



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

NAYARA CABRAL DA SILVA

**Sistemas Dinâmicos: Um pouco de história, conceitos, proposta de uma aula
e um exemplo clássico**

Nova Andradina

2021

NAYARA CABRAL DA SILVA

**Sistemas Dinâmicos: Um pouco de história, conceitos, proposta de uma aula
e um exemplo clássico**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Matemática, Licenciatura da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Licenciando em Matemática sob a orientação do Prof. Luiz Oreste Cauz.

Orientador: Prof. Me. Luiz Oreste Cauz

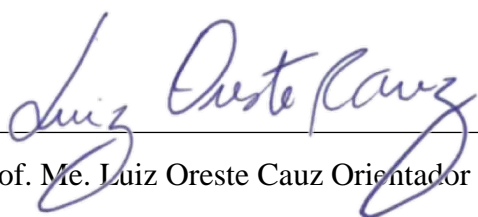
Nova Andradina

2021

Sistemas Dinâmicos: Um pouco de história, conceitos, proposta de uma aula e um exemplo clássico

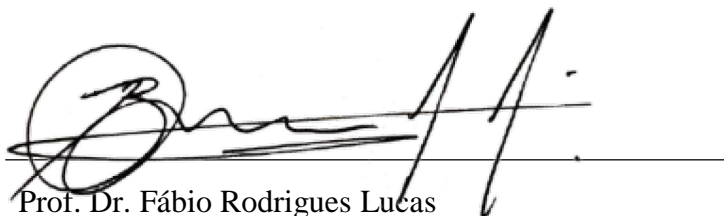
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, como requisito final para a obtenção do título de licenciada em Matemática sob a orientação do Prof. Luiz Oreste Cauz.

Banca Examinadora



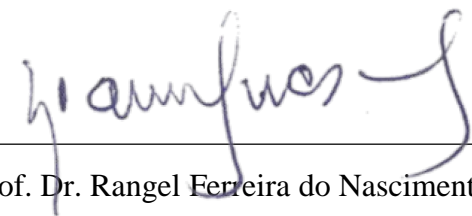
Prof. Me. Luiz Oreste Cauz Orientador

Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul



Prof. Dr. Fábio Rodrigues Lucas

Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul



Prof. Dr. Rangel Ferreira do Nascimento

Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul

Agradecimentos

A Deus por ter me dado saúde, força para superar as dificuldades as vitórias e conquistas alcançadas durante a minha vida.

Agradeço à minha mãe Neide, heroína que me deu apoio, incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço.

Também agradeço à meu marido Jhonatan, pelo incentivo, companheirismo e por toda paciência nos momentos árduos.

Ao Prof. Me. Luiz Oreste Cauz, meu orientador, pela confiança em mim depositada. Agradeço por ter acreditado no meu potencial e todas as oportunidades que foram me dadas. Você possui uma grande determinação, dinamismo e carisma, que o tornam um excelente profissional. Muito obrigado Oreste, por tudo, este trabalho tem muito de você.

Ao Prof. Dr. José Felice, por toda a ajuda prestada nos momentos em que mais precisei. Reconheço um esforço gigante com muita sabedoria que me deram recursos e ferramentas para evoluir mais a cada dia.

À esta universidade, seu corpo docente, direção e administração que oportunizaram a janela que hoje vislumbro um horizonte superior, eivado pela acendrada confiança no mérito e ética aqui presentes.

Agradeço à todos os professores por me proporcionar o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional, por tanto que se dedicaram a mim, não somente por terem me ensinado, mas por terem me feito aprender. A palavra mestre, nunca fará justiça aos professores dedicados aos quais sem nominar terão os meus eternos agradecimentos.

À todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

“Amor que exige só certos, não é amor, é matemática.”

(Autor Day Anne)

Resumo

Se todos os componentes básicos de um sistema dinâmico vibratório comportar-se linearmente, a vibração resultante é conhecida como Vibração Linear. Mais precisamente, quando as equações diferenciais que descrevem o comportamento de um sistema vibratório são lineares, o sistema vibratório é linear. Um sistema dinâmico é de tempo contínuo, se a configuração do sistema pode ser observada de forma contínua no decorrer do tempo. O estudo de vibrações é de grande importância nas diversas áreas das ciências e nas aplicações tecnológicas. Mais recentemente, muitos estudos foram motivados pela aplicação da vibração em engenharia, como projeto de máquinas, fundação, estruturas, motores, turbinas e sistemas de controles. Estes estudos são de fundamental importância, devido ao efeito devastador que as vibrações podem causar a um sistema.

Palavras-chaves: vibrações mecânicas, estabilidade, ressonância.

Abstract

If all the basic components of a dynamic vibrating system behave linearly, the resulting vibration is known as Linear Vibration. More precisely, when the differential equations that describe the behavior of a vibratory system are linear, the vibratory system is linear. A dynamic system is continuous time, if the system configuration can be observed continuously over time. The study of vibrations is of great importance in the various areas of science and in technological applications. More recently, many studies have been motivated by the application of vibration in engineering, such as machine design, foundation, structures, engines, turbines and control systems. These studies are of fundamental importance, due to the devastating effect that vibrations can have on a system.

Keywords: mechanical vibrations, stability, resonance.

Lista de figuras

Figura 1 – Variedades de um ponto de sela de um sistema não-linear. Autor (MONTEIRO, 2011)	42
Figura 2 – Representações de soluções particulares, para alguns valores de K , da função $y = x^2 + 3x + K$. Figura do Autor	50
Figura 3 – Esquema da atuação do vento e da oscilação da ponte Tacoma. Os ventos que atingiam a ponte causavam uma oscilação na pista, devido a força vertical que era exercida sobre os cabos e pilastras de sustentação da ponte. Autor (DIGITAIS, 2018)	53
Figura 4 – Ressonância Mecânica.	54
Figura 5 – Um sistema massa-mola-amortecedor. Autor (RAO, 2008)	55
Figura 6 – Soluções homogênea, particular e geral da equação da Figura [5] para um caso não amortecido. Autor (RAO, 2008)	56
Figura 7 – Comparação entre movimentos com tipos diferentes de amortecimento. Autor (RAO, 2008)	57
Figura 8 – Resposta harmônica quando $0 < \frac{\omega}{\omega_n} < 1$. Autor (RAO, 2008)	59
Figura 9 – Resposta harmônica quando $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$. Autor (RAO, 2008)	60
Figura 10 – Resposta quando $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$. Autor (RAO, 2008)	61

Lista de tabelas

Tabela 1 – Solução particular	32
---	----

Sumário

1	Introdução	11
1.1	<i>Os Primeiros Interesses pelo Estudo de Vibrações</i>	11
1.2	<i>Vibrações Mecânicas na Engenharia</i>	12
1.3	<i>Organização do Trabalho</i>	13
2	Fundamentação Teórica	14
2.1	<i>O Nascimento da Teoria de Sistemas Dinâmicos</i>	14
3	Equações Diferenciais	21
3.1	<i>Introdução as Equações Diferenciais</i>	21
3.2	<i>Equações Diferenciais de 1^a ordem de variáveis separáveis</i>	22
3.2.1	Soluções Constantes	23
3.2.2	Soluções Não-Constantes	23
3.2.3	Método prático para determinar as soluções não-constantas	24
3.2.4	Equações Diferenciais Lineares de 1 ^a ordem	25
3.2.5	Exemplos de equações diferenciais lineares de 1 ^a ordem	25
3.2.6	Equação Diferencial Linear, de 1 ^a ordem, com coeficientes constantes	26
3.2.7	Equações Diferenciais Lineares, homogêneas, de 2 ^a ordem, com coeficientes constantes	28
3.2.8	Exemplos de Equações Diferenciais Lineares, homogêneas, de 2 ^a ordem, com coeficientes constantes	29
3.2.9	Solução geral da equação homogênea no caso em que as raízes da equação característica são números complexos	29
3.2.10	Equações Diferenciais Lineares, não-homogêneas, de 2 ^a ordem, com coeficientes constantes	30
4	Noção de Sistemas Dinâmicos	33
4.1	<i>Estudos sobre equações lineares</i>	33
4.2	<i>Técnicas de análise</i>	33
4.3	<i>Espaço de fases</i>	34
4.4	<i>Sistemas autônomos e não autônomos</i>	34

4.5	<i>Sistema Autônomo</i>	35
4.6	<i>Sistemas Não Autônomos</i>	35
4.7	<i>Noções de estabilidade</i>	36
4.8	<i>Ponto de equilíbrio e estabilidade no sentido de Lyapunov</i>	36
4.9	<i>Autovalores e Autovetores</i>	37
4.10	<i>Estabilidade do ponto de equilíbrio e topologia do retrato de fases</i>	37
4.11	<i>Sistemas Dinâmicos</i>	38
4.12	<i>Sistemas Lineares</i>	38
4.13	<i>Teoremas Locais para Sistemas Não Lineares</i>	40
4.14	<i>Teorema das Variedades Hiperbólicas</i>	40
4.15	<i>Teoria da Variedade Central</i>	42
4.16	<i>Teoremas da Variedade Central</i>	42
4.17	<i>Introdução aos estudos de bifurcações</i>	43
4.18	<i>Bifurcação Transcrítica</i>	44
4.19	<i>Bifurcação de Forquilha</i>	45
5	Problemas sobre Sistemas Dinâmicos	47
5.1	<i>O desabamento da ponte Tacoma Narrows como proposta de uma atividade prática de uma aula</i>	47
5.2	<i>Introdução</i>	47
5.3	<i>Objetivos Gerais e Específicos</i>	48
5.4	<i>Objetivos Gerais</i>	48
5.5	<i>Objetivos Específicos</i>	49
5.6	<i>Qual a importância de se estudar EDO?</i>	49
5.7	<i>Desenvolvimento da situação problema:</i>	50
5.8	<i>Classificação de Equações Diferenciais</i>	51
5.9	<i>Estudo de Vibração do Sistema Massa-Mola-Amortecedor Excitado Harmonicamente</i>	54
6	Considerações Finais	62
	REFERÊNCIAS	63

1 Introdução

1.1 Os Primeiros Interesses pelo Estudo de Vibrações

Surgiu o interesse pela vibração quando foram descobertos os primeiros instrumentos musicais, possivelmente apitos ou tambores. O filósofo e matemático grego Pitágoras é considerado o primeiro a investigar os sons musicais com base científica. Ele realizou experimentos com uma corda vibratória utilizando um instrumento simples denominado monocórdio, observou-se que, se duas cordas iguais de comprimentos diferentes forem sujeitas à mesma tensão, a mais curta emite uma nota mais aguda, além disso se o comprimento da corda mais curta for a metade do comprimento da mais longa, a mais curta emitirá uma nota uma oitava acima da outra. Entretanto, Pitágoras não deixou nenhum relato escrito em seu trabalho, embora o conceito de tonalidade já estivesse desenvolvido na época de Pitágoras, sua relação com a frequência de vibração do corpo sonoro não era compreendida. Na verdade, a relação entre tonalidade e frequência não foi compreendida até a época de Galileu no século XVI d.C.

Galileu Galilei é considerado o fundador da ciência experimental moderna, e portanto, o século XVI costuma ser considerado o “século do gênio”, uma vez que os fundamentos da filosofia e da ciência moderna foram lançados durante este período. Ele teve a ideia de estudar o comportamento de um pêndulo simples observando os movimentos pendulares de uma lâmpada em uma igreja de Pisa. Certo dia, entediado durante um sermão, Galileu estava olhando para o teto dessa igreja, quando uma lâmpada que balançava chamou sua atenção. Ele começou a medir o período dos movimentos pendulares da lâmpada com sua própria pulsação e, para seu espanto, constatou que o período era independente da amplitude das oscilações. Ele descreveu a dependência entre a frequência e vibração e o comprimento de um pêndulo simples, juntamente com o fenômeno das vibrações solidárias (ressonância).

Muitos problemas básicos de mecânica, incluído os de vibrações, são não lineares. Embora os tratamentos lineares comumente adotados sejam bastante satisfatórios para a maioria das finalidades, não são adequados em todos os casos. Em sistemas não lineares podem ocorrer fenômenos que são teoricamente impossíveis em sistemas lineares. A teoria matemática de vibrações não lineares começou a desenvolver-se com o trabalho de Poincaré e Lyapunov no final do século XIX d.C. Poincaré desenvolveu o método de perturbação em

1892 em conexão com a solução aproximada de problemas de mecânica celeste não lineares. Até 30 anos atrás, estudos de vibrações, mesmo os que tratavam de complexos sistemas de engenharia, eram realizados com a utilização de modelos grosseiros, com apenas alguns graus de liberdade.

1.2 *Vibrações Mecânicas na Engenharia*

De acordo com (RAO, 2008), na maioria das atividades humanas ocorrem movimentos vibratórios. Por exemplo, os sons que são captados pela vibração dos tímpanos, a respiração associada à vibração dos pulmões, o movimento oscilatório das pernas ao caminhar.

Os primeiros estudos sobre vibrações eram concentrados no sentido de entender os fenômenos naturais e de desenvolver teorias matemáticas para descrever o movimento vibratório de determinados sistemas físicos. Mais recentemente, muitos estudos foram motivados pela aplicação da vibração em engenharia, como projeto de máquinas, fundação, estruturas, motores, turbinas e sistemas de controle.

A maioria dos motores tem problemas de vibração devido ao desbalanceamento inerentes aos motores. O desbalanceamento de motores a diesel, por exemplo, podem causar ondas terrestres de potência suficiente para causar incômodo em áreas urbanas. Vibrações em turbinas podem causar falhas mecânicas. Os engenheiros ainda não conseguiram evitar as falhas que resultam das vibrações das pás e do rotor das turbinas. Naturalmente, as estruturas projetadas para apoiar motores e turbinas, ou máquinas alternativas como motores a gás e a vapor, também estão sujeitas a vibrações. Em todas essas situações, a estrutura componente da máquina sujeita à vibração pode falhar devido à fadiga do material e portanto toda a estrutura pode entrar em colapso. Além disso, vibrações excessivas podem causar desgastes mais rápidos de peças ou mesmo afrouxar porcas e parafusos. Em processo de cortes (como metais e madeiras), a vibração pode causar trepidação, resultando em mau acabamento superficial.

Outra questão importante a considerar é o efeito de ressonância. Sempre que a frequência natural de vibração de uma estrutura ou de uma máquina coincidir com a frequência da excitação provocada por uma força externa, ocorre um fenômeno conhecido como ressonância, que resulta em deflexões excessivas e falha. Um dos exemplos clássicos

sobre o efeito de ressonância é o caso do colapso da Ponte de Tacoma Narrows. Em primeiro de julho de 1940, a ponte de Tacoma, localizada no estado de Washington, EUA, foi aberta ao tráfego. Logo na inauguração, ela exibiu oscilações verticais que se tornaram uma atração turística. Em 7 de novembro do mesmo ano, sob ação de um vento de menos de 70 km/h, ela rompeu-se e veio a cair, após balançar violentamente por quatro horas.

Devido ao efeito devastador que as vibrações podem causar a máquinas e estruturas, testes de vibrações e pesquisas científicas se tornaram de grande importância na maioria dos sistemas de engenharias.

Como as pesquisas científicas se voltam a estudos de modelos matemáticos que representam essas estruturas, a maioria das pesquisas estão concentradas em matemáticos, físicos e engenheiros.

1.3 Organização do Trabalho

No capítulo 1, apresentam-se de maneira informal alguns fatos, acontecimentos, várias pessoas e conceitos que contribuíram para o surgimento da Teoria de Sistemas Dinâmicos. Coincidindo com a origem da Mecânica Clássica, um ramo da Física que envolve os movimentos de corpos macromoleculares deslocando-se com velocidades pequenas, comparadas à velocidade da luz.

O capítulo 2 apresenta a Fundamentação Teórica na qual a pesquisa descrita neste trabalho se insere. Abordando a temática de Sistemas Dinâmicos e sua evolução.

No capítulo 3, apresentam-se a introdução as equações diferenciais de primeira ordem, seus tipos e exercícios resolvidos.

No capítulo 4, apresentam-se conceitos de sistemas dinâmicos, sistemas lineares, sistemas autônomos e não autônomos e alguns teoremas.

No capítulo 5, apresentam-se os problemas envolvendo os sistemas dinâmicos e algumas de suas soluções.

No capítulo 6 é apresentado as considerações finais deste trabalho.

2 Fundamentação Teórica

O objetivo desse capítulo é relatar uma abordagem histórica sobre a teoria de sistemas dinâmicos. Entretanto temos algumas teorias incorretas historicamente, a princípio, que foram de suma importância para as versões usualmente.

2.1 O Nascimento da Teoria de Sistemas Dinâmicos

Conforme (MONTEIRO, 2011), Aristóteles, foi um dos principais filósofos clássicos, através da sua enorme produção bibliográfica, onde organizou diversas formas de conhecimento, concebeu uma visão de realidade que se aplicou durante séculos. Nos seus estudos realizados de forma sistematizada, referiu-se a várias ciências, tais como: a Ética, Física, Metafísica entre outras. Provavelmente, sua principal contribuição tenha sido a formulação de uma base para o pensamento lógico: uma coleção de regras metodológicas que devem ser empregadas na construção de um discurso coerente. Aristóteles em sua filosofia dedutiva e embasada em “verdades evidentes” partindo de hipóteses e axiomas para conclusões, ou seja, do particular para o geral através de um raciocínio lógico-verbal. Ele propôs 3 leis que regem o movimento dos corpos, são elas:

1. Para um corpo se manter em movimento, é necessária a ação de uma força se a força for removida, o corpo vai para o repouso;
2. A velocidade de um corpo é proporcional à intensidade da força que atua sobre ele;
3. Se corpos de mesmo volume são soltos de uma mesma altura, então o mais pesado atinge o solo antes do mais leve.

Na Física e na Astronomia, ele teve seu maior mérito por tentar solucionar algumas questões sobre o funcionamento do universo do que pelas suas respostas propriamente ditas, acreditava-se que as leis que governam o movimento do firmamento são diferentes das leis que governam o movimento na terra.

Seu modelo astronômico pode ser assim resumindo:

1. O Universo é finito e esférico: esférico porque é perfeito, e a esfera é a forma mais perfeita; finito porque ele tem um centro, a saber, o centro da Terra, e um corpo com centro não pode ser infinito;

2. Empédocles, (foi um filósofo e pensador pré-socrático grego e cidadão de Agrigento, na Sicília. É conhecido por ser o criador da teoria cosmogênica dos quatro elementos clássicos: terra, fogo, água e ar que influenciou o pensamento ocidental de uma forma ou de outra, até quase meados do século XVIII), havia afirmado que o Universo é formado por quatro elementos básicos: terra, ar, fogo e água. Um século depois, Aristóteles postulou a existência de um quinto elemento – o éter ou a quinta – essência – como o principal constituinte do firmamento. Esse elemento não pode ser gerado, nem decomposto; é eterno, transparente e sem viscosidade. Sua constituição permite que os corpos celestes se movam através dele sem sofrerem resistência. O éter existe na sua forma mais pura nas regiões celestes, e torna-se adulterado na região abaixo da Lua. Assim, para Aristóteles, há uma distinção entre o mundo sublunar, onde ocorrem mudanças, e mundo eterno e imutável do firmamento;
3. Três tipos de movimento são possíveis: o retilíneo, o circular e o misto. Cada um dos quatro elementos sublunares possui um “lugar natural”. Quando tirado desse lugar, o elemento tende a voltar a ele, deslocando-se em linha reta. Assim, terra e água movem-se naturalmente para o centro da terra; ar e fogo caminham naturalmente no sentido oposto. Aliás, a forma esférica da Terra deve-se ao movimento natural dos elementos pesados. O movimento dos corpos depende da sua composição, ou seja, é função da proporção dos elementos naturais. Tal movimento é classificado como misto. O éter e os corpos celestes movem-se naturalmente em circunferências, a figura geométrica perfeita;
4. As órbitas dos planetas, da Lua e do Sol estão contidas em superfícies esféricas que são continuamente movidas pelo “motor primário”, a esfera celeste mais externa, localizada além da esfera de estrelas fixas. O centro de todas essas cascas esféricas coincide com o centro da Terra, que permanece eternamente em repouso. O céu é um local perfeito, com seus corpos celestes movendo-se em circunferências e com velocidade constante.

Tendo em vista que essa visão aristotélica sobre a mecânica celeste é bastante incompleta, pois tem um caráter apenas qualitativo. Não se tem previsões quantitativas sobre a localização dos planetas; sua teoria nada diz sobre quando e onde achá-los.

As ideias de Aristóteles foram de suma importância, pois serviram de base para Ptolomeu propor seu modelo geocêntrico, que segundo ele, a Terra ocupa o centro do

Universo, e os demais astros estão dispostos na seguinte ordem: Lua, Mercúrio, Vênus, Sol, Marte, Júpiter, Saturno e estrelas fixas. Urano, Netuno e Plutão não tinham ainda sido descobertos. Assim, no modelo de Ptolomeu, cada planeta percorre uma órbita circular que é chamado de epiciclo, centrada num ponto que gira em movimento circular e uniforme ao redor da Terra. Com esse artifício, consegue-se explicar o movimento retrógrado dos planetas que é, às vezes, observado. As previsões quantitativas do modelo de Ptolomeu, (foi um importante cientista grego, nascido no Egito e com cidadania romana que viveu entre os séculos I e II d.C., contribuindo significativamente em áreas do conhecimento como a matemática (álgebra, trigonometria, geometria), geografia, cartografia, astrologia, astronomia, óptica e teoria musical), concordavam com os dados observacionais da época. Não foi à toa que seu modelo prevaleceu por mais de 14 séculos!

No entanto, com o passar do tempo, as observações foram se tornando cada vez mais precisas e o modelo dos epiciclos passou a ser constantemente reelaborado, a fim de conseguir explicar quantitativamente o movimento dos planetas. Vários epiciclos acabaram sendo incorporados a um único planeta. Para preservar a ideia de que os planetas movem-se em circunferências, conjecturou-se que um planeta girava em torno de um ponto, que girava em torno de um ponto, que girava em torno de um ponto... que girava em torno da Terra!

Em 1600, residindo em Praga, como matemático imperial da corte do imperador, Brahe encarregou Kepler, jovem astrônomo alemão, seu discípulo e sucessor, de estudar a órbita de Marte a partir de dados obtidos durante os últimos 20 anos. Estas informações foram essenciais para Kepler desenvolver suas leis.

O dinamarquês Tycho Brahe¹ (1546-1601) foi o maior observador astronômico anterior à utilização do telescópio. Em 1572 descreveu o aparecimento de uma supernova, que era visível até durante o dia. Em 1577 observou um cometa e provou que não era um fenômeno atmosférico como se pensava na época. Tais observações contrariavam o dogma aristotélico da imutabilidade dos céus.

Suas medidas, realizadas a olho nu, foram as mais precisa antes da invenção do telescópio: o erro de suas observações era de 2 minutos de arco, o limite de resolução do olho humano. Esse erro equivale a cerca de 1/15 do diâmetro aparente da Lua. As medidas anteriores tinham erro de 10 minutos de arco. Esses dados observacionais de Brahe ajudaram a consolidar o modelo planetário proposto por N. Copérnico, (foi um

¹ (<http://www.if.ufrgs.br/cref/maikida/biobrahe.htm>)

astrônomo, matemático, médico e religioso polonês. Desenvolveu a teoria heliocêntrica, na qual colocava o sol no centro do Sistema Solar). No modelo de Copérnico, o Sol ocupa o centro das órbitas circulares e a terra é apenas mais um planeta do Sistema Solar.

O modelo heliocêntrico era conceitualmente mais simples do que a infinidade de epiciclos de Ptolomeu, mas, no início, esse modelo era menos preciso.

Brahe especulou que o modelo de 1577 podia percorrer um caminho não circular, o que violava a perfeição do mundo aristotélico. E além disso, sua observação de uma supernova mais brilhante do que Vênus, em 1572, contrariou a concepção de um céu imutável. Outra supernova foi observada, em 1604, por J.Kepler, que começou a trabalhando como assistente de Brahe, já no final de sua carreira. As últimas palavras de Brahe para Kepler foram: “não deixe que minha vida tenha sido em vão”.

Kepler, respeitava os dados observacionais e trabalhou muito até obter um modelo cujas previsões concordassem com as observações de Brahe. Seu ponto de partida foi o modelo de Copérnico, no qual o Sol está no centro das órbitas circulares dos planetas. Perceba que esse modelo ainda está impregnado das ideias aristotélicas, que procuravam explicar a cinemática celeste em termos de movimentos circulares e uniformes. Infelizmente Kepler teve que abandonar suas ideias. E esse abandono foi motivado pela órbita de Marte, que, se considerada circular, desvia-se cerca de 8 minutos de arco, comparando-se com as medidas de Brahe. Copérnico não foi capaz de perceber essa discrepância, em virtude da “baixa” precisão de seus dados.

Após anos trabalhado com os dados de Brahe e testando diversos modelos, Kepler descobriu que se obtém uma concordância praticamente perfeita tomando-se a órbita de Marte como elíptica.

Uma elipse é uma curva definida num plano de modo que, para qualquer ponto dessa curva, a soma das distâncias entre esse ponto e dois pontos especiais, chamados de focos, mantém-se constante. Os focos estão contidos na reta que passa pelos dois pontos da elipse que estão mais afastados. Metade do comprimento dessa distância é chamada de semieixo maior da elipse e vale a . Um foco está separado do centro da elipse por uma fração desse semieixo maior, dada pelo produto ae , sendo e a excentricidade da elipse. Portanto defini-se excentricidade como a distância entre o centro e um foco, dividida por a . Para uma elipse, $0 < e < 1$; ; para uma circunferência, $e = 0$;

Na verdade, Kepler percebeu que todos os planetas, e não apenas Marte, pareciam seguir órbitas elípticas. Em seu livro publicado em 1609, ele propôs que:

1. Os planetas descrevem órbitas elípticas, com o Sol num foco;
2. Uma reta imaginária ligando um planeta ao Sol percorre áreas iguais durante intervalos iguais de tempo. A primeira lei rompe com a ideia de movimentos celestes exclusivamente circulares. A segunda lei contraria a concepção de movimentos celestes uniformes, já que ela implica que um planeta altera sua velocidade, de acordo com sua distância em relação ao Sol.

Em 1619, no livro *Harmonices Mundi*, depois de exaustivos cálculos com frações e inúmeras tentativas de relacionar o período de translação T de um planeta com alguma propriedade geométrica da órbita elíptica, Kepler divulgou sua terceira lei, após descobrir que a razão T^2/R^3 (uma conta difícil de ser feita) é a mesma para todos os planetas. Aqui, R representa o semieixo maior da elipse. O Sistema Solar foi considerado o protótipo da ordem.

Conforme (TIPLER; MOSCA, 2009), as leis de Kepler podem ser consideradas como as últimas contribuições para a Mecânica Celeste de caráter puramente cinemático, isto é, sem levar em consideração as forças que governam os movimentos.

Galileu Galilei, contemporâneo de Kepler, foi o pioneiro no uso do telescópio, para estudos sobre os corpos celestes. No período entre 1609 e 1610, Galileu observou irregularidades na superfície lunar, a rotação das manchas solares, as fases de Vênus, quatro satélites de Júpiter e uma infinidade de estrelas invisíveis a olho nu.

Alguns anos antes de realizar essas observações astronômicas, Galileu começou a se interessar pela teoria do movimento. Sem uma Terra fixa no centro do Universo, as leis aristotélicas do movimento não se sustentavam. Além disso, o tratamento dado por Aristóteles para esse problema tinha sido puramente verbal, ou seja, baseado em verdades aparentes óbvias. Galileu, desconfiado das conclusões aristotélicas, adotou uma abordagem inédita. Sentindo a necessidade de criar um procedimento experimental, um método para medir determinadas grandezas dos corpos em movimento, com o objetivo de verificar a validade das proposições teóricas. Essas análises quantitativas de experiência realizadas com pêndulos simples, projéteis lançados obliquamente, e corpos deslizando sobre planos inclinados, ou caindo livremente, refutaram as leis da física de Aristóteles.

Galileu introduziu conceitos de Dinâmica, a teoria que trata das causas do movimento. Ele antecipou a lei da inércia, ao perceber que a ação de uma força necessária para mudar o movimento de um corpo, mas não para mantê-lo deslocando-se em linha

reta e com velocidade constante, sobre um plano horizontal sem atrito. Teve a ideia de usar planos inclinados para mostrar que corpos caem com uma aceleração que é constante e que independe do valor de suas massas. O plano inclinado foi o artifício encontrado para reduzir a aceleração dos corpos, tornando o movimento mais lento e as medidas mais precisas. Galileu descobriu que as distâncias percorridas em intervalos consecutivos de tempo são proporcionais aos números ímpares 1,3,5,7 etc. Portanto, a distância total, aquela que corresponde à soma de intervalos consecutivos de tempo, é proporcional a $1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7$ etc, ou seja, ao quadrado dos números inteiros 1,2,3,4 etc. Desse resultado, Galileu concluiu que a distância percorrida é proporcional ao quadrado do tempo gasto, e que a velocidade aumenta proporcionalmente com o tempo; isto é, o movimento estudado é uniforme e acelerado. Se a aceleração dos corpos deslizando num plano inclinado é constante, então a aceleração da gravidade g também é, já que a primeira é simplesmente uma componente da segunda, dependendo apenas do valor de g e do ângulo formado entre o plano e a horizontal. Desse modo, Galileu notou que a força que age sobre um corpo é proporcional à sua aceleração, e não à velocidade, como Aristóteles sugeria, cerca de 2000 anos antes. Conforme as previsões de Galileu, todos os corpos caem segundo uma mesma aceleração gravitacional, na ausência da resistência do ar. Torricelli, nas suas tentativas de criar o vácuo, com o intuito de realizar o experimento proposto por Galileu, acabou inventando o barômetro de mercúrio.

Aparentemente, Galileu soltou corpos de massas diferentes do alto da Torre de Pisa para mostrar a validade de suas conclusões. Mas, certamente, seus resultados, tirados de experimentos sobre a cinemática de corpos caindo ou balançando sob a ação da gravidade, constituem o ponto de partida da Teoria dos Sistemas Dinâmicos.

Em 1655, a peste bubônica, que causou a morte de mais de 15% da população de Londres, forçou o fechamento das universidades inglesas. Isaac Newton, foi um cientista, filósofo, físico, matemático, astrônomo, alquimista e teólogo inglês e um dos maiores cientistas da história. Deixou importantes contribuições, principalmente na Física e na Matemática, que, em abril, receberia o título de bacharel da Universidade de Cambridge, foi obrigado a retornar para a sua casa, no interior da Inglaterra, onde ficou até 1667. Durante 18 meses, Newton se comprometeu a resolver 22 questões que ele mesmo havia elaborado. Com essa motivação, Newton concebeu o Cálculo Diferencial e Integral; propôs as três leis a respeito dos efeitos de uma força sobre o movimento de um corpo; deduziu a lei da gravitação universal, a partir das leis de Kepler do movimento planetário; fez trabalhos

sobre séries binomiais; realizou experiências com prismas, observando a decomposição da luz branca; propôs que a luz é de natureza corpuscular e descobriu sua polarização; construiu o primeiro telescópio refletor (baseado em espelhos e não em lentes, a fim de evitar a aberração cromática). Ao voltar para Cambridge, na condição de professor, deu uma aula inaugural sobre sua teoria das cores que, segundo relatos, não causou grande impacto.

Em 1672, Newton publicou seu primeiro trabalho sobre a decomposição espectral da luz branca, sendo duramente criticado por Robert Hooke, que foi um cientista inglês, essencialmente mecânico e meteorologista nascido em Freshwater, na Isle of Wight, que formulou a teoria do movimento planetário e a primeira teoria sobre as propriedades elásticas da matéria, defendia a existência de apenas duas cores básicas: o azul e o vermelho. Para Hooke, as cores intermediárias eram geradas por distorções que ocorriam nas refrações. Newton sustentava a existência de uma infinidade de cores, e que cada cor não era modificada por refrações, embora cada uma se refratasse com um ângulo diferente. Aparentemente, essa controvérsia levou Newton a perder o interesse e a vontade de publicar seus demais trabalhos.

3 Equações Diferenciais

O objetivo desse capítulo é apresentar os conceitos sobre equações diferenciais juntamente com métodos de resoluções.

3.1 Introdução as Equações Diferenciais

Conforme (ZILL; CULLEN, 2008), as equações algébricas são equações da forma de polinômios com coeficientes constante.

As incógnitas são submetidas apenas às chamadas operações algébricas, ou seja, soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação inteira e radiciação, utilizando letras e números.

Por exemplo:

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \quad (1)$$

Reescrevendo a equação temos:

$$(x + 2)(x + 1) = 0 \quad (2)$$

Portanto sua solução são as raízes de uma equação polinomial, que tem como as raízes $x = -2$ ou $x = -1$.

Para resolver uma equação algébrica temos que a sua solução é o conjunto de todas as raízes e esse conjunto é o conjunto solução dessa equação, e identificamos o grau desta equação através do grau do seu polinômio respectivo. Já as equações diferenciais se torna um pouco diferente, vejamos.

Equação diferencial é uma equação que apresenta derivadas ou diferenciais de uma função desconhecida (a incógnita da equação).

Por exemplo:

$$\ddot{y} + 2\dot{y} = 3y \quad (3)$$

Funções que satisfaz o exemplo dado:

1. $y_1(x) = e^{-3x} \therefore y_1$ é uma solução desta equação, mas podendo ter outras.
2. $y_2(x) = e^x \therefore y_2$ também é uma solução.

A solução de uma equação diferencial é uma função que não contém derivadas nem diferenciais e que satisfaz a equação dada (ou seja, a função que, substituída na equação dada, a transforma em uma identidade). E o grau desta equação identificamos de acordo com a ordem de sua derivada.

3.2 Equações Diferenciais de 1ª ordem de variáveis separáveis

Para (GUIDORIZZI, 2000), por uma equação diferencial de 1ª ordem de variáveis separáveis entendemos uma equação da forma

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x) \quad (4)$$

onde g e h são definidas em intervalos abertos I_1 e I_2 , respectivamente.

OBS:

$\frac{dx}{dt}$ é coeficiente diferencial e $g(t)h(x)$ é dado por um produto.

Uma solução da Equação (4) é uma função $x = x(t)$ definida no intervalo aberto I , $I \subset I_1 \forall t$ em I .

$$x'(t) = g(t)h[x(t)] \quad (5)$$

Exemplo 1:

$$\frac{dx}{dt} = tx^2 \quad (6)$$

Solução: é uma equação diferencial de 1ª ordem de variáveis separáveis.

$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$; onde $g(t) = t$ e $h(x) = x^2$.

Exemplo 2:

$$\frac{dx}{dt} = t^2 + x^2 \quad (7)$$

Solução: é uma equação diferencial de 1ª ordem, mas não de variáveis separáveis, pois temos uma soma em $t^2 + x^2$.

Exercício de equação diferencial de 1ª ordem de variáveis separáveis.

Verifique que a função dada é solução da equação dada:

$$x(t) = 4 \text{ e } \frac{dx}{dt} = t(x^2 - 16)$$

Solução:

$$x'(t) = g(t)h[x(t)]$$

$$x(t) = 4$$

$$x'(t) = 0$$

$$x'(t) = g(t)h[x(t)]$$

$0 = 0 \therefore$ a função $x(t) = 4$ é solução da equação dada.

3.2.1 Soluções Constantes

Consideramos a equação de variáveis separáveis $\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$ com g e h definidas em intervalos abertos I_1 e I_2 , e g não identicamente nula em I_1 .

$$x(t) = a, t \in I_1 \tag{8}$$

$x(t) = a$ é a solução se, e somente se, a for a raiz da equação $h(x) = 0$.

Exemplo 1: Determinar as soluções constantes de $\frac{dx}{dt} = t(1 - x^2)$.

Solução:

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$$

$$g(t) = t$$

$$h(x) = 1 - x^2$$

então,

$h(x) = 1 - x^2$; $h(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0$. Como $1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$.

Resulta que

$x(t) = 1$ e $x(t) = -1 \therefore$ são soluções constantes da equação.

3.2.2 Soluções Não-Constantes

O teorema a seguir será útil na determinação das soluções não-constantes.

Teorema 3.2.1 (Solução não-constantes) $\frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$

onde g e h são definidas em intervalos abertos I_1 e I_2 , respectivamente, com g contínua em I_1 e h' contínua em I_2 . Nestas condições, se $x = x(t)$, $t \in I$, for solução não-constante do Teorema 3.2.1, então, para todo t em I , $h(x(t)) \neq 0$

3.2.3 Método prático para determinar as soluções não-constantes

Seja a equação:

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x) \quad (9)$$

com g e h nas condições do teorema anterior. Temos um roteiro prático para determinar as soluções não constantes de (9).

$$\frac{dx}{dt} = g(t)h(x) \quad (10)$$

$$dx = g(t)h(x)dt \quad (11)$$

$$\frac{1}{h(x)}dx = g(t)dt \quad (12)$$

$$\int \frac{1}{h(x)} \frac{dx}{dt} dt = \int g(t)dt \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{h(x)} dx = \int g(t)dt \quad (14)$$

$$H(x) = G(t) + c \quad (15)$$

Exercício para determinar as soluções não-constantes pelo método prático.

Exercício. Resolva

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 1$$

Solução:

De início, vamos determinar as soluções constantes.

$$h(x) = x^2 + 1; h(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 0. \text{ Como } x^2 = -1.$$

Não admite solução constante, pois $h(x) = x^2 + 1$ não admite raiz real.

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + 1 \quad (16)$$

$$dy = (x^2 + 1)dx \quad (17)$$

$$\int dy = \int (x^2 + 1)dx \quad (18)$$

$$y = \frac{x^3}{3} + x + c \quad (19)$$

3.2.4 Equações Diferenciais Lineares de 1ª ordem

Por uma equação diferencial de 1ª ordem entendemos uma equação do tipo

$$\frac{dx}{dt} = xg(t) + f(t) \quad (20)$$

em que g e f são funções dadas, contínuas e definidas num mesmo intervalo I .

Observe que na equação linear tanto a variável dependente como sua derivada ocorrem de grau 1.

Se $f(t) = 0$ em I , a equação (20) é de variáveis separáveis e a solução geral será

$$x = Ke^{G(t)} (K \in \mathbb{R}) \quad (21)$$

em que G é uma primitiva de g em I . Por simplicidade, escrevemos;

$$x = Ke^{\int g(t)dt} (K \in \mathbb{R}) \quad (22)$$

em que $\int g(t)dt$ estará representando, então, uma particular primitiva de g .

3.2.5 Exemplos de equações diferenciais lineares de 1ª ordem

$\frac{dx}{dt} = xt + 1$ é linear de 1ª ordem; onde $g(t) = t$ e $f(t)=1$.

$\frac{dx}{dt} = xt^2$ é linear de 1ª ordem (é também de variáveis separáveis); onde $g(t) = t^2$ e $f(t) = 0$.

$\frac{dx}{dt} = 5x^2 = \text{sent}$ não é linear (também não é de variáveis separáveis).

O que é o fator integrante?

É uma função tal que o produto de E.D.O. por ela faz com que o lado esquerdo da equação possa ser visto como a derivada do produto de duas funções, isto é, o Método do Fator Integrante para resolução de E.D.O. lineares de 1^a ordem que consiste em supor que exista uma função $u(x)$ tal que, $u(x)y' + u(x)p(x)y = u(x)q(x)$.

Exemplo de equações diferenciais lineares de 1^a ordem com fator integrante

Resolva a equação $\frac{dx}{dt} = 3x + 4$

Solução:

$$g(t) = 3$$

$$f(t) = 4$$

1. Devemos calcular o fator integrante.

O fator integrante é $e^{-\int g(t)dt} = e^{-\int 3dt} = e^{-3t}$

2. Multiplicar toda a equação pelo fator integrante.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x + 4 \\ \frac{dx}{dt}e^{-3t} &= (3x + 4)e^{-3t} \\ \left(\frac{dx}{dt} - 3x\right)e^{-3t} &= 4e^{-3t} \\ \int \frac{d}{dt}[xe^{-3t}]dt &= \int 4e^{-3t}dt \\ xe^{-3t} &= 4 \int e^{-3t}dt + K \\ xe^{-3t} &= -\frac{4}{3}e^{-3t} + K \\ x &= -\frac{4}{3}\frac{e^{-3t}}{e^{-3t}} + \frac{K}{e^{-3t}} \\ x &= -\frac{4}{3} + Ke^{-3t} \Rightarrow x = Ke^{-3t} - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

3.2.6 Equação Diferencial Linear, de 1^a ordem, com coeficientes constantes

Dado um número a e uma função f definida e contínua num intervalo I . Uma E.D. Linear de 1^a ordem, com coeficientes constantes, é uma equação da forma:

$$\frac{dx}{dt} + ax = f(t) \tag{23}$$

Multiplicando ambos os membros de (23) pelo fator integrante e^{at}

$$e^{at} \frac{dx}{dt} + axe^{at} = e^{at} f(t) \quad (24)$$

$$\left(\frac{dx}{dt} + ax \right) e^{at} = e^{at} f(t) \quad (25)$$

$$\int \frac{d}{dt} [xe^{at}] dt = \int e^{at} f(t) dt \quad (26)$$

$$xe^{at} = K + \int e^{at} f(t) dt \quad (27)$$

ou

$$x = \frac{\int e^{at} f(t) dt}{e^{at}} + \frac{K}{e^{at}} \quad (28)$$

$x = Ke^{-at} + e^{-at} \int e^{at} f(t) dt$; com K constante.

As soluções de

$$\frac{dx}{dt} + ax = f(t) \quad (29)$$

são da forma

$x = Ke^{-at} + e^{-at} \int e^{at} f(t) dt$; com K constante.

Exercício de Equação Diferencial Linear, 1^a ordem, com coeficientes constantes.

Ache a solução geral.

$$\frac{dT}{dt} = 3T + 2$$

Solução:

$$a = -3 \Rightarrow e^{-3t}$$

$$f(t) = 2$$

$$\frac{dT}{dt} - 3T = 2$$

$$\left(\frac{dT}{dt} - 3T \right) e^{-3t} = 2e^{-3t}$$

$$\int \frac{d}{dt} [Te^{-3t}] dt = \int 2e^{-3t} dt$$

$$Te^{-3t} = -\frac{2}{3}e^{-3t} + k$$

$$T = Ke^{3t} - \frac{2}{3}; \text{ com } K \text{ constante.}$$

3.2.7 Equações Diferenciais Lineares, homogêneas, de 2ª ordem, com coeficientes constantes

É uma equação da forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = f(t) \quad (30)$$

se $f(t) = 0$ em I , a equação é homogênea

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0 \quad (31)$$

Transformando (31) em equação algébrica associada, temos:

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (32)$$

Se diz que é equação característica de (31).

Observando a equação algébrica (32), podemos afirmar que:

Temos duas raízes λ_1 e λ_2 .

Se λ_1 for raiz real de (32) então

$$x = e^{\lambda_1 t} \text{ será solução de (31). De fato, } \forall t$$

Conhecendo as raízes da equação característica, conhecemos, também, a solução geral da equação homogênea (31).

Teorema

Suponhamos que as raízes λ_1 e λ_2 da equação característica (32) sejam reais. Então

1. Se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, a solução geral da equação homogênea (31) será:

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} (A, B \in \mathbb{R}) \quad (33)$$

2. Se $\lambda_1 = \lambda_2$, a solução geral será: x

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Bte^{\lambda_1 t} (A, B \in \mathbb{R}) \quad (34)$$

3.2.8 Exemplos de Equações Diferenciais Lineares, homogêneas, de 2^a ordem, com coeficientes constantes

Exemplo 4: Resolva a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 9x = 0 \quad (35)$$

Solução:

$$\lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3 \quad (36)$$

A solução geral da equação é

$$x = Ae^{3t} + Be^{-3t} \quad (37)$$

3.2.9 Solução geral da equação homogênea no caso em que as raízes da equação característica são números complexos

Estudando inicialmente a equação

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \quad (38)$$

A solução geral de (38) onde $\omega \neq 0$ é um real dado, é

$$x = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t \quad (A, B \in \mathbb{R}) \quad (39)$$

Teorema:

Seja a equação (b e c reais dados)

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \quad (40)$$

e suponha que as raízes da equação característica $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ sejam complexos

($\lambda = \alpha \pm \beta i$ onde $\alpha = -\frac{b}{2}$ e $\beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$).

Onde Δ é dado por:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Então a solução geral de (40) será:

$$x = e^{\alpha t}(A \cos \beta t + B \operatorname{sen} \beta t) \quad (A, B \in \mathbb{R}) \quad (41)$$

Exercício de equação homogênea no caso em que as raízes da equação característica são números complexos

Resolva a equação

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 5x = 0$$

Solução:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$

$$\Delta = -16$$

$$\lambda = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i, \quad \omega = -1 \text{ e } \beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

Solução geral

$$x = e^{\omega t}[A \cos \beta t + B \operatorname{sen} \beta t]$$

$$x = e^{-t}[A \cos 2t + B \operatorname{sen} 2t]$$

3.2.10 Equações Diferenciais Lineares, não-homogêneas, de 2ª ordem, com coeficientes constantes

Consideramos a equação linear, de 2ª ordem, com coeficientes constantes

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = f(t) \quad (42)$$

onde f é suposta definida e contínua num intervalo I . Se f não for identicamente nula em I , diremos que (42) é não-homogênea. Diremos, ainda, que

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0 \quad (43)$$

é a equação homogênea associada a (42).

Conclusão: A solução geral de

$$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t) \quad (44)$$

é

$$x = x_h + x_p \quad (45)$$

onde x_p é uma solução particular da equação dada e x_h a solução geral da homogênea associada.

Exercício de equação não-homogênea, de 2ª ordem, com coeficientes constantes.

2 . Resolva a equação $\ddot{x} + \omega^2 x = \text{sen}\omega t$, onde $\omega \neq 0$ é um real dado. (Ressonância)

Onde \ddot{x} significa a segunda derivada.

Solução:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \text{sen}\omega t \quad (46)$$

$$\lambda^2 + \omega = 0 \therefore \lambda = \pm i\omega \quad (47)$$

Logo $\alpha = 0$; $\beta = \omega$

$$x_h = e^{\alpha t}[A \cos \beta t + \beta \text{sen}\beta t] \therefore x_h = [A \cos \omega t + \beta \text{sen}\omega t] \quad (48)$$

Solução da particular

$$x_p = mt \cos \omega t + nt \text{sen}\omega t \therefore x_p = mt \cos \omega t + nt \text{sen}\omega t \quad (49)$$

Fazendo a primeira e segunda derivada da solução particular e substituindo na equação (46), temos:

$$-2\omega m \text{sen}\omega t + 2\omega n \cos \omega t = \text{sen}\omega t \quad (50)$$

$$\begin{cases} -2\omega m = 1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2\omega} \\ 2\omega n = 0 \Rightarrow n = 0 \end{cases} \quad (51)$$

Logo a solução da particular é

$$x_p = -\frac{1}{2\omega} t \cos \omega t \quad (52)$$

E a solução geral é

$$x = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t - \frac{1}{2\omega} t \cos \omega t \quad (53)$$

O quadro a seguir mostra como escolher a solução particular nos casos em que: $f(t) = P(t)$, P polinômio, $f(t) = a_0 e^{\alpha t}$ ou $f(t) = a_0 \cos \alpha t$.

Tabela 1 – Solução particular

	$\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)$
	$f(t)$ Solução particular
$a_0 e^{\alpha t}$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Se α não é raiz da equação característica, $x_p = m e^{\alpha t}$. 2. Se α é raiz simples, $x_p = m t e^{\alpha t}$. 3. Se α é raiz dupla, $x_p = m t^2 e^{\alpha t}$.
$P(t)$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Se $c \neq 0$, $x_p = P_1(t)$ onde P_1 é um polinômio de mesmo grau de P. 2. Se $c = 0$ e $b \neq 0$, $x_p = t P_1(t)$.
$a_0 \cos \alpha t$	<ol style="list-style-type: none"> 1. Se $b \neq 0$, $x_p = m \cos \alpha t + n \operatorname{sen} \alpha t$. 2. Se $b = 0$ e se $\cos \alpha t$ não for solução da homogênea, $x_p = m \cos \alpha t$. 3. Se $b = 0$ e se $\cos \alpha t$ for a solução da homogênea, $x_p = m t \cos \alpha t + n t \operatorname{sen} \alpha t$.

Observação: se $f(t) = a_0 \operatorname{sen} \alpha t$, procede-se como no caso, $f(t) = a_0 \cos \alpha t$.

4 Noção de Sistemas Dinâmicos

Na física matemática e na matemática, sistema dinâmico é um conceito no qual uma função descreve a relação no tempo de um ponto em um espaço geométrico. Os exemplos incluem modelos matemáticos que descrevem o balanço do pêndulo do relógio, o fluxo de água em um duto e o número de peixes existentes dentro de um lago ao longo do ano.

O conceito de sistema dinâmico nasce da exigência de construir um modelo geral de todos os sistemas que evoluem segundo uma regra que liga o estado presente aos estados passados.

4.1 Estudos sobre equações lineares

Uma equação diferencial linear é chamada de equação homogênea quando $F(t) = 0$, se a função de entrada $F(t) \neq 0$, então a equação é chamada de não homogênea.

A solução geral de uma equação diferencial linear de ordem n é a solução que contém todas as possíveis soluções dessa equação. Essa solução geral contém n constantes arbitrárias.

Às vezes, deseja-se saber como um sistema evolui a partir de um determinado instante inicial t_0 . Esse problema é conhecido como problema de condição inicial. Por exemplo, tem-se um problema de condição de contorno quando se deseja solucionar uma equação diferencial linear de segunda ordem.

4.2 Técnicas de análise

As técnicas de análise serve para reescrever uma equação diferencial de ordem n de modo que fique um sistema de n equações de primeira ordem. Entretanto, há algumas vantagens de se escrever uma equação de ordem n como n equações de primeira ordem. Por exemplo:

- As n equações de primeira ordem podem ser escritas numa forma matricial;

- Quando se usam métodos computacionais para determinar a evolução do sistema, é mais conveniente lidar com n equações de primeira ordem, em vez da equação única de ordem n .

Existem três técnicas para se investigar os comportamentos de um sistema dinâmico: Técnica analítica, técnica numérica e técnica qualitativa.

4.3 Espaço de fases

Espaço de fase é a representação das variáveis dinâmicas relevantes de um sistema. Uma trajetória no espaço de fase representa a evolução temporal do sistema, através da evolução temporal de suas variáveis relevantes. O espaço de fase é uma ferramenta útil na compreensão do comportamento dos sistemas. Quando o sistema é não-integrável (não admite solução algébrica) podemos simular sua evolução temporal com o auxílio do computador, realizando uma integração numérica, e representar essa evolução no espaço de fase. Para exemplificar a utilização desta importante ferramenta, tomaremos dois sistemas dinâmicos de tempo contínuo elementares: o pêndulo simples e o pêndulo amortecido.

Pêndulo Simples:

Um corpo preso por um fio inextensível de massa desprezível, sob a ação exclusiva da força peso. As variáveis relevantes são a posição e a velocidade. As únicas forças externas atuantes são o peso atuando sobre o corpo e a tração do fio sobre o eixo de rotação. A força de tração não realiza trabalho, por ser ortogonal à trajetória do movimento, e a força peso é conservativa, portanto, o sistema é conservativo.

Pêndulo Amortecido:

Além da força peso, uma força de atrito proporcional à velocidade age sobre o sistema, provocando uma dissipação de energia que a longo prazo fará cessar o movimento. Trata-se de um sistema dissipativo.

4.4 Sistemas autônomos e não autônomos

As soluções constantes de uma equação diferencial são chamados “pontos de equilíbrio”. As soluções constantes ocorrem quando as derivadas são nulas.

Estuda-se detalhadamente as equações de 1^a ordem e mais adiante sistemas de equações diferenciais de 1^a ordem, pois, toda equação de ordem maior que um, pode ser escrita como um sistema de equações de primeira ordem. É só acrescentar outras variáveis.

Por exemplo: A equação $\ddot{x} + 4\dot{x} + x = 0$ pode ser escrita como:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4y - x \end{cases}$$

Para isso basta fazer $y = \dot{x}$ o que implica que $\dot{y} = \ddot{x}$, substituindo na equação chega-se ao sistema, onde a primeira equação é a definição da variável $y = \dot{x}$.

Existem sistemas de equações diferenciais que não são originados de uma equação de ordem mais elevada. Assim, aprendendo-se a resolver sistemas de equações diferenciais de 1^a ordem fica-se apto a solucionar tanto equações de ordem mais elevada quanto sistemas de equações.

Os sistemas de equações diferenciais de primeira ordem podem ser classificados, em primeira análise como sistemas autônomos e não autônomos.

4.5 Sistema Autônomo

Uma E.D. de 1^a ordem, ou um sistema de E.D. de 1^a ordem é dito autônomo se suas derivadas não dependem explicitamente do tempo.

Ex.

1. $\dot{y} = f(y)$

2. $\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases}$

4.6 Sistemas Não Autônomos

Uma E.D. de 1^a ordem, ou um sistema de E.D. de 1^a ordem é dito não autônomo se suas derivadas dependem explicitamente do tempo.

Ex.

$$1. \dot{y} = f(y, t)$$

$$2. \begin{cases} \dot{x} = f(x, y, t) \\ \dot{y} = g(x, y, t) \end{cases}$$

Todo sistema não autônomo pode ser transformado em um sistema autônomo pela inserção de mais uma variável.

4.7 Noções de estabilidade

Suponha que um conjunto de equações diferenciais represente um determinado sistema. Para se encontrar uma solução para essas equações e, assim, descobrir o comportamento dinâmico desse sistema, é necessário especificar valores para as condições iniciais e para os parâmetros das equações. Em geral, tal solução só pode ser obtida numericamente.

Estabilidade é uma palavra usada para caracterizar tanto uma solução, quanto uma equação diferencial (ou uma equação de diferença). A estabilidade de uma solução é determinada pelo comportamento das soluções cujas condições iniciais pertencem à sua vizinhança. A estabilidade de uma equação diferencial (ou de diferença) é determinada pelo comportamento de equações isomórficas cujos valores dos parâmetros são próximos aos da equação estudada.

4.8 Ponto de equilíbrio e estabilidade no sentido de Lyapunov

O Primeiro Método de Lyapunov, também conhecido como o Método Indireto ou Método da Linearização, permite investigar a estabilidade local de um sistema não-linear através do seu modelo linearizado. Os sistemas não lineares são aproximados por truncamento da representação em série de Taylor em torno dos pontos de equilíbrio e a sua estabilidade é estudada através dos auto-valores. Trata-se de um resultado de grande relevância prática, pois serve de base para projetos de controladores utilizando modelos linearizados em torno do ponto de operação nominal.

4.9 Autovalores e Autovetores

Dado \bar{A} uma matriz quadrada, um $\lambda \in \mathbb{R}$ é chamado de autovetor de \bar{A} se existe um vetor \vec{Z}_0 coluna não nulo tal que

$$\bar{A}\vec{Z}_0 = \lambda\vec{Z}_0 \quad (54)$$

Exemplo: Determine os autovalores e autovetores do sistema de equações.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + 2y \\ \dot{y} = 3y \end{cases} \quad (55)$$

Solução: a matriz \bar{A} desse sistema é

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (56)$$

e seus autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$. O autovetor correspondente a λ_1 é a reta $y_0 = 0$, de modo que uma solução $\vec{Z}_1(t)$ associada vale (tomando $x_{01} = 1, y_{01} = 0$):

$$\vec{Z}_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

O autovetor correspondente a λ_2 é a reta $y_0 = 2x_0$, de modo que uma solução $\vec{Z}_2(t)$ associada vale (tomando $x_{02} = 1, y_{02} = 2$)

$$\vec{Z}_2 = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 2e^{3t} \end{bmatrix} \quad (58)$$

4.10 Estabilidade do ponto de equilíbrio e topologia do retrato de fases

Essas classificações são realizadas em função dos sinais dos autovalores, que são conveniente expressos a partir do traço T e do determinante Δ da matriz \bar{A} . Segundo Poincaré:

- Se $\Delta < 0$, então $\lambda_{1,2}$ são reais e com sinais opostos: o ponto de equilíbrio é chamado de sela, que é instável no sentido de Lyapunov;

- Se $\Delta > 0$ e $T^2 - 4\Delta > 0$, então $\lambda_{1,2}$ são reais e com mesmo sinal: se $T > 0$, o ponto de equilíbrio é um **nó instável** se $T < 0$, um **nó assintoticamente estável**;
- Se $\Delta > 0$ e $T^2 - 4\Delta < 0$, então $\lambda_{1,2}$ são complexos conjugados: se $T > 0$, o ponto de equilíbrio é um foco **instável**, se $T < 0$, um foco **assintoticamente estável**; se $T = 0$, um centro **neutralmente estável**.

4.11 *Sistemas Dinâmicos*

O termo Sistemas Dinâmicos é usado para designar os problemas reais modelados matematicamente através de sistemas de equações diferenciais. Dependendo do problema, essas equações diferenciais podem ser parciais, ordinárias ou funcionais, e sujeitas a condições iniciais ou condições de contorno. Nos problemas onde os parâmetros são concentrados a modelagem é feita com sistema de equações diferenciais ordinárias, e se estas equações estão sujeitas a condições iniciais, então o sistema dinâmico correspondente é um problema de valor inicial.

4.12 *Sistemas Lineares*

Seja o sistema linear

$$\frac{dx}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x} = Ax, x \in \mathbb{R}^n \quad (59)$$

onde A é uma matriz $n \times n$ com coeficientes constantes. Uma solução do sistema (59) é uma função vetorial $x(x_0, t)$ que depende do tempo t e da condição inicial

$$x(0) = x_0 \quad (60)$$

tais que $x(x_0, t)$ é solução de (59) e (60).

A solução do sistema linear (59) é simplesmente

$$x(x_0, t) = e^{At} x_0 \quad (61)$$

Onde e^{At} é uma matriz exponencial $n \times n$. Isso pode ser facilmente deduzido do desenvolvimento em série da matriz e^{At} , ou seja

$$e^{At} = \left[I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{(n)!}A^n + \cdots \right] \quad (62)$$

onde I é a matriz unitária. Derivando (61) termo a termo em relação a t , temos

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \left[A + tA^2 + \cdots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \cdots \right] = Ae^{At} \quad (63)$$

Portanto, pode-se usar (62) e (63) para mostrar que (61) é solução de (59) e (60). A solução geral do sistema linear é a superposição de n soluções linearmente independentes $\{x^1(t), \dots, x^n(t)\}$.

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j x^j(t) \quad (64)$$

onde as n constantes c_j são determinadas pela condição inicial.

Se os autovalores $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de A forem reais e distintos, então A tem n autovetores linearmente independentes $\{v_1, \dots, v_n\}$. Além disso, podemos diagonalizar A por meio de uma transformação linear. A partir de (62), é fácil de ver a matriz e^{At} também será diagonal com autovalores $\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$. Deste modo, a solução de cada $x^j(t)$ será

$$x^j(t) = e^{\lambda_j t} v_j \quad (65)$$

No caso em que A tem autovalores complexos conjugados $\alpha_j \pm i\beta t$ e autovetores $v^{Re} \pm iv^{Im}$, temos as soluções

$$x_{Re}^j = e^{\alpha_j t} (v^{Re} \cos \beta_j t - v^{Im} \beta_j t) \quad (66)$$

$$x_{Im}^j = e^{\alpha_j t} (v^{Re} \beta_j t - v^{Im} \cos \beta_j t) \quad (67)$$

onde x_{Re}^j e x_{Im}^j são respectivamente a parte real e a parte imaginária de $x^j(t)$.

De maneira simplificada escrevemos

$$x^j(t) = e^{Re(\lambda_j)t} e^{iIm(\lambda_j)t} v_j \quad (68)$$

Como $e^{iIm(\lambda_j)t}$ é uma função limitada, a estabilidade de $x^j(t)$ vai depender essencialmente de $Re(\lambda_j)$. Se $Re(\lambda_j) > 0$, $e^{Re(\lambda_j)t}$ cresce continuamente com o tempo e $x^j(t) \rightarrow \infty$

quando $t \rightarrow \infty$. Isso significa que as trajetórias $x^j(t)$ deixam a vizinhança de um ponto de equilíbrio P^* . Inversamente, se $Re(\lambda_j) < 0$, $x^j(t) \rightarrow P^*$ quando $t \rightarrow \infty$ e nesse caso o ponto de equilíbrio é estável.

As diferentes possibilidades de combinação dos autovalores, que podem ser reais, imaginários puros, todos com parte real positiva, etc \dots , vão definir não só a estabilidade do ponto de equilíbrio mas também a forma das soluções em sua vizinhança. Isso nos leva a classificar os pontos de equilíbrio de acordo com a sua natureza.

4.13 Teoremas Locais para Sistemas Não Lineares

D.M. Grobman, em 1959, e P. Hartman, em 1963, provaram independentemente que, na vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico, um sistema não-linear de dimensão n apresenta um comportamento qualitativamente equivalente ao do sistema linear correspondente.

Portanto, o teorema de Hartman-Grobman garante que a estabilidade de um ponto de equilíbrio hiperbólico é preservada quando se lineariza o sistema em torno desse ponto, de modo que o retrato de fases, na sua vizinhança, é topologicamente orbitalmente equivalente ao retrato de fases do sistema linear associado. Dois retratos de fases são topologicamente orbitalmente equivalentes quando um é uma versão distorcida do outro. Se o ponto de equilíbrio é não-hiperbólico, ou seja, se há algum autovalor com parte real nula, então a linearização não permite prever sua estabilidade.

4.14 Teorema das Variedades Hiperbólicas

Seja um sistema de equações diferenciais não-lineares $\frac{dx}{dt} = f(x)$, com o campo vetorial f sendo de classe r (f r vezes diferenciável). Seja P^* um ponto de equilíbrio de f e considere a matriz jacobiana calculada nesse ponto, a partir da versão linear. Os autovalores correspondentes a essa matriz podem ser separados em 3 grupos: $\sigma_e, \sigma_i, \sigma_c$, dependendo do sinal da parte real desses autovalores. As letras e, i, c são, respectivamente, as iniciais de estável, instável e central. Assim

$$\lambda \in \sigma_e \text{ se } Re(\lambda) < 0 \tag{69}$$

$$\lambda \in \sigma_i \text{ se } Re(\lambda) > 0 \quad (70)$$

$$\lambda \in \sigma_c \text{ se } Re(\lambda) = 0 \quad (71)$$

Sendo que $\lambda \in C$. O sub-espaço gerado pelos autovetores cujos autovalores pertencem a σ_e é chamado de auto-espaço estável E^e ; aquele gerado pelos autovetores cujos autovalores pertencem a σ_i é chamado de auto-espaço instável E^i , e aquele correspondente a σ_c de auto-espaço central E^c . Note que esses auto-espaços referem-se à versão linear do sistema de equações diferenciais.

Se há n_e autovalores com parte real negativa, n_i autovalores com parte real positiva e n_c com parte real nula, então $n_e + n_i + n_c = n$, sendo n a dimensão do sistema. Soluções pertencentes a E^e apresentam decaimento exponencial, soluções pertencentes a E^i exibem crescimento exponencial, e soluções pertencentes a E^c têm estabilidade neutra. O teorema de Hartman-Grobman é válido somente quando $n_c = 0$.

Seja um sistema dinâmico descrito por n equações diferenciais autônomas. Um conjunto S de pontos do espaço de fases n -dimensional é uma variedade invariante local se, para x_0 pertencente a esse conjunto S , a solução $x(t)$ com condição inicial x_0 está em S para $t < T$, com $T > 0$. Se isso é válido para $T \rightarrow \infty$, então S é uma variedade invariante.

O teorema das variedades hiperbólicas, provado de forma completa por A. Kelley em 1967, afirma que existe uma variedade estável W^e tangente em P^* ao auto-espaço E^e . Essa variedade é única e é de classe r . Existe também uma variedade instável W^i , única e de classe r , tangente em P^* ao auto-espaço E^i . A Figura 1 ilustra esses resultados.

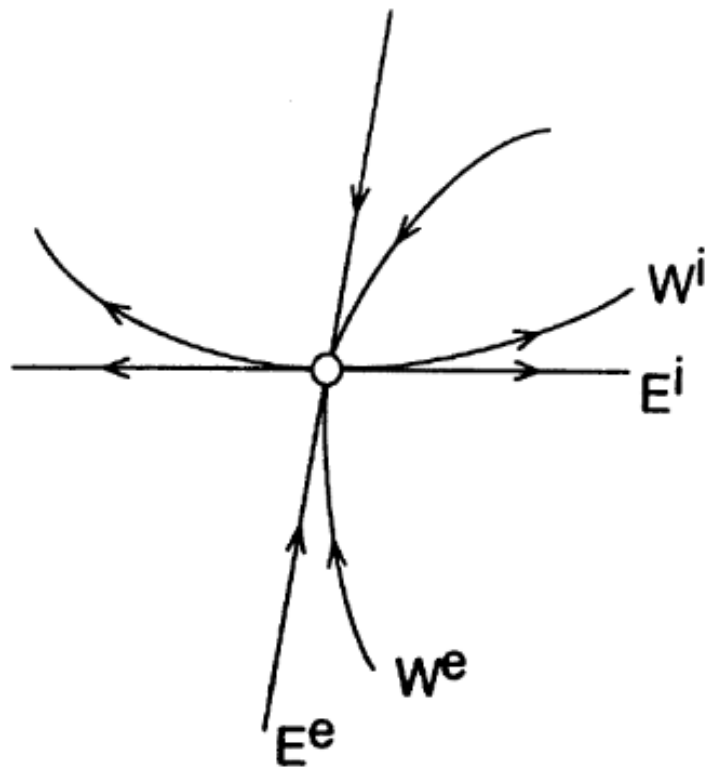


Figura 1 – Variedades de um ponto de sela de um sistema não-linear. Autor (MONTEIRO, 2011)

4.15 Teoria da Variedade Central

O teorema de Hartman-Grobman e o teorema das variedades hiperbólicas estabelecem que, se um ponto de equilíbrio P^* é hiperbólico, então W^e e E^e se tangenciam em P^* assim como W^i e E^i tangenciam em P^* e que, na vizinhança desse ponto, o sistema dinâmico não-linear e a versão linearizada são topologicamente orbitalmente equivalentes. O teorema da variedade central estende esses resultados para o caso em que o ponto de equilíbrio apresenta algum autovalor que é nulo ou tem parte real nula. Mostra-se que o comportamento do sistema dinâmico ao redor de um ponto de equilíbrio não-hiperbólico pode ser reduzido ao estudo do comportamento ao longo de uma variedade central W^c , que é tangente ao sub-espço central E^c no ponto de equilíbrio em questão.

4.16 Teoremas da Variedade Central

Seja um sistema de equações diferenciais não-lineares $dx/dt = f(x)$, com o campo vetorial f sendo classe de r . Seja P^* um ponto de equilíbrio de f e considere a matriz

jacobiana calculada nesse ponto, a partir da versão linear. O teorema da variedade central estabelece que se há autovalor da matriz jacobiana $\lambda \in \text{sigma}_c$ então existe uma variedade central W^c tangente ao sub-espaço E^c em P^* . Essa variedade, entretanto, é de classe $r - 1$ e não é necessariamente única. Isso dificulta a caracterização do comportamento assintótico em torno de P^* .

4.17 Introdução aos estudos de bifurcações

A bifurcação selá-nola, também conhecida como bifurcação tangente ou bifurcação de dobra, é o mecanismo básico pelo qual um par de pontos de equilíbrio com estabilidades contrárias é criado ou destruído. Seja a equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = f_\mu(x) = \mu - x^2 \quad (72)$$

Esse sistema apresenta dois pontos de equilíbrio $x_{1,2}^* = \sqrt{\mu}$ se $\mu > 0$. Analise-se a estabilidade desses pontos investigando o sinal de $\lambda = \frac{df}{dx}$ calculado em x^* . Para $x_1^* = \sqrt{\mu}$, então $\left(\frac{df}{dx}\right) |_{x=x_1^*} = -2\sqrt{\mu}$, que é um número negativo para $\mu > 0$; portanto, x_1^* é assintoticamente estável. Para $x_2^* = -\sqrt{\mu}$, tem-se $\left(\frac{df}{dx}\right) |_{x=x_2^*} = 2\sqrt{\mu}$, que é um número positivo para $\mu > 0$; ou seja, x_2^* é instável.

A Equação (72) é integrável. Por isso, um modo alternativo de se obterem as soluções assintóticas e as respectivas estabilidades, para cada valor de μ , consiste em se integrar analiticamente essa equação e calcular os limites de $x(t)$ para $t \rightarrow \infty$. Integrando (72), encontra-se:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\mu}[x(0) + \sqrt{\mu} \operatorname{tgh}(\sqrt{\mu t})]}{\sqrt{\mu} + x(0) \operatorname{tgh}(\sqrt{\mu t})} & \text{se } \mu > 0 \\ \frac{x(0)}{1 + x(0)t} & \text{se } \mu = 0 \\ \frac{\sqrt{-\mu}[x(0) - \sqrt{-\mu} \operatorname{tg}(\sqrt{-\mu t})]}{\sqrt{-\mu} + x(0) \operatorname{tg}(\sqrt{-\mu t})} & \text{se } \mu < 0 \end{cases} \quad (73)$$

O comportamento assintótico dessas soluções é dada por:

$$x(t) \rightarrow \begin{cases} \sqrt{\mu} \text{ quando } t \rightarrow \infty & \text{se } \mu > 0 \text{ e } x(0) > -\sqrt{\mu} \\ -\sqrt{\mu} \text{ quando } t \rightarrow \infty & \text{se } \mu > 0 \text{ e } x(0) = -\sqrt{\mu} \\ 0 \text{ quando } t \rightarrow \infty & \text{se } \mu = 0 \text{ e } x(0) > 0 \\ -\infty \text{ quando } t \rightarrow \frac{1}{-x(0)} & \text{se } \mu = 0 \text{ e } x(0) < 0 \\ -\infty \text{ quando } t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\mu}} \arctan h\left(\frac{-\sqrt{\mu}}{x(0)}\right) & \text{se } \mu > 0 \text{ e } x(0) < -\sqrt{\mu} \\ -\infty \text{ quando } t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{-\mu}} \arctan\left(\frac{-\sqrt{-\mu}}{x(0)}\right) & \text{se } \mu < 0 \end{cases} \quad (74)$$

4.18 Bifurcação Transcrítica

Há situações em que dois pontos de equilíbrio existem para todos os valores de parâmetro, embora as estabilidades desses pontos sejam trocadas quando o parâmetro passa por um valor crítico. A Bifurcação Transcrítica é o mecanismo associado a esse tipo de mudança. Considere a equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = f_{\mu}(x) = \mu x - x^2 \quad (75)$$

Esse sistema apresenta, como pontos de equilíbrio, $x_1^* = 0$ e $x_2^* = \mu$, para qualquer valor de μ . Tem-se que $\lambda \frac{df}{dx} = \mu - 2x$. Para $x_1^* = 0$, então $\left(\frac{df}{dx}\right) |_{x=x_1^*} = \mu$. Portanto, para $\mu < 0$, a origem é assintoticamente estável e, para $\mu > 0$, é instável. Para $x_2^* = \mu$, então $\left(\frac{df}{dx}\right) |_{x=x_2^*} = -\mu$, o que indica que o ponto de $x_2^* = \mu$ possui sempre estabilidade contrária à da origem; pois, para $\mu < 0$, esse ponto é instável e, para $\mu > 0$, assintoticamente estável.

A Equação 75 é integrável. Sua solução analítica vale:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{\mu x(0)}{x(0) + [\mu - x(0)]e^{\mu t}} & \text{se } \mu \neq 0 \\ \frac{x(0)}{1 + x(0)t} & \text{se } \mu = 0 \end{cases} \quad (76)$$

e apresenta os seguintes comportamentos assintóticos:

$$x(t) \rightarrow \begin{cases} \mu & \text{quando } t \rightarrow \infty & \text{se } \mu > 0 \text{ e } x(0) > 0 \\ 0 & \text{quando } t \rightarrow \infty & \text{se } \mu \leq 0 \text{ e } x(0) > \mu \\ -\infty & \text{quando } t \rightarrow \frac{1}{\mu} \ln(1 + \frac{\mu}{-x(0)}) & \text{se } \mu \neq 0 \text{ e } x(0) < \min(0, \mu) \\ 0 & \text{quando } t \rightarrow \infty & \text{se } \mu = 0 \text{ e } x(0) > 0 \\ -\infty & \text{quando } t \rightarrow \frac{1}{-x(0)} & \text{se } \mu = 0 \text{ e } x(0) < 0 \end{cases} \quad (77)$$

a notação $\min(0, \mu)$ significa tomar o menor valor entre 0 e μ .

4.19 Bifurcação de Forquilha

Essa bifurcação aparece em sistemas físicos que apresentam algum tipo de simetria. Em tais sistemas, um par de pontos de equilíbrio de mesma estabilidade pode aparecer ou desaparecer simultaneamente, quando o parâmetro de controle passa por um valor crítico. O exemplo clássico, que foi estudado por Euler em 1744, é o da coluna fina e elástica, presa perpendicularmente ao solo plano, sob a ação do peso de uma carga colocada na sua extremidade livre. A coluna permanece na posição vertical, se a carga que ela sustenta está abaixo de um valor crítico. Nessa situação, o ponto de equilíbrio assintoticamente estável corresponde à inclinação zero. Se a carga excede o valor crítico, a coluna pode se entortar para a esquerda ou para a direita. Agora, a posição vertical torna-se instável e existem dois novos pontos de equilíbrio simétricos, que correspondem às inclinações para a direita e para a esquerda. O lado para o qual a coluna se entorta é determinado pela condição inicial: se deslocada, da posição vertical instável, ligeiramente para a direita, ela se entorta para a direita; se deslocada para a esquerda, entorta-se para a esquerda.

A forma normal da bifurcação de forquilha supercrítica é:

$$\frac{dx}{dt} = f_{\mu}(x) = \mu x - x^3 \quad (78)$$

que é uma equação invariante com relação à mudança de sinal $x \rightarrow -x$.

Integrando a Equação 78, obtém-se

$$(x(t))^2 = \begin{cases} \frac{\mu(x(0))^2}{(x(0))^2 + [\mu - (x(0))^2]e^{-2\mu t}} & \text{se } \mu \neq 0 \\ \frac{(x(0))^2}{1 + 2(x(0))^2 t} & \text{se } \mu = 0 \end{cases} \quad (79)$$

A análise dos comportamentos assintóticos revela que:

$$x(t) \rightarrow \begin{cases} \sqrt{\mu}S(x(0)) & \text{quando } t \rightarrow \infty \text{ se } \mu \geq 0 \\ 0 & \text{quando } t \rightarrow \infty \text{ se } \mu \leq 0 \text{ para } \forall x(0) \end{cases} \quad (80)$$

A função do sinal $s(y)$ é assim definida: $s(y) = +1$ se $y > 0$, $s(y) = -1$ se $y < 0$, e $s(y) = 0$ se $y = 0$.

5 Problemas sobre Sistemas Dinâmicos

Apresentamos a seguir de forma simples e direta dois problemas sobre sistemas dinâmicos e vibrações mecânicas. Um deles é comentar o acontecimento do desabamento da ponte Tacoma Narrows por agentes externos. Devido a isso, surge muitos estudos relacionados a ressonância, equações diferenciais contribuíram para compreender essa causa do desmoronamento, com o objetivo de analisar as oscilações que acontece de grandes oscilações.

E o outro é o estudo de um sistema massa-mola sob a excitação de uma força externa harmônica para saber o que ocorre com estas vibrações.

5.1 *O desabamento da ponte Tacoma Narrows como proposta de uma atividade prática de uma aula*

Com o intuito de aprofundar os estudos na área de matemática aplicada estudaremos o caso da ponte Tacoma Narrows, que ajudou a intensificar pesquisas sobre cálculos avançados de engenharia sobre o comportamento de oscilações de pontes e outras edificações sob ação de forças externas. Observou-se que a influência da ação do vento sobre a estrutura da ponte, provocou um colapso, devido a um fenômeno linear conhecido como ressonância. Estudos desta natureza, estão relacionados a sistemas dinâmicos e são estudados por pesquisadores das áreas de matemática, engenharia, física, entre outras.

Esses estudos são fundamentais em soluções de problemas reais, causados pelas influências de forças externas atuando sobre grandes estruturas.

5.2 *Introdução*

Tacoma Narrows foi o nome dado a uma ponte construída no verão de 1940, localizada no estreito de Tacoma na cidade de Washington – EUA. No dia 7 de novembro, quatro meses após sua inauguração, a ponte desabou devido as oscilações provocadas pelo vento. A partir daí, diversas foram as suposições sobre as causas do desmoronamento. A primeira hipótese, de efeito linear, a ressonância induzida pelos ventos que ao colidirem com a estrutura acontecia o fenômeno de von Karmán ou vórtices de von Karmán. Através deste fenômeno, afirmava-se que o vento era separado pela parte lateral da ponte que

acarreta a formação de vórtices na parte contrária a incidência, implicando força na direção vertical com a mesma frequência das produzidas pela ponte. Esta hipótese foi descartada em dezembro de 1990, por Lazer e McKenna com o artigo publicado “Large-Amplitude Periodic oscillations in Suspension Bridges: Some New Connections with Nonlinear Analysis”. No trabalho se ressalta que as causas do colapso não poderiam ser provocadas por ressonância devido a inconstância das forças externas, e sustentaram a hipóteses de que a torção que esticava e comprimia os cabos existentes na estrutura da ponte era promovida por fenômenos não-lineares.

Problema para estudo:

- Classificação das equações diferenciais de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade;
- Variáveis dependentes e independentes;
- Ressonância linear;
- Efeitos não-lineares.
- Dada uma função $y = f(x)$, a derivada $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

é também, ela mesma uma função de x e é calculada por regras apropriadas. Por exemplo, se $y = e^{x^2}$, então

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = 2xy \quad (81)$$

O problema com o qual nos deparamos neste assunto na área da matemática não é: dada uma função $y = f(x)$, encontre sua derivada. Nosso problema é: dada uma equação como $\frac{dy}{dx} = 2xy$, encontre, de algum modo, uma função $y = f(x)$ que satisfaça a equação. Em outras palavras, nós queremos resolver equações diferenciais;

5.3 Objetivos Gerais e Específicos

5.4 Objetivos Gerais

- Desenvolver no aluno a percepção da importância e do grau de aplicação das equações diferenciais na modelagem matemática de situações concretas.
- Capacitar o aluno a equacionar matematicamente problemas da Física Clássica e de outras ciências.
- Estudar os métodos básicos de resolução de equações diferenciais.

- Proporcionar ao aluno desenvoltura em classificar e manipular problemas que envolvam equações diferenciais, com técnicas específicas de abordagem, adequadas à resolução de cada um.

5.5 *Objetivos Específicos*

O objetivo central desta proposta consiste no estudo das equações diferenciais ordinárias, visando adquirir os conhecimentos necessários para compreender alguns fenômenos físicos que são regidos por esta área. Objetiva-se também, estudar o modelo matemático referente ao colapso da estrutura que veio a romper-se na ponte Tacoma Narrows.

5.6 *Qual a importância de se estudar EDO?*

O principal desafio que se apresenta na modelagem de sistemas em termos de equações diferenciais é formular as equações que descrevem o problema a partir de um conjunto restrito de informações, ou “pistas”, sobre o comportamento geral do sistema. A construção do modelo envolve uma percepção da situação real em linguagem matemática. Para que o modelo seja uma boa representação da realidade, é de fundamental importância enunciar de maneira precisa os princípios que governam o sistema de interesse.

Uma das principais razões da importância das equações diferenciais é que mesmo as equações mais simples são capazes de representar sistemas úteis. Mesmo alguns sistemas naturais mais complexos comportam modelagens em termos de equações diferenciais bem conhecidas. Por outro lado, problemas cuja modelagem exige equações diferenciais mais complicadas podem, hoje em dia, ser tratados através de métodos computacionais. Assim, o estudo e o desenvolvimento da área de modelagem de sistemas através de equações diferenciais são de suma importância para a compreensão de problemas reais, apresentando aplicações nas mais diversas áreas do conhecimento.

Para que servem?

As soluções destas equações são usadas, como por exemplo, para projetar pontes, automóveis, aviões e circuitos elétricos.

5.7 Desenvolvimento da situação problema:

A elaboração dessa proposta é fundamentada na pesquisa em livros e na internet como meio de complementar e aprofundar os estudos para melhor entendimento da pesquisa, no que diz respeito as equações diferenciais.

Na solução de uma EDO temos dois caminhos que podem ser seguidos. Isto é, o que tenta levar à solução exata do problema (método analítico) ou o que encontra uma solução aproximada (método numérico). Resolver uma EDO do tipo $y' = f(x, y)$ é encontrar uma função $y = F(x)$ que satisfaça a equação dada. Por exemplo, dada a equação diferencial $y' = f(x, y) = 2x + 3$, sua solução é obtida por

$$y = \int (2x + 3)dx = x^2 + 3x + K \quad (82)$$

Na verdade, temos uma família de soluções (para cada $K \in \mathbb{R}$ tem-se uma solução particular). Na Figura 2 são mostradas algumas destas soluções. No caso para $K = 0$, $K = 2$ e $K = 4$

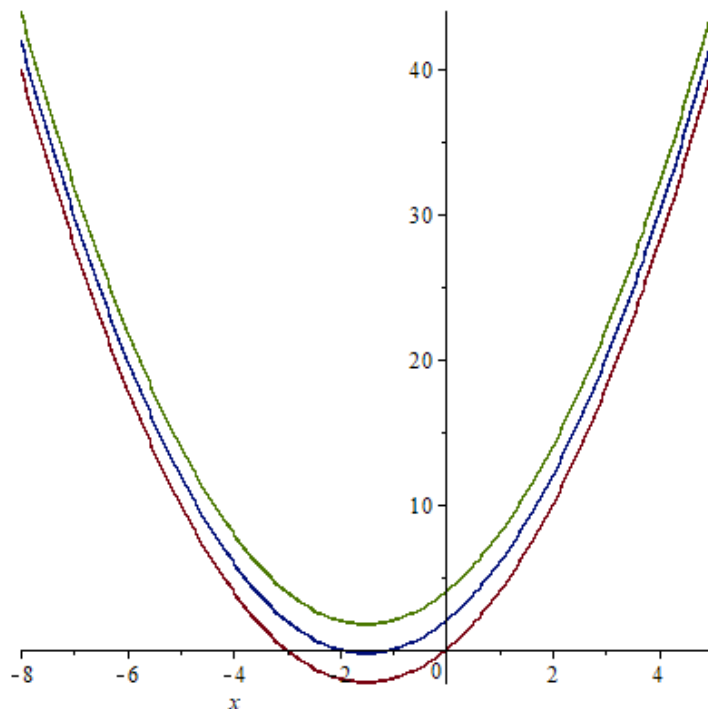


Figura 2 – Representações de soluções particulares, para alguns valores de K , da função $y = x^2 + 3x + K$. Figura do Autor

5.8 Classificação de Equações Diferenciais

- Tipo: podem ser ordinárias, parciais ou em sistemas.

Equações Diferenciais Ordinárias (EDO): se a função desconhecida depende de uma única variável independente. Neste caso, aparecem apenas derivadas simples.

Exemplo:

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^y \quad (83)$$

Equações Diferenciais Parciais (EDP): se a função desconhecida depende de diversas variáveis independentes. Neste caso, aparecem as derivadas parciais.

Exemplo:

$$\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta u}{\delta y} = 0 \quad (84)$$

Sistemas de equações diferenciais: se existem duas ou mais funções que devem ser determinadas, precisamos de um sistema de equações.

Exemplo:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases} \quad (85)$$

- Ordem: A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de maior ordem que aparece na equação.

Exemplo:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5y' = e^y \quad (86)$$

Então, neste caso, dizemos que é uma equação diferencial de segunda ordem.

- Linearidade: uma equação diferencial é chamada de linear quando pode ser escrita da forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (87)$$

Diz-se que uma equação diferencial é linear quando satisfaz duas características:

1. A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1.

2. Cada coeficiente depende apenas da variável independente x .

Exemplo:

$$\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad (88)$$

Uma equação que não é linear é chamada de equação não-linear.

Exemplo:

$$yy'' - 2y' = xe^{\frac{d^3y}{dx^2}} + y^2 = 0 \quad (89)$$

Agora um exemplo muito comum no nosso dia a dia e que passa despercebido. A 2ª lei de Newton.

Equações diferenciais são extremamente importantes para as ciências, pois nos informam como a variação de uma grandeza afeta outras grandezas relacionadas. A lei mais importante de Física Clássica, a segunda lei de Newton:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (90)$$

é na verdade uma equação diferencial de segunda ordem:

$$\vec{F}\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad (91)$$

em que a força resultante pode depender do tempo t , da posição x e da velocidade da partícula $\frac{dx}{dt}$.

Ressonância

O que é? Como ocorre?

- A ressonância acontece quando a frequência de uma fonte de oscilação coincide com a frequência de oscilação natural de um corpo.
- Dado isso, o sistema físico passa a vibrar com amplitudes cada vez maiores, devido à soma dessas amplitudes.
- Cada sistema físico é construído de modo que seja capaz de vibrar de uma ou mais frequências naturais, isto é, que são características do sistema.
- Quando ocorrem excitações periódicas sobre o sistema, como quando o vento sopra com frequência constante sobre uma ponte durante uma tempestade, acontece um

fenômeno de superposição de ondas que alteram a energia do sistema, modificando sua amplitude.

- Se a frequência natural de oscilação do sistema e as excitações constantes sobre ele estiverem sob a mesma frequência, a energia do sistema será aumentada, fazendo com que vibre com amplitudes cada vez maiores.

Um caso muito famoso deste fenômeno foi o rompimento da ponte Tacoma Narrows, nos Estados Unidos, em 7 de novembro de 1940.

Em um determinado momento o vento começou a soprar com frequência igual à natural de oscilação da ponte, fazendo com que esta começasse a aumentar a amplitude de suas vibrações até que sua estrutura não pudesse mais suportar, fazendo com que sua estrutura se rompesse (Figura 3).



Figura 3 – Esquema da atuação do vento e da oscilação da ponte Tacoma. Os ventos que atingiam a ponte causavam uma oscilação na pista, devido a força vertical que era exercida sobre os cabos e pilas de sustentação da ponte. Autor (DIGITAIS, 2018)

Durante 50 anos, a ressonância foi responsabilizada pelo colapso. Pensava-se que, quando o vento soprava horizontalmente, formavam-se vórtices de vento alternados de baixo para cima e de cima para baixo, criando então uma força vertical periódica que agia na mesma direção da vibração da ponte. A ressonância é um fenômeno linear. Além do mais, é inteiramente dependente da coincidência da frequência natural da ponte com a frequência de alguma força externa periódica.

Se não foi ressonância, então qual foi o motivo? Uma pesquisa recente forneceu uma explicação alternativa para o colapso da ponte. Lazer e McKenna argumentaram que

efeitos não-lineares, e não ressonância linear, foram os principais fatores que provocaram grandes oscilações da ponte. Porém, interações não-lineares entre a ponte e as forças externas são causas mais prováveis para o colapso.

Exemplo de ressonância no dia a dia

Um exemplo desse fenômeno ocorre quando uma criança em um balanço (Figura 4)¹ descobre o momento exato de dobrar as pernas para aumentar a amplitude do seu movimento, ou seja, o seu corpo passa a oscilar com a mesma frequência que as cordas do balanço, resultando na ressonância.

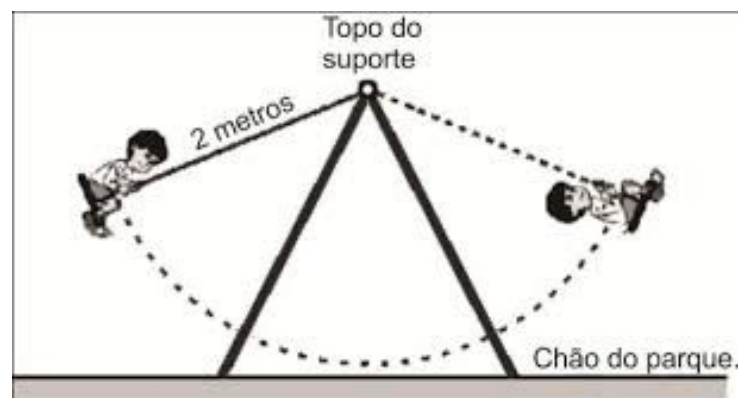


Figura 4 – Ressonância Mecânica.

De acordo com o exposto, verifica-se que as hipóteses das causas do desmoronamento da Ponte Tacoma Narrows são fundamentadas e justificadas em estudos envolvendo equações diferenciais, sendo a causa de efeitos não-lineares a mais consistente devido a análise mais realística dos fenômenos envolvidos. Destaca-se também a fundamental a importância das equações diferenciais na solução de diversos problemas reais.

Conclui-se então equações diferenciais são igualdade entre duas expressões matemáticas, onde essas expressões são funções que se examina para determinados valores das variáveis, e a solução é uma função ou uma família de funções.

5.9 Estudo de Vibração do Sistema Massa-Mola-Amortecedor Excitado Harmonicamente

Uma vibração forçada é aquela que ocorre quando o sistema sofre a ação de forças externas durante o movimento. A energia externa pode ser fornecida por meio de uma força aplicada ou por uma excitação de deslocamento imposta. A natureza da força aplicada

¹ <http://boltz.ccne.ufsm.br/st12/?q=node/80>

ao sistema pode ser de natureza harmônica, não-harmônica mas periódica, não-periódica ou aleatória. Chamamos de resposta harmônica quando um sistema possui excitação harmônica. Nesta aplicação, estudaremos a dinâmica vibracional do sistema massa-mola sob a excitação de uma força externa harmônica.

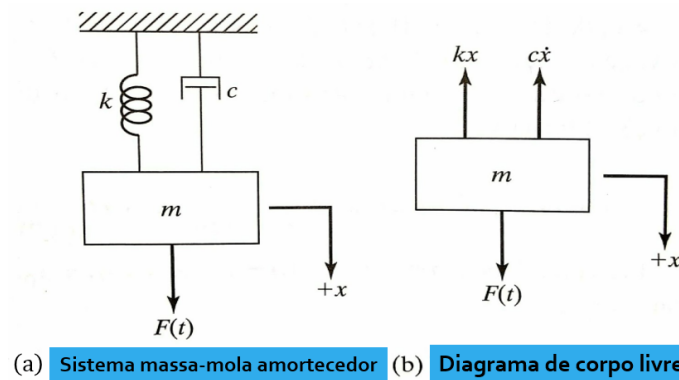


Figura 5 – Um sistema massa-mola-amortecedor. Autor (RAO, 2008)

- a . Sistema massa-mola-amortecedor : esse é um problema composto por um bloco de massa m em que está na posição de equilíbrio, aplicado a este problema uma força $F(t)$ que neste problema é a força harmônica, que o comportamento desta força apresenta uma simetria em relação ao eixo t (tempo).
- b . Diagrama de corpo livre: $F(t)$ é a força externa; k é a constante de elasticidade; c é a constante de amortecimento e $+x$ é o deslocamento.

Equação de Movimento

Se uma força $F(t)$ agir sobre um sistema massa-mola viscosamente amortecido, como mostra a Figura 5, a equação de movimento pode ser obtida pela segunda Lei de Newton:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t) \quad (92)$$

Visto que essa equação é de segunda ordem não-homogênea, sua solução geral $x(t)$ é dada pela soma da solução homogênea, $x_h(t)$ com a solução particular, $x_p(t)$. A solução homogênea, que é a solução da equação homogênea

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (93)$$

representa a vibração livre do sistema e esta vibração desaparece com o tempo sob cada uma das três possíveis condições de amortecimento (subamortecimento, amortecimento crítico e super amortecimento) e sob todas as possíveis condições iniciais.

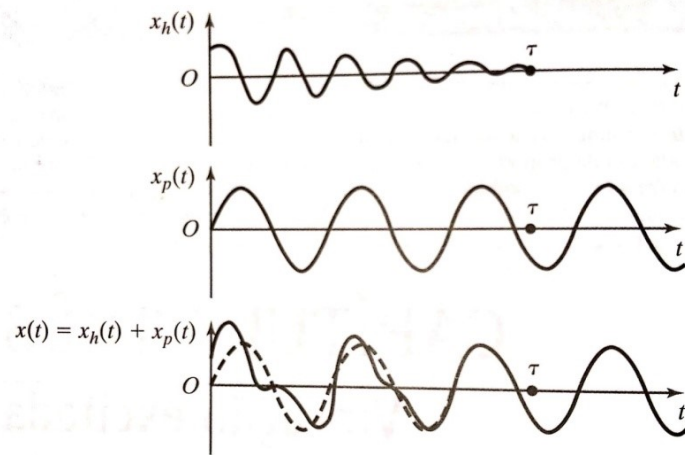


Figura 6 – Soluções homogênea, particular e geral da equação da Figura [5] para um caso não amortecido. Autor (RAO, 2008)

Vibração Livre com Amortecimento

Um sistema com um grau de liberdade com um amortecedor viscoso é mostrado na Figura 1. Se x for medida em relação à posição de equilíbrio da massa m , a aplicação da Lei de Newton dá a equação de movimento:

$$m\ddot{x} = -c\dot{x} - kx \tag{94}$$

ou

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{95}$$

Solução

Para resolver a Equação 95 admitimos uma solução da forma

$$x(t) = Ce^{\lambda t} \tag{96}$$

resulta na equação característica

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \tag{97}$$

Assim, a solução geral da Equação 95 é dada por uma combinação das soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$:

$$x(t) = C_1 e^{\left(-\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} \quad (98)$$

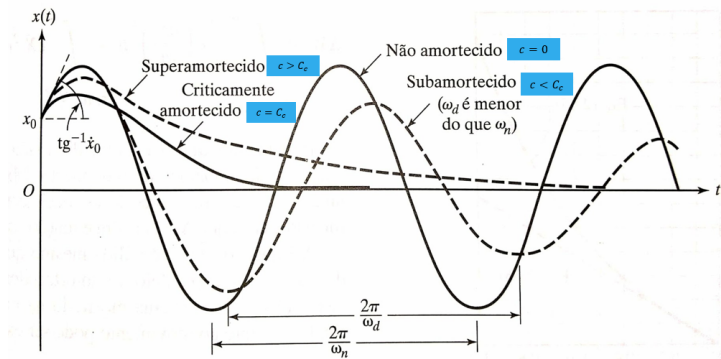


Figura 7 – Comparação entre movimentos com tipos diferentes de amortecimento. Autor (RAO, 2008)

Podemos observar 4 tipos de comportamento:

1. Quando escolhe um valor para c de modo que $\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} = 0$, temos amortecimento crítico, ou seja, converge mais rápido do que as outras;
2. No subamortecido o movimento é oscilatório, mas vai fechando, ou seja, converge para zero;
3. Não amortecido só apresenta o movimento oscilatório, mas não converge para zero;
4. Superamortecido converge para zero, porém é mais lento.

Resposta do Sistema Não Amortecido à Força Harmônica

Neste caso, veremos um sistema não amortecido, porém com forçamentos. Se uma força $F(t) = F_0 \cos \omega t$ agir sobre a massa m de um sistema não amortecido, a Equação 95, reduz-se a

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \quad (99)$$

A solução homogênea associada dessa equação é dada por

$$x_h(t) = C_1 \cos \omega_n t + C_2 \sen \omega_n t; \quad \text{com } \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (100)$$

Como a força excitadora $F(t)$ é harmônica, a solução particular $x_p(t)$ também será harmônica e tem a mesma frequência ω . Assim, admitimos uma solução na forma

$$x_p(t) = X \cos \omega t \quad (101)$$

onde X é uma constante que denota a máxima amplitude de $x_p(t)$. Calculando a primeira e segunda derivada da Equação 101 e substituindo na Equação 99, isolando X , obtemos

$$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (102)$$

Usando as condições iniciais, constatamos que

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \\ \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = x_0 \frac{F_0}{k - m\omega^2} \\ C_2 = \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \end{cases} \quad (103)$$

Portanto, a solução geral é

$$x(t) = \left(x_0 - \frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right) \cos \omega_n t + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \right) \text{sen} \omega_n t + \left(\frac{\frac{F_0}{k}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right) \cos \omega t \quad (104)$$

Diante disso, podemos constatar que há três tipos de resposta do sistema

- **1° Caso.** Quando $0 < \frac{\omega}{\omega_n} < 1$, o denominador da Equação 102 é positivo. Diz-se que a resposta harmônica do sistema $x_p(t)$ está em fase com a força externa como mostra a Figura 8.

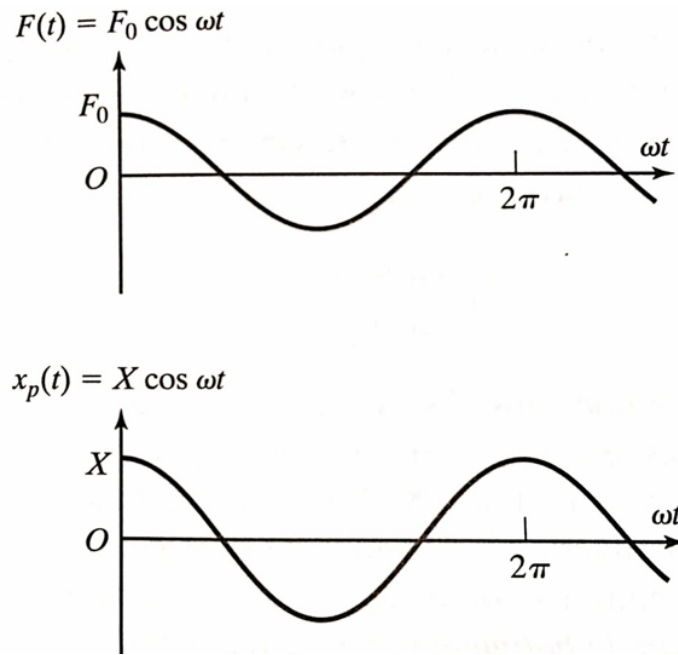


Figura 8 – Resposta harmônica quando $0 < \frac{\omega}{\omega_n} < 1$. Autor (RAO, 2008)

- **2° Caso.** Quando $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$, o denominador da Equação 102 é negativo, e a solução pode ser expressa como

$$x_p(t) = -X \cos \omega t \quad (105)$$

Onde a amplitude de movimento X é redefinida para ser uma quantidade positiva como

$$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 - 1} \quad (106)$$

Visto que $x_p(t)$ e $F(t)$ tem sinais opostos, diz-se que a resposta está defasada em relação à força externa. As variações de $F(t)$ e $x_p(t)$ com o tempo podem ser observadas na Figura 9.

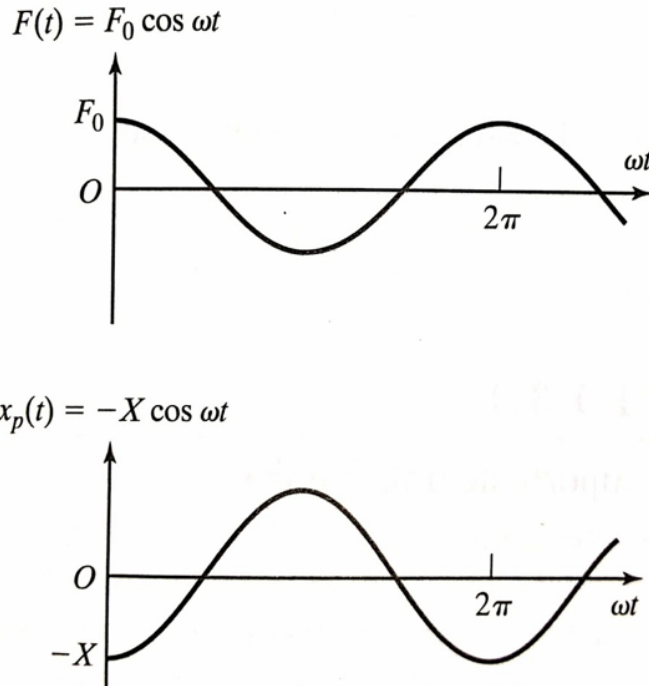


Figura 9 – Resposta harmônica quando $\frac{\omega}{\omega_n} > 1$. Autor (RAO, 2008)

- **3° Caso.** Quando $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$, a frequência externa ω é igual a frequência natural do sistema ω_n , é denominada ressonância. Portanto reescrevemos a Equação 104 para determinar a resposta do sistema para essa condição, como

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} + \text{sen} \omega_n t + \frac{F_0}{k} \left(\frac{\cos \omega_n t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right) \quad (107)$$

O último termo desta equação toma uma forma indefinida para $\omega = \omega_n$, aplicando regra de L'Hospital para avaliar este limite, temos

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_n} \frac{\cos \omega t - \cos \omega_n t}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} = \frac{\omega_n t}{2} \text{sen} \omega_n t \quad (108)$$

Logo a resposta do sistema próximo da ressonância é:

$$x(t) = x_0 \cos \omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n} \text{sen} \omega_n t + \frac{\frac{F_0}{k} \omega_n t \text{sen} \omega_n t}{2} \quad (109)$$

Podemos observar que, em ressonância, $x(t)$ aumenta indefinidamente, a amplitude da resposta aumenta linearmente com o tempo na Figura 10.

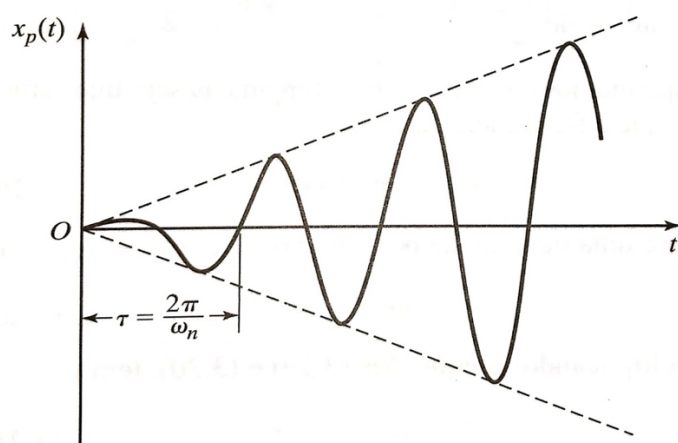


Figura 10 – Resposta quando $\frac{\omega}{\omega_n} = 1$. Autor (RAO, 2008)

6 Considerações Finais

Neste TCC foi apresentado um estudo de conceitos de vibrações mecânicas e sistemas dinâmicos, algumas técnicas de resoluções de equações diferenciais, a partir desses estudos conseguimos aplicá-los em problemas envolvendo sistemas dinâmicos.

O objetivo foi compreender como esses conceitos de Vibrações Mecânicas e seus métodos de resoluções podem solucionar alguns problemas reais envolvendo Sistemas Dinâmicos, conceitos preliminares para atingir este objetivo foram necessários e estudo da base teórica. As bases para uma perfeita compreensão deste assunto é a Teoria Clássica de Sistemas Dinâmicos. Foram realizados um estudo introdutório de equações diferenciais ordinárias, estudo teórico de conceitos de sistemas dinâmicos, estudo de sistema dinâmico linear unidimensional, em que conceitos como forma geral e ponto de equilíbrio foram abordados. Posteriormente os conceitos de sistemas dinâmicos lineares bidimensionais, onde o foco foi a forma geral de tais sistemas, ponto de equilíbrio, solução geral, autovalores e autovetores e critérios de estabilidade. Por fim, aplica-se os conceitos estudados em um problema vibratório conhecido como sistema massa-mola-amortecedor excitado harmonicamente por uma força externa e o desabamento da ponte de Tacoma Narrows.

Todos os estudos observados tiveram como objetivo o entendimento de cada conceito, no entanto a verificação dos problemas estudados, de como se comportam as soluções, foi de fundamental importância para este trabalho. Nota-se que, ainda nem sempre conseguirá soluções para problemas reais como estes.

Referências

- DIGITAIS bisnis H. N. *Blog da Engenharia*. 2018. <https://blogdaengenharia.com/ponte-tacoma-narrows-aeroelasticidade-ou-ressonancia/>. Acesso em: 15/10/2018. Citado 2 vezes nas páginas 7 e 53.
- GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de cálculo, vol. 1,2,3 e 4*. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000. Citado na página 22.
- MONTEIRO, L. Sistemas dinâmicos complexos. *Editora Livraria da Física, São Paulo*, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 7, 14 e 42.
- RAO, S. S. *Vibrações mecânicas*. [S.l.]: Pearson Educación, 2008. Citado 8 vezes nas páginas 7, 12, 55, 56, 57, 59, 60 e 61.
- TIPLER, P. A.; MOSCA, G. Física para cientistas e engenheiros. vol. 1. *LTC, Rio de Janeiro*, 2009. Citado na página 18.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. *Equações Diferenciais, vol. 1, 3ª edição*. [S.l.]: Editora Makron Books, 2008. Citado na página 21.