UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE NOVA ANDRADINA CURSO DE MATEMÁTICA, LICENCIATURA

A RAZÃO ÁUREA NA ARQUITETURA

ANA KATIA DA SILVA MACEDO

NOVA ANDRADINA - MS

2020

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL

UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE NOVA ANDRADINA

CURSO DE MATEMÁTICA, LICENCIATURA

ANA KATIA DA SILVA MACEDO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática, licenciatura da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul - Unidade Universitária de Nova Andradina, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática, sob a orientação do Professor Luiz Oreste Cauz.

NOVA ANDRADINA - MS

2020

A RAZÃO ÁUREA E SUAS APLICAÇÕES NA ARQUITETURA

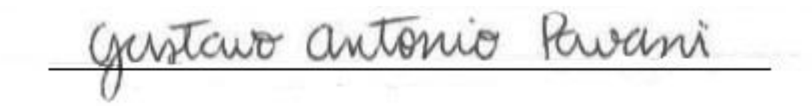
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito final para a obtenção da referida graduação sob a orientação do Prof. Luiz Oreste Cauz.

Banca Examinadora

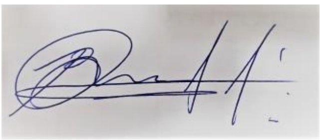
Prof. Me. Luiz Oreste Cauz

Orientador

Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul



Prof. Dr. Gustavo Antonio Pavani
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul



Prof. Dr. Fabio Rodrigues Lucas
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

DEDICATÓRIA

Primeiramente a Deus, a minha avó Maria e a minha tia Vanessa, dedico.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço à Deus por sempre abençoar-me em cada detalhe da minha vida. Agradeço a meus avós Maria e Luiz Carlos por sempre me apoiar e ajudar em muitos momentos que precisei. Agradeço a minha Tia Vanessa por me incentivar, ao meu orientador por sua atenção comigo, aos professores que com seus ensinamentos pude ter um grande conhecimento para o início da vida profissional na área. Agradeço também aos meus colegas de classe, em especial Ana Heloisa e Marinara. Então meu muito obrigada a todos que fizeram parte dessa etapa da minha vida.

"NÃO HÁ RAMO DA MATEMÁTICA, POR MAIS ABSTRATRO QUE SEJA, QUE NÃO POSSA UM DIA VIR A SER APLICADO AOS FENÔMENOS DA VIDA REAL." (Lobachevsky).

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo de mostrar o uso da Regra de Ouro na arquitetura, tanto no mundo antigo quanto no atual. Isso nos faz refletir que o ser humano sempre teve essa iniciativa de querer buscar a perfeição ou a razão em todos as áreas de sua vida, em especial na arquitetura, fato que é percebido ao analisarmos os diferentes projetos arquitetônicos que muitas vezes tem em comum o uso da regra Áurea, considerada como uma medida perfeita e divina.

Palavras Chaves: Número de Ouro, arquitetura, Sequencia de Fibonacci.

Asbtract

The present work aims to show the use of the Golden Ratio in architecture, both in the ancient and in the current world. This makes us reflect that the human being has always had this initiative of wanting to seek perfection or reason in all areas of his life, especially in architecture, a fact that is noticed when we analyze the different architectural projects that often have in common the use of the Golden Ratio, considered as a perfect and divine measure.

Keywords: Gold Number, architecture, Fibonacci Sequence.

Sumário

INTRODUÇÃO

A proporção de 1,618 era utilizada não só por grandes nomes da matemática como Pitagoras, Euclides, Leonardo de Pisa (Fibonacci), como também da arquitetura, Phidia, da psicologia por Platão, da Pintura, por Leonardo da Vinci, como também na arquitetura moderna nas obras de Lê Corbusier. De fato, é provável que a razão áurea tem inspirado pensadores de todas as áreas como nenhum outro número na história da matemática.

Segundo Livio (2006), a primeira definição clara que se tornou conhecida como razão áurea foi dada em torno de 300 a.C. por Euclides de Alexandria em Os Elementos. Eis as palavras de Euclides: “Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor.” (LIVIO, 2006, p.14).

A aplicação da proporção áurea aparece em diversas áreas das ciências e em aplicações práticas, como na Arquitetura. A razão áurea se manifesta na natureza, está presente na arte, na música, na pintura, na fotografia, na estética e na biologia.

Além disso, muitos estudos desenvolvidos buscam procurar aplicações desta proporção.

Ao longo desse trabalho foi possível fazer uma pesquisa contextual e histórica do número de ouro no decorrer dos anos. Todos esses estudos, serão abordadas mais detalhadamente ao longo do trabalho.

CAPITULO 1

1.1 História

O Matemático Italiano Leonardo de Pisa nasceu na Itália por volta de 1175 e ficou muito conhecido como Fibonacci (filho de Bonaccio). Quando saiu sua publicação no livro Liber Abacci , (livro do Ábaco) em 1202, Fibonacci logo ficou famoso, principalmente por inúmeros trabalhos feitos nesse sentindo. Neles aparecem estudos sobre o clássico problema da população de coelhos, o qual foi início para um grande trabalho da pesquisa sobre a sequência de Fibonacci.

Figura 1.1: Leonardo de Pisa

O livro Liber Abacci de Leonardo de Pisa foi um marco muito importante na época, pois a partir desse trabalho desenvolveram muito mais estudos na matemática, incluindo sobre números, ou seja, os europeus passaram a conhecer os algarismos hindus também conhecido como arábico.

Na matemática profissional, o símbolo habitual para a Razão Áurea é a letra grega tau "(τ, do grego, que significa "o corte" ou "a seção")" citado no livro Razão Áurea (Mário Livio). Embora, no início do século XX, o matemático americano Mark Barr deu à razão o nome de Fi "ϕ", a primeira letra grega no nome de Fídias, o grande escultor grego que viveu entre 490 e 430 a.C. O maior trabalho de Fídias foi o "Partenon de Atenas" e o "Zeus" no templo de Olímpia. Assim considera-se também que ele foi o responsável pela escultura do Partenon.

Leonardo de Pisa também conhecido por Leonardo Fibonacci um dos mais conhecidos matemático do século XIII, começou o interesse pelos números quando trabalhava no comércio com o seu pai.

Naquela época, Leonardo de Pisa em suas viagens teve grandes oportunidades de conhecer muitas cidades, conheceu a Espanha muçulmana, a Grécia e assim conhecer diversas culturas. Na prática ele obteve êxito em aprender com professores a matemática aplicada da Europa Ocidental.

Depois de inúmeros trabalhos realizados com problemas matemáticos, Leonardo se tornou um grande sucesso, com isso desfrutou de algumas realizações como participar de uma competição matemática, logo resolveu dos mais variados problemas apresentados os quais dois deles foi apresentado em um Livro chamado “Flos” (flor) que foi publicado em 1225.

1.2 História do número de Ouro

A grande história desse incrível número tem se tornado cada vez mais conhecida devido à grande relevância que se tornou com várias utilizações na arquitetura da idade média até os dias atuais. No Egito, as pirâmides foram construídas de acordo com a razão áurea, pois suas proporções são exatamente o número de ouro, obtidas entre a razão da altura de uma face e a metade do lado da base da grande pirâmide. Naquela época, os egípcios chamavam o número de ouro de “número sagrado”, visto que ele era considerado muito importante para a sua religião. Eles utilizavam as proporções, até em sepulcro viam esse número, sendo muito admirado e extremamente agradável aos olhos humanos em todo e qualquer tipo de decoração. O Papiro de Ahmes é um exemplo em que a razão áurea foi inserida. Principalmente na construção da grande Pirâmide de Gize (4700 a. c).

Figura 1. 2: A pirâmide de Khéops, em Gisé.

Este objeto do passado também com as mesmas proporções áureas chamado Papiro de Rhind (Egípcio) ou Ahmes que mede 5,5 metros de comprimento por 0,32 metros de largura, no ano 1650 a.C.

É de conhecimento que foi escrito um manual prático que contém 85 problemas em escrita hierática pelo escriba Ahmes, que conta sobre uma razão sagrada. Ela aparece em várias estátuas da antiguidade, ou seja, não era um trabalho muito conhecido mas mesmo assim se tornou importante na época devido as suas proporções áurea. O Papiro de Rhind pode ser observado na Figura 1. 3.

Figura 1.3: Papiro

1.3 Pitagóricos

O filósofo e matemático grego Pitágoras nasceu em 570 a.c. na ilha grega de Samos na costa jônica. Ele viajava muito naquele tempo e era muito conhecido por seus diversos trabalhos, principalmente na área da matemática. Com essas viagens acumulou conhecimento acerca de diversos assuntos relacionados aos seus trabalhos. No retorno em uma de suas viagens conheceu a Ilha de Crotona (sul da Itália), onde fundou a Escola Pitagórica, uma espécie de sociedade secreta que foi chamado de os Pitagóricos e eles acreditavam que a essência de todas as coisas fosse o número.

Dentro das reuniões dos Pitagóricos, foram feitas muitas descobertas importantes sobre os números, porém há algumas controversas que provem de fatos dados com verídicos, pois daquela época não ficou conhecido nenhum documento que comprove hoje tais descobertas. Mas com todos os estudos que temos, tudo indica que os Pitagóricos descobriram 3 dos 5 sólidos convexos regulares. Associavam o cubo, o tetraedro, o octaedro e o icosaedro aos elementos componentes da natureza, terra, fogo, ar e água. Existe mais um que é o dodecaedro que tem suas faces pentagonais que dizem se relacionar fortemente com a razão áurea depois disto consideravam o símbolo do universo. Para Platão que viveu no século 5 a.c. na Grécia Antiga, chamou esse número de “o mais nobre corpo entre todos os outros”. A estrela de cinco pontas, também conhecida como um dos pentagramas, era vista como o símbolo da sociedade sendo um emblema da sociedade pitagórica.

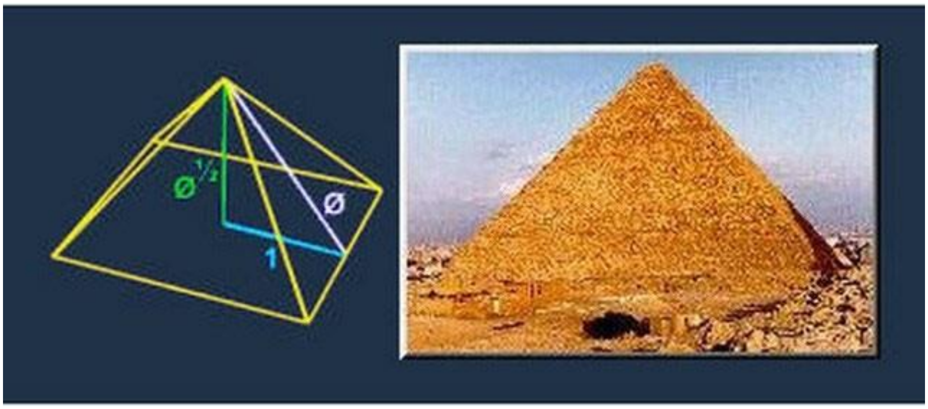


Figura 1.4: Triângulo, Pirâmide.

Esses Polígonos foram reconhecidos como “Sólidos Platônicos”. O Pentagrama foi e é um dos elementos geométricos que mais chamou atenção dos Pitagóricos visto que esses polígonos contém muitas razões áureas.

Antigamente o segmento da seção áurea se tornou muito usado e então ficou conhecido em qualquer contexto relacionado a proporções. Kepler (1571-1630) escreveu:

“A Geometria possui dois grandes tesouros: um é o Teorema de Pitágoras o outro a divisão de um segmento em média e extrema razão. Podemos comparar o primeiro a uma porção de ouro e o segundo a uma joia preciosa.”

“Uma peculiaridade da proporção está no fato que uma proporção semelhante pode ser construída com a parte maior e o todo, o que era antes a maior passa ser a menor, o que era antes o todo passa a ser a parte maior, e a soma desses dois tem agora a razão do todo. Isto continua indefinidamente, a proporção divina sempre permanece.” temos mais detalhadamente esta fala de Kepler no Livro de Mário Livio “Razão Áurea” pág.178.

No livro “Razão Áurea de Mário de Livio temos mais detalhadamente como encontramos as proporções divinas, esse número que no século XIX teve o título honorífico de "Número Áureo, "Razão Áurea" e "Seção Áurea". Um livro publicado na Itália no começo do século XVI chegou a chamar essa razão de "Proporção Divina”. A razão áurea de fato ficou muito mais conhecida por volta 300 a.c. Euclides de Alexandria nasceu no século III a.C. Ele tinha uma admiração inexplicável pelo número de ouro e suas proporções. Para Euclides a razão áurea teve grande influência principalmente em seu curso de geometria euclidiana.

Através de pesquisas feitas sobre o tema, Euclides definiu uma proporção derivada da simples divisão de uma linha no que ele chamou de sua "razão extrema e média". Em alguns artigos expressam as palavras de Euclides: “Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor.”

No livro de Mário Livio é descrito alguns trabalhos Pitagóricos que foram realizados naquela época. Houve uma grande quantidade de pesquisas realizada acerca do tema Razão Áurea. Por exemplo, o matemático canadense Roger Herz-Fischler, que escreveu o livro intitulado *“Uma história matemática do número áureo”.* Também é relevante a questão do nome de origem do segmento áureo, visto que esse nome é de origem antiga aos pitagóricos. Ao certo sim alguns livros importantes dentro do tema foram abordados aqui neste presente trabalho, “*O nascimento da matemática na era de Platão”* de François Lasserre, e Uma história da matemática, de Carl B. Boyers, nos séculos XV e XVI.

Embora seja complexo descrever a utilização do termo “razão áurea”, temos registro de quem utilizou pela primeira vez foi o matemático alemão Martin Ohm (irmão do famoso físico Georg Simon Ohm, autor da Lei de Ohm no eletromagnetismo) na segunda edição do seu livro *Die Reine Elementar- Mathematik* (A matemática elementar pura), de 1835. Embora ele não tenha utilizado na primeira edição do livro publicado em 1826, mesmo assim surge o nome “Razão Áurea” (ou, em alemão, "Goldene Schnitt") que só ganhou popularidade por volta de 1830. Pode ser que a expressão poderia ter sido utilizada oralmente bem antes, mas não em círculos de sociedade Pitagóricas e mesmo assim se tornou importante no contexto temático.

A Razão áurea supostamente aparece em inglês em um artigo de James Sully (1842-1923) que nasceu em Bridgwater, que fez um artigo sobre estética, publicado na nona edição da *Enciclopédia Britânica*, em 1875. Ele adotou uma carreira literária e filosófica. Entre 1892 e 1903, foi Professor Grote de Filosofia da Mente e Lógica na University College London , onde foi sucedido por Carveth Read . No artigo, Sully faz referência à "interessante enquete experimental instituída por Gustav Theodor, um físico e psicólogo pioneiro alemão do século XIX, sobre a suposta superioridade da “seção áurea” como uma proporção visível".

CAPÍTULO 2

2.1 Contextualizando a Razão Áurea

Iniciamos esse capítulo com uma breve explicação sobre a temática da utilização do número de ouro (razão áurea) dentro do tema da arquitetura.

Primeiramente falaremos da sequência de Fibonacci em que a soma de dois termos adjacentes equivale ao termo seguinte. Sendo assim, podemos mostrar alguns termos da sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610...

Uma propriedade que é interessante aos olhos humano, é o quociente entre os termos sucessores e os antecessores na sequência de Fibonacci se aproxima, gradativamente, do número de ouro. Podemos ver na figura 2.1, que se dispomos os termos da sequência de Fibanacci como "quadrados" formamos um retângulo áureo e por conseguinte consegue-se obter uma espiral perfeita.

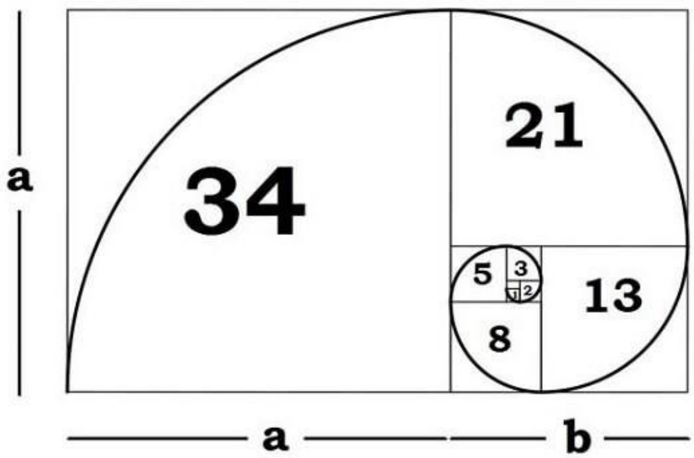


Figura 2.1: Espiral áurea

O retângulo áureo é um dos polígonos mais trabalhados e vistos dentro da história do número de ouro e teve uma grande importância para se poder mostrar algumas propriedades. Conseguimos ver que esse número ainda é uma grande influência como objeto de estudo dentro da matemática exercendo influência e regularidade, assim constituindo uma base para várias áreas do conhecimento, como por exemplo a narquitetura que faz parte do tema deste trabalho. A grande curiosidade do número de ouro é que ao dividirmos no retângulo áureo as medidas do seu lado maior pelo menor, o resultado será o mesmo por inúmeras vezes.

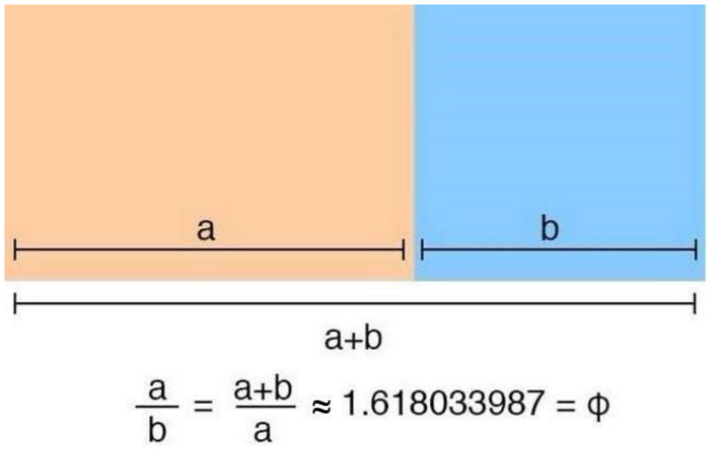


Figura 2.2: Definição Algébrica

RETÂNGULO ÁUREO

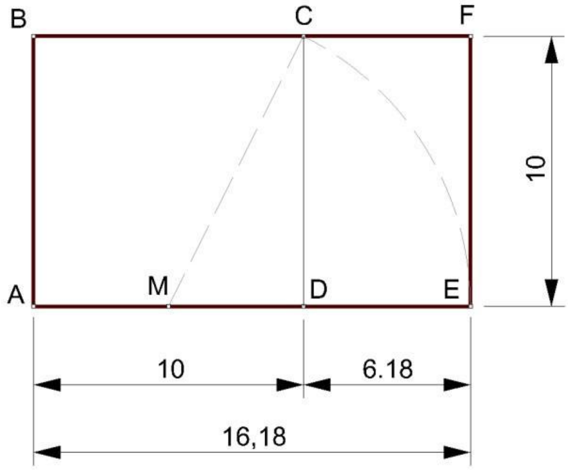
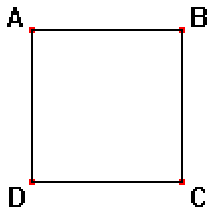


Figura 2.3: Retângulo Áureo

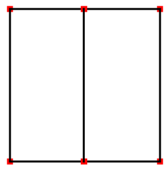
Se pegar um retângulo qualquer e aplicar as proporções áureas, vamos obter um retângulo de ouro. Ao cortar em média e extrema razão teremos um quadrado e também um retângulo menor com mesmas proporções do retângulo original então fazendo esse processo várias vezes tem-se infinitos retângulo de ouro.

Como construir o retângulo de ouro com régua e compasso?

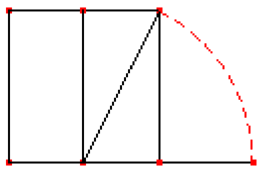
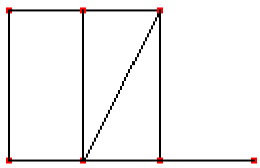
Primeiramente tome um quadrado de vértices ABCD e construiremos um quadrado onde a medida dos lados seja igual a uma unidade de comprimento.



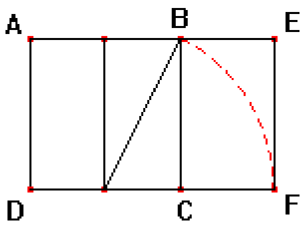
Logo depois unindo o ponto médio do segmento AB com o ponto médio do segmento CD obteremos dois retângulos congruentes:



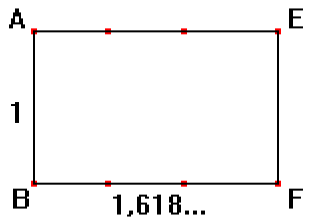
Agora se traçarmos uma das diagonais do lado CD e prolongar conforme a imagem a seguir, em seguida utilizarmos um compasso colocado no vértice inferior esquerdo do segundo retângulo com abertura igual a medida de sua diagonal, traçaremos um arco no vértice direito superior do retângulo ao prolongamento do lado D do quadrado. Podemos observar conforme a imagem a seguir:

Partindo do segmento EF paralelo ao segmento AD prolongando o segmento AB encontraremos o segmento EF formando assim um retângulo.



Logo teremos o retângulo áureo com suas proporções áureas em suas dimensões;



Logo este processo pode ser repetido indefinidamente para mais ou para menos.

O tema tem por consequência despertado um interesse comum de vários estudiosos pois além de ser um número com uma perfeição aos olhos humanos ele é sem sombra de dúvidas inalterável. Desperta em cada um o interesse em se aprofundar cada vez mais nos estudos acerca do tema como parte dos conteúdos matemáticos relacionados. O tema também é uma fonte de conhecimento para quem é interessado pelo assunto quando se trata de proporções que são únicas e sem contar que se torna bela aos olhos humanos.

O Pentagrama é conhecido desde os pitagóricos que o via como símbolo de sua seita. Existem diversas propriedades aplicadas ao pentagrama que fazem ser uma figura geométrica incrível, como a intersecção de duas de suas diagonais que as dividem em média e extrema razão: Razão Áurea. Para construir é necessário um pentágono regular e suas diagonais; as suas diagonais forma um pentagrama, uma estrela perfeita de cinco pontas, em que seu centro é exatamente um novo pentágono regular (fig. 2.4).

Visto que temos uma característica interessante do pentagrama gerado dentro do pentágono maior, ao traçarmos as diagonais do pentágono central do pentagrama formado temos um novo pentagrama menor, fazendo várias vezes o processo, temos infinitos pentagramas formados através de apenas um.

Suas medidas dos comprimentos em ordem decrescente estão em relação com um fator que é exatamente o número Fhi “ ϕ ”, facilmente provada com a utilização de cálculos matemáticos e geometria. Naquela época os pitagóricos ainda não tinham encontrado algo tão natural e surpreendente como o número de ouro. Ao encontrarem a lógica que seguia tal experiência ficaram surpresos com tamanha perfeição, porém o que eles defendiam era uma lógica totalmente ao contrário. Chamaram esse número com valor aproximado de 1,618 de irracional e, portanto, foi o primeiro número considerado irracional.

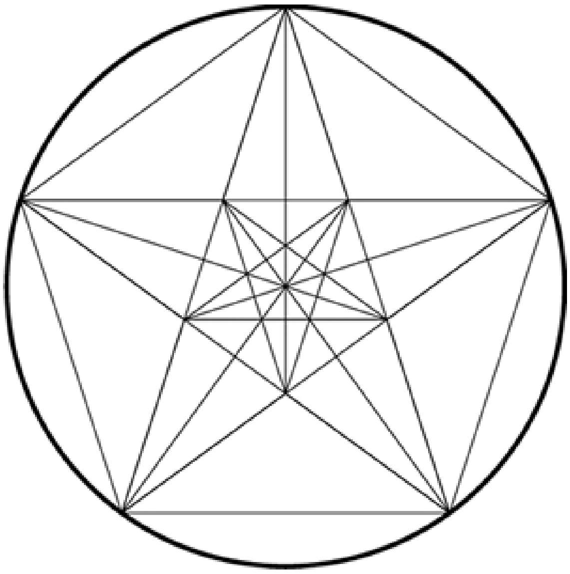


Figura 2.4 : Estrela pentágono

2.2 A sequência de Fibonacci

A sequência que foi chamada de *Sequência de Fibonacci* foi posteriormente em formula de regressão para facilitar o cálculo de seus termos. Está fórmula é representa matematicamente por

$$\mathrm{F(n)} = \begin{cases} 0, & se \quad n = 0 \\ 1, & se \quad n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & se \quad n \neq 0 \; e \; n \neq 1 \end{cases}$$

Quando Leonardo de Pisa iniciou seus estudos, ele desenvolveu um trabalho em 1202 que ficou conhecido como o problema dos coelhos descrevendo sobre o crescimento da população de coelhos tendo como base de seu trabalho um casal de coelhos. Fibonacci notou que a partir da reprodução dos coelhos ela se dava exatamente igual a sequência.

O que mais chamava atenção para os estudiosos da época é que essa sequência não só se destacava neste caso dos coelhos mas também em alguns fenômenos da natureza, pois ela funciona como uma formula universal de crescimento em vários contextos principalmente o enfoque deste trabalho que é a arquitetura, ou seja, a razão áurea dentro da arquitetura antiga até a atual.

Quando encontrou o número de ouro “razão áurea”, Fibonacci dividiu um número pelo anterior e observou que todos os resultados convergiam para 1,618 que é a razão áurea. Desde os tempos da idade média esse número fascinante surpreende os pitagóricos e os grandes matemáticos da época, principalmente os estudiosos e os intelectuais, ainda mais quando fala-se em resultados obtidos através do número de ouro. Este número também chamado de ϕ é utilizado até hoje em grandes obras de arquiteturas. Veremos mais a diante neste trabalho o quanto esse número se destaca entre os demais e o quanto ele vêm sendo importante para a história do estudo e conhecimento desse tão utilizando número.

A relação entre a Sequência de Fibonacci e a Razão Áurea é bastante prática. Basta dividir um número da sequência pelo seu antecessor. Quanto maior for o número, mais o resultado se aproxima da Razão Áurea.

1/1 = 1 21/13 = 1,61538... 2/1 = 2 34/21 = 1,619048... 3/2 = 1,5 55/34 = 1,617647... 5/3 =1,6667 89/55 = 1,61818... 8/5 = 1,6 144/89 = 1,617978 ... 13/8 = 1,625 233/144 = 1,618055...

2.3 Razão Áurea Matematicamente

Dizemos que um ponto divide um segmento de reta em média e extrema razão, se a média geométrica entre o maior e o menor dos segmentos obtidos é igual a média geométrica entre o segmento todo e o maior segmento. A razão entre o segmento menor e o segmento maior chama-se razão áurea.

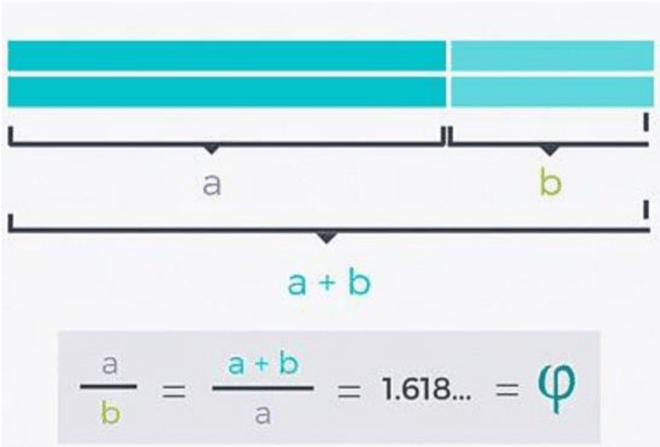


Figura 2.5: Segmento Áureo

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Assim, temos

$$a^2 = (a+b)a,$$

ou melhor

$$a^2 - ba - b^2 = 0.$$

Resolvendo a equação temos:

$$\mathrm{a} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4b^2}}{2} = \frac{b \pm b\sqrt{5}}{2} = \mathrm{b}\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Em seguida analisaremos a solução positiva devido ao fato de se tratar de medidas. Assim

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618033\cdots = \phi$$

2.4. Razão Áurea e o Teorema de Pitágoras

Antigamente os egípcios usavam o triângulo na proporção 3, 4 e 5 para realizar algumas medidas. Segundo Huntley [8] se fizermos a construção geométrica encontraremos o número ϕ. Observe a figura a seguir:

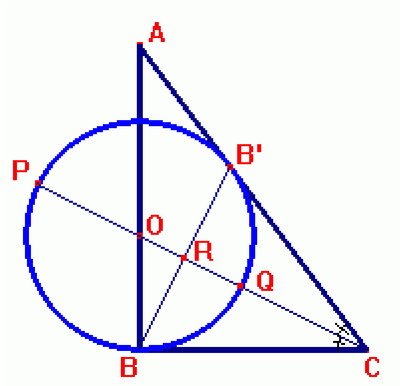


Figura 2.6: Demonstração Geométrica

A bissetriz do ângulo C intersecta o lado AB em O, logo podemos construir um círculo com centro em O, raio OB. A hipotenusa AC tangencia o círculo no ponto B'. O segmento BB' intersecta o segmento CO no ponto R. O segmento CO corta o círculo no ponto Q e o ponto Q divide o segmento CP na proporção áurea. Logo

$$\frac{CP}{PQ} = \phi, \frac{PQ}{CQ} = \phi \text{ e } \frac{OR}{RQ} = \frac{\phi}{2}$$

A soma dos quadrados dos catetos é igual a soma da hipotenusa. Se a é a medida da hipotenusa e b e c são os catetos, então pelo teorema de Pitágoras temos

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Se supormos que o quadrado da medida da hipotenusa é a área de um quadrado cuja medida do lado é igual a medida da hipotenusa e fazendo modo semelhante aos seus catetos, podemos descrever o teorema de outra maneira: dado um triângulo retângulo qualquer a área do quadrado cujo o lado é a medida da hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados que tem como lados a medida de cada um dos catetos.

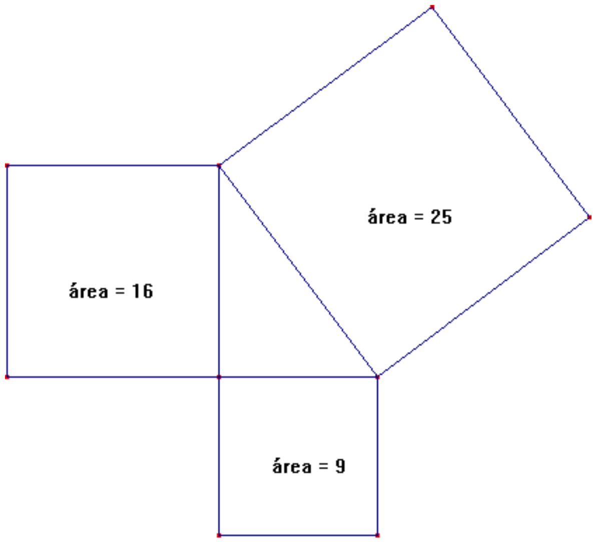


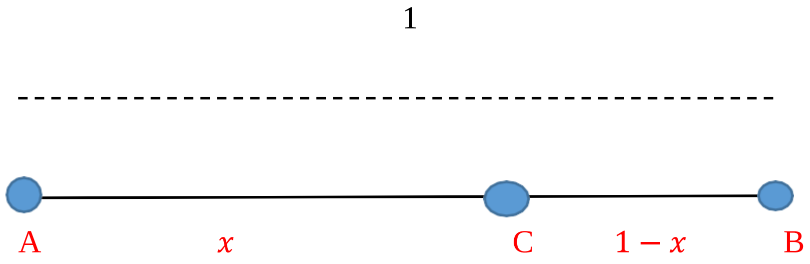
Figura 2.7: Triângulo Retângulo

Se o triângulo retângulo acima é um triângulo na proporção 3, 4 e 5 aplicando o teorema temos:

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

2.5. Obtenção do número □ em um caso particular

Vamos considerar um segmento de reta de comprimento igual a 1. Consideremos então os pontos A, B e C.



Obtemos a divisão de um segmento de extrema razão onde encontraremos a razão áurea se

$$\frac{\square\square}{\square\square} = \frac{\square\square}{\square\square}$$

Assim,

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

Logo,

$$x^2 + \mathrm{x} - 1 = 0$$

Calculando a solução da equação quadrática acima e desprezando a solução negativa temos

$$\mathrm{x} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Logo

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} . \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$$

Exemplo 2.1. Costumava-se ver também nas pirâmides do Egito a razão áurea.

Se G é o apótema da pirâmide H é a altura da pirâmide e M é o apótema da base da pirâmide logo, altura media 280 cúbitos[1] e a medida do lado da base 440 cúbitos, o segmento perpendicular a base se chama apótema da base é 220 cúbitos.

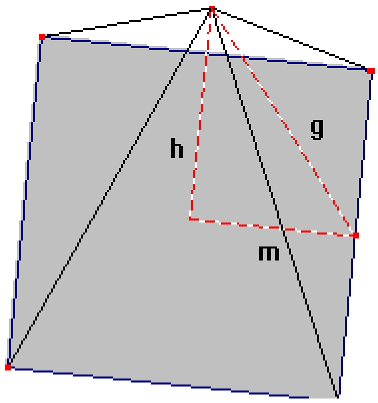


Figura 2.8: Pirâmide

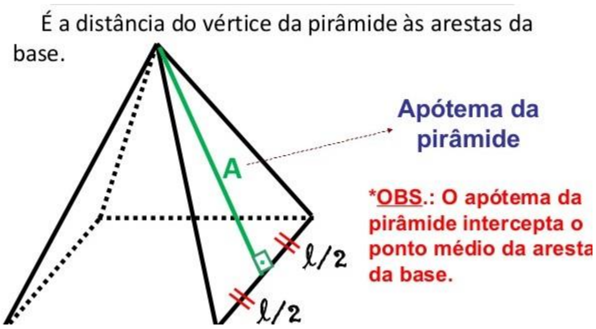


Figura obtida em https://www.slideshare.net/rodrigocarvalho_mat/pirmides-45526024/8

$\square^2 = h^2 + \square^2$

Assim □2 = 2802 + 2202 = 78400 + 48400 = 126800 ∴ □ = 356,08. Ou seja, se fizer a razão entre o apótema da pirâmide e o apótema da base da pirâmide encontraremos 356,08/220 = 1,618... logo estamos nos referindo ao "Número de Ouro" Razão Áurea.

[1] *Cúbito é a distância do cotovelo até à ponta do dedo médio do Faraó. O cúbito egípcio equivale a meio metro aproximadamente.*

2.6. A incomensurabilidade no triângulo isosceles

Para provar tal incomensurabilidade no triângulo, Hipaso (filósofo pré-socrático, membro da Escola pitagórica nasceu 500 a.C. em Metaponto) provou que não há nenhum número comensurável que corresponda um ponto C da reta, no caso que o segmento AC seja igual a base diagonal do referido triângulo com lado unitário. Na figura a seguir vemos que;

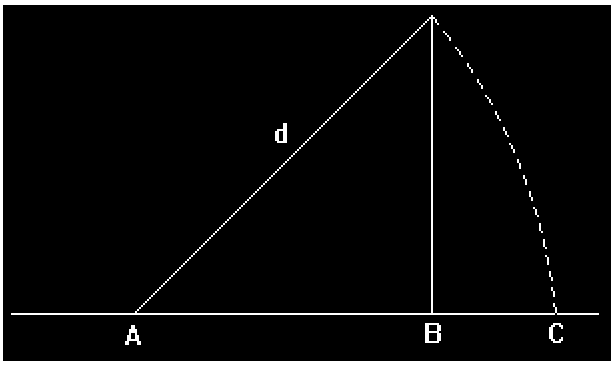


Figura 2.10: Representação na reta numérica em um triângulo isósceles

Pelo teorema de Pitágoras temos:

$$d^2 = 1 + 1$$

$$d^2 = 2$$

$$\mathrm{d} = \pm\sqrt{2}$$

Podemos assim considerar só o valor positivo de d uma vez que se trata de medida de comprimento.

Considerando agora que um inteiro não-negativo t tal que t^2 é par, logo t é par. Mais ainda, considere por absurdo que $\sqrt{2}$ é um número comensurável, isto é, podemos escreve-lo sob a forma $\frac{p}{q}$, ou seja $\frac{p}{q} = \sqrt{2}$, sendo p e q primos entre si. Logo

$$\mathrm{p} = \sqrt{2}\mathrm{q}$$

Elevando ambos os membros ao quadrado obteremos:

$$p^2 = 2q^2$$

Concluímos então que p^2 é par. Logo p também é par, e portanto pode ser escrito na forma $p = 2m$ em que m é um inteiro dado. Assim

$$(2m)^2 = 2q^2$$

$$4m^2 = 2q^2$$

$$q^2 = 2m^2$$

Concluímos então que q^2 é par. Logo q também é par. Concluímos então que p e q são números pares o que é um absurdo pois p e q são primos entre si.

Sabemos que o número de Ouro, é um número irracional podendo assim ser obtido basta pegar um triângulo retângulo isósceles e teremos a hipotenusa em função da raiz de dois. Isso nos faz rever que o exemplo acima é visto para lembrar que o número de ouro é obtido de forma prática mostrando do ponto de vista pitagórico, sendo que a escola pitagórica se referia aos números irracionais como resultado da divisão de segmentos incomensuráveis entre si logo são segmentos que não possuem uma medida comum entre si.

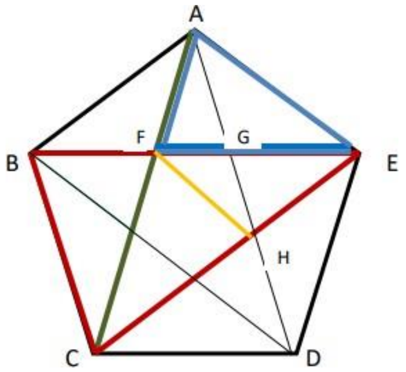


Figura obtida em https://www.spm.pt/files/clube/outros/Integrando.pdf

Suponha que ABCDE é um pentágono regular. Repare que os triângulos BCE, AEF e AFG são semelhantes: os ângulos AEB, BEC e CED são iguais portanto estão inscritos na circunferência que contém os vértices do pentágono e subentendem arcos iguais. Observa-se que:

Percebe-se que AF= BF= FH Assim;

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}=\overline{AE}=\overline{FE}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{AF}=\overline{BF}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{BE}-\overline{FE}}.$$

Chamando : $r = \frac{\overline{BE}}{\overline{FE}}$ será $r = \frac{1}{r-1}$ e r será solução positiva da equação :

$r^2 - r - 1 = 0$, ou seja, $\boldsymbol{r = \Phi}$ **é a Razão de Ouro.**

CAPITULO 3

3.1. Número de ouro e a Arquitetura

3.1.1. Partenon

O Partenon foi construído na época de 447 a 433 a.C. A razão entre a largura e sua altura era um número inimaginável para os pitagóricos, más percebeu-se que esse número se aproxima do número Phi. Depois de descoberto que essa proporção é harmônica os arquitetos ficaram famosos e conhecidos em suas cidades na idade média. O mais famoso arquiteto era Phidias que representou o número Phi com a inicial de seu nome.

A harmonia é vista como uma combinação de todos os objetos ao seu redor, é como se estivessem simplesmente em contato um com o outro o que torna o ambiente ou a escultura uma obra prima para o universo e a natureza.

Sendo considerado um dos mais importantes da Grécia Antiga, Phidias ficou responsável pela construção do Partenon e assim utilizou as proporções áureas em suas obras. Podemos ver que a partir dessa construção observa-se repetidas vezes o retângulo áureo.

.

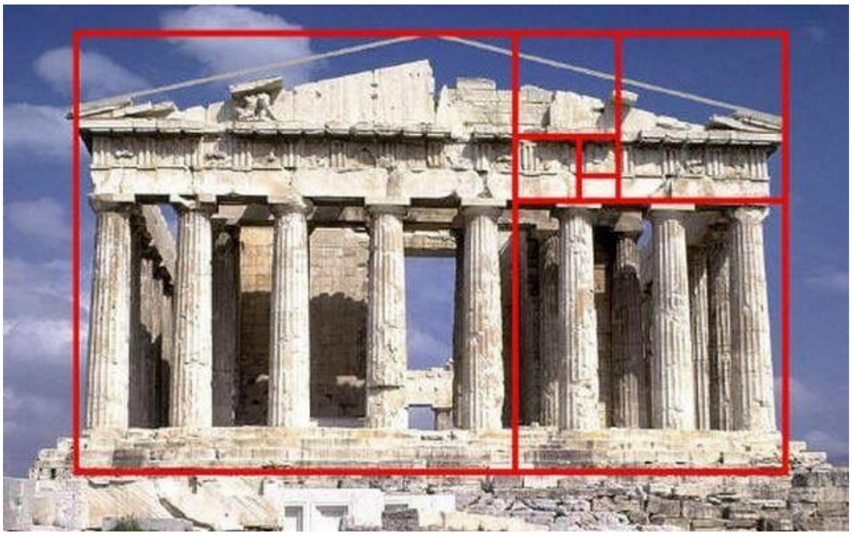


Figura 3.1: Fachada do Partenon.

3.1.2. Unite d'Habitation

Encontramos também a razão áurea nas obras de um dos famosos arquiteto do mundo contemporâneo chamado Lê Corbusier. Podemos notar nitidamente os retângulos áureos inseridos no projeto. A Unidade Habitacional de Marselha, conhecida sob o nome de "Cité radieuse", foi construída logo após segunda guerra mundial, entre 1947 e 1952.

O arquiteto Le Corbusier projetou esta obra magnifica, a obra é praticamente uma cidade vertical, contemplando programas diversos, como habitação, comércio, serviço, lazer. O projeto foi o primeiro a ter oportunidade para Le Corbusier implementar as teorias da proporção de escala, ou seja que daria origem à Modulor. O prédio é uma enorme construção de 140 metros de comprimento, 24 metros de largura e 56 metros de altura.

Figura 3.2: Unite d'Habitation

Le corbusier também criou o sistema de proporção criado por ele e chamado "o Modulador", ele surgiu porque Le Corbusier converteu o sistema métrico decimal nas unidades como *pés e polegadas*[2]. Assim passou a utilizar mediadas modulares baseadas na proporção de um indivíduo. Mais tarde o sistema foi baseado na proporção áurea, e na sequência de Fibonacci.

[2]Pé é uma unidade de medida de comprimento. Um pé corresponde a 12 polegadas Polegada; antiga medida de comprimento que tem mais ou menos a medida da segunda falange do dedo polegar, equivalendo a 2,75 cm.

3.1.3. Catedral

A razão áurea encontra-se em muitas proporções na catedral. O retângulo áureo é peça fundamental na planta da igreja como podemos observar abaixo:

A arquitetura, frequentemente, tem um vínculo forte com a matemática.

As medidas da fachada da catedral seguem essa proporção. A imagem abaixo mostra alguns comprimentos que seguem a razão áurea. É possível que parte da beleza desta catedral estivesse relacionada a esta proporção.

A obra arquitetônica é uma das mais importante, e se trata da Catedral de Notre Dame de Chartres, na França, considerada a rainha das catedrais góticas. A razão áurea se encontra em muitas proporções espaciais na catedral. O retângulo áureo foi utilizado na própria planta da igreja que foram estruturadas de acordo com a razão áurea.

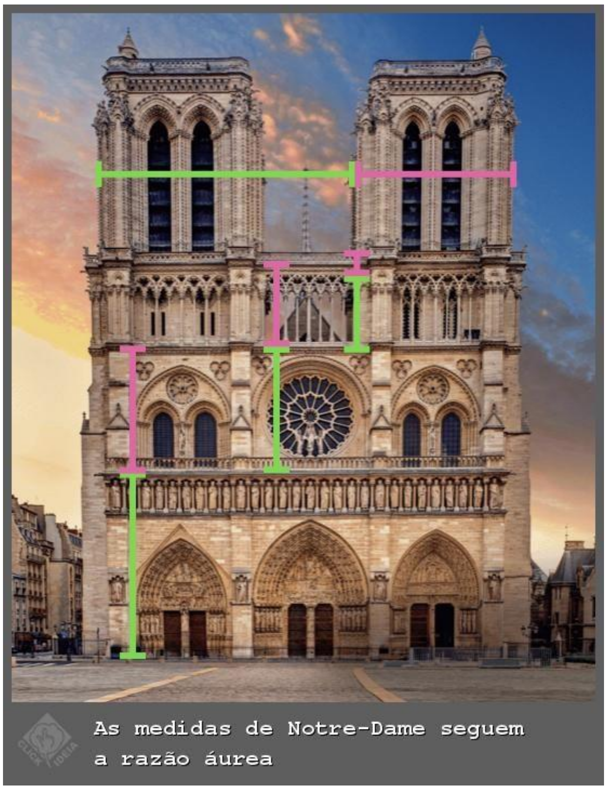


Figura 3.3: Catedral de Notre Dame

3.1.4. Prédio da ONU (Organização das Nações Unidas)

Mesmo em anos recentes, ainda encontra-se artistas e arquitetos que utilizam o retângulo áureo em seus projetos. Por exemplo, o edifício-sede da Organização das Nações Unidas (ONU), em Nova Iorque, na qual há três retângulos áureos dispostos horizontalmente.

A Sede da Organização das Nações Unidas está localizada em Nova Iorque, Estados Unidos. Foi projetada por uma equipe de arquitetos de diversos países, liderada por Wallace Harrison, sendo o projeto final baseado nas propostas de Oscar Niemeyer e Le Corbusier.

Figura 3.4: Prédio, ONU.

3.1.5. Templo de Zeus

Falando um pouco sobre os monumentos históricos, de acordo com a idade média até os dias atuais podemos citar inúmeras obras que estão em harmonia com a razão áurea. Um dos templos mais famoso da idade média é o templo da Zeus.

Figura 3.5: Templo de Zeus

Esse templo foi construído de acordo com as medidas áureas, ou seja, com as proporções áureas.

3.1.6. Fundamentos Arquitetônicos

De acordo com Pennick (2009), as obras arquitetônicas na idade média tiveram grande impacto dentro da história e da arquitetura. A geometria sempre foi essencial até os dias atuais, e desde a idade média foram feitas descobertas que hoje se encontram em evidência na arquitetura por utilizar a razão áurea.

Desde de muito cedo a geometria contribuiu para o conhecimento do homem e portanto desde o princípio ela se tornou essencial, pois foi através dela que descobriu o que há por trás de suas naturezas. Utilizava-se muito para medir terras auxiliando também no controle do rio Nilo.

Até mesmo na geometria Euclidiana (325 - 265 a.C.) os gregos e os romanos também tiveram interesse em tudo que dependia da geometria para utilizá-las em suas edificações.

3.1.7. Construção de Templos

As grandes pirâmides feita no Império egípcio também foram construídas conforme a razão Áurea. Os projetos arquitetônicos construidos de acordo com a razão áurea são de fato um incrível projeto aos olhos humano não só em beleza e harmonia mas também todas tem traços exatos da matemática aplicada. Quando se fala em obras arquitetônicas como: Templo de Parthenon, conjunto habitacional projetada por Le Corbusier, catedral de Notre Dame, Prédio da ONU, templo de Zeus, e muitos outros não citado aqui merecem nossa atenção para observar a proporção divina que existe em cada projeto. Esses são os mais famosos projetos arquitetônicos envolvidos na idade média passando pelas mais atuais edificações.

O número de Ouro teve e tem até então grande importância para as projetos arquitetônicos na antiga idade média e em meio ao caminho ganhou espaço nos dias atuais deixando os olhos humano ver em mais bela perfeição que é a razão áurea, esse número que se tornou o mais utilizado é até hoje importante não só na matemática mas também nas mais belas construções do mundo atual.

‘Segundo Proença (2003, p.79) a principal característica das obras desse período era criar espaços proporcionais, com o objetivo de permitir que “o observador possa compreender a lei que o organiza”, de qualquer ângulo que esteja.’

Basicamente podemos ver as e obter a razão a partir de algumas figuras mais importantes que vimos até agora que são: triângulo, quadrado e o círculo que aparece na divisão de cinco partes iguais inscrita no pentágono.

Com a evolução histórico dos monumentos culturais ainda conseguimos enxergar as proporções áureas nos mais variadas patrimónios arqueológicos estudados. Tudo isso está intimamente ligado ao palmo, pé, passo, braça[3], cúbito que também tem uma ligação com o corpo humano desejado.

[3]**A**ntiga medida de comprimento equivalente a 2,20 metros linearmente.

Considerações Finais

Neste trabalho procuramos mostrar como este número vem sendo utilizado não só pelos pitagóricos na antiguidade, mas como ele também foi sendo usado ao longo da história. Além disso, encontramos diversas edificações projetadas por grandes arquitetos que fizeram uso do número de ouro. Isso mostra como esse número é importante na matemática e também na construção do mundo moderno. Seus padrões de definições foram muito bem discutidos antigamente, visto que hoje ele é um grande referencial de padrão de beleza e exatidão dentro de uma sociedade moderna. Através deste trabalho procuramos mostrar um pouco de como o número de ouro e a razão áurea vêm sendo utilizados ao longo do tempo não só na matemática, más em outras áreas como por exemplo a arquitetura.

Espero que este presente trabalho possa inspirar outras pessoas a descobrirem mais aplicações desses conceitos e para dar continuidade ao assunto dentro da arquitetura utilizando razão áurea, e assim que possa servir de conhecimento prévio para um maior aprofundamento dentro do contexto expresso na arquitetura moderna.

Referências Bibliográficas

[1] Livio, Mário. **Razão Áurea, a história de FI; Um número surpreendente.** Record. 2006.

[2] Queiroz, Rosania Maria. **Razão áurea: A beleza de uma razão surpreendente.** 2007. Disponível em: http://www.uel.br/projetos/matessencial/superior/pde/rosania-razao-aurea.pdf Acesso em 20 de Agosto de 2020

[3] Imática. **A Matemática interativa na Internet.** 2008. Disponível em: http://www.matematica.br/historia/saurea.html Acesso em 27 de Agosto 2020.

[4] Anastácio, Liliane Rezende. Monografia; Acesso em 19 de Outubro de 2020. https://www.ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/profmat/TCC%20Liliane%20Rezende%20Anastacio.pdf

[5] Razão de Ouro e Incomensurabilidade. Acesso em 28 de Novembro de 2020. https://www.spm.pt/files/clube/outros/Integrando.pdf

[6] Informações da habitação de Le Corbusier Figura Unite d'Habitation. Disponivél em https://pt.wikiarquitectura.com/constru%C3%A7%C3%A3o/unite-dhabitation-de-marselha/

[7] Mendias, Lauro Maira. Monografia. Acesso em 27 de Novembro de 2020. https://www.redalyc.org/pdf/810/81000304.pdf

[8] HUNTLEY, H. E. A Divina Proporção - Um Ensaio sobre a Beleza na Matemática. Brasília : Editora Universidade de Brasília, 1985. 178p.

[9] Caroliny Borges Lécia. Artigo, O MODULOR E OS TIPOS DE TRANSFERÊNCIA DE SEMELHANÇA. Acesso em 27 de Novembro de 2020. https://www.academia.edu/32152077/O_MODULOR_E_OS_TIPOS_DE_TRANSFER%C3%8ANCIA_DE_SEMELHAN%C3%87A_THE_MODULOR_AND_KINDS_OF_TRANSFER_OF_SIMILARITY