mesma área do losango (parte em branco) na representação (2). Observe também, que os lados $\overline{JK}$ e $\overline{HI}$ do retângulo tem a mesma distância em relação a diagonal D, e os lados $\overline{HJ}$ e $\overline{IK}$ possuem a mesma distância da diagonal menor d. (DOLCE e POMPEO, 2005)

Sendo assim podemos relacionar de maneira simples a fórmula da área do losango em relação as suas diagonais. Já é sabido a fórmula para calcular a área do retângulo utilizando $Área_{(retângulo)} = base \times altura$, se o losango tem metade da área do retângulo, em relação as suas diagonais, teremos que a área da superfície de um losango será dada através da fórmula:

$$Área_{(losango)} = \frac{D \times d}{2}$$

sendo D (diagonal maior) e d (diagonal menor).

Observação: Como o losango também é um paralelogramo, sua área também poderá ser representada por $Área_{(losango)} = base \times altura$. (DOLCE e POMPEO, 2005)

3.7 Polígono Regular

Polígono regular é uma figura que tem todos os seus lados e ângulos (internos ou externos) iguais. Todo polígono regular pode ser inscrito dentro de uma circunferência. Por exemplo, são polígonos regulares: triângulo equilátero (três lados iguais); quadrado (quatro lados iguais); pentágono regular (cinco lados iguais); hexágono regular (seis lados iguais); heptágono regular (sete lados iguais); octógono regular (oito lados iguais); eneágono regular (nove lados iguais) e decágono regular (dez lados iguais). (DOLCE e POMPEO, 2005)

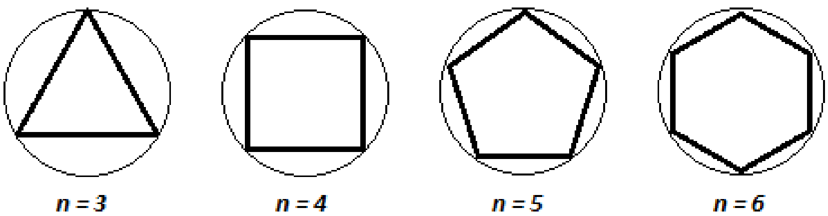

Figura 3.17: Triângulo, Quadrado, Pentágono e Hexágono
Fonte: Figura elaborada pela autora

Um polígono regular possui algumas características importantes quando tratamos de áreas. São elas: Número de lados (indicado por n na figura 3.17); a medida do lado (l); medida da apótema (m) (segmento com uma extremidade no centro da circunferência e a outra no ponto médio de um dos lados); semiperímetro (p) (medida que equivale a metade do perímetro de uma figura geométrica). Além desses, temos também o perímetro, cujo valor é representado por $2p = n.l$, sendo n o número de lados e l a medida dos lados. (DOLCE e POMPEO, 2005) [pág. 318-319]

A área de um polígono regular é dada pela fórmula: $Área_{(polígono)} = p \times m$, com p sendo o valor do semiperímetro e m a medida da apótema. Supondo um polígono regular com números de lados representado por (n), cujo todos os lados possuam a mesma medida (l), e sua apótema sendo representada por (m). (DOLCE e POMPEO, 2005) [pág. 318-319]

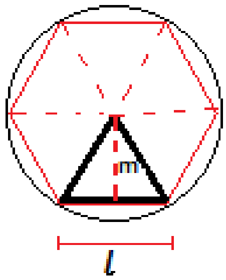

Figura 3.18: Área de um Polígono Regular
Fonte: Figura elaborada pela autora

Se fizermos a decomposição desse polígono sendo a quantidade de lados a mesma quantidade de triângulos, tomando como base do triângulo l e a altura sendo à medida da apótema, teremos:

$$Área_{(polígono)} = n \times Área_{(triângulo)}$$

$$Área_{(polígono)} = n \times \frac{base \times altura}{2}$$

Assim,

$$Área_{(polígono)} = \frac{n \times l \times m}{2}$$

Porém, temos que $n \times l = 2p$, logo a $Área_{(polígono)} = \dfrac{2p \times m}{2}$.
Portanto a área é dada por:

$$Área_{(polígono)} = p \times m$$

3.8 O Círculo

É uma superfície plana limitada por uma circunferência (conjunto de pontos de um plano, no qual a distância entre qualquer um dos pontos ao centro é a mesma), ou seja, o círculo é a união da circunferência com o seu todo. As características de um círculo e de uma circunferência são as mesmas, ambos contém um centro, raio, corda, diâmetro e arco. (DOLCE e POMPEO, 2005)

O raio é um segmento de reta cujo, uma extremidade está contida no centro e a outra em um ponto da circunferência. A corda é um segmento de reta no qual ambas as extremidades pertencem a circunferência. O diâmetro é uma corda que passa pelo centro do círculo ou circunferência. Arco é a uma curva compreendida entre dois pontos de uma circunferência. (LIMA, 1991)

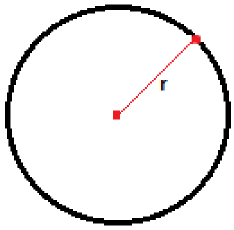

Figura 3.19: Círculo
Fonte: Figura elaborada pela autora

A área da superfície de um círculo é dada pela fórmula:

$$\acute{A}rea_{(c\acute{\imath}rculo)} = \pi . r^2$$

Teorema 3.3 *A área do círculo é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos regulares nele inscritos e cujas aproximações por excesso são as áreas dos polígonos regulares a ele circunscritos. (LIMA, 1991) [pág. 51]*

Pelo teorema acima, podemos observar que a área de um círculo é dada pelo limite em relação a área dos polígonos regulares nele inscritos e circunscritos. Como já vimos, a área dos polígonos regulares é dada por:

$$\acute{A}rea_{(pol\acute{\imath}gono)} = p \times m$$

Quanto maior for o número de lados dos polígonos (inscritos e circunscritos), mais próximo estaremos do valor exato da área do círculo, ou seja, o perímetro dos polígonos se aproximará do perímetro do círculo (comprimento da circunferência) e, as apótemas dos polígonos se aproximará do raio do círculo.

Temos o semiperímetro representado por p e o perímetro por $2p$. O comprimento da circunferência é obtido pela fórmula:

$$C = 2\pi r$$

mas, o comprimento da circunferência é também o perímetro, ou seja,

$$2p = 2\pi r$$

logo o semiperímetro p será

$$p = \frac{2\pi r}{2}$$

$$p = \pi r$$

Com base na área dos polígonos regulares $\acute{A}rea_{(pol\acute{\imath}gono)} = p \times m$ e, observando acima que a área do círculo será dada pelo produto entre o seu semiperímetro e raio. Logo,

$$\acute{A}rea_{(c\acute{\imath}rculo)} = \pi r \times r$$

$$\acute{A}rea_{(c\acute{\imath}rculo)} = \pi r^2$$

(LIMA, 1991), (DOLCE e POMPEO, 2005)

Esta situação ficará melhor compreendida com o Método da Exaustão desenvolvido por Eudoxo e utilizado por Arquimedes, no Capítulo 4.

CAPÍTULO 4

Arquimedes

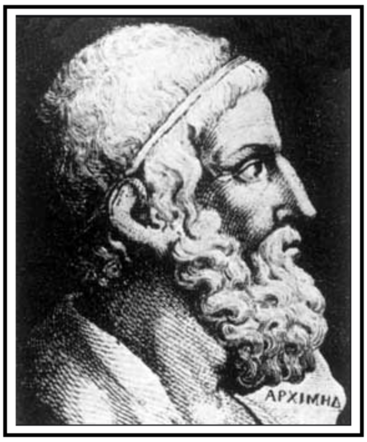

Figura 4.1: Arquimedes de Siracusa
Fonte: *site "E-Calculo USP"*

Muitos fatos históricos sobre a vida de Arquimedes são desconhecidos, sabe-se que ele nasceu em uma província da Sicília na Itália chamada Siracusa, por volta dos anos de 287 a.C. à 212 a.C., e foi um matemático, engenheiro, físico, inventor e astrônomo. (ANTON, 2000) [pág. 378]. Lúcio Méstrio Plutarco 46 d.C. à 120 d.C (https://pt.wikipedia.org/wiki/Plutarco) foi um historiador, pesquisou e descobriu muitos fatos sobre a vida e as obras de Arquimedes, que ficou conhecido como Arquimedes de Siracusa. É provável que ele tenha estudado na biblioteca de Alexandria, pois alguns de seus trabalhos eram enviados para lá em forma de mensagens. Entre as principais descobertas e estudos físicos e matemáticos desenvolvidos por Arquimedes estão: Lei da alavanca; Equilíbrio dos planos; Parafuso de Arquimedes; A coroa de ouro; Quadratura da parábola; Espirais; Medida do círculo; Trissecção do Ângulo; dos Métodos Relativos aos Teoremas Mecânicos, entre outros. (BOYER, 1996) [pág. 83-95]. Arquimedes utilizou os números infinitesimais de uma maneira em que se aproximava muito ao cálculo que temos hoje, e uma técnica conhecida na atualidade como método da exaustão. Entre seus trabalhos o Método da Exaustão e a Quadratura da Parábola são extremamente importantes para o cálculo de áreas. (EVES, 2011)

4.1 O Método da Exaustão

Com base na área de um círculo, à partir do limite entre as áreas dos polígonos regulares circunscritos nele, como visto no capítulo 3, temos o método da exaustão. Arquimedes o utilizou para encontrar uma aproximação exata para o valor de π (pi), por meio do estudo realizado por ele sobre a "Medida do Círculo". (EVES, 2011)

A partir da necessidade de encontrar a área de regiões que ainda não eram conhecidas, Arquimedes resolveu então utilizar de figuras nas quais já se sabiam na época como encontrar as áreas de suas regiões, e as utilizou para determinar a área dessas novas regiões. Com o método da Exaustão, Arquimedes desenvolveu algumas fórmulas que seriam utilizadas para determinar a área de figuras planas como o círculo e até mesmo o volume de alguns sólidos. (EVES, 2011). Este método foi muito importante, pois foi tido como base na invenção do cálculo, e foi utilizado por Isaac Newton (https://pt.wikipedia.org/wiki/Isaac-Newton) e Leibniz (https://pt.wikipedia.org/wiki/Gottfried-Wilhelm-Leibniz), e por esse motivo Arquimedes é tido com um dos inventores do cálculo. Este método também foi importante para os estudos realizados também por Bonaventura Cavalieri (https://pt.wikipedia.org/wiki/Bonaventura-Cavalieri), Blaise Pascal (https://pt.wikipedia.org/wiki/Blaise-Pascal), Pierre de Fermat (https://pt.wikipedia.org/wiki/Pierre-de-Fermat) e Bernhard Riemann (https://pt.wikipedia.org/wiki/Bernhard-Riemann). (GUIDORIZZI, 2008a)

A ideia de Arquimedes para calcular o valor mais próximo de π, se baseia no axioma de Eudoxo sobre o método da exaustão, que Arquimedes utilizou para inscrever e circunscrever em um círculo, polígonos regulares no qual conforme ele aumentava o número de lados desses polígonos cada vez mais, ou seja, quanto maior fosse o número de lados, mais próximo estaria do valor real de π. Arquimedes, através desse processo fez esta aproximação para um polígono regular de até 96 (noventa e seis) lados e chegou à partir deste, que o valor da aproximação de π estaria entre $3(\frac{10}{71})$ e $3(\frac{1}{7})$, ou seja, entre $3,140845 < \pi < 3,142857$. (EVES, 2011), (BOYER, 1996)

Desenvolvendo as expressões:

$$3(\frac{10}{71}) = \frac{71}{71} + \frac{71}{71} + \frac{71}{71} + \frac{10}{71} = \frac{223}{71} = 3,140845$$

$$3(\frac{1}{7}) = \frac{7}{7} + \frac{7}{7} + \frac{7}{7} + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3,142857$$

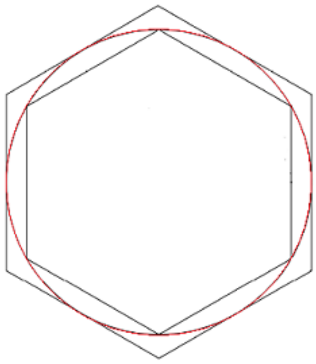

Figura 4.2: Hexágonos inscrito e circunscrito em um Círculo
Fonte: Figura elaborada pela autora

4.1.1 Eudoxo de Cnido

Eudoxo 408 a.C - 355 a.C (https://pt.wikipedia.org/wiki/Eudoxo-de-Cnido) matemático e astrônomo. O método da Exaustão foi desenvolvido por Eudoxo e apresentado por ele através da teoria das proporções, na qual teria feito uma generalização em uma proposição, dando assim forma ao método que segundo ele:

> "Se de uma grandeza qualquer subtrairmos uma parte não menor que sua metade, e do resto novamente subtrai-se não menor que a metade, e se esse processo de subtração é continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie." (BOYER, 1996) [pág. 63]

Na proposição acima, Eudoxo descreve o que seria o método da exaustão, qual foi creditado também a Arquimedes pelo desenvolvimento de inscrever e circunscrever polígonos regulares dentro de um círculo. Segundo Eudoxo, tudo se baseia na sua teoria das razões, podendo mediante a esta, definir o método da Exaustão. (BOYER, 1996)

Para demonstrar a proposição acima precisamos de dois resultados:

Teorema 4.1 *Dado um número real $z > 0$ existe um natural $n_0 > 0$ tal que* $\dfrac{1}{n_0} < z$.

Demonstração: Para provar este resultado existem três opções para uma fração $\dfrac{1}{n}$.

Podemos ter que $\dfrac{1}{n} < z$ (na qual obtemos o resultado desejado).

Podemos ter $\dfrac{1}{n} = z$, e consequentemente teremos que $\frac{1}{n+1} < z$.

Supondo por absurdo que estes dois casos ($\frac{1}{n} = z$ e $\frac{1}{n+1} < z$) não possam ocorrer.

Então $\dfrac{1}{n} > z$ para todo n pertencente aos naturais. Disto, teremos que $n < \dfrac{1}{z}$, para todo $n > 0$, fazendo com que o conjunto dos naturais seja limitado, o que é um absurdo.

Assim, existirá um n_0 tal que $\dfrac{1}{n_0} < z$. ■

O próximo resultado é conhecido como o Princípio de Arquimedes e será fundamental no raciocínio de Eudoxo para encontrar a área de um círculo.

Teorema 4.2 (Teorema de Arquimedes) *Dados dois números reais positivos x e y existe um número natural n tal que*

$$nx > y$$

Demonstração:

Deduzindo por absurdo, que para qualquer n pertencente aos naturais $\mathbb{N}$, tenhamos

$$nx \leq y$$

tal que $A = \{nx/n \in \mathbb{N}\}$, sendo A um conjunto não vazio limitado superiormente por y. Com base na propriedade do supremo, considere z o supremo de A.

Temos que $x > 0$, assim $z - x < z$, e $z - x$ não é uma parte superior de A. Desse modo, existe um m pertencente aos naturais $\mathbb{N}$, em que

$$z - x < mx$$

Então teremos que

$$z < mx + x$$

$$z < (m+1)x$$

o que nos leva a uma contradição, já que z é o supremo de A e $(m+1)x$ pertence à A.

Portanto,

$$nx > y. \qquad \blacksquare$$

Aplicando o Teorema 4.1 ao número $\dfrac{x}{y}$.

Os gregos partiam de dois princípios para determinar a área de uma figura, seja $a(S)$ a área de uma figura S, temos que:

- Se a figura S esta contida em uma figura T, então

$$a(S) \leq a(T)$$

- Se a figura R é a união das figuras S e T, sem superposição de áreas, então

$$a(R) = a(S) + a(T)$$

Se S não for um polígono, aplica-se a ideia de Antifonte 480 a.C. - 410 a.C. (https://pt.wikipedia.org/wiki/Antifonte), de tomar uma sequência de polígonos $p_1, p_2, ...$ que ocupam ou exaurem S. Seria a ideia de tomar o limite da área dos polígonos, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} a(Pn)$$

para obter a área $a(S)$, mas como os gregos não utilizavam este conceito foi necessário calcular o limite com um número finito, processo este utilizado por Eudoxo para determinar a área de um círculo.

A proposição de Eudoxo define o seguinte: Seja M uma grandeza dada e ε uma grandeza pré determinada, uma razão r, na qual $\frac{1}{2} \leq r < 1$, então existe um N, tal que $M(1-r)^n < \varepsilon$ para todo n, sendo $n > N$ com n e N pertencente aos inteiros $\mathbb{Z}$. Isso nos diz que:

$$\lim_{n\to\infty} M(1-r)^n = 0$$

Demonstração:
Temos que $M(1-r) = M - M.r$, se fizermos $M_1 = M - M.r$ então $M_1 = M(1-r)$.
Fazendo $M_2 = M_1 - M_1.r$ temos:

$$M_2 = M_1(1-r) \Longrightarrow M_2 = M(1-r).(1-r) \Longrightarrow M_2 = M(1-r)^2$$

Fazendo $M_3 = M_2 - M_2.r$ temos:

$$M_3 = M_2(1-r) \Longrightarrow M_3 = M(1-r)^2.(1-r) \Longrightarrow M_3 = M(1-r)^3$$

e assim sucessivamente, logo

$$M_n = M(1-r)^n$$

Se n tender ao infinito, então $(1-r)^n$ tenderá a zero. Disto vem a afirmação que

$$M_n = M(1-r)^n < \varepsilon$$

para qualquer que seja o valor de ε. $\blacksquare$

No livro XII de Euclides “Os Elementos”, há uma demonstração sobre o método da exaustão provavelmente realizada por Eudoxo, na qual utiliza a teoria das proporções, para afirmar que: “Áreas de círculos estão entre si como os quadrados sobre os diâmetros.” (BOYER, 1996) [pág. 63]

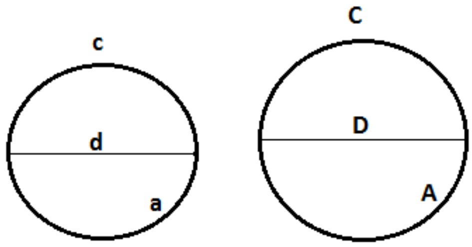

Figura 4.3: Círculos
Fonte: Figura elaborada pela autora

Com base na figura 4.3, mostraremos como Eudoxo desenvolveu esta proposição. Há na figura, um círculo menor identificado por c cuja sua área está representada por a e o seu diâmetro por d, e há também um círculo maior identificado por C com área A e diâmetro D. Logo, pela teoria das proporções visamos demonstrar a seguinte proporcionalidade em relação aos círculos:

$$\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$$

na qual, a razão entre as áreas dos círculos é proporcional a razão entre os quadrados dos diâmetros. (BOYER, 1996), (MARTINEZ, 2015)

Para provar que a proporção acima é verdadeira, deve-se mostrar que as desigualdades abaixo não são válidas,

$$\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$$

$$\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$$

Primeiro, mostraremos que $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$ só será verdadeiro se existir uma grandeza a', tal que $a' < a$ e que

$$\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$$

Supondo que $a - a'$ seja a grandeza determinada $\varepsilon > 0$, ou seja, $a - a' = \varepsilon$. A ideia de Eudoxo era inscrever polígonos regulares dentro do círculo para determinar a sua área, realizou isso para um polígono de n lados. Considere a figura 4.4 abaixo, na qual foi inscrito nos círculos polígonos regulares de n lados para mostrar o que foi realizado por Eudoxo:

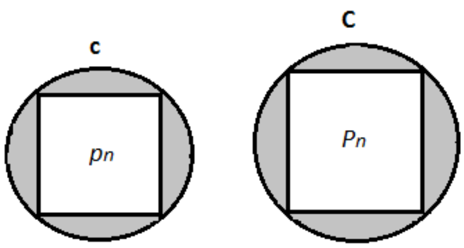

Figura 4.4: Polígonos Inscritos nos Círculos
Fonte: Figura elaborada pela autora

Observe que foi inscrito polígonos de lados $n = 4$ (quadrados) nos círculos c e C, cujas áreas dos polígonos são respectivamente representadas por p_n no círculo c e P_n no círculo C. Considerando as áreas que estejam no exterior dos polígonos e no interior dos círculos, para aplicar a ideia de Eudoxo, basta dobrar o número de lados n dos polígonos, e estará subtraindo mais do que a metade dessas áreas.

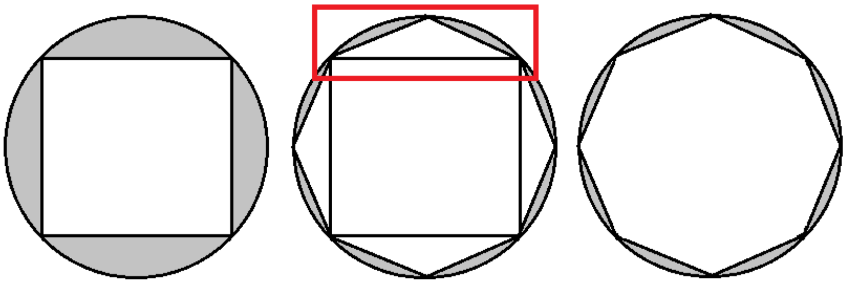

Figura 4.5: Dobrando o número de lados de um Polígono
Fonte: Figura elaborada pela autora

Na figura 4.5, inicialmente tínhamos inscrito um polígono de quatro lados no círculo. Ao dobrarmos o número de lados desse polígono, ele passa a ter oito lados, ou seja, temos um octógono. Na primeira figura conseguimos observar a área que está no exterior do quadrado e no interior do círculo, já na segunda figura, ao dobrarmos o número de lados observe que o octógono pega mais da metade dessa área, sobrando um pequeno espaço entre o círculo e o octógono, de acordo com a proposição de Eudoxo.

Pelo método da exaustão, quanto mais se dobrar o número de lados n desses polígonos, estará fazendo com que as áreas sejam diminuídas à $a - p_n < \varepsilon$. Temos que $a - a' = \varepsilon$, então $p_n > a'$. Fazendo à proporção:

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{d^2}{D^2}$$

Mas, como afirmamos

$$\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$$

pode-se afirmar também que,

$$\frac{p_n}{P_n} = \frac{a'}{A}.$$

Se $p_n > a'$, logo $P_n > A$. Mas como P_n é a área do polígono que foi inscrito no círculo C cuja a área é A, então $P_n < A$ (área do polígono deve ser menor do que a área do círculo). (BOYER, 1996)

Logo a expressão

$$\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$$

não é verdadeira, sendo que de forma análoga, $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$ também não será verdadeira. E portanto, prova-se a proporcionalidade da razão entre os quadrados dos diâmetros e a razão entre as áreas dos círculos. (BOYER, 1996) [pág.63]

$$\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}. \qquad \blacksquare$$

Eudoxo utilizou este método para conseguir determinar a área de um círculo. Arquimedes em algumas descobertas seguintes, fez a utilização do método da exaustão fazendo claramente um aperfeiçoamento do seu método inicial, utilizando-o para encontrar áreas de regiões limitadas por parábolas, curvas ou espirais, como na Quadratura da Parábola. (GUIDORIZZI, 2008a), (MARTINEZ, 2015)

4.1.2 Área do Círculo

Quando o método da exaustão é aplicado a um círculo de raio r, inscreve-se nesse círculo polígonos regulares de n lados, podendo esses ser inscritos, ou circunscritos em um círculo.

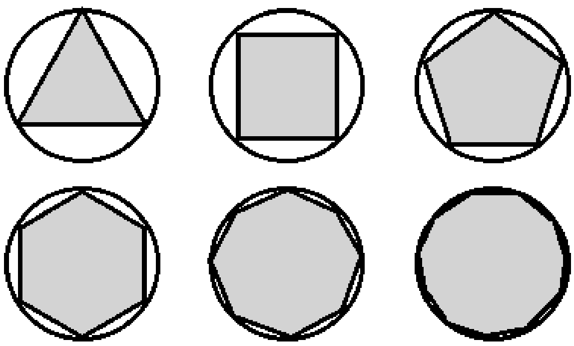

Figura 4.6: Área dos polígonos regulares
Fonte: Figura elaborada pela autora

Conforme o número de lados n vai aumentando, a área dos polígonos vai se aproximando da área do círculo. Considerando a área dos polígono regulares de n lados inscritos e circunscritos em um círculo de raio r, conseguimos encontrar uma fórmula para determinar a área desses polígonos regulares, dividindo-os em n triângulos, tendo em vista a área desses triângulos.

Cada triângulo é isósceles, pois dois de seus lados são raios do círculo, o ângulo no ápice de cada triângulo é $\frac{2\pi}{n}$, já que os triângulos dividem o ângulo central em n partes iguais. Podemos então, a partir desses dados deduzir a área de cada triângulo, e a partir dessas definir a área de um polígono regular de n lados. MARTINEZ (2015)

Polígonos Inscritos

Considerando como $(p_i)n$ a área dos polígonos regulares de n lados, inscrito no círculo.

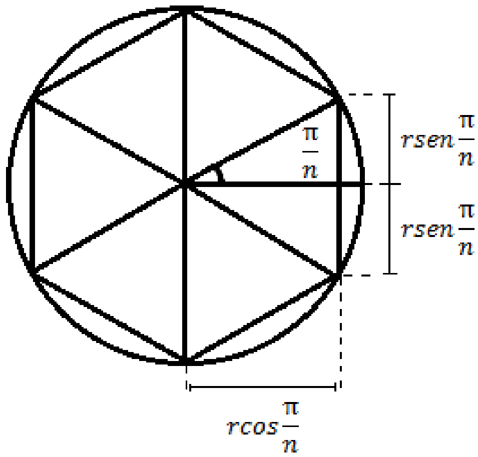

Figura 4.7: Área dos polígonos regulares inscritos
Fonte: Figura elaborada pela autora

Levando em consideração a área de n triângulos, já sabemos que

$$Área_{(triângulo)} = \frac{base \times altura}{2}.$$

Com base na figura 4.7, podemos substituir a medida da base e da altura do triângulo, desse modo teremos:

$$Área_{(triângulo)} = \frac{2(rsen(\frac{\pi}{n}))(rcos(\frac{\pi}{n}))}{2}$$

$$Área_{(triângulo)} = r^2 sen(\frac{\pi}{n})cos(\frac{\pi}{n}).$$

Logo, a área dos polígonos regulares de n lados, inscrito no círculo poderá ser calculada através da fórmula:

$$(p_i)n = nr^2 sen(\frac{\pi}{n})cos(\frac{\pi}{n})$$

(MARTINEZ, 2015)

Polígonos Circunscritos

Considerando como $(p_c)n$ a área dos polígonos regulares de n lados, circunscrito no círculo com base na área de n triângulos.

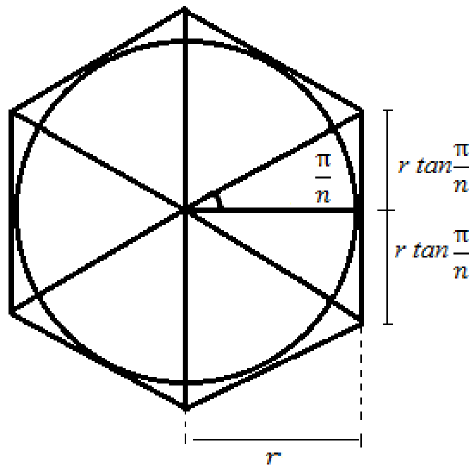

Figura 4.8: Área dos polígonos regulares circunscritos
Fonte: Figura elaborada pela autora

Com base na figura 4.8, podemos observar:

$$Área_{(triângulo)} = \frac{2(rtan(\frac{\pi}{n}))r}{2}$$

$$Área_{(triângulo)} = r^2tan(\frac{\pi}{n})$$

que é a área de apenas um triângulo.

Se considerarmos a área de n triângulos para determinar a área dos polígonos regulares de n lados, circunscrito no círculo, calcula-se através da fórmula:

$$(p_c)n = nr^2tan(\frac{\pi}{n})$$

(MARTINEZ, 2015)

Em ambos os casos, à medida em que tomamos o

$$\lim_{n\to\infty} nr^2sen(\frac{\pi}{n})cos(\frac{\pi}{n})$$

e também

$$\lim_{n\to\infty} nr^2tan(\frac{\pi}{n})$$

chegaremos na área do círculo, ou seja,

$$\pi r^2.$$

Exemplo 4.1 *Calculando a área de polígonos regulares de n lados, inscritos e circunscritos no software Maple.*

Com o auxílio de alguns comandos, é possível observar que a partir da área dos polígonos regulares de n lados, à medida em que n aumenta a área do polígono regular tende a se aproximar da área do círculo.

```
> with(plots) :
> with(plottools) :
> polnr := proc(n, r)#entre com o número de polígonos e o raio da circunferência centrada na origem
  local inngon, outgon, c1, ss, pinsc, pcirc, p1, p2, p3, a1, p4, a2, p5;
  c1 := circle([0, 0], r, color = red) :
  ss := r/cos(Pi/n) :
  inngon := n -> [seq([r·cos(2·Pi*i/n), r·sin(2·Pi*i/n)], i = 1 ..n)] :
  outgon := n -> [seq([ss·cos(2·Pi*i/n), ss·sin(2·Pi*i/n)], i = 1 ..n)] :
  pinsc := 2·r·n·sin(Pi/n);
  pcirc := 2·r·n·tan(Pi/n);

  p1 := print("Aproximações por polígonos regulares do perimetro da circunferência centrada na origem de raio r=",
      evalf(r) unidade(s) de medida);
  p2 := print("Perimetro do poligono inscrito", evalf(pinsc) unidades de medida);

  p3 := print("Perimetro do poligono circunscrito", evalf(pcirc) unidades de medida);
  a1 := n·r^2·sin(Pi/n)·cos(Pi/n); #área dos polígonos
  a2 := n·r^2·tan(Pi/n); #área dos poligonos
  p4 := print("Área do poligono inscrito", evalf(a1) unidades de área);
  p5 := print("Área do poligono circunscrito", evalf(a2) unidades de área);
  display(c1, p1, p2, p3, p4, p5, polygonplot(inngon(n)), color = WHITE, polygonplot(outgon(n)), color = WHITE,
      scaling = constrained);


  end:
```

Figura 4.9: Área dos polígonos regulares / Área do círculo
Fonte: Figura elaborada pela autora *software Maple*

A figura 4.9 mostra os comandos que foram digitados na área de trabalho do software Maple.

Para determinar a aproximação, perímetro e área do polígono, basta entrar com o número de lados desses polígonos e o raio do círculo. (MARIANI, 2005)

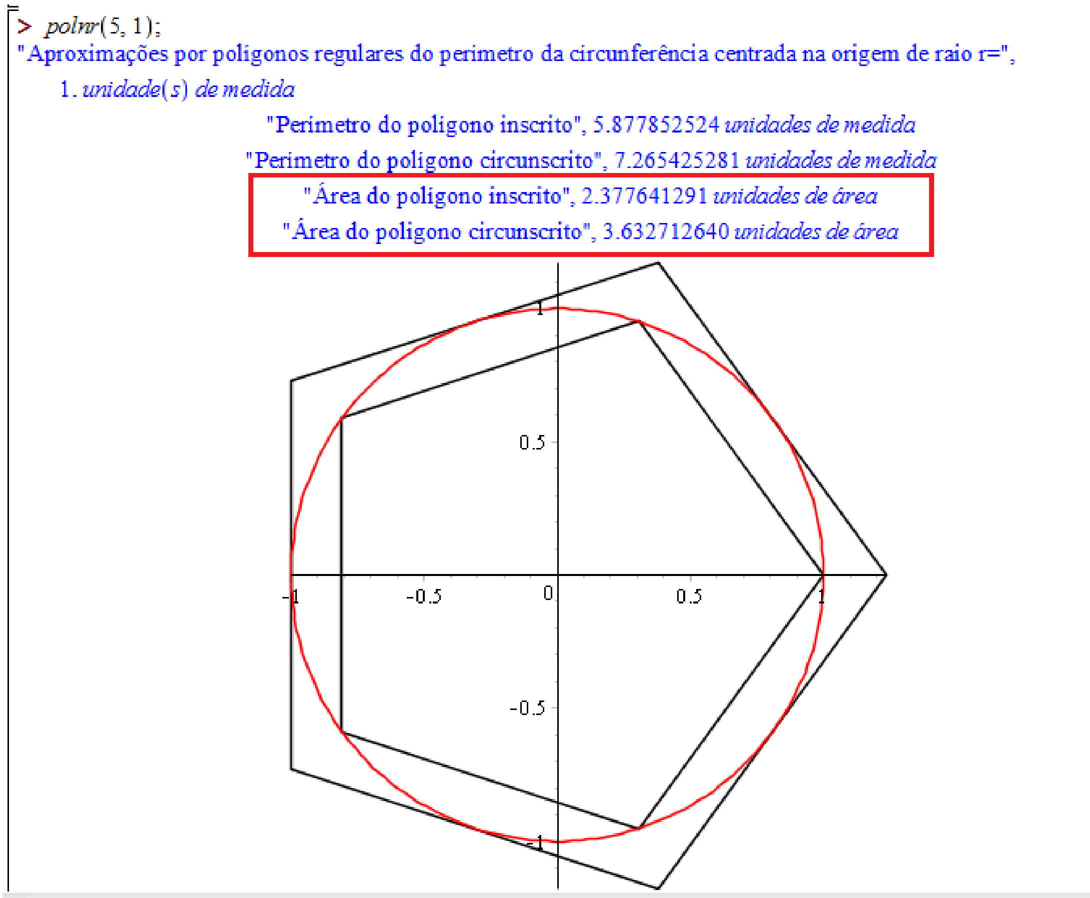

Figura 4.10: Polígonos regulares de 5 lados
Fonte: Figura elaborada pela autora *software Maple*

Na figura 4.10 acima, foi calculado para um polígono de 5 lados e raio 1. A aproximação da área obtida está destacada na imagem.

Já na figura 4.11 foi calculado para um polígono de 20 lados e raio 1.

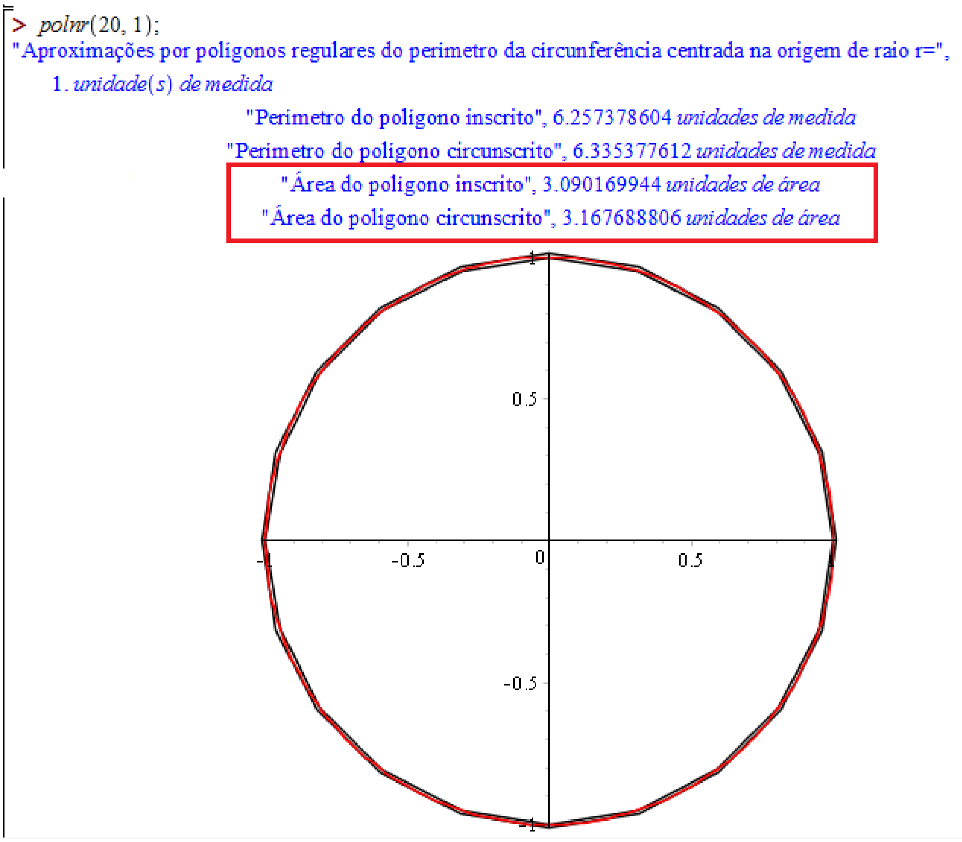

Figura 4.11: Polígonos regulares de 20 lados
Fonte: Figura elaborada pela autora *software Maple*

Quanto maior for o número de lados desses polígonos regulares, estará se aproximando cada vez mais da área exata do círculo.

4.2 Quadratura da Parábola

A Quadratura da Parábola é um tratado de geometria escrito por Arquimedes, em que ele apresenta 24 proposições a respeito das parábolas. Nele, Arquimedes mostrou como encontrar a área de um determinado segmento de uma parábola, partindo de uma ideia desenvolvida anteriormente por Eudoxo através do *método da exaustão*, na qual utilizou o cálculo da área de figuras que já eram conhecidas na época como a área de um triângulo, para obter a área de uma nova região. A palavra "Quadratura" é um termo muito antigo utilizado pelos matemáticos como sinônimo do processo de determinar áreas. Arquimedes, por meio de seu método provou que a área delimitada por uma parábola e uma linha reta é $\frac{4}{3}$ (quatro terços) da área de um triângulo inscrito na parábola, e fez isso mediante a uma série geométrica infinita, cuja razão é $\frac{1}{4}$ (um quarto), desenvolvendo assim uma fórmula para determinar a área de um segmento de parábola. (GUIDORIZZI, 2008a) [pág. 491-496], (BOYER, 1996) [pág. 88-89]

Para obter este resultado, considere a parábola $f(x) = x^2$ e uma corda EP, como na imagem abaixo:

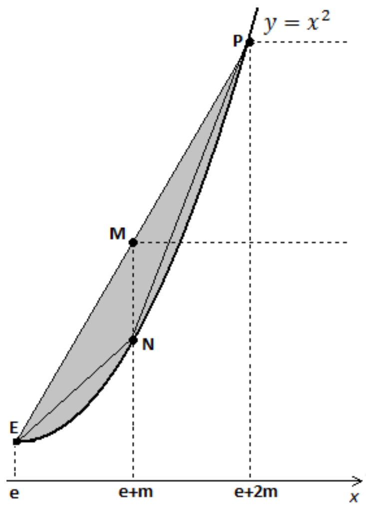

Figura 4.12: Quadratura da Parábola I
Fonte: Figura elaborada pela autora *(Software Winplot)*

Sendo M o ponto médio do segmento de reta EP, que pode ser obtido através da fórmula:

$$M = (\frac{x1 + x2}{2}, \frac{y1 + y2}{2})$$

Pela função $f(x) = x^2$, se $x = e$ então $y = e^2$. Se $x = e + 2m$ então $y = (e + 2m)^2$. Assim, o ponto $E(x1, y1)$ terá coordenadas $E(e, e^2)$ e o ponto $P(x2, y2)$ terá coordenadas $P(e + 2m, (e + 2m)^2)$. Substituindo na fórmula acima teremos:

$$M = (\frac{e + (e + 2m)}{2}, \frac{e^2 + (e + 2m)^2}{2})$$

Para determinar o comprimento do segmento de reta MN em que $N = (e + m, (e + m)^2)$, basta calcular a diferença das ordenadas dos pontos M e N, logo

$$\overline{MN} = \frac{e^2 + (e+2m)^2}{2} - (e+m)^2$$

$$\overline{MN} = \frac{e^2 + e^2 + 4em + 4m^2}{2} - (e^2 + 2em + m^2)$$

$$\overline{MN} = \frac{2e^2 + 4em + 4m^2}{2} - \frac{(e^2 + 2em + m^2)}{1}$$

$$\overline{MN} = \frac{2e^2 + 4em + 4m^2 - 2e^2 - 4em - 2m^2}{2}$$

$$\overline{MN} = \frac{2m^2}{2}$$

$$\overline{MN} = m^2$$

Assim pode-se determinar a área dos triângulos ENM e PNM.

A área do triângulo ENM é dada pela fórmula:

$$\acute{A}rea \triangle ENM = \frac{base \times altura}{2}$$

$$\acute{A}rea \triangle ENM = \frac{m \times m^2}{2}$$

A área do triângulo PNM é dada pela fórmula:

$$\acute{A}rea \triangle PNM = \frac{base \times altura}{2}$$

$$\acute{A}rea \triangle PNM = \frac{m \times m^2}{2}$$

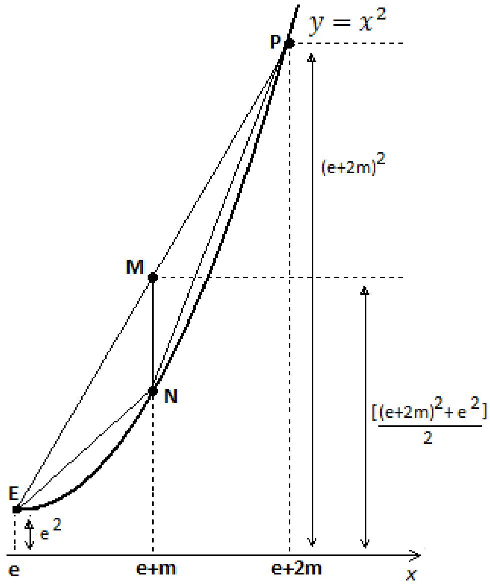

Figura 4.13: Quadratura da Parábola II
Fonte: Figura elaborada pela autora *(Software Winplot)*

Observe na figura 4.13 acima que com base nos triângulos ENM e PNM, pode-se obter um triângulo maior sendo este o triângulo ENP, cuja área é a soma das áreas dos dois triângulos ENM e PNM menores. Então a área do triângulo maior ENP será:

$$\acute{A}rea \triangle ENP = \frac{m \times m^2}{2} + \frac{m \times m^2}{2}$$

$$\acute{A}rea \triangle ENP = \frac{m^3}{2} + \frac{m^3}{2}$$

$$\acute{A}rea \triangle ENP = \frac{2m^3}{2}$$

$$\acute{A}rea \triangle ENP = m^3$$

Partindo deste triângulo maior ENP, pode-se determinar a área do segmento parabólico. Para facilitar os cálculos vamos supor E coincidindo com a origem do sistema de coordenadas. Assim $e = 0$. Tome como sendo b a abscissa do ponto P e portanto $m = \dfrac{b}{2}$.

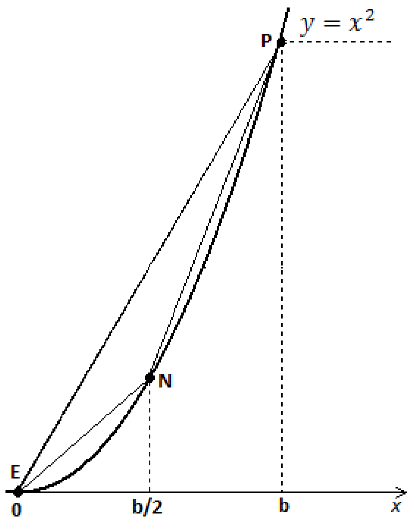

Figura 4.14: Quadratura da Parábola III
Fonte: Figura elaborada pela autora *(Software Winplot)*

Logo, a área T do triângulo ENP é:

$$\acute{A}rea \triangle ENP = m^3$$
$$\acute{A}rea \triangle ENP = (\frac{b}{2})^3 = \frac{b^3}{8}$$

é uma aproximação para o segmento parabólico.

Para melhorar esta aproximação, Arquimedes decidiu acrescentar dois novos triângulos conforme o exemplo da imagem abaixo:

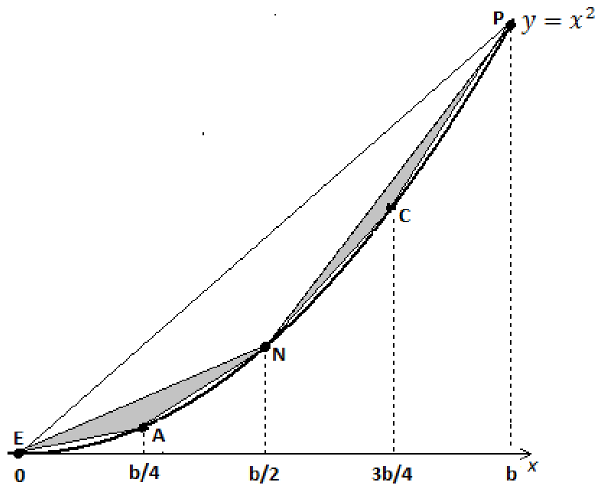

Figura 4.15: Quadratura da Parábola IV
Fonte: Figura elaborada pela autora *(Software Winplot)*

Observe na figura 4.15 que a partir dos pontos A e C foram criados dois novos triângulos, o triângulo $\triangle EAN$ e o triângulo $\triangle PCN$, em que a soma de suas áreas será de $\frac{1}{4}$ da área do

$\triangle ENP$, ou seja,

$$\acute{A}rea \triangle EAN + \acute{A}rea \triangle PCN = \frac{1}{4} \times \frac{b^3}{8} = \frac{b^3}{32}$$

Prova desse resultado:

Vamos calcular a área dos triângulos EAN e PCN, com base nas áreas dos triângulos e trapézios que podem ser observados na figura anterior.

Primeiro determinamos a $\acute{A}rea \triangle EAN$:

I) Área do Triângulo Maior

$$\acute{A}rea \triangle Maior = \frac{base \times altura}{2} = \frac{(\frac{b}{2})(\frac{b}{2})^2}{2} = \frac{(\frac{b}{2})\frac{b^2}{4}}{2} = \frac{b^3}{16}$$

II) Área do Triângulo Menor

$$\acute{A}rea \triangle Menor = \frac{(\frac{b}{4})(\frac{b}{4})^2}{2} = \frac{(\frac{b}{4})\frac{b^2}{16}}{2} = \frac{b^3}{128}$$

III) Área do Trapézio

$$\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio)} = \frac{(B+b) \times h}{2} = \frac{[(\frac{b}{4})^2 + (\frac{b}{2})^2] \times \frac{b}{4}}{2} = \frac{(\frac{b^2}{16} + \frac{b^2}{4}) \times \frac{b}{4}}{2} = \frac{(\frac{b^2 + 4b^2}{16}) \times \frac{b}{4}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{5b^3}{64}}{\frac{2}{1}} = \frac{5b^3}{128}$$

Logo,

$$\acute{A}rea \triangle EAN = (\acute{A}rea \triangle Maior) - (\acute{A}rea \triangle Menor) - (\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio)})$$

$$\acute{A}rea \triangle EAN = \frac{b^3}{16} - \frac{b^3}{128} - \frac{5b^3}{128}$$

$$\acute{A}rea \triangle EAN = \frac{8b^3 - 6b^3}{128} = \frac{2b^3}{128} = \frac{b^3}{64}$$

Portanto,

$$\acute{A}rea \triangle EAN = \frac{b^3}{64}$$

Determinando a $\acute{A}rea \triangle PCN$. Considerando as áreas dos trapézios, temos:

I) Área do Trapézio Maior

$$\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-Maior)} = \frac{[(\frac{b}{2})^2 + b^2] \times \frac{b}{2}}{2} = \frac{(\frac{b^2}{4} + \frac{4b^2}{4}) \times \frac{b}{2}}{2} = \frac{(\frac{5b^2}{4})\frac{b}{2}}{2} = \frac{5b^3}{16}$$

II) Área do Trapézio Médio

$$\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-M\acute{e}dio)} = \frac{[(\frac{3b}{4})^2 + b^2] \times \frac{b}{4}}{2} = \frac{[\frac{9b^2}{16} + \frac{16b^2}{16}] \times \frac{b}{4}}{2} = \frac{(\frac{25b^2}{16})\frac{b}{4}}{2} = \frac{25b^3}{128}$$

III) Área do Trapézio Pequeno

$$\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-Pequeno)} = \frac{[(\frac{b}{2})^2 + (\frac{3b}{4})^2] \times \frac{b}{4}}{2} = \frac{(\frac{b^2}{4} + \frac{9b^2}{16}) \times \frac{b}{4}}{2} = \frac{(\frac{13b^2}{16})\frac{b}{4}}{2} = \frac{13b^3}{128}$$

Logo,

$$\acute{A}rea \triangle PCN = (\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-Maior)}) - (\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-M\acute{e}dio)}) - (\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-Pequeno)})$$

$$\acute{A}rea \triangle PCN = \frac{5b^3}{16} - \frac{25b^3}{128} - \frac{13b^3}{128} = \frac{40b^3 - 38b^3}{128} = \frac{2b^3}{128} = \frac{b^3}{64}$$

Portanto,

$$\acute{A}rea \triangle PCN = \frac{b^3}{64}$$

Assim, mostramos que:

$$\acute{A}rea \triangle EAN + \acute{A}rea \triangle PCN = \frac{b^3}{64} + \frac{b^3}{64} = \frac{2b^3}{64} = \frac{b^3}{32}$$

$$\acute{A}rea \triangle EAN + \acute{A}rea \triangle PCN = \frac{b^3}{32}$$

Logo, a soma das áreas dos novos triângulos é $\frac{b^3}{32}$. Assim, se fizermos a divisão do intervalo $[0, b]$ agora em 8 partes, e se realizar uma nova soma à partir das áreas dos novos triângulos obtidos, com base na área de $\frac{b^3}{32}$ dos triângulos anteriores, então essa soma será $\frac{b^3}{128}$.

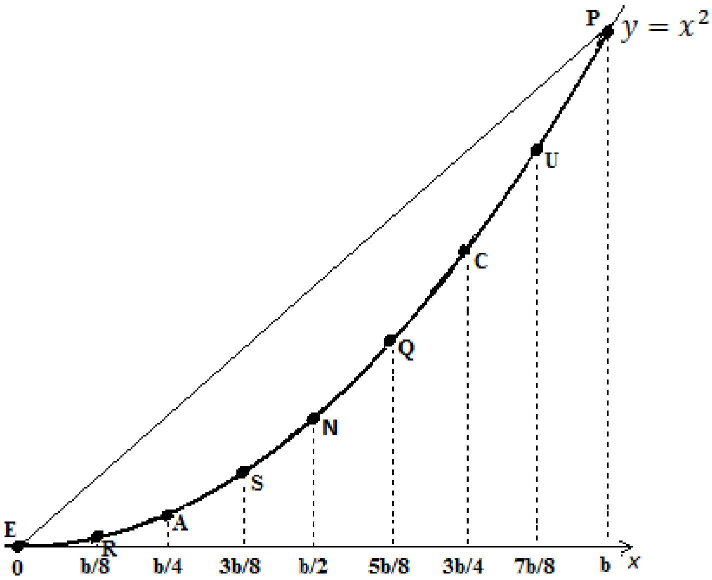

Figura 4.16: Quadratura da Parábola V
Fonte: Figura elaborada pela autora *(Software Winplot)*

$$\acute{A}rea \triangle ERA + \acute{A}rea \triangle ASN + \acute{A}rea \triangle NQC + \acute{A}rea \triangle CUP = \frac{b^3}{128}$$

Prova desse resultado:
Calculando a $\acute{A}rea \triangle ERA$:
I) Área do Triângulo Maior

$$\acute{A}rea \triangle Maior = \frac{base \times altura}{2} = \frac{(\frac{b}{4})(\frac{b}{4})^2}{2} = \frac{(\frac{b}{4})\frac{b^2}{16}}{2} = \frac{b^3}{128}$$

II) Área do Triângulo Menor

$$\acute{A}rea \triangle Menor = \frac{(\frac{b}{8})(\frac{b}{8})^2}{2} = \frac{(\frac{b}{8})\frac{b^2}{64}}{2} = \frac{b^3}{1024}$$

III) Área do Trapézio

$$\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio)} = \frac{(B+b) \times h}{2} = \frac{[(\frac{b}{8})^2 + (\frac{b}{4})^2] \times \frac{b}{8}}{2} = \frac{(\frac{b^2}{64} + \frac{b^2}{16}) \times \frac{b}{8}}{2} = \frac{(\frac{b^2 + 4b^2}{64}) \times \frac{b}{8}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{5b^3}{512}}{\frac{2}{1}} = \frac{5b^3}{1024}$$

Logo,

$$\acute{A}rea \triangle ERA = (\acute{A}rea \triangle Maior) - (\acute{A}rea \triangle Menor) - (\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio)})$$

$$\acute{A}rea \triangle ERA = \frac{b^3}{128} - \frac{b^3}{1024} - \frac{5b^3}{1024}$$

$$\acute{A}rea \triangle ERA = \frac{8b^3 - 6b^3}{1024} = \frac{2b^3}{1024} = \frac{b^3}{512}$$

Portanto,

$$\acute{A}rea \triangle ERA = \frac{b^3}{512}$$

Calculando a $\acute{A}rea \triangle ASN$. Considerando as áreas dos trapézios, temos:

I) Área do Trapézio Maior

$$\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-Maior)} = \frac{[(\frac{b}{4})^2 + (\frac{b}{2})^2] \times \frac{b}{4}}{2} = \frac{(\frac{b^2}{16} + \frac{b^2}{4}) \times \frac{b}{4}}{2} = \frac{(\frac{5b^2}{16})\frac{b}{4}}{2} = \frac{5b^3}{128}$$

II) Área do Trapézio Médio

$$\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-M\acute{e}dio)} = \frac{[(\frac{3b}{8})^2 + (\frac{b}{2})^2] \times \frac{b}{8}}{2} = \frac{(\frac{9b^2}{64} + \frac{b^2}{4}) \times \frac{b}{8}}{2} = \frac{(\frac{25b^2}{64})\frac{b}{8}}{2} = \frac{25b^3}{1024}$$

III) Área do Trapézio Pequeno

$$\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-Pequeno)} = \frac{[(\frac{b}{4})^2 + (\frac{3b}{8})^2] \times \frac{b}{8}}{2} = \frac{(\frac{b^2}{16} + \frac{9b^2}{64}) \times \frac{b}{8}}{2} = \frac{(\frac{13b^2}{64})\frac{b}{8}}{2} = \frac{13b^3}{1024}$$

Logo,

$$\acute{A}rea \triangle ASN = (\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-Maior)}) - (\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-M\acute{e}dio)}) - (\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-Pequeno)})$$

$$\acute{A}rea \triangle ASN = \frac{5b^3}{128} - \frac{25b^3}{1024} - \frac{13b^3}{1024} = \frac{40b^3 - 38b^3}{1024} = \frac{2b^3}{1024} = \frac{b^3}{512}$$

Portanto,

$$\acute{A}rea \triangle ASN = \frac{b^3}{512}$$

Calculando a $\acute{A}rea \triangle NQP$:

I) Área do Trapézio Maior

$$\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-Maior)} = \frac{[(\frac{b}{2})^2 + (\frac{3b}{4})^2] \times \frac{b}{4}}{2} = \frac{(\frac{b^2}{4} + \frac{9b^2}{16}) \times \frac{b}{4}}{2} = \frac{(\frac{13b^2}{16})\frac{b}{4}}{2} = \frac{13b^3}{128}$$

II) Área do Trapézio Médio

$$\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-M\acute{e}dio)} = \frac{[(\frac{5b}{8})^2 + (\frac{3b}{4})^2] \times \frac{b}{8}}{2} = \frac{(\frac{25b^2}{64} + \frac{9b^2}{16}) \times \frac{b}{8}}{2} = \frac{(\frac{61b^2}{64})\frac{b}{8}}{2} = \frac{61b^3}{1024}$$

III) Área do Trapézio Pequeno

$$\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-Pequeno)} = \frac{[(\frac{b}{2})^2 + (\frac{5b}{8})^2] \times \frac{b}{8}}{2} = \frac{(\frac{b^2}{4} + \frac{25b^2}{64}) \times \frac{b}{8}}{2} = \frac{(\frac{41b^2}{64})\frac{b}{8}}{2} = \frac{41b^3}{1024}$$

Logo,

$$\acute{A}rea \triangle NQP = (\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-Maior)}) - (\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-M\acute{e}dio)}) - (\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-Pequeno)})$$

$$\acute{A}rea \triangle NQP = \frac{13b^3}{128} - \frac{61b^3}{1024} - \frac{41b^3}{1024} = \frac{104b^3 - 102b^3}{1024} = \frac{2b^3}{1024} = \frac{b^3}{512}$$

Portanto,

$$\acute{A}rea \triangle NQP = \frac{b^3}{512}$$

Calculando a $\acute{A}rea \triangle CUP$:

I) Área do Trapézio Maior

$$\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-Maior)} = \frac{[(\frac{3b}{4})^2 + b^2] \times \frac{b}{4}}{2} = \frac{(\frac{9b^2}{16} + b^2) \times \frac{b}{4}}{2} = \frac{(\frac{25b^2}{16})\frac{b}{4}}{2} = \frac{25b^3}{128}$$

II) Área do Trapézio Médio

$$\acute{A}rea_{(Trap\acute{e}zio-M\acute{e}dio)} = \frac{[(\frac{7b}{8})^2 + b^2] \times \frac{b}{8}}{2} = \frac{(\frac{49b^2}{64} + \frac{64b^2}{64}) \times \frac{b}{8}}{2} = \frac{(\frac{113b^2}{64})\frac{b}{8}}{2} = \frac{113b^3}{1024}$$

III) Área do Trapézio Pequeno

$$Área_{(Trapézio-Pequeno)} = \frac{[(\frac{3b}{4})^2 + (\frac{7b}{8})^2] \times \frac{b}{8}}{2} = \frac{(\frac{9b^2}{16} + \frac{49b^2}{64}) \times \frac{b}{8}}{2} = \frac{(\frac{85b^2}{64}) \times \frac{b}{8}}{2} = \frac{85b^3}{1024}$$

Logo,

$$Área \triangle CUP = (Área_{(Trapézio-Maior)}) - (Área_{(Trapézio-Médio)}) - (Área_{(Trapézio-Pequeno)})$$

$$Área \triangle CUP = \frac{25b^3}{128} - \frac{113b^3}{1024} - \frac{85b^3}{1024} = \frac{200b^3 - 198b^3}{1024} = \frac{2b^3}{1024} = \frac{b^3}{512}$$

Portanto,

$$Área \triangle CUP = \frac{b^3}{512}$$

Assim, mostramos que:

$$Área \triangle ERA + Área \triangle ASN + Área \triangle NQC + Área \triangle CUP =$$

$$= \frac{b^3}{512} + \frac{b^3}{512} + \frac{b^3}{512} + \frac{b^3}{512} = \frac{4b^3}{512} = \frac{b^3}{128}$$

$$Área \triangle ERA + Área \triangle ASN + Área \triangle NQC + Área \triangle CUP = \frac{b^3}{128}$$

Há então uma relação entre a área do triângulo inicial, com a área dos novos triângulos obtidos sendo esta $\frac{1}{4}$, o que se estabelece uma terceira aproximação. Como a área do primeiro triângulo $\triangle ENP = \frac{b^3}{8} = T$ na primeira aproximação, na segunda aproximação em relação a T e as áreas dos triângulos $\triangle EAN$ e $\triangle PCN$, tem-se:

$$T + \frac{T}{4} = T(1 + \frac{1}{4})$$

Já na terceira aproximação, temos

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} = T(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2})$$

E a cada novos triângulos, considerando o raciocínio acima, é razoável esperar que a fórmula para o cálculo de tal área seja:

$$\acute{A}rea_{(Segmento-Parab\acute{o}lico)} = T(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots)$$

que será uma progressão geométrica infinita, com o primeiro termo sendo 1 e razão $\frac{1}{4}$, cuja soma dessa progressão será $\frac{4}{3}$. Mas por não trabalhar com limites infinitos, Arquimedes por meio de uma balança verificou que o peso do segmento parabólico era $\frac{4}{3}$ do triângulo $\triangle ENP$, admitiu então que a área do segmento de parábola seria $\frac{4}{3}T$, e provou por uma dupla dedução ao absurdo.

$$\acute{A}rea_{(Segmento-Parab\acute{o}lico)} = \frac{4}{3}T$$

Seguindo esse raciocínio,

$$1 = \frac{4}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{4}{4^2} = \cdots$$

ou seja,

$$1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \cdots + \frac{3}{4^n} + \frac{1}{4^n}$$

Somando 3 nos dois membros da igualdade, temos:

$$3 + 1 = 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \cdots + \frac{3}{4^n} + \frac{1}{4^n}$$

$$4 = 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \cdots + \frac{3}{4^n} + \frac{1}{4^n}$$

Dividindo ambos os membros por 3

$$\frac{4}{3} = \frac{3}{3} + \frac{(\frac{3}{4})}{3} + \frac{(\frac{3}{4^2})}{3} + \frac{(\frac{3}{4^3})}{3} + \cdots + \frac{(\frac{3}{4^n})}{3} + \frac{(\frac{1}{4^n})}{3}$$

$$\frac{4}{3} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3 \times 4^n}$$

Multiplicando ambos os membros por T, obtemos:

$$\frac{4}{3}T = T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \frac{T}{4^3} + \cdots + \frac{T}{4^n} + \frac{T}{3 \times 4^n}.$$

Chamando a Área do segmento Parabólico ENP de A, para provar que $A = \frac{4}{3}T$, deve-se mostrar que para isso A não pode ser nem maior nem menor do que $\frac{4}{3}T$.

Provando primeiro que $A < \frac{4}{3}T$. Suponha,

$$0 < \frac{4}{3}T - A \Longrightarrow \frac{4}{3}T - A > 0$$

Pelo Teorema 4.2 de Arquimedes, existe um n pertencente aos naturais $\mathbb{N}$, tal que

$$3.4^n(\frac{4}{3}T - A) > T \Longrightarrow \frac{4}{3}T - A > \frac{T}{3.4^n} \Longrightarrow \frac{4}{3}T - \frac{T}{3.4^n} > A$$

Logo,

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \frac{T}{4^3} + \cdots + \frac{T}{4^n} > A$$

que não é verdade em relação a n pois,

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \frac{T}{4^3} + \cdots + \frac{T}{4^n} < A$$

a soma das áreas dos triângulos é menor do que a área do segmento parabólico.

Portanto $A < \frac{4}{3}T$ não satisfaz.

Provando agora que $A > \frac{4}{3}T$, com base nas propriedades abaixo.

> (1)"Dadas duas grandezas distintas, se da maior subtrai-se mais que sua metade, do restante mais que sua metade, e assim por diante, acabará restando uma grandeza menor do que a menor das grandezas dadas." (GUIDORIZZI, 2008a) [pág. 495]
> (2)"A reta tangente à parábola $f(x) = x^2$ no ponto de abscissa $e + m$ é paralela à corda de extremidades (e, e^2) e $(e + 2m, (e + 2m)^2)$." (GUIDORIZZI, 2008a) [pág. 495]

Suponha que,

$$A - (T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \frac{T}{4^3} + \cdots + \frac{T}{4^n}) < A - \frac{4}{3}T$$

Então,

$$A - (T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \frac{T}{4^3} + \cdots + \frac{T}{4^n}) < A - (T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \cdots + \frac{T}{4^n} + \frac{T}{3 \times 4^n})$$

Mas isso nos leva a uma contradição, pois

$$T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \frac{T}{4^3} + \cdots + \frac{T}{4^n} > T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \cdots + \frac{T}{4^n} + \frac{T}{3 \times 4^n}.$$

Assim $A > \frac{4}{3}T$ não satisfaz.

Portanto Arquimedes conclui que a Área do segmento de Parábola é exatamente igual a $\frac{4}{3}T$ (quatro terços da área do triângulo ENP).

$$\acute{A}rea_{(Segmento-Parab\acute{o}lico)} = \frac{4}{3}T$$

(GUIDORIZZI, 2008a) [pág. 491-496]

Na atualidade estes cálculos podem ser feitos simplesmente pelo cálculo integral.

Exemplo 4.2 *Utilizando o software Maple:*

Pelos comandos a seguir, é possível plotar no software Maple o gráfico da parábola $f(x) = x^2$ e a reta $f(x) = x + 2$.

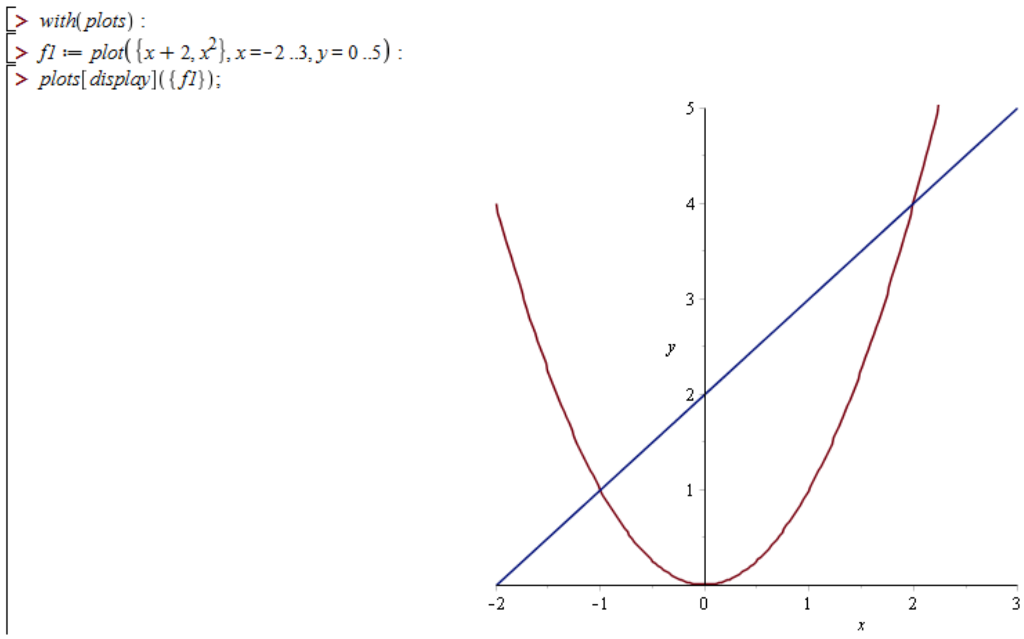

Figura 4.17: Exemplo 4.1 (I)
Fonte: Figura elaborada pela autora *(Software Maple)*

O cálculo da integral

$$\int_{-1}^{2} x + 2 - x^2 dx$$

é feito pelos comandos:

Figura 4.18: Exemplo 4.1 (II)
Fonte: Figura elaborada pela autora *(Software Maple)*

obtemos então que:

$$\int_{-1}^{2} x + 2 - x^2 dx = \frac{9}{2} = 4.5$$

Através dos pontos $A : [-1, 1]$, $B : [0.5, 0.25]$ ($x = 0.5$ é o ponto médio do segmento), e $C : [2, 4]$ forma-se um triângulo.

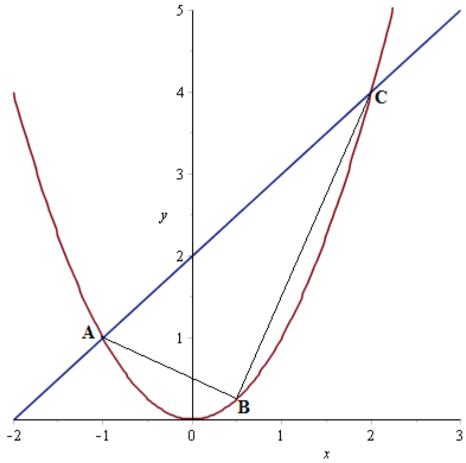

Figura 4.19: Exemplo 4.1 (III)
Fonte: Figura elaborada pela autora *(Software Maple)*

Para determinar a área desse triângulo, precisamos saber a medida de seus lados e para isso, basta calcular a distância entre dois pontos. Por exemplo, a distância entre os pontos $A : [x1, y1]$ e $B : [x2, y2]$ é calculada pela fórmula

$$\overline{AB} = \sqrt{(x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2}$$

No Maple, calculamos a distância entre os pontos A, B e C para determinar os lados $l1, l2$ e $l3$, sendo $l1$ a distância entre A e B, $l2$ a distância entre B e C e $l3$ a distância entre A e C.

$> l1 := \mathrm{sqrt}\left(\left(-1-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{1}{4}\right)^2\right);$

$$l1 := \frac{3}{4}\sqrt{5}$$

$> l2 := \mathrm{sqrt}\left(\left(\frac{1}{2}-2\right)^2 + \left(\frac{1}{4}-4\right)^2\right);$

$$l2 := \frac{3}{4}\sqrt{29}$$

$> l3 := \mathrm{sqrt}\left((-1-2)^2 + (1-4)^2\right);$

$$l3 := 3\sqrt{2}$$

Figura 4.20: Exemplo 4.1 (IV)
Fonte: Figura elaborada pela autora *(Software Maple)*

Na sequência, para utilizar a fórmula de Heron é necessário calcular o valor do semiperímetro p, para poder determinar a área do triângulo em relação a medida dos seus lados.

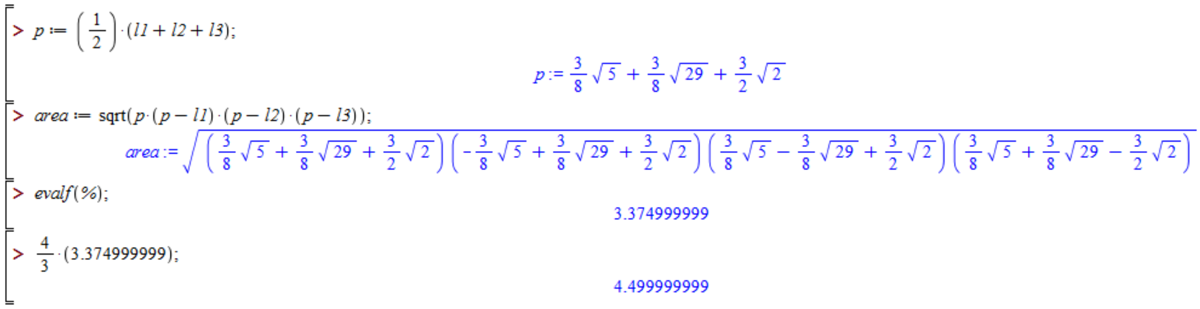

Figura 4.21: Exemplo 4.1 (V)
Fonte: Figura elaborada pela autora *(Software Maple)*

Observe que determinamos a área de 3.374999999, e na sequência multiplicamos esse valor por $\frac{4}{3}$ encontrando a área do segmento parabólico, sendo $4.499999999 \cong 4.5$. (MARIANI, 2005)

Exemplo 4.3 *Pela definição da Quadratura da Parábola, determinar a área do segmento de parábola obtida pela função $f(x) = x^2$ com $x = \pm 2$ e pela reta $y = 4$.*

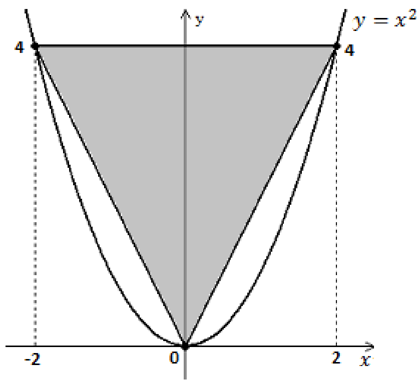

Figura 4.22: Exemplo 4.2
Fonte: Figura elaborada pela autora *(Software Winplot)*

Temos que a área do segmento de Parábola é dada por:

$$\acute{A}rea_{(Segmento-Parab\acute{o}lico)} = \frac{4}{3} \times \acute{A}rea_{(Tri\hat{a}ngulo)}$$

Primeiro vamos encontrar a área do triângulo. De acordo com a figura temos que a base do triângulo é de $4cm$, e sua altura $4cm$ de comprimento. Então a área do triângulo é:

$$\acute{A}rea_{(tri\hat{a}ngulo)} = \frac{4 \times 4}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\acute{A}rea_{(tri\hat{a}ngulo)} = 8$$

Agora, substituindo o valor da área do triângulo para determinar a área do segmento da parábola,

$$Área_{(Segmento-Parabólico)} = \frac{4}{3} \times Área_{(Triângulo)} = \frac{4}{3} \times 8 = \frac{32}{3}$$

$$Área_{(Segmento-Parabólico)} = \frac{32}{3}$$

Portanto a área do segmento de parábola obtida pela função $f(x) = x^2$ com $x = \pm 2$ e pela reta $y = 4$ é de $\frac{32}{3}$.

CAPÍTULO

5

Bonaventura Cavalieri

Figura 5.1: Bonaventura Cavalieri
Fonte: *site "Wikipedia"*

Nasceu na cidade de Milão na Itália no ano de 1598 e recebeu o nome de Francesco Cavalieri. No ano de 1615 entrou para a religião Jesuatas, onde passou a assumir o nome de Bonaventura Cavalieri. Foi um matemático, estudou trigonometria esférica, astronomia e cálculo logarítmico, e é considerado um dos anunciantes do cálculo integral. Em 1616 na cidade de Pisa na Itália, estudou teologia e filosofia, foi também nesta cidade que Cavalieri conheceu Beneditto Castelli 1578-1643 (https://pt.wikipedia.org/wiki/Benedetto-Castelli) matemático italiano, que o colocou no campo da geometria. Tornou-se discípulo de Galileu Galilei 1564-1642 (https://pt.wikipedia.org/wiki/Galileu-Galilei) físico, matemático, astrônomo e filósofo, que o apresentou de vez a matemática. Em 1629 foi nomeado a ocupar uma cadeira da matemática na cidade de Bolonha na Itália após fazer uma grande descoberta para a matemática, ele já havia se candidatado a ocupar esta cadeira anos antes. (EVES, 2011)

Cavalieri publicou o seu livro *Nova Geometria dos Indivisíveis Contínuos* no ano de 1635, no qual destaca o método dos indivisíveis, sua grande descoberta, o qual revolucionou anos depois a geometria e o cálculo integral. Publicou outras obras, sobre os seus estudos e descobrimentos matemáticos, mas ficou mais conhecido por desenvolver o método dos indivisíveis. Na atualidade Bonaventura Cavalieri é muito conhecido pelo *Princípio de Cavalieri*, método criado por ele para determinar área e volume dos sólidos. Em 1647 Cavalieri veio a falecer na cidade de Bolonha, Itália. (EVES, 2011)

5.1 Método dos Indivisíveis

O conceito dos Indivisíveis foi trabalhado e estudado por matemáticos que estavam na busca de defini-lo ao longo dos anos, como Arquimedes, Apollonnius 262-190 a.C. (https://en.wikipedia.org/wiki/Apollonius) e Pappus 300 d.C (https://en.wikipedia.org/wiki/Pappus-of-Alexandria), que tiveram as primeiras noções do que seriam os indivisíveis. As ideias obtidas por eles, sofreram modificações por volta dos séculos XVI e XVII, quando Johannes Kepler 1571-1630 (https://pt.wikipedia.org/wiki/Johannes-Kepler), Galileu Galilei e Bonaventura Cavalieri, vieram a estudar este conceito buscando compreendê-lo, para que o mesmo tivesse uma definição concreta. (PINTO, 2008)

Segundo a história, o primeiro a ter tido noções mais corretas sobre os indivisíveis foi Kepler, que utilizou de processos da integração, partindo do método da exaustão, e números infinitesimais. (EVES, 2011). Galileu também desenvolveu diversos estudos sobre este assunto por alguns anos, se aproximou muito do que seria, e para ele a matéria era composta de finitas partes, essas indivisíveis que deveriam conter infinitesimais. Galileu utilizou para suas abordagens a ideia de que o contínuo (segmento de reta) contém uma infinidade de indivisíveis, mas nunca concluiu suas abordagens sobre este conceito. (PINTO, 2008)

Ao se tornar aprendiz de Galileu, Cavalieri passou a estudar os indivisíveis apresentados por Galileu, e trabalhou este conceito geometricamente. Bonaventura Cavalieri foi o primeiro a ter definido os indivisíveis e destacou sua descoberta no livro publicado em 1635, *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova*. Ele partiu da ideia de Kepler sobre os indivisíveis, e chegou ao seu método de maneira geométrica utilizando conceitos de linhas e planos, utilizou destes termos para se referir ao seus indivisíveis em suas obras, que segundo Cavalieri era basicamente: *"todas as linhas da superfície ou todos os planos de um sólido"*. (REVISTA, 2012)

Ao obter sua teoria, Cavalieri escreveu e enviou uma carta a seu mestre Galileu Galilei como forma de agradecimento, contendo um pouco do que seria o seu método, um trecho famoso da carta de Cavalieri a Galileu que explica um pouco dos resultados obtidos por ele é:

> "Não afirmei que o continuum é composto de indivisíveis, mas mostrei que entre o continuum existe a mesma proporção que entre a coleção de indivisíveis, sob a condição de os tornar paralelos, quando falamos de linhas retas e de superfícies planas,

> que são os indivisíveis particulares que considerei." [Carta enviada a Galileu por seu discípulo Cavalieri] (ALEXANDER, 2016)

Na época em que Cavalieri apresentou seu método sobre os indivisíveis no livro *Nova Geometria dos Indivisíveis Contínuos*, ele sofreu muitas críticas por ter trabalhado este conceito com a geometria, muitos diziam não ser válido, porém Cavalieri apresentou sua teoria de maneira mais clara e a defendeu na obra: *Exercitationes geometricae sex*, publicada no ano de 1647. (ALEXANDER, 2016)

O historiador Howard Whitley Eves 1911-2004 (https://pt.wikipedia.org/wiki/Howard-Eves), disse a respeito dos indivisíveis de Cavalieri em uma de suas obras:

> "O tratado de Cavalieri é longo demais e pouco claro, sendo difícil até descobrir o que ele entendia por indivisível. Tudo indica que um indivisível de uma porção plana dada é uma corda dessa porção, e um indivisível de um sólido dado é uma secção desse sólido. Considera-se que uma porção plana seja formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seja formado por uma infinidade de secções planas paralelas". (EVES, 2011)

O método dos indivisíveis de Bonaventura Cavalieri será melhor explicado à partir do Teorema de Cavalieri na seção seguinte, pois foi com este princípio que Cavalieri definiu os indivisíveis.

5.2 O princípio de Cavalieri

Bonaventura Cavalieri, à partir de observações entre o volume e a área dos sólidos de formatos diferentes entre si, chegou ao que chamamos de Princípio de Cavalieri, que tem como base o seu *método dos indivisíveis*. (EVES, 2011). Este princípio segundo a história já havia sido utilizado de maneiras semelhantes em estudos realizados sobre volume por Arquimedes, que dizia que Demócrito 460a.C à 370a.C (https://pt.wikipedia.org/wiki/Demócrito) e Eudoxo também o teriam utilizado anos antes, em estudos para o volume. (APOSTOL, 2013)

O princípio de Cavalieri, normalmente adotado como postulado (fato reconhecido e ponto de partida) nos textos para ensino da Matemática Elementar, é, na verdade um teorema. (EVES, 2011). Cavalieri ao observar os sólidos, chegou então à conclusão de que dois sólidos que possuam a mesma área da base e alturas iguais, estes estando contidos em um mesmo plano α possuem o mesmo volume, mesmo que um dos sólidos sofra alguma alteração, desde que, este continue tendo a mesma área da base e altura.

Observou também que qualquer plano β paralelo ao plano original α, que corte ambos os sólidos, estes continuarão tendo as áreas e volumes iguais. O princípio de Cavalieri é então utilizado como base tanto para o cálculo da área das regiões planas como para o volume dos sólidos. (MACHADO, 1988). As demonstrações dos dois princípios de Cavalieri constituem uma aplicação direta da teoria de integração de funções reais.

5.2.1 Teorema de Cavalieri para áreas

Sejam R e S regiões limitadas de um plano, e seja r uma reta desse plano. Suponha que, para toda reta s paralela a r, as interseções de R e S com s sejam vazias ou segmentos tais que a razão entre seus comprimentos é constante. Então a razão entre as áreas R e S é essa constante. (PATERLINI, 2010)

Consideremos em um plano um sistema de coordenadas cartesianas Oxy, e seja R a região delimitada por $x = a$ e $x = b$ e pelos gráficos das funções contínuas $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$, com $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$ para todo x pertencente ao intervalo $[a, b]$.

Seja S a região delimitada por $a \leq x \leq b$ e pelos gráficos das funções contínuas $y = g_1(x)$ e $y = g_2(x)$, com $0 \leq g_1(x) \leq g_2(x)$ para todo x pertencente ao intervalo $[a, b]$. Suponhamos que exista uma constante $k > 0$ tal que $f_2(x) - f_1(x) = k[g_2(x) - g_1(x)]$ para todo x pertencente a $[a, b]$. Então $a(R) = k[a(S)]$.

Demonstração:

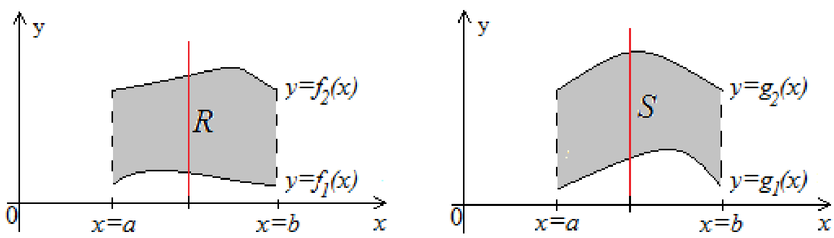

Figura 5.2: Princípio de Cavalieri para áreas
Fonte: Figura elaborada pela autora

Da teoria de integração de funções reais temos:

$$a(R) = \int\int_R dydx = \int_a^b [\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} 1dy]dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx = \int_a^b k[g_2(x) - g_1(x)]dx =$$

$$= k\int_a^b [g_2(x) - g_1(x)]dx = k\int_a^b [\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} 1dy]dx = k\int\int_S dydx = k[a(S)]$$

Portanto:

$$a(R) = k[a(S)] \qquad \blacksquare$$

(PATERLINI, 2010)

Exemplo 5.1 *Área da Elipse: a área da região elíptica de semieixos a e b é πab.*

Demonstração:

Suponhamos $a \geq b > 0$, e consideremos em um sistema $0xy$, a região semielíptica E dada por $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$ e $y \geq 0$.

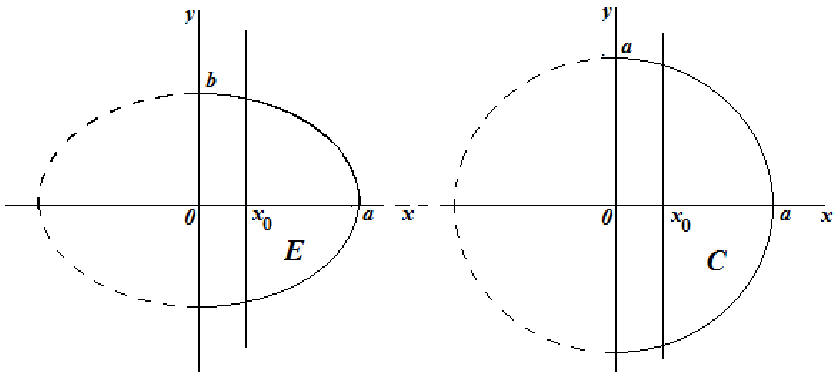

Figura 5.3: Área da Elipse
Fonte: Figura elaborada pela autora

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \Longrightarrow \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2} \Longrightarrow y^2 \leq b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$$

$$y \leq \pm\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} \Longrightarrow y \leq \pm\sqrt{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})}$$

Assim podemos definir

$$f_1(x) = -b\sqrt{(1 - \frac{x^2}{a^2})}$$

$$f_2(x) = b\sqrt{(1 - \frac{x^2}{a^2})}$$

com $0 \leq x \leq a$.

Temos que a equação da circunferência é

$$x^2 + y^2 = r^2$$

como r é o raio da circunferência, logo $r = a$. Assim temos:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Considerando a semicircunferência S, teremos que $x^2 + y^2 \leq a^2$ e $y \geq 0$. Logo

$$x^2 + y^2 \leq a^2 \Longrightarrow y^2 \leq a^2 - x^2 \Longrightarrow y \leq \pm\sqrt{a^2 - x^2}$$

Assim, definimos que:

$$g_1(x) = -\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$g_2(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$g_2(x) - g_1(x) = \sqrt{a^2 - x^2} + \sqrt{a^2 - x^2} = 2\sqrt{a^2 - x^2}$$

Então,

$$f_2(x) - f_1(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = 2b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} =$$

$$= 2b\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} = 2\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{b}{a}(2\sqrt{a^2 - x^2}) = \frac{b}{a}[g_2(x) - g_1(x)]$$

Aplicando o princípio de Cavalieri, temos uma constante $k = \dfrac{b}{a}$.

$$f_2(x) - f_1(x) = k[g_2(x) - g_1(x)]$$

Sendo r a reta $x = 0$, com isso temos que

$$a(E) = \frac{b}{a}a(C) = \frac{b}{a}\frac{\pi a^2}{2} = \frac{\pi ab}{2}$$

sendo essa a área da região semielíptica. Duplicando,

$$2(\frac{\pi ab}{2}) = \pi ab$$

segue o resultado da área da região elíptica. ■

(PATERLINI, 2010), (EVES, 2011) [pág. 425-428]

CAPÍTULO 6

Blaise Pascal

Figura 6.1: Blaise Pascal
Fonte: *site "Science Photo Library"*

Blaise Pascal nasceu na França no continente Europeu em uma cidade chamada Clermont-Ferrand, no dia 19 de junho de 1623. Pascal perdeu a mãe ainda criança sendo criado e educado pelo pai, um matemático chamado Étienne Pascal (https://en.wikipedia.org/wiki/Étienne-Pascal) que o ensinou sobre diversas áreas do conhecimento. Pascal foi um matemático, físico, inventor, filósofo e teólogo, desde criança já era tido como prodígio. Como inventor, é conhecido por ter criado a primeira máquina de calcular ainda com 19 anos de idade. Ainda em sua juventude, Blaise Pascal realizou muitos feitos importantes. (EVES, 2011)

Por se destacar na área da física ainda criança, acabou sendo levado a se dedicar à matemática, onde resolveu proposições, deu início e juntamente com Pierre de Fermat estabeleceram conceitos bases da análise combinatória e o cálculo de probabilidades no século XVIII, desenvolveu o Teorema de Pascal o qual foi publicado no ano de 1640 em seu livro sobre cônicas *Essay pour les coniques*, estudou também sobre o cálculo infinitesimal, desenvolveu trabalhos com o conhecido Triângulo Aritmético, e deu origem a geometria projetiva. Na física, Pascal ficou muito conhecido por definir e esclarece o conceito de vácuo e variações da pressão atmosférica. Blaise Pascal, após passar por alguns acontecimentos familiares decidiu abandonar a matemática e a física passando a se dedicar à filosofia e a teologia no ano de 1954. Pascal morreu em 19 de agosto do ano 1662, ainda jovem com apenas 39 anos de idade. (EVES, 2011) [pág. 361-366], (BOYER, 1996) [pág. 249-250]

6.1 Os indivisíveis em Pascal

Por volta dos anos de 1658 à 1659, Pascal decidiu retomar seus estudos sobre a Teoria dos Indivisíveis de Cavalieri na qual ele havia começado a estudar em 1654. Blaise Pascal baseou-se nos trabalhos de Arquimedes utilizando assim a geometria em sua definição sobre os indivisíveis, no qual estudou alguns problemas envolvendo centros de gravidade, retificação de curva e principalmente áreas e volumes por meio do cálculo infinitesimal. Criou então sua teoria sobre os indivisíveis, que utiliza a soma de potências para a resolução de problemas matemáticos como o cicloide (curva definida por um ponto de uma circunferência que rola sem deslizar sobre uma reta). (EVES, 2011), (BOYER, 1996)

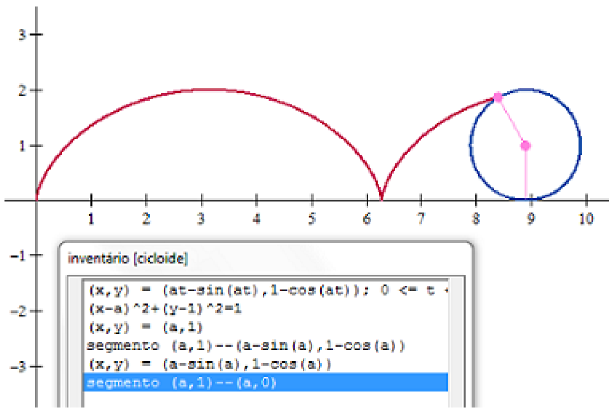

Figura 6.2: Cicloide
Fonte: Figura elaborada pela autora *(Software Winplot)*

No livro *Uma breve história do infinito*, o escritor Richard Morris (https://pt.wikipedia.org/wiki/Richard-Morris) faz a seguinte citação à Pascal e os indivisíveis:

> "Segundo Pascal, o método dos indivisíveis era perfeitamente coerente com a geometria grega clássica; o que podia ser demonstrado com um método, podia ser demonstrado também com o outro. Qualquer matemático que quisesse se qualificar de geômetra, dizia Pascal, era obrigado a aceitar à técnica de Cavalieri." (MORRIS, 1998) [pág. 73]

Pascal utilizou então um método diferente dos indivisíveis desenvolvido por Cavalieri, porém seu trabalho foi utilizado por Leibniz na criação do Cálculo Diferencial e Integral, pois os indivisíveis de Pascal teve grande marco na transição do cálculo dos indivisíveis ao integral. (EVES, 2011), (BOYER, 1996) [pág. 252]

6.2 Identidade de Pascal

A identidade de Pascal parte a princípio do teorema binominal, conhecido na atualidade como "binômio de Newton". (GUIDORIZZI, 2008a). O binômio de Newton é um método que nos permite calcular a enésima potência de um binômio qualquer. O Binômio de Newton é formado por duas variáveis podendo ser (somadas ou subtraídas) elevadas a uma potência que seja um número Natural $\mathbb{N}$. (HAZZAN, 1998) [pág. 58-62]

Supondo que essas variáveis sejam a e b, por definição temos $(a+b)^k$ ou $(a-b)^k$, onde:

$$(a+b)^k = C_k^0 b^0 a^k + C_k^1 b^1 a^{(k-1)} + C_k^2 b^2 a^{(k-2)} + ... + C_k^k b^k a^0$$

para todo k pertencente aos naturais.

A ideia do teorema binomial é atribuir valores para k de modo a encontrar um determinado padrão. (HAZZAN, 1998) [pág. 58-62]. Pascal fazia aplicações em seu triângulo para determinar os coeficientes binomiais. Pode-se desenvolver o binômio através da propriedade distributiva entre as variáveis como a seguir:

Para $k = 0$:

$$(a+b)^0 = 1$$

Para $k = 1$:

$$(a+b)^1 = 1a + 1b = a + b$$

Para $k = 2$

$$(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b) = 1a^2 + 2ab + 1b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Para $k = 3$:

$$(a+b)^3 = (a+b) \times (a+b) \times (a+b) = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

Para $k = 4$:

$$(a+b)^4 = (a+b) \times (a+b) \times (a+b) \times (a+b) = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

Para $k = 5$:

$$(a+b)^5 = (a+b)\times(a+b)\times(a+b)\times(a+b)\times(a+b) = 1a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+1b^5$$

E assim sucessivamente para $(k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...)$, para todo k sendo um número Natural $\mathbb{N}$. Esta definição binomial pode ficar muito difícil de ser desenvolvida conforme for aumentando o valor de k, por isso, pode ser definido também através do processo da Combinação, cuja a forma é:

$$C_{k,p} = \frac{k!}{p!(k-p)!}$$

Nos estudos desenvolvidos por Pascal sobre probabilidade, ele já afirmava corretamente essa fórmula para o cálculo de combinações, vista como a combinação dos k elementos tomados p à p, ou seja, de modo geral temos:

$$(a+b)^k = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix} a^k + \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} a^{(k-1)}b + \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} a^{(k-2)}b^2 + \cdots + \begin{pmatrix} k \\ k \end{pmatrix} b^k \tag{6.1}$$

$$(a+b)^k = a^k + \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} a^{k-1}b + \begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} a^{(k-2)}b^2 + \cdots + \begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix} a^{(k-p)}b^p + \cdots + \begin{pmatrix} k \\ k-1 \end{pmatrix} ab^{k-1} + b^k \tag{6.2}$$

(HAZZAN, 1998) [pág. 33-36], (GUIDORIZZI, 2008a)

O triângulo aritmético, ou triângulo de Pascal como ficou conhecido, pode ser estabelecido através dos coeficientes binomiais. Com a tabela abaixo é possível analisar esta comparação:

Binômio de Newton					
$(a+b)^0 = 1$	1				
$(a+b)^1 = 1a + 1b$	1	1			
$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$	1	2	1		
$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$	1	3	3	1	
$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$	1	4	6	4	1

Tabela 6.1: Binômio de Newton / Triângulo Aritmético
Fonte: (HAZZAN, 1998)

O Triângulo Aritmético é representado pelos valores à direita da primeira coluna dos binômios de Newton. As somas dos elementos de cada linha do triângulo aritmético formam uma potência de 2 (dois) da seguinte maneira:

$(a+b)^0$	1									2^0
$(a+b)^1$	1	1								2^1
$(a+b)^2$	1	2	1							2^2
$(a+b)^3$	1	3	3	1						2^3
$(a+b)^4$	1	4	6	4	1					2^4
$(a+b)^5$	1	5	10	10	5	1				2^5
$(a+b)^6$	1	6	15	20	15	6	1			2^6
$(a+b)^7$	1	7	21	35	35	21	7	1		2^7
$(a+b)^8$	1	8	28	56	70	56	28	8	1	2^8

Tabela 6.2: Triângulo de Pascal
Fonte: (HAZZAN, 1998)

A Identidade de Pascal é uma propriedade do triângulo de Pascal, em que todo número contido no triângulo (a não ser os 1's nas extremidades), são somas dos dois números contidos acima deles, e é determinado pela seguinte Identidade de Pascal:

$$\begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k-1 \\ p \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

para todo k e p pertencente aos Naturais $\mathbb{N}$, com $1 \leq p \leq k$. Pode-se observar que a fórmula acima é dada por uma combinação. (HAZZAN, 1998) [pág. 33-36].

Logo,

$$C_{k,p} = C_{k-1,p-1} + C_{k-1,p}$$

sendo assim, a Identidade de Pascal pode ser demonstrada à partir da combinação abaixo:

$$\begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k-1 \\ p-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k-1 \\ p \end{pmatrix} \tag{6.4}$$

Temos que,

$$\tbinom{k}{p} = C_{k,p} = \frac{k!}{p!(k-p)!}$$

Desenvolvendo por partes:

$$\tbinom{k-1}{p-1} = C_{k-1,p-1} = \frac{(k-1)!}{(p-1)![(k-1)-(p-1)!]} = \frac{(k-1)!}{(p-1)!(k-p)!}$$

$$\tbinom{k-1}{p} = C_{k-1,p} = \frac{(k-1)!}{(p)![(k-1)-(p)!]} = \frac{(k-1)!}{(p)!(k-1-p)!}$$

Somando $C_{k-1,p-1} + C_{k-1,p}$, ou seja, $\tbinom{k-1}{p-1} + \tbinom{k-1}{p}$ temos que:

$$\frac{(k-1)!}{(p-1)!(k-p)!} + \frac{(k-1)!}{(p)!(k-1-p)!} =$$

$$= \frac{(k-1)!p}{(p-1)!(k-p)!p} + \frac{(k-1)!(k-p)}{(p)!(k-1-p)!(k-p)} =$$

$$= \frac{(k-1)!(p+(k-p))}{(k-p)!p!} = \frac{(k-1)!k}{(k-p)!p!} =$$

$$= \frac{k!}{p!(k-p)!} = C_{k,p}$$

Portanto,

$$C_{k,p} = C_{k-1,p-1} + C_{k-1,p}$$

(CAVALCANTE, 2006), (HAZZAN, 1998) [pág. 33-36]

Os indivisíveis e a identidade de Pascal são conceitos muito importantes pois serão utilizados na próxima seção sobre o Método de Pascal, que falará a respeito de *Pascal e o cálculo de Áreas*.

6.3 Método de Pascal

Os conceitos acima destacados sobre os Indivisíveis e a Identidade de Pascal, são de extrema importância para o entendimento e o desenvolvimento do método de Pascal para calcular a área de uma determinada região. O objetivo inicial de Pascal era chegar a fórmula,

$$\frac{b^{k+1}}{k+1}$$

para calcular a área de uma região entre a curva da função $y = x^k$, $0 \leq x \leq b$, pelo eixo das abscissas e a reta $x = b$.

Hamilton Luiz Guidorizzi em seu livro "Um Curso de Cálculo", desenvolveu o método utilizado por Pascal para determinar a fórmula acima, e também o método utilizado por Pierre de Fermat para chegar a mesma fórmula contido no capítulo 7. Com base no desenvolvimento sobre as ideias e cálculos de Pascal, veremos como foi a contribuição de Pascal para o cálculo de áreas.

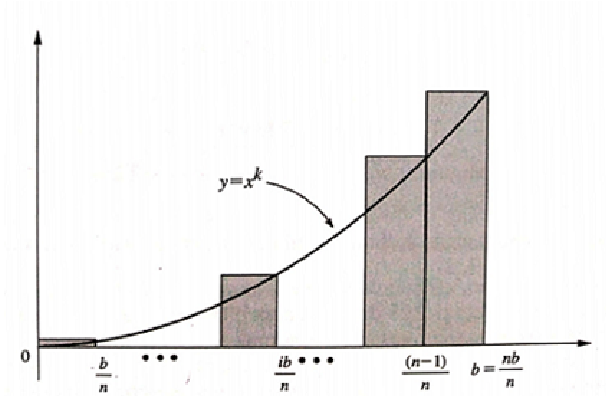

Figura 6.3: Pascal e o Cálculo de Áreas I
Fonte: (GUIDORIZZI, 2008a) [pág. 497]

Com base na figura 6.3, temos o intervalo $[0, b]$ que foi dividido em vários subintervalos iguais, nos quais Pascal decidiu acrescentar retângulos, e com base na soma das áreas desses retângulos conseguiu determinar a área da região. Foi utilizado como medida da base dos retângulos $\frac{b}{n}$ e a medida da altura sendo $(\frac{ib}{n})^k$, sendo $i = 1, 2, \cdots, n$.

Por meio desses, considerou como $S(n)$ a soma e, obteve a seguinte soma para as áreas dos retângulos em relação a base e altura:

$$S(n) = \frac{b}{n}(\frac{b}{n})^k + \frac{b}{n}(\frac{2b}{n})^k + \frac{b}{n}(\frac{3b}{n})^k + \cdots + \frac{b}{n}(\frac{nb}{n})^k$$

Simplificando a expressão acima teremos,

$$S(n) = \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}}(1^k + 2^k + 3^k + 4^k + \cdots + n^k)$$

Para reduzir a expressão, foi atribuído à $(1^k + 2^k + 3^k + 4^k + \cdots + n^k)$ uma soma que será representada por S_k, podendo assim

$$S(n) = \frac{b^{k+1}}{n^{k+1}} S_k$$

$$S(n) = b^{k+1} \frac{S_k}{n^{k+1}}$$

Visando resolver o problema acima, deve-se calcular o limite da expressão $\frac{S_k}{n^{k+1}}$ na qual n tenderá para o ∞ (infinito), e para calcular esse limite, só seria possível através da Identidade de Pascal, que estabelece uma relação entre as somas $S_1, S_2, \cdots, S_k$. Com base na definição binomial, que foi utilizada por Pascal antes mesmo de ficar conhecido como binômio de Newton, nas definições sobre a combinação, e também pelo princípio da indução finita, que foi praticamente estabelecido por Pascal, vamos definir a identidade obtida por ele.

Temos que o binômio de Newton, de modo geral é,

$$(a+b)^k = a^k+\begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} a^{k-1}b+\begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix} a^{(k-2)}b^2+\cdots+\begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix} a^{(k-p)}b^p+\cdots+\begin{pmatrix} k \\ k-1 \end{pmatrix} ab^{k-1}+b^k \tag{6.5}$$

Para obter a identidade de Pascal, vamos trocar k por $k+1$, substituir a sucessivamente por $1, 2, \cdots, n$, fazer $b = 1$ e somar membro a membro as igualdades obtidas. Desse modo:

$$(1+1)^{k+1} = 1^{k+1} + \begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \end{pmatrix} 1^k + \cdots + \begin{pmatrix} k+1 \\ k-1 \end{pmatrix} 1^2 + \begin{pmatrix} k+1 \\ k \end{pmatrix} 1 + 1^{k+1} \tag{6.6}$$

$$(2+1)^{k+1} = 2^{k+1} + \begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \end{pmatrix} 2^k + \cdots + \begin{pmatrix} k+1 \\ k-1 \end{pmatrix} 2^2 + \begin{pmatrix} k+1 \\ k \end{pmatrix} 2 + 1^{k+1} \tag{6.7}$$

$$\vdots$$

$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + \begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \end{pmatrix} n^k + \cdots + \begin{pmatrix} k+1 \\ k-1 \end{pmatrix} n^2 + \begin{pmatrix} k+1 \\ k \end{pmatrix} n + 1^{k+1} \tag{6.8}$$

Somando membro a membro as igualdades acima, observando que: $(1 + 1)^{k+1}$ na primeira linha pode-se cancelar com 2^{k+1} na segunda linha; $(2 + 1)^{k+1}$ na segunda linha, se cancela com 3^{k+1} na terceira linha; $\cdots$; $((n-1) + 1)^{k+1}$ na penúltima linha se cancela com n^{k+1} na última linha. Isso resulta:

$$(n+1)^{k+1} = 1+\begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \end{pmatrix} S_k+\begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \end{pmatrix} S_{k-1}+\cdots+\begin{pmatrix} k+1 \\ k-1 \end{pmatrix} S_2+\begin{pmatrix} k+1 \\ k \end{pmatrix} S_1+n \tag{6.9}$$

que é a identidade obtida por Blaise Pascal.

Utilizando a identidade de Pascal acima, para $k = 1$ temos:

$$(n+1)^2 = 1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} S_1 + n \tag{6.10}$$

A combinação acima pode ser determinada

$$C_{2,1} = \frac{2!}{1!(2-1)!} = \frac{2 \times 1}{1 \times 1} = 2$$

Logo,

$$(n+1)^2 = 1 + 2(S_1) + n$$

$$2(S_1) = (n+1)^2 - (1+n)$$

Assim

$$S_1 = \frac{(n+1)^2 - (1+n)}{2} = \frac{n^2 + 2n + 1 - 1 - n}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

Portanto,

$$S_1 = \frac{n^2 + n}{2}$$

Para $k = 2$ temos:

$$(n+1)^3 = 1 + \binom{3}{1} S_2 + \binom{3}{2} S_1 + n \tag{6.11}$$

As combinação acima podem ser determinadas

$$C_{3,1} = \frac{3!}{1!(3-1)!} = \frac{3 \times 2!}{2!} = 3$$

$$C_{3,2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3 \times 2!}{2!} = 3$$

Logo,

$$(n+1)^3 = 1 + 3(S_2) + 3(S_1) + n$$

$$3(S_2) = (n+1)^3 - (1 + 3(S_1) + n)$$

$$3(S_2) = (n+1)^3 - 1 - 3(\frac{n^2 + n}{2}) - n$$

Assim

$$3(S_2) = (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 1\frac{-3n^2 - 3n}{2} - n = \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 2 - 3n^2 - 3n - 2n}{2}$$

$$3(S_2) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}$$

Portanto,

$$(S_2) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

e assim sucessivamente.

Podemos observar que S_1 é um polinômio de grau 2 em k, assim S_1 é a soma da Progressão Aritmética $1, 2, \cdots, n$, como S_1 tem grau 2, logo S_2 será um polinômio de grau 3 e assim sucessivamente, sendo então S_k determinado por um polinômio de grau $(k+1)$. No cálculo do limite de $\frac{S_k}{n^{k+1}}$, com n tendendo ao infinito, é fundamental a observação em relação ao grau de S_k. (GUIDORIZZI, 2008a) [pág. 499]

A partir da identidade obtida por Pascal, chegaremos ao limite da seguinte maneira, temos que:

$$(n+1)^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1} S_k + \binom{k+1}{2} S_{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k-1} S_2 + \binom{k+1}{k} S_1 + n \tag{6.12}$$

Agora dividindo ambos os membros por n^{k+1},

$$\frac{(n+1)^{k+1}}{n^{k+1}} = \frac{1+n}{n^{k+1}} + \binom{k+1}{1} \frac{S_k}{n^{k+1}} + \cdots + \binom{k+1}{k-1} \frac{S_2}{n^{k+1}} + \binom{k+1}{k} \frac{S_1}{n^{k+1}} \tag{6.13}$$

Da equação acima, temos

$$\frac{(n+1)^{k+1}}{n^{k+1}} = (\frac{n+1}{n})^{k+1} = (1+\frac{1}{n})^{k+1}$$

e assim, como n tende ao infinito, o limite será

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{k+1}}{n^{k+1}} = 1$$

Observe que as expressões S_k,S_{k-1}, $\cdots$, S_2, S_1, terão como grau respectivamente k, $k-1$, $\cdots$, 3, e 2 e o grau de n^{k+1} é $k+1$. Logo os limites

$$\frac{S_{k-1}}{n^{k+1}}, \frac{S_{k-2}}{n^{k+1}}, \frac{S_{k-3}}{n^{k+1}}, \cdots, \frac{S_2}{n^{k+1}} e \frac{S_1}{n^{k+1}}$$

tenderão à 0 (zero).

Para determinar o limite de $\frac{S_k}{n^{k+1}}$ utilizamos a combinação,

$$C_{k+1,1} = \frac{(k+1)!}{1!(k+1-1)!} = k+1$$

E é assim que chegamos ao limite de $\frac{S_k}{n^{k+1}}$, que será

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$$

Desse modo, concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty} S(n) = \lim_{n\to+\infty} b^{k+1}\frac{S_k}{n^{k+1}} = \lim_{n\to+\infty} b^{k+1}\frac{1}{k+1} = \frac{b^{k+1}}{k+1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S(n) = \frac{b^{k+1}}{k+1}$$

Fórmula essa encontrada pela Identidade de Pascal, para calcular a área da região determinada pela curva $f(x) = x^k$, $0 \leq x \leq b$, pelo eixo das abscissas e a reta $x = b$. Essa é uma aproximação por excesso na resolução do problema dessa área.

Se considerarmos uma aproximação por falta da área dessa região, a soma será dada por

$$S_n = \frac{b}{n}(\frac{0}{n})^k + \frac{b}{n}(\frac{b}{n})^k + \frac{b}{n}(\frac{2b}{n})^k + \cdots + \frac{b}{n}(\frac{(n-1)b}{n})^k$$

e de forma análoga, será provado que

$$\lim_{n\to+\infty} S(n) = \frac{b^{k+1}}{k+1}$$

como podemos observar na figura a seguir.

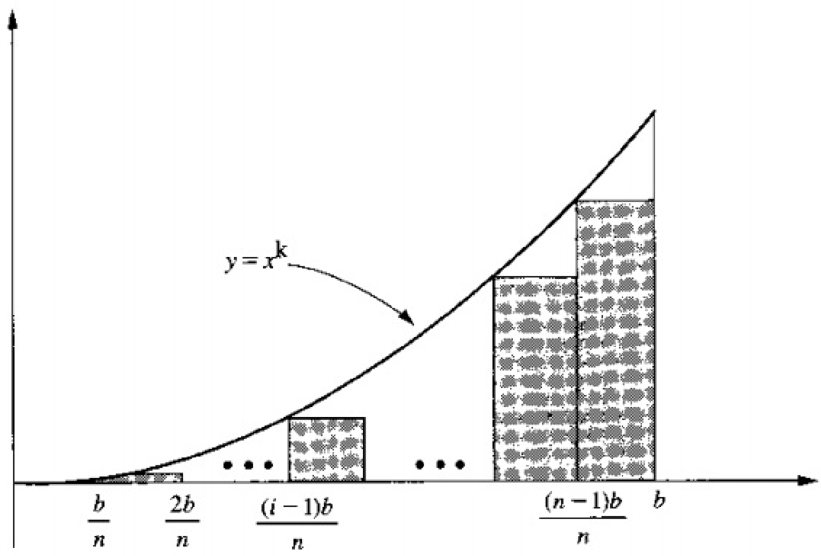

Figura 6.4: Pascal e o Cálculo de Áreas II
Fonte: (GUIDORIZZI, 2008a) [pág. 500]

Vale lembrar que Pascal determinou o limite pela da identidade de Pascal, pois na época ainda não havia o conceito de limite da maneira como utilizamos nos dias atuais. (GUIDORIZZI, 2008a) [pág. 496-502]

CAPÍTULO 7

Pierre de Fermat

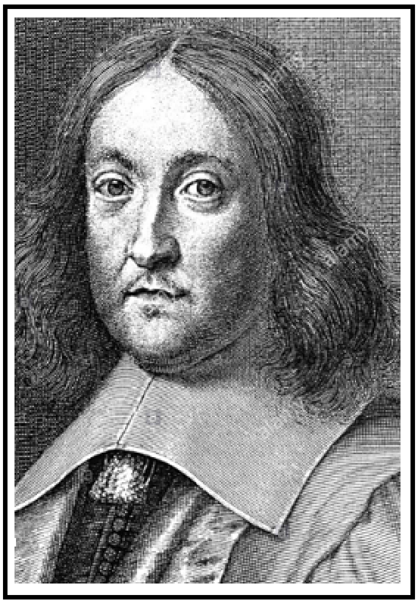

Figura 7.1: Pierri de Fermat
Fonte: *site "Alamy"*

Pierre de Fermat nasceu por volta do ano de 1601 na antiga cidade Beaumont-de-Lomagne na França. Sua família tinha uma boa condição financeira o proporcionando uma excelente educação, se tornou advogado pela universidade da cidade de Toulouse, e cerca de vinte anos depois se tornou juiz. Fermat era hábil com a matemática e a tinha apenas como um hobby para os tempos livres. Era um homem tímido e teve poucos de seus trabalhos publicados. Pierre de Fermat e René Descartes 1596-1650 (https://pt.wikipedia.org/wiki/René-Descartes) contribuirão para a invenção da Geometria Analítica, Fermat através de suas descobertas de equações de circunferências e retas, eixos perpendiculares e também equações da hipérbole, elipse e parábola. Além da geometria analítica se destacou também em outras áreas da matemática como na teoria dos números, qual demonstrava grande interesse, o cálculo infinitesimal, e também na teoria das probabilidades que juntamente com Pascal (1623-1662) definiram muitos de seus conceitos. Fermat inventou um teorema muito importante para a matemática conhecido hoje como último teorema de Fermat, que foi demonstrado muitos anos depois pelo matemático Andrew Wiles (https://pt.wikipedia.org/wiki/Andrew-Wiles). Fermat morreu no ano de 1665. (EVES, 2011) [pág. 389-394], (BOYER, 1996)

Entre as descobertas de Pierre de Fermat, para o cálculo desenvolveu métodos para determinar a área de hipérboles e parábolas, e é o método utilizado por ele para determinar a área de uma determinada região que será discutido neste capítulo.

7.1 Método de Fermat

Será desenvolvido o processo utilizado por Pierre de Fermat para determinar a área de uma região obtida pela função $y = x^k$ em um intervalo $]0, b]$, com $0 \leq x \leq b$, pelo eixo x e a reta $x = b$, com k sendo um número natural $\mathbb{N}$. Fermat desenvolveu os seus cálculos para determinar a área de uma mesma região e chegou a mesma Fórmula que Pascal, mas utilizando um método diferente. (GUIDORIZZI, 2008a) [pág. 502-504]

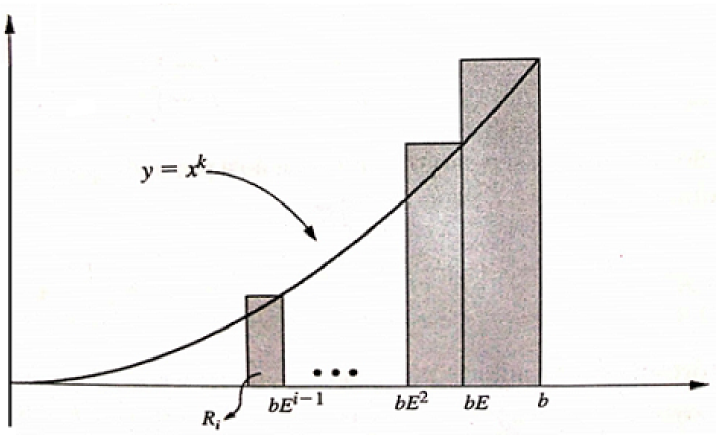

Figura 7.2: Fermat e o Cálculo de Áreas
Fonte: (GUIDORIZZI, 2008a) [pág. 502]

Entenderemos como Pierre de Fermat chegou a mesma fórmula

$$\frac{b^{k+1}}{k+1}$$

para determinar a área da região ilustrada na figura 7.2.

Inicialmente, suponha um certo número E, sendo este E maior que 0 (zero) e menor que 1 (um). Fermat, dividiu o intervalo $]0, b]$ em n subintervalos, no qual acabou chegando no que conhecemos na atualidade como Progressão Geométrica, da seguinte maneira:

$$\cdots, [bE^i, bE^{i-1}], \cdots, [bE^3, bE^2], [bE^2, bE], [bE, b]$$

a progressão geométrica acima, cujo a razão é E se dá por,

$$b, bE, bE^2, \cdots, bE^{i-1}, bE^i, \cdots$$

quando i tende ao infinito, E^i tende a zero, já que $0 < E < 1$.

Resolveu, calcular então a área do retângulo indicado na figura 7.2 por (R_i), estando no intervalo $[bE^i, bE^{i-1}]$. Através das ideias de Fermat, utilizando uma aproximação por excesso para a área da região, sabendo que $bE^i \leq x \leq bE^{i-1}$ e $0 \leq y \leq (bE^{i-1})^k$. Desta forma, temos:

$$\acute{A}rea(R_i) = bE^{i-1}(1-E)b^k E^{k(i-1)}$$

$$\acute{A}rea(R_i) = b^{k+1}(1-E)(E^{k+1})^{i-1}$$

com $i = 1, 2, 3....$

Logo, pode-se observar que obtemos uma progressão geométrica, na qual, por definição precisa-se de uma razão e a identificação de um primeiro termo da expressão, como podemos observar, no caso acima temos como razão E^{k+1}, e o primeiro termo é $b^{k+1}(1-E)$. (IEZZI e HAZZAN, 2008), (GUIDORIZZI, 2008a).

A soma dos termos de uma progressão geométrica é dada por:

$$Soma(R_i) = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^{k-1} + q^k$$

podendo ser uma progressão geométrica finita ou infinita.

Multiplicando os membros da igualdade por q, temos

$$qSoma(R_i) = q + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^k + q^{k+1}$$

Subtraindo ambos os membros, obtemos que

$$qSoma(R_i) - Soma(R_i) = q^{k+1} - 1$$

então,

$$Soma(R_i) = \frac{(q^{k+1}) - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

Logo:

$$Soma(R_i) = \frac{a_1(1 - q^{k+1})}{1 - q}$$

sendo a_1 o primeiro termo da progressão e q a razão.

Desenvolvendo a soma dos termos dessa progressão, utilizando inicialmente como razão q, e o termo inicial $a_1 = 1$, obtemos:

$$Soma(R_i) = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

Pelo método da indução finita, verifica-se da seguinte maneira:

Temos inicialmente a afirmação acima que é

$$P(k) : 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

Verificamos se para $k = 1$ será verdadeira, logo

$$P(1) : q^1 = \frac{1 - q^{1+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^2}{1 - q} = \frac{1 - q^1 \times q^1}{1 - q} = q^1$$

Assim, para $k = 1$, ou seja, $P(1)$ é verdadeiro. Próximo passo é supor que $P(k)$ é verdadeiro, e verificar se $P(k + 1)$ será também verdadeiro. Temos a seguinte hipótese de indução

$$P(k) : 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^k = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}$$

Logo, $P(k + 1)$, através da hipótese de indução,

$$P(k + 1) : 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^k + q^{k+1} = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} + q^{k+1}$$

Desenvolvendo a expressão,

$$\frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} + \frac{q^{k+1}}{1} = \frac{1 - q^{k+1}}{1 - q} + \frac{q^{k+1}}{1 - q} = \frac{1 - q^{k+1} + q^{k+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

logo,

$$P(k + 1) : 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^k + q^{k+1} = \frac{1}{1 - q}$$

Assim, pela indução finita, verifica-se ser verdade para $P(k + 1)$. Então prosseguimos com a fórmula

$$Soma(R_i) = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^k + q^{k+1} + \cdots = \frac{1}{1 - q}$$

Agora, basta substituir o termo inicial $b^{k+1}(1 - E)$ e a razão E^{k+1} no lugar de q na fórmula acima, para obter a soma das áreas dos retângulos, para assim determinar a área da região. (GUIDORIZZI, 2008a)

Substituindo,

$$Soma(R_i) = b^{k+1}(1-E)(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^i+\cdots) = \frac{b^{k+1}(1-E)}{1-E^{k+1}}$$

$$Soma(R_i) = b^{k+1}(1-E)(1+E^{k+1}+(E^{k+1})^2+(E^{k+1})^3+\cdots+(E^{k+1})^k) = \frac{b^{k+1}(1-E)}{1-E^{k+1}}$$

$$Soma(R_i) = 1+E^{k+1}+(E^{k+1})^2+(E^{k+1})^3+\cdots+(E^{k+1})^k = \frac{b^{k+1}(1-E)}{(1-E^{k+1})(b^{k+1}(1-E))}$$

$$Soma(R_i) = 1+E^{k+1}+(E^{k+1})^2+(E^{k+1})^3+\cdots+(E^{k+1})^k = \frac{1}{1-E^{k+1}}$$

$$Soma(R_i) = 1+E^{k+1}+(E^{k+1})^2+(E^{k+1})^3+\cdots+(E^{k+1})^k = \frac{1}{1-E^{k+1}} \times \frac{(1-E^{k+1})}{(1-E^{k+1})}$$

Disto, temos:

$$1+E+E^2+\cdots+E^k = \frac{1-E^{k+1}}{1-E}$$

A partir desta, conseguimos determinar a fórmula para calcular a soma das áreas dos retângulos obtida por Fermat,

$$Soma(R_i) = \frac{b^{k+1}}{1+E+E^2+\cdots+E^k}$$

Desta fórmula têm-se alguns quesitos, tais que se E estiver mais próximo de 1, a aproximação será mais exata, más Fermat fez a seguinte substituição, $E = 1$ trocando E por 1, assim obtendo que a soma $Soma(R_i)$ será dada através da fórmula:

$$\frac{b^{k+1}}{k+1}$$

Observe como Pierri de Fermat, chegou a mesma fórmula que Pascal para calcular a área de uma região obtida pela função $y = x^k$, mas de maneira mais simples, lembrando que na época em que Fermat desenvolveu este método para calcular a área de uma região, os conceitos de Progressão Geométrica ainda não eram utilizados.

Este foi o desenvolvimento de Fermat, com base na demonstração de (GUIDORIZZI, 2008a) [pág. 502-504], utilizando conceitos contidos no livro de (IEZZI e HAZZAN, 2008).

CAPÍTULO

8

Cálculo Diferencial e Integral

O Cálculo Diferencial e Integral, ou simplesmente cálculo, é um ramo importante da matemática, desenvolvido a partir da Álgebra e da Geometria, que se dedica ao estudo de taxas de variação de grandezas (como a inclinação de uma reta) e a acumulação de quantidades (como áreas debaixo de uma curva ou o volume de um sólido). Na antiguidade, foram introduzidas algumas ideias do cálculo integral, embora não tenha havido um desenvolvimento dessas ideias de forma rigorosa e sistemática.

Como já vimos, Eudoxo usou o método da exaustão para calcular áreas e volumes. Arquimedes levou essa ideia mais além. De acordo com Gauss 1777-1855 (https://pt.wikipedia.org/wiki /Carl-Friedrich-Gauss), Arquimedes, o maior matemático da antiguidade, já apresentava ideias relacionadas ao cálculo dois séculos antes de Cristo. Cavalieri, através dos "princípios de Cavalieri" forneceu poderosas ferramentas para o cálculo de áreas e volumes e, ademais, sua base intuitiva pode facilmente tornar-se rigorosa com o cálculo integral moderno. Fermat e Pascal, baseando-se nas ideias de Cavalieri, porém com algumas modificações, para calcular áreas sob uma curva, imaginavam infinitos retângulos ao invés de cordas, facilitando o cálculo das áreas as quais eles sabiam sua equação. Todos esses matemáticos citados foram essenciais na criação do cálculo que temos na atualidade.

Porém, o cálculo moderno foi desenvolvido simultaneamente e de maneiras disjuntas por Isaac Newton (1643-1727) físico e matemático e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) filósofo cientista e matemático alemão, ambos trabalharam de maneiras distintas utilizando os conceitos e desenvolvimentos desses outros matemáticos citados, para obter um novo método matemático, o cálculo diferencial e integral. (JERONIMO e MOURA, 2013)

Figura 8.1: Isaac Newton
Fonte: *site "Encyclopedia Britannica"*

Isaac Newton foi um astrônomo, alquimista, teólogo, cientista e filósofo natural, e fez muitos avanços na física e na matemática. Nasceu no ano de 1643 na Inglaterra, é conhecido pela lei da gravitação universal, as três leis de Newton, cálculo infinitesimal, lei empírica e de resfriamento, construiu o primeiro telescópio refletor, estudou a velocidade do som, contribuiu para as séries de potência, entre outros. Suas obras e descobertas revolucionaram a ciência como um todo. Isaac Newton morreu no ano de 1727. (EVES, 2011)

Figura 8.2: Gottfried Wilhelm Leibniz
Fonte: *site "E-Calculo USP"*

Gottfried Wilhelm Leibniz, polímata, filósofo e matemático, nasceu no ano de 1646 na Alemanha. É conhecido por desenvolver o cálculo infinitesimal através da Notação de Leibniz, trabalhou com a lei de continuidade, calculadoras mecânicas, calculadora de Pascal, contribuiu para o sistema de números binários e fez diversas contribuições na física. Leibniz morreu no ano de 1716. (SPIEGEL, 2009)

A definição do cálculo fez com que muitos problemas matemáticos e físicos que até então não haviam sido resolvidos obtivessem uma solução. Foi com uns destes estudos que se relacionavam ao cálculo infinitesimal que Newton e Leibniz trabalharam para que pudessem desenvolver e construir o cálculo infinitesimal. A princípio Leibniz foi tomado como plagiador dos trabalhos realizados por Newton o que gerou uma disputa e rivalidade entre os dois, com o passar dos anos, tanto Newton quanto Leibniz foram reconhecidos como os inventores do cálculo. (ANTON, 2000)

Há registros de que Isaac Newton teria sido o primeiro a utilizar o cálculo na física e trabalhou com a diferenciação, ele a chamava de Ciência dos Fluxos, já Leibniz desenvolveu a Notação de Leibniz e trabalhou com a integração e a nomeou de cálculo, ou seja, ambos desenvolveram maneiras independentes no processo de criação do cálculo. À partir deles, muitos outros matemáticos fizeram grandes contribuições importantes na implementação do Cálculo Diferencial e Integral que temos hoje. (STEWART, 2009)

O cálculo tem como base o estudo dos infinitesimais, e há muitas técnicas que são utilizadas para abordar este conceito, as noções e conceitos principais dos estudos do cálculo é o Limite a Derivada e a Integral. O cálculo em geral tem como base os três problemas a seguir:

Problema 1:

> **O Problema da Reta Tangente:** Dada uma função f e um ponto $P(x0, y0)$ no seu gráfico, ache uma equação da reta que é tangente ao gráfico em P. (ANTON, 2000) [pág. 112]

Problema 2:

> **O Problema da Área:** Dada uma função f, ache a área entre o gráfico de f e um intervalo $[a, b]$ no eixo x. (ANTON, 2000) [pág. 112]

Problema 3:

> **O Problema da Velocidade Instantânea:** Dada a curva posição *versus* tempo para uma partícula movimentando-se ao longo de um eixo coordenado, ache a velocidade da partícula num instante de tempo especificado. (ANTON, 2000) [pág. 112]

O cálculo diferencial, teve origem à partir do Problema da Reta Tangente, já o cálculo integral teve origem à partir do Problema da Área, porém tanto o cálculo diferencial como o integral estão relacionados. O que todos os problemas tem em comum é o fato de necessitarem do Processo de Limite. (ANTON, 2000)

8.1 Números Infinitesimais

Os números infinitesimais são grandezas infinitamente pequenas e são muito utilizados em definições de integrais e derivadas, seus princípios estão contidos no livro *Infinitesimal* do autor Amir Alexander (https://en.wikipedia.org/wiki/Amir-Alexander), publicado em 2016. O conceito dos infinitesimais foi desenvolvido de maneiras opostas por Isaac Newton e Gottfried Wilhelm Leibniz, que entraram em uma grande disputa para definir o criador do cálculo dos números infinitesimais. (ALEXANDER, 2016).

John Kirkby os definia como sendo:

> "Um infinitesimal é aquilo que é infinitesimalmente menor que qualquer quantidade concebível; é como um grão de sal comparado com o globo terrestre, ou um instante de tempo comparado com um milhão de eras." (KIRKBY, 1735)

Segundo a história, o primeiro a ter utilizado o conceito dos números infinitesimais foi Arquimedes, que o teria desenvolvido de maneira parecida a do cálculo Integral, sua utilização teria sido encontrada em um antigo texto escrito, sobre uma outra obra realizada anteriormente por ele que se chamava de Método Mecânico. Entre as descobertas de Newton está o cálculo infinitesimal, desenvolvido por ele de forma geométrica conhecido como Método da primeira e da última razão. Na obra *Principia* (1687) de Isaac Newton, contém teorias e aplicações desenvolvidas por ele sobre os infinitésimos como também é denominado. Já Leibniz, através da notação conhecida por Notação de Leibniz, que parte do princípio da derivada de uma função y com relação a x, ou seja, $y = f(x)$. (ALEXANDER, 2016). Na Notação de Leibniz utiliza-se os símbolos dx e dy para representar os infinitesimais, e designa funções definidas através de expressões matemática como:

$$\frac{dy}{dx}$$

O infinitesimal é conhecido na matemática como um número tão pequeno quanto se queira, sendo este um número positivo. Ele está presente na maioria dos livros didáticos de estudos do Cálculo e também da Análise. (EVES, 2011)

8.2 Limite

Foi no século XIX que os infinitesimais foram substituídos pelos chamados "limites", que analisam o valor de uma determinada função em um ponto, através de outros pontos que sejam próximos do ponto tomado. O limite tem uma estrutura parecida com a dos infinitésimos, o que as difere é o fato de que o limite utiliza números ordinários. A substituição dos infinitesimais números extremamente pequenos, e o conceito de infinitamente pequeno, pode ser encontrada através do processo de limite, que por uma determinada função encontra números cada vez mais pequenos. (GUIDORIZZI, 2008a)

O processo de limite é requerido por alguns conceitos que são essenciais ao cálculo, sendo eles o Problema da reta tangente e o Problema da área. É também base para todos os outros cálculos desenvolvidos no cálculo diferencial e integral. A especificação do limite é analisar o comportamento de uma função $f(x)$, quando a sua variável independente x tende a um valor dado.

Definição 8.1 *"Se os valores de $f(x)$ puderem ser tornados tão próximos quanto quisermos de L, fazendo x suficientemente próximos de a (mas não igual a a)." (ANTON, 2000) [pág. 115]*

Ou seja, ANTON (2000) define que o limite de uma função $f(x)$ quando x, que é o termo independente tende a L, então teremos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

No conceito de limite é de extrema importância o entendimento dos Limites Laterais de uma função, pois à casos em que é mais difícil analisar se x está mais próximo de a pela esquerda ou pela direita, os chamados limites laterais. Quando x está mais próximo de a pela direita, usa-se na notação $(x \to a^+)$ o sinal "+" (adição) indica a proximidade de x pela direita. (ANTON, 2000)

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Quando x está mais próximo de a pela esquerda, usa-se na notação $(x \to a^-)$ o sinal "-" (subtração) indica a proximidade de x pela esquerda. (ANTON, 2000)

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

8.3 Derivada

A derivada de uma função $f(x)$ tem como base a inclinação e as taxas de variação da reta tangente, ou seja, o Problema 2 - Problema da Reta Tangente. Para o entendimento do que é a derivada, é necessário ter uma base do conhecimento em relação à reta tangente, velocidade média e a velocidade instantânea. Pela notação de Leibniz, a derivada de uma função y em relação a x é dada por $\frac{dy}{dx}$, já pela notação de Lagrange 1736-1813 (https://pt.wikipedia.org/wiki/Joseph -Louis-Lagrange) a derivada é representada por $f'(x)$ ou $fx'(x)$. (ANTON, 2000)

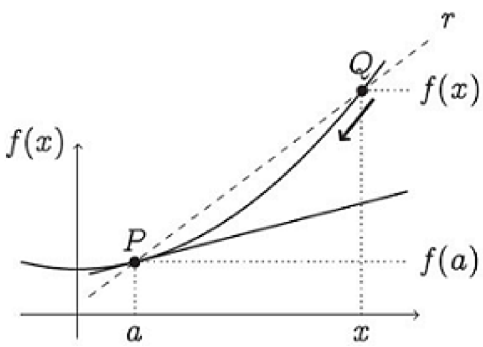

Figura 8.3: Inclinação da reta tangente
Fonte: site *e-scola, aprender num click*

Definição 8.2 *"A função f' é definida pela fórmula,*

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

e é chamada de derivada de f em relação a x." (ANTON, 2000) [pág. 179]

Mostrando o que diz a definição acima com base na figura 8.3, temos que a inclinação da reta r é dada por:

$$\tan \alpha = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Já a inclinação da reta s dada por $\tan\beta$, fazendo com que x tenda à a, ou seja, $(x \to a)$, e a $(\tan\alpha \to \tan\beta)$, logo teremos que:

$$\tan\beta = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Quando o

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

existe e é finito, dizemos que a função f é derivável no ponto P e denotamos o limite pela notação de Lagrange $f'(a)$, isto significa que:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

A equação da reta tangente s é dada por $y - f(a) = f'(a)(x-a)$. (ANTON, 2000).

De fato,

$$y = f'(a)x - f'(a)a + f(p)$$

Se chamarmos $f'(a)$ de c, e $-f'(a)a + f(p)$ de d, logo:

$$y = cx + d$$

Tomando o

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

e fazendo $x - a = h$, então teremos que se x tende à a $(x \to a)$, logo h tenderá a 0 (zero) $(h \to 0)$.

E portanto,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

assim, substituindo a por x, temos que a derivada de uma função $f(x)$ é dada por,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

como diz a definição acima. (ANTON, 2000) [pág. 179]

8.4 O cálculo Integral

Em geral, o cálculo Integral é utilizado para encontrar a área de determinadas regiões a partir de uma função. Têm-se a integral definida e a integral indefinida, ambas com definições e propriedades diferentes, mas que utilizam de um mesmo processo de integração. O processo de integração foi descoberto por Newton e Leibniz que utilizaram o processo inverso da diferenciação, descobrindo que a partir desse poderiam encontrar áreas de regiões em um intervalo limitado. O símbolo de uma integral $\int$ foi inventado no final do século XVII (dezessete) por Leibniz. (ANTON, 2000)

8.4.1 Integral Definida

A integral definida é conhecida como o método do retângulo, que utiliza da área obtida por uma função $f(x)$ e o eixo x do plano cartesiano em um intervalo. O método do retângulo tem como base a soma das áreas de retângulos para se aproximar da área de uma determinada região, este método é conhecido na atualidade como Somas de Riemann que será explicado no Cápitulo 9, mas foi trabalhado de maneiras opostas por Pascal e Fermat. O método do retângulo, basicamente define que quanto maior for a quantidade de retângulos entre o eixo e a função, estará se aproximando cada vez mais do valor exato da área da região desejada. (GUIDORIZZI, 2008a)

8.4.2 Integral Indefinida

A integral indefinida utiliza o processo da antiderivada, ou seja, realiza um processo contrário ao processo da derivação.

Teorema 8.1 *"Se $F(x)$ for qualquer antiderivada de $f(x)$ em um intervalo I, então para qualquer constante C a função $F(x) + C$ é também uma antiderivada de $f(x)$ naquele intervalo. Além disso, cada antiderivada de $f(x)$ no intervalo I pode ser expressa na forma $F(x) + C$, escolhendo-se apropriadamente a constante C." (ANTON, 2000) [pág. 383]*

Para entender melhor o que diz este teorema, vamos analisar em um exemplo:

Dada uma função $f(x) = x^2$, sua derivada será $f'(x) = 2x^1$, mas a integral indefinida realiza o processo inverso ao da derivação chamado de primitivação ou simplesmente primitiva. A primitiva da função $f(x) = x^2$ é a função $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ ou $F(x) + C = \dfrac{x^3}{3} + C$ que é uma função da forma $F(x) + C$, com C podendo admitir qualquer valor real. (ANTON, 2000)

Observe, que derivando a primitiva $\dfrac{x^3}{3} + C$ teremos que a derivada será a função:

$$f(x) = x^2$$

uma vez que a derivada de $F(x) + C$ é $\dfrac{3x^2}{3} + 0 = x^2$.

Qualquer constante somada a uma antiderivada de $f(x)$, esta também será uma antiderivada de $f(x)$.

Pode-se concluir então na Integral Indefinida que,

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Logo,

$$\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

(ANTON, 2000)

8.5 Teorema Fundamental do Cálculo

O teorema fundamental do cálculo é a base das duas operações centrais do cálculo, diferenciação e integração, que são consideradas como inversas uma da outra. Isso significa que se uma função contínua é primeiramente integrada e depois diferenciada (ou vice-versa) volta-se na função original.

Os matemáticos Newton e Leibniz percebendo que os processos de diferenciação e integração, são processos inversos de forma independente, exploraram essa conexão e desenvolveram o cálculo. Em particular, eles perceberam que o Teorema Fundamental do Cálculo permitia encontrar a área de uma figura plana de uma forma muito fácil, sem a necessidade de se calcular a soma de áreas de um número indefinidamente grande de retângulos, mas sim usando a primitiva da função envolvida.

Teorema 8.2 (Teorema Fundamental do Cálculo - Versão 1) *"Seja f definida e contínua no intervalo I e seja $c \in I$. Nestas condições, a função F dada por*

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt$$

$x \in I$, é uma primitiva de f em I, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo x pertencente a I." (GUIDORIZZI, 2008b) [pág. 19-20]

Se considerarmos $I = [a, b]$ e na função

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt$$

fizermos $x = b$ e $x = a$, temos:

$$F(b) = \int_c^b f(t)dt$$

e

$$F(a) = \int_c^a f(t)dt$$

Então

$$F(b) - F(a) = \int_c^b f(t)dt - \int_c^a f(t)dt$$

$$F(b) - F(a) = \int_c^b f(t)dt + \int_a^c f(t)dt$$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

Assim, temos uma segunda versão do teorema fundamental do cálculo que diz:

Teorema 8.3 (Teorema Fundamental do Cálculo - Versão 2) *Se f for contínua no intervalo $[a, b]$ e se F for uma antiderivada de f em $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

(GUIDORIZZI, 2008a) [pág. 305-306]

Temos que,

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

Seja $x \in [a, b]$, então

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt$$

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$$

$$F'(x) = 0 + \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x).$$

(GUIDORIZZI, 2008b) [pág. 19-20], (GUIDORIZZI, 2008a) [pág. 305-306]

Exemplo 8.1 *Área do Círculo: determinando a área da região circular, cujo raio é r, através do cálculo integral.*

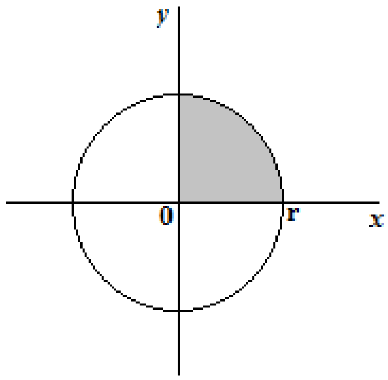

Figura 8.4: Área do círculo
Fonte: Figura elaborada pela autora

Considere a figura no círculo trigonométrico, cujo raio do círculo é r. A equação da circunferência é

$$x^2 + y^2 = r^2$$

assim,

$$y^2 = r^2 - x^2$$

$$y^2 = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Se considerarmos apenas a área do quadrante que está pintado, teremos que a área deste quadrante, será

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx$$

mas temos que considerar a área total do círculo, ou seja, os quatro quadrantes, logo

$$Área_{(círculo)} = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx$$

$$Área_{(círculo)} = 4\int_0^r \sqrt{r^2(1 - \frac{x^2}{r^2})}dx$$

$$Área_{(círculo)} = 4\int_0^r r\sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}dx$$

Chamando $\dfrac{x}{r} = \sin\theta$, temos que

$$x = r\sin\theta$$

logo

$$dx = r\cos\theta d\theta.$$

Se $x = 0$

$$\sin\theta = \frac{0}{r} = 0$$

assim $\theta = 0$.

Se $x = r$

$$\sin\theta = \frac{r}{r} = 1$$

assim $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Logo,

$$Área_{(círculo)} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{1-\sin^2\theta}r\cos\theta d\theta$$

$$Área_{(círculo)} = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta d\theta$$

$$Área_{(círculo)} = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta$$

$$Área_{(círculo)} = 4r^2[\frac{\theta}{2} + \frac{\cos\theta d\theta}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$Área_{(círculo)} = 4r^2[\frac{\pi}{4} - \frac{0}{2}]$$

$$Área_{(círculo)} = 4r^2\frac{\pi}{4}$$

Portanto,

$$Área_{(círculo)} = \pi r^2. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 8.2 *Área do Segmento de Parábola: determinando a quadratura da parábola pela área do retângulo formado pelos pontos obtidos através da função $f(x) = x^2$, e pela área do triângulo maior, na qual será utilizado a integral para determinar a área do segmento de parábola.*

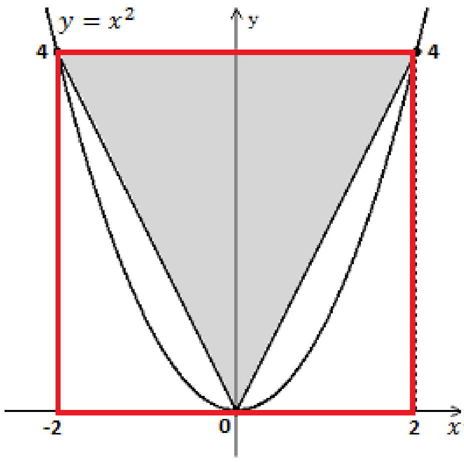

Figura 8.5: Área do segmento de Parábola
Fonte: Figura elaborada pela autora

De acordo com a figura acima, podemos também determinar a área da parábola obtida pela função $f(x) = x^2$ e a reta $y = 4$ pela seguinte equação:

$$Área_{(Segmento-Parabólico)} = Área_{(retângulo)} - \int_a^b f(x)dx$$

A área do retângulo é determinada pela fórmula: $Área_{(retângulo)} = base \times altura$, logo,

$$Área_{(retângulo)} = 4 \times 4 = 16.$$

Calculando a integral da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[-2, 2]$, obtemos:

$$\int_{-2}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \,|_{-2}^{2} = \frac{2^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3} = \frac{16}{3}.$$

Basta fazer a substituição na fórmula determinada, sendo assim,

$$Área_{(Segmento-Parabólico)} = Área_{(retângulo)} - \int_a^b f(x)dx$$

$$Área_{(Segmento-Parabólico)} = base \times altura - \int_{-2}^{2} x^2 dx$$

$$Área_{(Segmento-Parabólico)} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{16}{1} - \frac{16}{3} = \frac{48}{3} - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$$

Portanto, a área da parábola obtida pela área do retângulo formado pelos pontos dados, pela função $f(x) = x^2$ e a área do triângulo maior, é de

$$\acute{A}rea_{(Segmento-Parab\acute{o}lico)} = \frac{32}{3}.$$

O cálculo diferencial e integral de forma geral é extremamente importante em nosso cotidiano. Para o cálculo de áreas utilizamos o cálculo integral, é mais comum e prático calcular a área de uma determinada região, pelo processo da integral indefinida. Já o cálculo pela integral definida é um pouco mais trabalhoso, como será visto no próximo capítulo.

CAPÍTULO 9

Bernhard Riemann

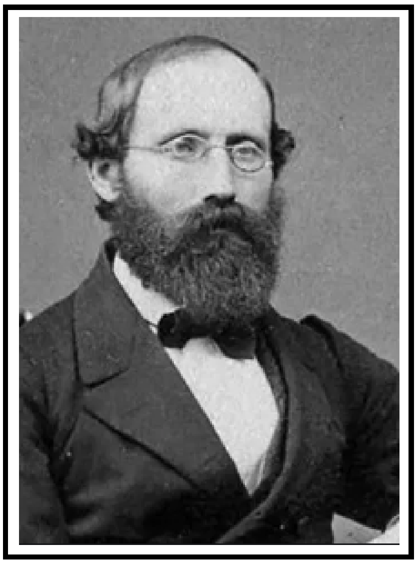

Figura 9.1: Bernhard Riemann
Fonte: *site "O Universo"*

Georg Friedrich Bernhard Riemann nasceu na cidade de Breselenz na Alemanha no dia 17 de Setembro de 1826. Bernhard Riemann como ficou conhecido, desde pequeno tinha uma saúde fragilizada, incentivado a estudar por seu pai, Riemann estudou na universidade de Gottingen, onde inicialmente cursou teologia, mas tinha muito interesse pela matemática, resolveu então mudar para a cidade de Berlim e estudar matemática na universidade de Humboldt, anos depois Riemann retornou a universidade de Gottingen, na qual tornou-se doutor. Riemann estudou com o físico Weber 1804-1891 (https://pt.wikipedia.org/wiki/Wilhelm-Eduard-Weber) e com o matemático e físico Gauss. (ANTON, 2000) [pág. 410]. Riemann anos depois tornou-se professor na universidade de Gottingen. As obras e descobertas dele foram de grande importância a análise e matemática, obteve muitos resultados para as geometrias, fez com que a teoria de integrabilidade (integral definida) viesse a se tornar mais clara com sua definição de integral e somas de Riemann como são conhecidas. Morreu no ano de 1866 com apenas 39 anos de idade. (EVES, 2011)

9.1 Partição de um Intervalo

Indica-se por $P = \{x_o, x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ a partição de um determinado intervalo $I = [a, b]$, no qual temos que:

$$a = x_o < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b.$$

A partição P divide o intervalo $[a, b]$ em n intervalos. Essa divisão de intervalos é feita por $[x_{i-1}, x_i]$, sendo $i = 1, 2, 3, \cdots, n$. Podemos observar melhor a partição de um intervalo com a imagem à seguir. (GUIDORIZZI, 2008a) [pág. 299]

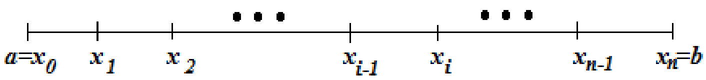

Figura 9.2: Partição de um intervalo
Fonte: Figura elaborada pela autora

Temos então que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$será a maior extensão de um intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. A partir desta definição, podemos obter:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0$$

$$\Delta x_2 = x_2 - x_1$$

$$\Delta x_3 = x_3 - x_2$$

$$\Delta x_4 = x_4 - x_3$$

$$\vdots$$

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

Assim, os valores $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3, \Delta x_4, \cdots, \Delta x_n$, não precisam ser absolutamente iguais. O máximo desses valores será então a amplitude de uma partição

$$P : a = x_o < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n = b$$

o qual será indicado por máx Δx_i. (GUIDORIZZI, 2008a) [pág. 299]

No cálculo da integral definida pela soma de Riemann será usada a partição de um intervalo, podendo esse ser igualmente espaçado ou não. No caso dos exemplos a seguir, o intervalo foi dividido em n intervalos igualmente espaçados.

9.2 Soma de Riemann

A integral definida vista na subseção 8.4.1 do capítulo 8, tem como base o método do retângulo, também conhecido como somas de Riemann. A soma definida por Riemann é o cálculo da área de uma determinada região, através da aproximação pela soma das áreas de retângulos, cuja área é calculada pela fórmula: $\acute{A}rea_{(ret\hat{a}ngulo)} = base \times altura$. Riemann utiliza do mesmo processo no qual Pascal e Fermat utilizaram para determinar a área de uma região pela soma das áreas de retângulos, porém de forma bem mais avançada. (ANTON, 2000) [pág. 378-379]

Para determinar a área entre uma curva obtida por uma função $f(x)$ e o eixo das abscissas em um determinado intervalo $[a, b]$, é necessário fazer a subdivisão do mesmo em pequenos subintervalos podendo ser finito, nos quais serão utilizados retângulos para completar a área da região. Segundo ANTON (2000):

> "Dividir o intervalo $[a, b]$ em n subintervalos iguais e em cada subintervalo construir um retângulo que se estende desde o eixo x até algum ponto sobre a curva $y = f(x)$, a qual está acima do subintervalo." (ANTON, 2000) [pág. 379]

A soma de Riemann é determinada pela seguinte fórmula:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(c_i)$$

No qual Δx representa o valor do comprimento da base dos retângulos, que pode ser obtida através da expressão $\dfrac{b-a}{n}$, a expressão $f(c_i)$ é a variação da altura dos retângulos, podendo também ser representada por $f(x_i)$. (GUIDORIZZI, 2008a)

Este cálculo da soma de Riemann pode ser calculado também com o auxílio do *software Winplot* que pode ser baixado pelo *link* (http://math.exeter.edu/rparris/peanut/wppr32z.exe). Observe na figura 9.3 abaixo que a função $f(x) = x^2$ limitada pelo intervalo $[0, 5]$ que foi dividido em 10 subintervalos, ou seja, em 10 retângulos:

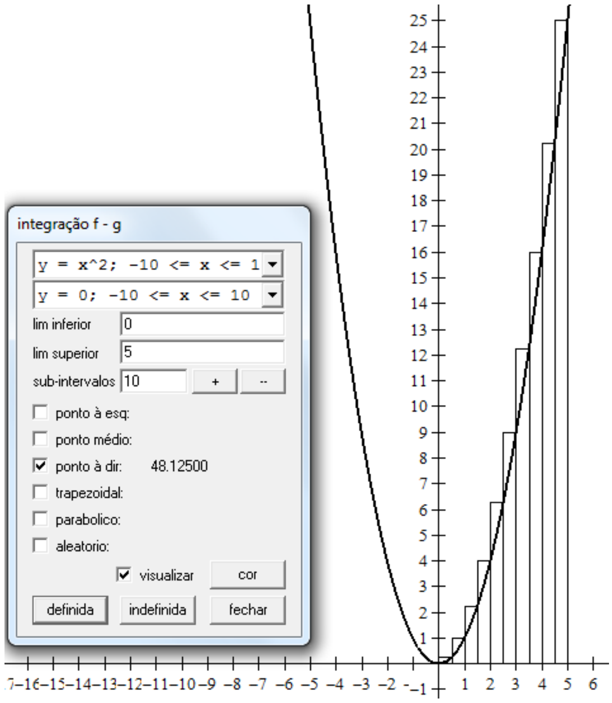

Figura 9.3: Partição do intervalo [0,5] em 10 subintervalos
Fonte: Figura elaborada pela autora *(Software Winplot)*

O software Winplot calcula a aproximação da área entre a curva da função $f(x) = x^2$ e a função $y = 0$ no intervalo $[0, 5]$. O valor da aproximação da área no intervalo $[0, 5]$ em 10 subintervalos para o ponto a direita é de 48.12500. (GIANERI, 2005)

Quanto maior for o número de retângulos mais próximo estará do valor exato da área da região. A função $f(x) = x^2$ no intervalo $[0, 5]$ que foi dividido agora em 30 subintervalos, ou seja, em 30 retângulos:

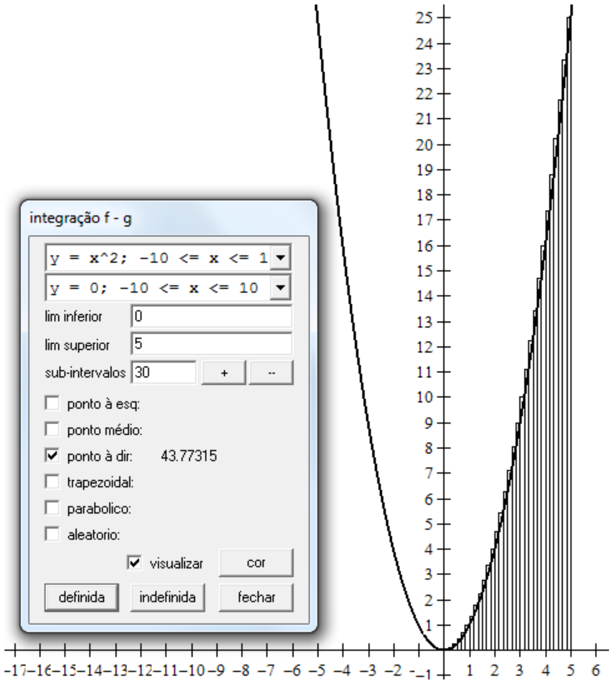

Figura 9.4: Partição do intervalo [0,5] em 30 subintervalos
Fonte: Figura elaborada pela autora *(Software Winplot)*

O valor da aproximação para a área no intervalo $[0, 5]$ em 30 subintervalos na figura 9.4 está mais próximo da área da região em comparação com 10 subintervalos. Para o ponto à direita em 30 retângulos a aproximação é de 43.77315. (GIANERI, 2005)

A soma de Riemann ficará melhor explicada com exemplos a partir da Integral de Riemann na próxima seção.

9.3 Integral de Riemann

A primeira definição de integral foi dada por Bernhard Riemann, através do limite da soma desenvolvida por ele, ou seja,

$$\acute{A}rea = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i)$$

$f(x) \geq 0$, para todo x pertencente ao intervalo $[a, b]$.

A expressão abaixo representa a soma das áreas de retângulos:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i)$$

Δx: expressa o valor da base dos retângulos. Supondo um intervalo que foi dividido em n intervalos igualmente espaçados.

$f(x_i)$: expressa o valor da altura dos retângulos. (GUIDORIZZI, 2008a)

Com o passar dos anos a integral definida foi sendo aprimorada chegando ao método de resolução de integrais que conhecemos hoje em dia. Supondo uma função $f(x) = x^2$ contínua em um intervalo $[0, 5]$. Então calculamos a área desta região da seguinte maneira:

$$\int_a^b f(x)dx \Rightarrow \int_0^5 x^2 dx$$

(GUIDORIZZI, 2008a) [pág. 306]

Pelo teorema fundamental do cálculo $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, podemos resolver está integral de maneira simples pela primitiva de $f(x) = x^2$ que é a função $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Temos que:

$$\int_0^5 x^2 dx = [\frac{1}{3}x^3]_0^5 = [\frac{x^3}{3}]_0^5 = F(5) - F(0) = \frac{5^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{125}{3} - \frac{0}{3} = \frac{125}{3} - 0 = \frac{125}{3}$$

Portanto:

$$\int_0^5 x^2 dx = \frac{125}{3}$$

(GUIDORIZZI, 2008a) [pág. 306]

Para verificar como Riemann calculou a integral através do limite das somas de Riemann, vamos analisar e desenvolver a expressão passo a passo através do exemplo anterior. Por definição a soma de Riemann é dada pela expressão:

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i)$$

Generalizando esta expressão para que fique mais simples o entendimento temos:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i)$$

Primeiro vamos definir o tamanho do intervalo, através das bases dos retângulos, sendo a quantidade de retângulos representada pela letra n, e i sendo uma variável. (GUIDORIZZI, 2008a)

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{n} = \frac{5}{n}$$

Logo $x_i = \dfrac{5i}{n}$, e a função $f(x_i) = x_i^2 = (\dfrac{5i}{n})^2$.

Substituindo na expressão temos:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\frac{5i}{n})^2 \frac{5}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{25}{n^2} i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{5}{n} \times \frac{25}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{125}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

A somatória $\sum_{i=1}^{n} i^2$ por definição, segundo o número piramidal quadrado é dada pela seguinte expressão $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. (STEWART, 2009)

Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Substituindo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{125}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{125}{n^3} \times \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{125(2n^3+n^2+2n^2+n)}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{125(2n^3+3n^2+n)}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{250n^3+375n^2+125n}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{250n^3}{6n^3} + \frac{375n^2}{6n^3} + \frac{125n}{6n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{250}{6} + \frac{375}{6n} + \frac{125}{6n^2}$$

Como n tende a ∞, as duas últimas frações $\frac{375}{6n} + \frac{125}{6n^2}$ tenderão a zero. (GUIDORIZZI, 2008a)

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{250}{6} + \frac{375}{6n} + \frac{125}{6n^2} = \frac{250}{6} + 0 + 0 = \frac{250}{6}.$$

Então:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i) = \frac{125}{3}.$$

No início desta seção foi escrita a seguinte igualdade:

$$\acute{A}rea = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i)$$

pela função $f(x) = x^2$ no intervalo contínuo $[0, 5]$, substituindo os dados adquiridos obtêm-se:

$$\acute{A}rea = \int_0^5 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (\frac{5i}{n})^2 \frac{5}{n} = \frac{125}{3}.$$

No calculo da soma de Riemann o resultado obtido foi:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i) = \frac{125}{3}.$$

Portanto, pode-se concluir que a igualdade abaixo é verdadeira,

$$\acute{A}rea = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x f(x_i).$$

(GUIDORIZZI, 2008a) [pág. 299-305]

Riemann, com o seu método da soma da área de retângulos, transformou o cálculo de áreas pela integral definida. O processo da soma da área de retângulos para estabelecer a área de uma região, também usufruído por Blaise Pascal e Pierre de Fermat, tornou-se mais compreensível pela soma de Riemann.

Considerações Finais

Em virtude dos fatos históricos e das contribuições que ocorreram desde a antiguidade até os dias atuais, é de extrema importância para o entendimento do cálculo de áreas, o conhecimento de alguns matemáticos importantes que fizeram parte deste processo.

Com o método da exaustão de Eudoxo, Arquimedes, através da área de um triângulo, conseguiu determinar a área de um segmento parabólico por meio da quadratura da parábola. Já Cavalieri, com o princípio de Cavalieri, revolucionou a matemática com o método para determinar áreas e também volumes. Com base nas ideias de Cavalieri, Pascal e Fermat conseguiram desenvolver maneiras mais práticas, porém trabalhosas para encontrar áreas de regiões obtidas pela função $y = x^k$, em um determinado intervalo por meio da área de retângulos, contribuindo com isso para a futura invenção do cálculo diferencial e integral.

Utilizando essas descobertas, Newton e Leibniz puderam formalizar, de maneira mais rígida o cálculo diferencial e integral, principalmente o cálculo integral, que tornou mais simples o cálculo da área de muitas figuras planas, no qual Riemann sem dúvida arrematou com eficácia, padronizando o conceito da integral definida.

Com isso, temos o completo e esplêndido cálculo diferencial e integral, que utilizamos (entre outros) para determinar a área de regiões planas. Sendo assim, não só Newton, Leibniz e Riemann foram essenciais nesse processo de criação do cálculo diferencial e integral, mas também Arquimedes, Cavalieri, Pascal e Fermat, cuja as contribuições por meio da geometria, foram indispensáveis e ajudaram a revolucionar o cálculo de áreas.

Referências Bibliográficas

ALEXANDER, A. *Infinitesimal: A teoria matemática que revolucionou o mundo*. 1ª ed. Editora: ZAHAR, 2016.

ANTON, H. *Cálculo um novo horizonte (volume-1)*. 6ª ed. Porto Alegre - RS, BR: Editora: Bookman, 2000.

APOSTOL, T. *Novos horizontes em Geometria*. 2013.

BIPM, B. I. D. P. E. M. *Si, Sistema Internacional de Unidades*. 8ª ed. Rio de Janeiro - RJ, BR: INMETRO - Instituto Nacional de Metrologia, Normalização e Qualidade Industrial, 2007.

BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo - SP, BR: Editora: Edgard Blucher LTDA, 1996.

CAVALCANTE, G. D. D. C. Coeficientes Binomiais e o Triângulo de Pascal. 2006.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar (volume 9)*. São Paulo - SP, BR: Editora: Atual, 2005.

EVES, H. *Introdução a história da matemática*. 5ª ed. Campinas - SP, BR: Editora: Unicamp, 2011.

FACCO, S. R. Conceito de área: Uma proposta de ensino e aprendizagem. 2003.

GIANERI, G. B. Tutorial Winplot. 2005.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo (volume 1)*. 5ª ed. Rio de Janeiro - RJ, BR: Editora: LTC, 2008a.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo (volume 2)*. 5ª ed. Rio de Janeiro - RJ, BR: Editora: LTC, 2008b.

HAZZAN, S. *Fundamentos de matemática elementar. (volume 5): combinatória, probabilidade*. 6ª ed. São Paulo - SP, BR: Editora: Atual, 1998.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. *Fundamentos de matemática elementar*. São Paulo, SP, BRA: Editora: Saraiva, 2008.

JERONIMO, J. A.; MOURA, M. A. N. D. *Introdução ao cálculo (volume 2)*. 2013.

KIRKBY, J. *Instituições aritméticas: Contendo um sistema completo de aritmética natural, logarítmica e algébrica em todos os seus ramos. (parte 5, capítulo 5)*. 1735.

LIMA, E. L. *Medida e Forma Geométrica: comprimento, área, volume e semelhança, coleção do professor de matemática*. Editora: SEGRAC, 1991.

MACHADO, A. S. *Matemática Temas e Metas*. Editora: Atual, 1988.

MARIANI, V. C. *Maple: fundamentos e Aplicações*. Rio de Janeiro - RJ, BR: Editora: LTC, 2005.

MARTINEZ, M. D. (Micro Oficina) Processos infinitos: Método da exaustão e fórmulas de iteração / recursão. SEMANA 2015.

MORRIS, R. *Uma breve história do infinito: dos paradoxos de Zenão ao universo quântico*. Rio de Janeiro - RJ, BR: Editora: ZAHAR, 1998.

NETO, A. C. M. *Tópicos de matemática elementar, coleção Profmat (geometria)*. Editora: SBN, 2013.

PATERLINI, R. R. Os teoremas de Cavalieri. 2010.

PINTO, A. A teoria dos indivisíveis: uma contribuição do padre Bonaventura Cavalieri. 2008.

REVISTA, CADERNOS DE HISTÓRIA E FILOSOFIA DA CIÊNCIA 2012.

R.H.KRANE, R. R.; HALLIDAY, D.; KRANE, K. S. *Física 2*. 5ª ed. Rio de Janeiro - RJ, BR: Editora: LTC, 2003.

SPIEGEL, M. R. *Cálculo avançado - coleção Schaum*. Editora: Brasil, 2009.

STEWART, J. *Cálculo (volume 1)*. 6ª ed. 2009.