UEMS – UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MATO GROSSO DO SUL
Campus: Nova Andradina

Apostila - Cálculo Numérico

Professor: Oyran Silva Rayzaro

Nova Andradina-2017

Conteúdo

1 Introdução 4

2 Erros 5

2.1 Introdução 5
2.2 Representação de Números 5
2.3 Conversão de Números nos Sistemas Decimal e Binário 6
2.4 Número Fracionário 7
2.5 Aritmética do Ponto Flutuante 8
2.6 Erros: Absoluto, Relativo e Percentual 9
2.7 Análise de Erros nas Operações Aritméticas de pontos Flutuantes 11
2.8 Exercícios 11

3 Zeros de Funções Reais 13

3.1 Fase I: Isolamento das Raízes 13
3.2 Fase II- Refinamento 14
3.2.1 Critérios de Parada 15
3.2.2 Método da Bisseção 15
3.2.3 Método da Posição Falsa 16
3.2.4 Método de Newton-Raphson 16
3.2.5 Método da Secante 17
3.3 Exercícios 18

4 Resolução de Sistemas Lineares 20

4.1 Métodos Diretos 21
4.1.1 Método da Eliminação de Gauss 21
4.1.2 Fatoração LU 23
4.2 Métodos Iterativos 24
4.2.1 Critério de Parada 25
4.2.2 Método Iterativo de Gauss-Jacobi 25

4.2.3 Criterio de Convergência 26
4.2.4 Método Iterativo de Gauss-Seidel 27
4.2.5 Convergência do Método de Gauss-Seidel 28
4.3 Exercícios 29

5 Interpolação Polinomial **34**
5.1 Introdução 34
5.2 Interpolação Polinomial 34
5.2.1 Resolução do Sistema Linear 35
5.2.2 Forma de Lagrange 35
5.2.3 Forma De Newton 37
5.3 Estudo do Erro na Interpolação 38
5.4 Iterpolação Inversa 40
5.5 Escolha do Grau do Polinômio Interpolador 41
5.6 Funções Spline em Interpolação 42
5.6.1 Interpolação por Spline Linear 42
5.7 Exercícios 43

6 Integração Numérica **47**
6.1 Introdução 47
6.2 Fórmulas de Newton-Cotes 47
6.2.1 Regra dos Trapézios 48
6.2.2 Regra dos Trapézios Repetidas 48
6.2.3 Regra 1/3 de Simpson 49
6.2.4 Regra 1/3 de Simpson Repetida 49
6.3 Estudos dos Erros 50
6.3.1 Erro na Regra dos Trapézios 50
6.3.2 Erro na Regra dos Trapézios Composta 51
6.3.3 Erro na Regra 1/3 de Simpson 51
6.3.4 Erro na regra 1/3 de Simpson Repetida 52
6.4 Exercícios 53

Referências Bibliográficas **54**

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste curso é estudar métodos numéricos para a resolução de problemas que surgem nas mais diversas áreas. A resolução de problemas podem ser estruturados da seguinte forma:

Problema Real $\Rightarrow$ Levantamento de dados $\Rightarrow$ Construção do Modelo Matemático $\Rightarrow$ Escolha do Método Numérico Adequado $\Rightarrow$ Implementação Computacional deste Método $\Rightarrow$ Análise dos Resultados Obtidos $\Rightarrow$ Se necessário reformular o modelo matemático e/ou escolher novo método Numérico.

Observação 1.0.1. *Não é raro acontecer que os resultados finais estejam distantes do que se esperaria. Os resultados dempendem também:*

- *Da precisão dos dados de entrada;*
- *Da forma como estes dados são representados no computados;*
- *Das operações numéricas efetuadas.*

Capítulo 2

Erros

2.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos os erros que surgem da representação de números num computador e os erros resultantes das operações numéricas efetuadas.

2.2 Representação de Números

Para começar esta seção, vamos observar o seguinte exemplo. Calcule a área A de uma cicunferência de raio $r = 100m$. Lembre-se que $A = \Pi r^2$. Resultados obtidos:

- $A = 31400m^2$;
- $A = 31416m^2$;
- $A = 31415.92654m^2$.

Por que a diferença entre os resultados? É possivel obter "exatamente" esta área?

Porque o número Π foi representado de diferentes maneiras. A sua área nunca será obtida exatamente, pois Π é um número irracional, ou seja, não pode ser representado através de um número finito de dígitos decimais.

Além disso, um número pode ter representação finita em uma base e não-finita em outras bases. Utilizamos atualmente a base decimal. Um computador opera normalmente no sistema binário.

2.3 Conversão de Números nos Sistemas Decimal e Binário

O sistema de numeração deciaml ou de base 10, utiliza os algarismos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ para representar um número real.

Um aspecto muito importante da representação de um número, é o valor posicional dos algarismos que o compões

Exemplo 2.3.1. *Represente os números na base decimal:*
(a) $(234)_{10} = 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 4 \times 10^0$
(b) $(347)_{10} =$
(c) $(6542)_{10} =$

Para representar um número na base binária ou base 2 utilizamos os algarismos 0 e 1. De uma forma geral, um sistema de numeração de base B, com B maior ou igual a 2, será aquele sistea que usará os algarismos $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, B - 1$.

Exemplo 2.3.2. *Represente os números na base binária:*
(a) $(10111)_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
(b) $(101)_2 =$
(c) $(1010)_2 =$

Definição 2.3.1. *Um número na base B, $x = (a_j a_{j-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_B$, com $0 \leq a_k \leq B - 1$, $k = 0, 1, \ldots, j$, pode ser escrito na forma polinomial:*

$$a_j \times B^j + a_{j-1} \times B^{j-1} + \ldots + a_2 \times B^2 + a_1 \times B^1 + a_0 \times B^0.$$

Exemplo 2.3.3. *Faça a conversão de um número do sistema binário para o sistema decimal.*

(a)
$$\begin{aligned} (10111)_2 &= 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\ &= 1 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1 \\ &= 16 + 0 + 4 + 2 + 1 \\ &= 23 \end{aligned}$$

(b) $(101)_2 =$
(c) $(1010)_2 =$

Na conversão de um número inteiro escrito em base decimal para a base binária, é utilizida o método das divisões sucessivas:

1. Divide-se o número inteiro por 2;

2. Divide-se o quociente da divisão anterior por 2;

3. Repete-se o processo até o último quociente ser igual à 1;

4. O número binário é então formado pela união do último quociente com os restos das divisões anterioes, no sentido inverso.

Exemplo 2.3.4. *Faça a conversão da base decimal para a base binária:*
(a) $(13)_{10} = ()_2$;
(b) $(25)_{10} = ()_2$
(c) $(347)_{10} = ()_2$

2.4 Número Fracionário

Seja x um número real em uma base B, e x_i sua parte inteira. Então $x_f = x - x_i$ é a sua parte fracionária. Assim, dado $x = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0, b_1 b_2 \ldots b_m)_B$, podemos representar sua parte inteira e fracionária, respectivamente por:

$$x_i = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 = a_n \times B^n + a_{n-1} \times B^{n-1} + \ldots + a_1 \times B^1 + a_0 \times B^0$$

$$e$$

$$x_f = b_1 a_2 \ldots b_{m-1} b_m = b_1 \times B^{-1} + b_2 \times B^{-2} + \ldots + b_{m-1} \times B^{-(m-1)} + b_m \times B^(- m)$$

Exemplo 2.4.1. *Represente os números abaixo na base decimal:*
(a) $(39,28)_{10} =$
(b) $(141,375)_{10} =$

Para a conversão de um número fracionária da base deciaml para a base binária, utilizaremos o método das multiplicações sucessivas:

1. Multiplica-se o número fracionário por 2;

2. Do resultado, a parte inteira será o primeiro dígito do número na base binária, e a parte fracionária é novamente multiplicada por 2;

3. O processo é repetido até que a parte fracionária do último produto seja igual a zero.

Exemplo 2.4.2. *Faça as respectivas conversões:*
(a)$(375)_{10} = (?)_2$
(b) $(0,125)_{10} = (?)_2$
(c) $(13,25)_{10} = (?)_2$

Observação 2.4.1. *Nem todo número real na base decimal, possui uma representação finita na base binária.*

Exemplo 2.4.3. *Faça a conversão do número* $(0,1)_10$ *da base decimal para a base binária:*

Para converte um número fracionário da base 2 para a base 10, basta multiplicar cada algarismo da parte fracionária do número na base 2, por potências decrescentes de 2, da esquerda para a direita e somar as parcelas.

Exemplo 2.4.4. ***(a)*** $(0,110)_2 = (?)_{10}$
(b) $(0,000111)_2 = (?)_{10}$

2.5 Aritmética do Ponto Flutuante

De uma maneira geral, um número real x é representado na base B, por:

$$x = \pm\left[\frac{d_1}{B} + \frac{d_2}{B^2} + \frac{d_3}{B^3} + \dots \frac{d_t}{B^t}\right] \times B^e,$$

onde

1.) d_i- são números inteiros contidos no intervalo $0 \leq d_i \leq B-1$, $i = 1, 2, \dots, t$.

2.) $e-$ representa o expoente de B e assume valores entre $I \leq e \leq S$, onde I, S são respectivamente, limite inferior e superior para a variação do expoente.

3.) $\left[\frac{d_1}{B} + \frac{d_2}{B^2} + \frac{d_3}{B^3} + \dots \frac{d_t}{B^t}\right]$ é a chamada mantissa e é a parte do número que representa seus dígitos significativos.

4.) $t-$ é o número de dígitos significativos do sistema de representação, chamado de precisão da máquina.

Definição 2.5.1. *Um número real x no sistema de aritmética de ponto flutuante pode ser escrita na forma:*

$$x = \pm(0, d_1 d_2 d_3 \dots d_t) \times B^e,$$

com $d_1 \neq 0$, pois é o primeiro algarismo significativo de x.

Exemplo 2.5.1. *Escrever os números reais que estão todos na base $B = 10$ em notação de um sistema de aritmética de ponto flutuante.*

(a) $0,35 =$

(b) $-5,172 =$

(c) $0,0123 =$

(d) $5391,3 =$

(e) $0,0003 =$

Em qualque máquina, apenas um subconjunto do números reais é representado exatamente e, portanto a representação de número real será realizada através de truncamento ou de arredondamento.

Considere uma máquina que opera no sistema: $B = 10$, $t = 3$, $e \in [-5, 5]$. Os números serão representados na seguinte forma: $0, d_1d_2d_3 \times 10^e$, com $0 \leq d_j \leq 9$, $d_1 \neq 0$ e $e \in [-5, 5]$. Dessa forma, surgem as seguintes perguntas. Qual é o menor m e o maior M número representado nesta máquina, em valor absoluto?
$m = 0,100 \times 10^{-5} = 10^{-6}$
$M = 0,999 \times 10^{6} = 99900$

Exemplo 2.5.2. *Considere uma máquina que utiliza* $B = 10$, $t = 3$, $e \in [-2, 2]$. *Como seriam represenados nesta máquina os números do exemplo anterior:*

(a) $0,35 =$

(b) $-5,172 =$

(c) $0,0123 =$

(d) $5391,3 =$

(e) $0,0003 =$

Observação 2.5.1. *Um erro de* overflow *ocorre quando o número é muito grande para ser representado por está máquina, e erro de* underflow *ocorre quando o número é pequeno demais para ser representado.*

2.6 Erros: Absoluto, Relativo e Percentual

Definição 2.6.1. *Erro absoluto, é a diferença entre o valor exato de número* x *e o seu valor aproximado* $\overline{x}$*, isto é:*

$$EA_x = x - \overline{x}.$$

Em geral, somente o valor $\overline{x}$ é conhecido, assim obteremos apenas um limitante superior ou uma estimativa para o módulo do erro absoluto.

Exemplo 2.6.1. *Sabemos que* $\pi \in (3,14; 3,15)$. *Tomando um valor* $\overline{\pi}$ *um valor dentre este intervaalo, temos que :*

$$|EA_\pi| = |\pi - \overline{\pi}| < 0,01.$$

Exemplo 2.6.2. *Dado um número* x *representado por* $\overline{x} = 2112,9$, *de modo que* $|EA_x| < 0,1$. *Então podemos afirmar que* $x \in (2112,8; 2113,0)$ *?*

Exemplo 2.6.3. *Seja* y *um número representado por* $\overline{y} = 5,3$, *de modo que* $|EA_y| < 0,1$. *Então podemos afirmar que* $y \in (5,2; 5,4)$*?*

Observação 2.6.1. *Note que os erros absolutos,*EA_x *e* EA_y *dos exemplos anteriores admitem o mesmo limitante superior* $(0,1)$. *Podemos afirmar que* x *e* y *foram representados com a mesma precisão?*

Definição 2.6.2. *Erro relativo, é o módulo do erro absluto dividido pelo valor aproximado, ou seja:*

$$ER_x = \frac{|EA_x|}{\overline{x}} = \frac{|x - \overline{x}|}{\overline{x}}.$$

Definição 2.6.3. *Erro percentual, é o erro relativo em termos percentuais, ou seja:*

$$EP_x = ER_x \times 100\%.$$

Exemplo 2.6.4. *Determine os erros relativos e percentuais, dos exemplos 2.6.2 e 2.6.3.*

Considere um número x no formato do sistema aritmética do ponto flutuante, ou seja:

$$x = \pm(0, d_1 d_2 \dots d_k d_{k+1} d_{k+2} \dots d_t) \times B^e.$$

Se quisermos escrever x com K dígitos decimais, existem duas maneiras:

(1°) *Truncamento:* Consiste simplesmente em descartar os digítos $d_{k+1} d_{k+2} \dots d_t$.

(2°) *Arredondamento:* Consiste em truncar a mantissa em K dígitos, como no caso acima. Porém 2 situações podem ocorrer:
(a) se $d_{k+1} \geq 5$, então $d_k = d_k + 1$;
(b) se $d_{k+1} < 5$, então $d_k = d_k$.

Exemplo 2.6.5. *Considere* $\pi = 3,141592654$. *Escreva* π *na forma da aritmética do ponto flutuante com* 5 *dígitos, usando o truncamento e o arrendodamento.*

Exemplo 2.6.6. *Dar a representação a seguir, num sistema de aritmética de ponto flutuante de* 3 *dígitos, para* $B = 10$, $I = -4$ *e* $S = 4$.

x	Arredondamento	Truncamento
1,25		
10,053		
-238,15		
2,71828		
0,000007		
718235,88		

2.7 Análise de Erros nas Operações Aritméticas de pontos Flutuantes

Dada um sequência de operações, o erro da operação propaga-se ao longo das operações. O erro total em uma operação e composto pelo erro das parcelas ou fatores e pelo erro no resultado da operação.

Exemplo 2.7.1. *Considere um sistema de aritmética de ponto flutuante de quatro dígitos, na base* $B = 10$*. Sejam* $x = 0,937 \times 10^4$ *e* $y = 0,1272 \times 10^2$*. Calcule as operações abaixo, no seu valor exato, de truncamento e de arredondamento:*
(a) $x + y$
(b) $x \times y$

Exemplo 2.7.2. *Considere um sistema de aritmética de ponto flutuante de quatro dígitos, na base* $B = 10$*. Sejam* $x_1 = 0,3491 \times 10^4$ *e* $y_1 = 0,2345 \times 10^0$*. Calcule as operações abaixo no truncamento e arredondamento:*
(a) $(y_1 + x_1) - x_1 =$
(b) $y_1 + (x_1 - x_1) =$

2.8 Exercícios

1- Faça as conversões indicadas abaixo:

(a) $(100110)_2 = (?)_{10}$

(b) $(1100101)_2 = (?)_{10}$

(c) $(40,28)_{10} = (?)_2$

(d) $(110,01)_2 = (?)_{10}$

(e) $(3,8)_{10} = (?)_2$

2- Calcular os erros absoluto, relativo e percentual:

(a) Suponhamos que tenhamos um valor aproximado de $0,00004$ para um valor exato de $0,00005$. Calcular os erros absoluto, relativo e percentual para este caso.

(b) Suponhamos que tenhamos um valor aproximado de 100000 para um valor exato de 101000. Calcular os erros absoluto, relativo e percentual para este caso.

(c) Considerando os dois casos acima, onde se obteve uma melhor aproximação com maior precisão? Justifique sua resposta.

3- Converta os seguintes números decimais para sua forma binária:
$x = 35 \quad y = 2345 \quad z = 0,1217$

4- Converta os seguintes números binários para sua forma decimal:
$x = (101101)_2 \quad y = (110101011)_2$
$z = (0,1101)_2 \quad w = (0,111111101)_2$

5- Seja um sistema de aritmética de ponto flutuante de quatro dígitos, base decimal. Dados os números:
$x = 0,7237 \times 10^4 \quad 0,2145 \times 10^{-3} \quad e \quad z = 0,2585 \times 10^1$
efetue as seguintes operações e obtenha o erro relativo no resultado, supondo que x, y, z estão exatamente representados:

(a) $x + y + z$

(b) $x - y - z$

(c) x/y

(d)$(xy)/z$

(e) $x(y/z)$

6- Supondo que x é representado num computador por $\overline{x}$, onde $\overline{x}$ é obtido por arredondamento, obtenha os limites superiores para os erros relativos de $u = 2\overline{x}$ e $w = \overline{x} + \overline{x}$.

7- Considere uma máquina cujo sistema de representação de números é definido por: $B = 10$, $t = 4$, $m = -5$ e $M = 5$. Pede-se:

(a) qual o menor e o maior número em módulo representados nesta máquina ?

(b) como será representado o número $73,758$ nesta máquina, se for usado o arredondamento? E se for usado o truncamento

Capítulo 3

Zeros de Funções Reais

O objetivo deste capítulo, é estudar métodos numéricos para a resolução de equações não-lineares.

Definição 3.0.1. *Um número* $a \in \mathbb{R}$ *é um zero da função* $f(x)$ *ou uma raiz da equação* $f(x) = 0$ *se* $f(a) = a$.

Observação 3.0.1. .
(a) *Os valores de* x *que anulam* $f(x)$*, pode ser real ou complexo. Mas estamos interessados somente nos zeros reais de* $f(x)$.

(b) Graficamente, os zeros reais são representados pelas abcissas dos pontos onde uma curva intercepta o eixo $\overrightarrow{0x}$.

Os métodos constam de 2 fases:

- Fase I: Isolamento das raízes;
- Fase II: Refinamento

3.1 Fase I: Isolamento das Raízes

Nesta fase, é feita uma análise teórica e gráfica da função $f(x)$.

Teorema 3.1.1. *Seja* $f(x)$ *uma função contínua num intervalo* $[a, b]$*. Se* $f(a) \cdot f(b) < 0$*, então existe pelo menos um ponto* z *entre* a *e* b *tal que* $f(z) = 0$.

Gráficos:

Observação 3.1.1. *Sob as hipóteses do teorema anterior, se* $f'(x)$ *existir em* (a, b)*, então este intervalo contém um único zero de* $f(x)$.

Gráficos:

Um a forma de se isolar as raízes de $f(x)$ usando os resultados anteriores é analisar as mudanças de sinal de $f(x)$ e o sinal da derivada nos intervalos em que $f(x)$ mudou de sinal.

Exemplo 3.1.1. *Analisar os intervalos das raízes das seguintes funções:*
(a) $f(x) = x^3 - 9x + 3$
(b) $f(x) = \sqrt{x} - 5e^{-x}$

Observação 3.1.2. *Se* $f(a) \cdot f(b) > 0$*, então podemos ter várias situações no intervalo* $[a, b]$*. Por exemplo:*

Gráficos:

Para obter uma boa aproximação para a localização das raízes, através do gráficos, utilizamos o seguinte processo:

1. Esboçar o gráfico da função $f(x)$ e localizar as abcissas dos pontos onde a curva intercepta o eixo $\overrightarrow{0x}$;

2. A partir da equação $f(x) = 0$, obter uma equação equivalente $g(x) = h(x)$, esboçar os gráficos das funções $g(x)$ e $h(x)$ e localizar os pontos tais que $h(x) = g(x)$;

3. Usar os programas que traçam gráficos de funções, disponíveis em algumas calculadoras ou softwares matemáticos.

Exemplo 3.1.2. *Localize o intervalo que se encontram as raízes da função* $f(x) = x^3 - 9x^2 + 3$*, utilizando os processos* 1 *e* 2*.*

3.2 Fase II- Refinamento

Nesta seção estudaremos vários métodos numéricos de refinamento de raiz. A forma como se efetua refinamento é que diferencia os métodos. Todos eles pertencem à classe dos métodos iterativos.

Definição 3.2.1. *Um método iterativo consiste em uma sequência de instruções que são executadas passo a passo, algumas das quais são repetidas em ciclos. A execução de um ciclo recebe o nome de iteração.*

Observação 3.2.1. *Observamos que os métodos iterativos para obter zeros de funções fornecem apenas uma aproximação para a solução exata.*

3.2.1 Critérios de Parada

Como saber se um número x_k está suficientemente próximo da raiz exata c? Existem 2 interpretações para a raiz aproximada que nem sempre levam ao mesmo resultado.

Dizemos que $\overline{x}$ é uma raiz aproximada com precisão ϵ se:

(a) $|\overline{x} - c| < \epsilon$ ou

(b) $|f(\overline{x})| < \epsilon$.

Uma pergunta que fazemos é: Como efetuar o teste (a) se não conhecemos o valor da raiz exata c?

Uma forma é reduzir o intervalo que contém a raiz a cada iteração. De modo que um obtemos um intervalo $[a, b]$ tal que, $c \in [a, b]$ e $(b - a) < \epsilon$. Então, para qualquer $x \in [a, b]$, temos $|x - c| < \epsilon$.

Gráficos:

Observamos graficamente, que nem sempre é possível ter as exigências **(a)** e **(b)** satisfeitas simultaneamente.

Gráficos:

3.2.2 Método da Bisseção

Seja $f(x)$ uma função no intervalo $[a, b]$ e tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$. Suponha que o intervalo (a, b) contenha uma única raiz da equação $f(x) = 0$. O objetivo deste método é reduzir a amplitude do intervalo que contém a raiz, com uma certa precisão, que através da divisão sucessiva de $[a, b]$ ao meio.

Gráficos:

As iterações são realizadas da seguinte forma:

- $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}, \begin{cases} f(a_0) < 0 \\ f(b_0) > 0 \\ f(x_0) > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c \in (a_0, x_0) \\ a_1 = a_0 \\ b_1 = x_0 \end{cases}$

- $x_1 = \dfrac{a_1 + b_1}{2}, \begin{cases} f(a_1) < 0 \\ f(b_1) > 0 \\ f(x_1) < 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c \in (x_1, b_1) \\ a_2 = x_1 \\ b_2 = b_1 \end{cases}$

- $x_2 = \dfrac{a_2 + b_2}{2}, \begin{cases} f(a_2) < 0 \\ f(b_2) > 0 \\ f(x_2) < 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} c \in (x_2, b_2) \\ a_3 = x_2 \\ b_3 = b_2 \end{cases}$

  ....
  ....

Exemplo 3.2.1. *Mostre que a função* $f(x) = x\lg x - 1$ *tem um zero em* $(2,3)$*. Em seguida, use método da bisseção aplicada a esta função com* $[2,3]$ *como intervalo inicial.*

3.2.3 Método da Posição Falsa

Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$ com $f(a)\cdot f(b) < 0$. Suponha que o intervalo contenha uma única raiz da equação $f(x) = 0$.

O método da posição falsa toma a média aritmética ponderada entre a e b com pesos $f(b)$ e $f(a)$.

O algorítmo deste método é dado por :

1. Considere $x_1 \in [a,b]$ tal que :
$$x_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)};$$
2. Se o critério da parada é satisfeito, então x_1 é a resposta. Caso contrário;
3. Se $f(a)\cdot f(x_1) < 0$, mantém a inalterado e substitui-se b por x_1 e retorne ao passo 1. Caso $f(x_1)\cdot f(b) < 0$, mantenha b inaçterado e substitua a por x_1, e calcule a nova aproximação como no passo 1.

Observação 3.2.2. *Graficamente, este ponto* x *é a interseção do eixo* $\overrightarrow{0x}$ *e reta* $r(x)$ *que passa pelos pontos* $(a, f(a))$ *e* $(b, f(b))$*.*

Exemplo 3.2.2. *Use o método da posição falsa, aplicada a função* $f(x) = x\lg x - 1$ *no intervalo* $[2,3]$.

3.2.4 Método de Newton-Raphson

Consite num método de aproximações sucessivas da forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

O procedimento iterativo é assim realizado:

- Escolha um ponto inicial x_0 e observa-se a convergência durante o processo iterativo.
- Caso não convirja, escolha-se outro x_0 e reinicia-se o processo iterativo.

Geometricamente, dado um ponto $(x_k, f(x_k))$, traça-se uma reta tangente à curva neste ponto. Faz-se, então $x_{x+1} = x_k$ até ober a convergência.

Exemplo 3.2.3. *Use o método de Newton-Raphson para a função* $f(x) = x^2 + x - 6$*, com ponto inicial* $x_0 = 1.5$*.*

Exemplo 3.2.4. *Ache a raiz positiva de* $f(x) = x^3 - 6$*, com critério de parada* $\epsilon < 0,001$*.*

3.2.5 Método da Secante

Uma grande desvantagem do método de Newton e a necessidade de se obter $f'(x)$ e calcular seu valor numérico a cada iteração. Uma alternativa é usar retas secantes como aproximações lineares locais da função, em vez de tangentes. Neste caso, sâo necessárias duas aproximações para inicializarmos o processo, x_0 e x_1.

No método da Secante, tomamos a reta que passa pelos pontos $(x_0; f_(x_0))e(x_1; f(x_1))$ como uma aproximação linear da curva $y = f(x)$. Para estabelecermos a relação de recorrência do Método da Secantes, usamos a semelhança de triângulos

$$\frac{f(x_0)}{x_0 - x_2} = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}.$$

Explicitando o valor da incógnita x_2 teremos:

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}.$$

Generalizando, no método das secantes usaremos duas aproximações $x_{k-1}1$ e x_k , para calcular uma nova aproximação x_{k+1}, através da fórmula:

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1} f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}.$$

Exemplo 3.2.5. *Aplique o método das secantes para encontrar a raiz de* $f(x) = x^3 - 9x + 3$ *tomando* $x_0 = 0$ *e* $x_1 = 1$*, para erro* $\epsilon = 10^{-4} = 0,0001$*.*

Observe a tabela

k	x_{k_1}	x_k	$f(x_{k_1})$	$f(x_k)$	$\lvert x_k - x_{k_1}\rvert$
1	0	1			

Exemplo 3.2.6. *Aplique o método das secantes para encontrar a raiz de* $f(x) = x^2 + x - 6$ *tomando* $x_0 = 1.5$ *e* $x_1 = 1.7$*, para erro* $\epsilon = 0,003$*.*

Observe a tabela

k	x_{k_1}	x_k	$f(x_{k_1})$	$f(x_k)$	$\|x_k - x_{k_1}\|$
1	1.5	1.7			

3.3 Exercícios

1- Localize graficamente as raízes das equações a seguir:

(a) $4\cos(x) - e^{2x} = 0$

(b) $\dfrac{x}{2} - \tan(x) = 0$

(c) $1 - x\ln(x) = 0$

(d) $2^x - 3x = 0$

(e) $x^3 + x - 1000 = 0$

2- Calcular a menor raiz das funções abaixos, aplicando o método da bisseção com um erro dado:

(a) $f(x) = e^x - 3x$, $\epsilon = 0,001$

(b) $f(x) = x^3 - 9x + 3$, $\epsilon = 0,0001$

(c) $f(x) = x^2 - 5$, $\epsilon = 0,10$

3- Calcular a menor raiz das funções abaixos, aplicando o método da Newton-Raphson com um erro dado:

(a) $\dfrac{x}{2} - \tan(x) = 0$, $\epsilon = 0,0001$

(b) $2\cos(x) - e^{2x} = 0$, $\epsilon = 0,0001$

(c) $x^5 - 6 = 0$, $\epsilon = 0,0001$

4- Calcular a raiz real das funções abaixo pelo método da posição falsa.

(a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 17x + 21$, $I = [-1,0]$ e $\epsilon = 0,001$

(b) $f(x) = x^3 - 9x + 3$, $I = [0,1]$ e $\epsilon = 0,01$

5-Determinar pelo menos uma raiz de cada equaçãa abaixo com $\epsilon < 10^{-4}$ usando o método das Secantes.

(a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 10x + 20 = 0;$

(b) $f(x) = 5\ln x + 3x^4 - 7 = 0$

Capítulo 4

Resolução de Sistemas Lineares

Definição 4.0.1. *Um sistema linear com m equações e n variáveis é escrito na forma:*

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_b & = & b_m \end{array} \right. ,$$

onde a_{ij} são os coeficientes, x_j as variáveis e b_i as constantes, com $j = 1, ..., n$ e $j = 1, ..., m$.

O objetivo deste capítulo é calcular os valores de $x_j (j = 1, ..., n)$ caso eles existam, que satisfaçam as m equações simultaneamente.

Usando a notação matricial, o sistema linear S pode ser representado por $A \cdot x = b$, onde:

$$A = \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right), \; x = \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right) \text{ e } b = \left(\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right) \text{ é o vetor constante.}$$

A a matriz dos coeficientes, x é o vetor das variáveis e b é o vetor constante.

Chamaremos de $x*$ o vetor solução e de $\overline{x}$ uma solução aproximada do sistema linear $A \cdot x = b$.

Um sistema linear pode ser classificado em relação ao número de soluções, são 3 possibilidades:

(i) Solução Única: Possível e determinado.

O sistema $\left\{ \begin{array}{ccccc} 2x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ x_1 & - & 3x_2 & = & -2 \end{array} \right.$, possui solução $x^* = (1, 1)$.

(ii) Infinitas Soluções: Possível e Indeterminado.

O sistema $\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & = & 6 \end{cases}$, qualquer $x^* = (t, 3-2t)$, com $t \in \mathbb{R}$, é solução.

(iii) Nenhuma Solução: Impossível.

O sistema $\begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & = & 2 \end{cases}$.

Graficamente, cada um desses casos é representado por:

Gráficos

Definição 4.0.2. *Um sistema linear é chamado homogêneio quando as constantes são todas iguais à zero, ou seja,* $b_i = 0$, $i = 1, ..., m$.

Observe que todo sistema linear homogêneo admite pelo menos a solução trivial $x* = (0, 0, ..., 0)$

Observação 4.0.1. *Na forma matricial* $A \cdot x = b$, *se* A *é invertível, ou seja,* $A \cdots A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$, *temos* $A^{-1} \cdot (A \cdot x) = A^{-1} \cdot b$, *logo* $x = A^{-1} \cdot b$, *ou seja,* $A^{-1} \cdot b$ *é uma solução.*

Neste capítulo apresentaremos métodos numéricos para a resolução de sistemas lineares $n \times n$. Os métodos numéricos para resolução de um sistema linear podem ser divididos em dois grupos: métodos diretos e métodos iterativos.

Métodos Diretos são aqueles que, a menos de erros de arredondamento, fornecem a solução exata do sistema linear, caso ela exista, após um número finito de operações.

Métodos Iterativos geram uma sequência de vetores $\{x^{(k)}\}$, a partir de uma aproximação inicial $x^{(0)}$. Sob certas codições esta sequência converge para a solução $x*$, caso ela exista.

4.1 Métodos Diretos

4.1.1 Método da Eliminação de Gauss

O método da Eliminição de Gauss, consiste em transformar o sistema linear em um sistema equivalente com matriz dos coeficientes triangular superior.

Dizemos que 2 sistemas lineares são equivalentes quando possuem a mesma solução. Um sistema $A \cdot x = b$ onde a matriz A é triangular superior, com elementos da diagonal diferentes de zero, é da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & a_{33}x_3 & + & \dots & + & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}.$$

Da última equação do sistema anterior, obtemos $x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}}$. Dessa forma, podemos obter os valores de $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$.

Teorema 4.1.1. *Seja $A \cdot x = b$ um sistema linear. Aplicando as seguintes operações elementares:*

- *trocar 2 equações;*
- *multiplicar uma equação por uma constante não nula;*
- *adicionar um múltiplo de uma equação a outra equação.*

Obtemos um novo sistema $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$, de modo que os sistemas $A \cdot x = b$ e$\tilde{A} \cdot x = \tilde{b}$ são equivalentes.

Observações:

1. Se $\det(A) \neq 0$, então $\exists a_{1j} \in A$, tal que $a_{1j} \neq 0$;
2. Usaremos a notação $a_{ij}^{(k)}$ para denotar o coeficiente da linha i e coluna j no final da $k-$ésima etapa.
3. Os elementos $m_{ij} = \dfrac{a_{ij}^{(k)}}{a_{jj}^{(k)}}$, $i = 1, ..., n$ e j fixo entre 1 e n, são chamados de *multiplicadores* da $K-$ésima etapa, e os elementos $a_{jj}^{(k)}$ é denominado o pivô da $K-$ésima etapa.
4. L_i indica a linha i do sistema de equações lineares.

Exemplo 4.1.1. *Resolva os sistemas lineares pelo método da Eliminação de Gauss:*

(a)

$$\begin{cases} 2x & + & 3y & - & z & = & 4 \\ 4x & - & 3y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} 3x & + & 2y & + & 4z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ 4x & + & 3y & - & 2z & = & 3 \end{cases}$$

Através do método da eliminação de Gauss, podemos determinar a matriz inversa de uma matriz quadrada A de ordem n com $\det(A) \neq 0$ da seguinte forma:

Exemplo 4.1.2. *Calcule a matriz inversa de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Durante a resolução de sistemas de equações lineares através do método da Eliminação de Gauss, surgem algumas perguntas, como: O que acontece se o pivô for nulo? E se o pivô estiver próximo de zero? Dessa forma, utilizaremos uma estratégia de pivoteamento:

1. No início da etapa k, escolhemos para pivô o elemeno de maior módulo entre todos os coeficientes da coluna;

2. Trocar a linha K por uma outra linha, se for necessário.

Exemplo 4.1.3. *Considere o sistema linear:*

$$\begin{cases} 0.0002x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & = & 6 \end{cases}$$

Vamos Resolver este sistema usando a aritmética do ponto flutuante de 3 *dígitos, de* 2 *formas:*

$1°$: *Método Normal;*

$2°$: *Através da Estratégia de Pivoteamento.*

4.1.2 Fatoração LU

Dado um sistema linear $A \cdot x = b$, o objetivo deste método, é decompor a matriz dos coeficientes A em um produto de dois ou mais fatoes, e em seguida resolver uma sequência de sistemas lineares.

Por exemplo, seja $A = C \cdot D$, então $(C \cdot D)x = b$. Se $y = D \cdot x$, então $C \cdot y = b$.

A vantagem deste processo, é que podemos resolver qualquer sistema linear que tenha A como matriz dos coeficientes. Na fatoração LU, a matriz L é triangular inferior com diagonal unitária e a matriz U é triangular superior. E os fatores L e U são obtidos através do método de eliminação de Gauss.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}, \text{ e } U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Teorema 4.1.2. *Dada uma matriz A de ordem n, seja A_k uma matriz constituída das primeiras K linhas e colunas de A. Suponha que* $\det(A_k) \neq 0$ *para* $k = 1, 2, ..., (n-1)$. *Então, existe uma única matriz triangular inferior $L = (m_{ij})$, com $m_{ii} = 1$, $1 \leq i \leq n$ e uma única matriz triangular superior $U = (u_{ij})$, tais que $LU = A$ e* $\det(A) = u_{11}u_{12}...u_{nn}$.

A resolução do suistema linear $Ax = b$, usando a fatoração LU da matriz A, é dada por:

$$Ax = b \Leftrightarrow (LU)x = b.$$

Seja $y = Ux$. A solução do sistema linear, pode ser obtida através da resolução desses 2 sistemas:
(i) $Ly = b$;
(ii) $Ux = y$.

Exemplo 4.1.4. *Resolva o sistema linear, usando a fatoração LU, sem estratégia de pivoteamento:*

$$\begin{cases} 3x & + & 2y & + & 4z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ 4x & + & 3y & + & 2z & = & 3 \end{cases}$$

No processo da fatoração LU com estratégia de pivoteamento parcial, observaremos que as permutações feitas nas linhas de A devem ser efetuadas sobre a matriz coluna b, mas os valores da matriz b não sofrem alterações.

Exemplo 4.1.5. *Resolva o seguinte sistema linear, usando a fatoração LU, com estratégia de pivoteamento:*

$$\begin{cases} 3x & - & 4y & + & z & = & 9 \\ x & + & 2y & + & 2z & = & 3 \\ 4x & + & & + & -3z & = & -2 \end{cases}$$

4.2 Métodos Iterativos

Os métodos iterativos geram uma sequência de vetores $x^{(k)}$, a partir de uma aproximação inicial $x^{(0)}$. Sob certas condições, esta sequência converge para a solução caso ela exista.

Seja $Ax = b$, um sistema linear, onde A é matriz dos coeficientes de ordem $n \times n$, x é o vetor das variáveis $n \times 1$, e b é o vetor dos termos constantes $n \times 1$.

Este sistema, é convertido de alguma forma, num sistema do tipo $x = Cx + g$, onde C é uma matriz $n \times n$ e g é o vetor $n \times 1$. É então proposto o seguinte esquema iterativo:

Partimos de $x^{(0)}$(vetor aproximação inicial) e então construímos consecutivamente os vetores:
$x^{(1)} = Cx^{(0)} + g$ (primeira aproximação)
$x^{(2)} = Cx^{(1)} + g$ (segunda aproximação)
$x^{(3)} = Cx^{(2)} + g$ (terceira aproximação)
....
$x^{(k)} = Cx^{(k-1)} + g$ (k-ésima aproximação)

Assim, se a sequência de aproximações $x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}, ...$ é tal que $\lim\limits_{k\to+\infty} x^{(k)} = y$, então $y = Cy + g$ é a solução do sistema linear $Ax = b$.

4.2.1 Critério de Parada

O processo iterativo é repetido até que o vetor $x^{(k)}$ esteja suficientemente próximo deo vetor $x^{(k-1)}$. Medimos a distância entre $x^{(k)}$ e $x^{(k-1)}$ por:

$$d^{(k)} = \max_{1\leq i\leq n} |x_i^{(k)} - x_i^{(k-1)}|.$$

Assim, dado uma precisão ϵ, o vetor $x^{(k)}$ será escolhido como $\overline{x}$, solução aproximada da solução exata, se $d^{(k)} < \epsilon$.

O erro relativo é dado

$$d_r^{(k)} = \frac{d^{(k)}}{\max\limits_{1\leq i\leq n} |x_i^{(k)}|}.$$

Observação 4.2.1. *Também, como teste de parada utilizaremos um número máximo de iterações.*

4.2.2 Método Iterativo de Gauss-Jacobi

COnsidere o sistema linear:

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_b & = & b_n \end{array} \right. ,$$

e supomos $a_{ii} \neq 0$, para $i = 1, ..., n$.

Primeiramente, isolamos o vetor da váriveis $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ da seguinte forma:
$x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_n)$,

$x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n),$

$x_3 = \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - \ldots - a_{3n}x_n),$

....

....

....

$x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{n,n-1}x_n).$

Dessa forma, temos $x = Cx + g$, onde:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{-a_{12}}{a_{11}} & \dfrac{-a_{13}}{a_{11}} & \ldots & \dfrac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \dfrac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dfrac{-a_{23}}{a_{22}} & \ldots & \dfrac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \dfrac{-a_{n2}}{a_{nn}} & \dfrac{-a_{n3}}{a_{nn}} & \ldots & 0 \end{pmatrix} \text{ e } g = \begin{pmatrix} \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

O método de Gauss-Jacobi, consiste em dado $x^{(0)}$, aproximação inicial, obter $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}, ...,$ através da relação recursiva $x^{(k+1)} = Cx^{(k)} + g$, isto é:

$x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k)}),$

$x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k)}),$

$x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)} - \ldots - a_{3n}x_n^{(k)}),$

....

....

....

$x_n^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k)} - a_{n2}x_2^{(k)} - \ldots - a_{n,n-1}x_n^{(k)}).$

Exemplo 4.2.1. *Resolva o sistema linear abaixo, usando o método de Gauss-Jacobi, com aproximação inicial* $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1.6 \\ 0.6 \end{pmatrix}$ *e* $\epsilon = 0.05$.

$$\begin{cases} 10x + 2y + z = 7 \\ x + 5y + z = -8 \\ 2x + 3y + 10z = 6 \end{cases}$$

4.2.3 Criterio de Convergência

Teorema 4.2.1. (Cirtério das Linhas)

Dado um sistema linear da forma $Ax = b$, *considere* $\alpha_k = (\sum_{j=1}^{n} |a_{kj}|)/|a_{kk}, j \neq k$. *Se*

$\alpha = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \alpha_k < 1$, *então o método de Gauss-Jacobi gera uma sequência* $\{x^{(k)}\}$ *convergente para a solução do sistema dado, independentemente da escolha da aproximação inicial* $x^{(0)}$.

Exemplo 4.2.2. *Análise o sistema do exemplo 4.2.1 usando o critério das linhas.*

Exemplo 4.2.3. *Verifique se o sistema linear* $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 3y = -3 \end{cases}$, *admite como solução o vetor* $x^* = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$, *e se o critério de linhas é satisfeito.*

Exemplo 4.2.4. *Verifique se o critério de linhas é satisfeito para o sistema linear* $\begin{cases} x + 3y + z \\ 5x + 2y + 2 \\ \quad\;\; 6y + 8 \end{cases}$

Caso não seja, use a estratégia de pivoteamento para a matriz deste sistema linear.

4.2.4 Método Iterativo de Gauss-Seidel

Da mesma forma que no método de Gauss-Jacobi, no método de Gauss-Seidel o sistema linear $Ax = b$ é escrito na forma $x = Cx + g$ por separação da diagonal.

O processo iterativo consiste em, sendo $x^{(0)}$ uma aproximação inicial, calcular $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(k)}, ...$ por:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \ldots - a_{1n}x_n^{(k)}),\\
x_2^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \ldots - a_{2n}x_n^{(k)}),\\
x_3^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - \ldots - a_{3n}x_n^{(k)}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x_n^{(k+1)} &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - \ldots - a_{n,n-1}x_n^{(k+1)}).
\end{aligned}
$$

Portanto, no processo iterativo de Gauss-Seidel, no momento de se calcular $x_j^{(k+1)}$, usamos todos os valores $x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, ..., x_{j-1}^{(k+1)}$ que já foram calculados, e os valores $x_{j+1}^{(k)}, ..., x_n^{(k)}$ restantes.

Exemplo 4.2.5. *Resolva o sistema linear abaixo através do método de Gauss-Seidel, com aproximação inicial* $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *e* $\epsilon = 0.05$

$$\begin{cases} 5x & + & y & + & z & = & 5 \\ 3x & + & 4y & + & z & = & 6 \\ 3x & + & 3y & + & 6z & = & 0 \end{cases}$$

4.2.5 Convergência do Método de Gauss-Seidel

Teorema 4.2.2. *(*Critério de Sasenfeld*)*

Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *a matriz de um sistema linear, com* $a_{jj} \neq 0$, $\forall j = 1, ..., n$. *Dizemos que o método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente para qualquer que seja* $x^{(0)}$, *se* $\beta < 1$, *onde* $\beta = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \{\beta_j\}$ *e*

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + |a_{14}| + \ldots + |a_{1n}|}{|a_{11}|}$$
$$\beta_2 = \frac{|a_{21}|\beta_1 + |a_{23}| + |a_{24}| + \ldots + |a_{2n}|}{|a_{22}|}$$
$$\beta_3 = \frac{|a_{31}|\beta_1 + |a_{32}|\beta_2 + |a_{34}| + \ldots + |a_{3n}|}{|a_{33}|}$$

....

$$\beta_j = \frac{|a_{j1}|\beta_1 + |a_{j2}|\beta_2 + \ldots + |a_{j,j-1}|\beta_{j-1} + |a_{j,j+1}| + \ldots + |a_{jn}|}{|a_{jj}|}$$

Observação 4.2.2. *Além disso, quanto menor for* β, *mais rápido sera aa convergência.*

Exemplo 4.2.6. *Verifique se o Critério de Sasenfeld é satisfeito para os seguintes sistemas lineares:*

(a) $$\begin{cases} x & + & 0,5y & - & 0,1z & + & 0,1t & = & 0,2 \\ 0,2x & + & y & - & 0,2z & - & 0,1t & = & -2,6 \\ -0,1x & - & 0,2y & + & z & + & 0,2t & = & 1,0 \\ 0,1x & + & 0,3y & + & 0,2z & + & t & = & -2,5 \end{cases}$$

(b) $$\begin{cases} 2x & + & y & + & 3z & = & 9 \\ & - & y & + & z & = & 1 \\ X & + & & + & 3z & = & 9 \end{cases}$$

O critério das linhas estudado no método de Gauss-Jacobi vale também para o Gauss-Seidel, ou seja, se $\alpha = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \alpha_k < 1$ onde $\alpha_k = (\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{kj}|)/|a_{kk}$, $j \neq k$, então o método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente.

4.3 Exercícios

Observação 4.3.1. *Observamos que se o critério das linhas for satisfeito, então o critério de Sassenfeld também será. A recíprova não vale.*

Exemplo 4.3.1. *Verifique se o Critério das Linhas e o Critério de Sasenfeld são satisfeitos para os seguinte sistema linear:*

$$\begin{cases} 3x & + & & + & z & = & 3 \\ x & - & y & & & = & 1 \\ 3x & + & Y & + & 2z & = & 9 \end{cases}$$

1. Resolva o sistema linear abaixo utilizando o método da Eliminação de Gauss:

   (a)

   $$\begin{cases} 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & - & 2x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 12 \end{cases}$$

   (b) $$\begin{cases} 2x & + & 3y & - & z & = & 4 \\ 4x & - & 3y & + & z & = & 2 \\ x & - & y & + & z & = & 1 \end{cases}$$

2. Analise os sistemas lineares abaixo com relação ao número de soluções, usando o método da Eliminação de Gauss (trabalhe com três casas decimais):

   (a) $$\begin{cases} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 5_3 & + & x_4 & = & 7 \\ -6x_1 & + & 4_2 & - & 8x_3 & + & x_4 & = & -9 \\ 9x_1 & - & 6x_2 & + & 19x_3 & + & x_4 & = & 23 \\ 6x_1 & - & 4x_2 & - & 6x_3 & + & 15x_4 & = & 11 \end{cases}$$

   (b) $$\begin{cases} 0.252x_1 & + & 0.36x_2 & + & 0.12x_3 & = & 7 \\ 0.112x_1 & + & 0.16x_2 & + & 0.24x_3 & = & 8 \\ 0.147x_1 & + & 0.21x_2 & + & 0.25x_3 & = & 9 \end{cases}$$

3. Resolva o sistema linear pelo método da eliminação de Gauss com pivoteamento parcial:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 7z = 3 \\ 9x \qquad\quad - 3z = 3 \\ 4x - 8y + 5z = 4 \end{cases}$$

4. Calcule a inversa da matriz pelo Metodo de Eliminação de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Calcule a fatoração LU de A, se possível:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Entre o método da Eliminação de Gauss e a fatoração LU, qual o mais indicado para o cálculo de A^{-1} ? Aplique o melhor método para obter a inversa da matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

7. Usando a estratégia de pivoteamento parcial encontre a inversa da matriz abaixo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 3 \\ 2 & 4 & 16 \\ 3 & 15 & 7 \end{pmatrix}$$

8. Em cada caso, verifique se o critério de Sassenfeld é satisfeito, e caso for, resolva por Gauss-Seidel:

(a) $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & 10 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{pmatrix} \quad ; \quad b = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

9. **(a)** Usando o critério de Sassenfeld, verifique para que valores positivos de k se tem garantia de que o método de Gauss-Seildel vai gerar uma sequência convergente para a solução do sistema:

$$\begin{cases} kx_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ kx_1 + 6x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + 6x_2 + 7x_3 = 3 \end{cases}$$

(b) Escolha o menor valor positivo de k e faça duas iterações do método de Gauss-Seidel para o sistema obtido.

10. Considere o sistema linear

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Verifique, usando eliminação gaussina, que este sistema não tem solução. Qual será o comportamento do método de Gauss-Seidel ?

11. Resolva o sistema linear abaixo pelo método de Gauss-Jacobi com $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e critério de parada $\epsilon = 0.1$ ou 5 iterações no máximo.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

12. Resolver o sistema linear pelos métodos de Gauss-Jacobi e de Gauss-Seidel com solução inicial $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e encontre as soluções $x^{(1)}$,$x^{(2)}$,$x^{(3)}$,$x^{(4)}$ para os dois métodos comparando os resultados.

$$\begin{cases} 10x & + & y & + & z & = & 12 \\ x & + & 10Y & + & z & = & 12 \\ x & + & y & + & 10z & = & 12 \end{cases}$$

13. Resolva pelo método de Gauss-Jacobi com aproximação inicial $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{pmatrix}$. Utilize como critério de parada $\epsilon = 0,01$.

$$\begin{cases} 10x & + & 2y & + & z & = & 7 \\ x & + & 5y & + & z & = & -8 \\ 2x & + & 3y & + & 10z & = & 6 \end{cases}$$

14. Resolva pelo método de Gauss-Seidel com aproximação inicial $x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.Utilize como critério de parada $\epsilon = 0,01$.

$$\begin{cases} 5x & + & y & + & z & = & 5 \\ 3x & + & 4y & + & z & = & 6 \\ 3x & + & 3y & + & 6z & = & 0 \end{cases}$$

15. Considere o sistema:

$$\begin{cases} 3x & + & y & - & z & = & 3 \\ 2x & + & 4y & + & z & = & 7 \\ -x & - & y & + & 3z & = & 1 \end{cases}$$

.

(a) Verifique se o critério de convergência do método de Gauss-Jacobi é satisfeito ultilizando o critério de linhas.

(b) Verifique se o critério de convergência do método de Gauss-Seidel é satisfeito utrilizando o critério de Sassenfeld:

16. O critério das linhas estudado no método de Gauss-Jacobi, pode ser aplicado no estudo de convergência do método de Gauss-Seidel. Verifique se o critério das linhas é satisfeito, então o critério de Sassenfeld também é satisfeito.

17. Verifique qual dos critérios(linha e Sassenfeld) são satisfeitos para a convergencia do seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3x & & + & z & = & 3 \\ x & - & y & & = & 1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 9 \end{cases}.$$

Capítulo 5

Interpolação Polinomial

5.1 Introdução

Interpolar uma função $f(x)$ consiste em aproxiar essa função por uma outra função $g(x)$ escolhida entre uma classe de funções definidas e que satisfaça algumas propriedades.

Em geral, a interpolação de funções é usada nas seguintes situações:

- Quando são conhecidas somente os valores da função para alguns pontos e é necessário calcular o valor da função em pontos desconhecidos;

- Quando uma determinada função, possui os operadores de diferenciação e integração muito complexas.

Considere $(n+1)$pontos distintos: $x_0, x_1, ..., x_n$, chamamos *nós* da interpolação, os valores de $f(x)$ nesses pontos: $f(x_0), f(x_1), ..., f(x_n)$. O objetivo é encontrar uma função interpolante $g(x)$ tal que:

$$\begin{cases} g(x_0) & = & f(x_0) \\ g(x_1) & = & f(x_1) \\ g(x_2) & = & f(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g(x_n) & = & f(x_n) \end{cases}$$

Neste texto, consideraremos que $g(x)$ pertence à classe das funções polinomiais.

5.2 Interpolação Polinomial

Dados os $(n+1)$pontos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), ..., (x_n, f(x_n))$, queremos aproximar $f(x)$ por um polinômio $p_n(x)$ de grau menor ou igual a n, tal que:

$$f(x_k) = p_n(x_k) \quad , \quad k = 0, 1, 2, ..., n.$$

Algumas perguntas surgem dessa definição. Existe sempre um polinômio $p_n(x)$ que satisfaça estas condições? Caso exista, ele é único?

Teorema 5.2.1. *Existe um único polinômio $p_n(x)$ de grau menor do que n, tal que $p_n(x_k) = f(x_k)$, $k = 0, 1, 2, ..., n$, desde que $x_k \neq x_j$, $j \neq k$.*

Demonstração. □

Existem algumas formas de se obter o polinômio interpolador $p_n(x)$:

- Resolução do Sistema Linear;
- Forma de Lagrange;
- Forma de Newton.

5.2.1 Resolução do Sistema Linear

Exemplo 5.2.1. *Encontrar o polinômio de grau menor do 2 que interpola os pontos da tabela:*

x	$f(x)$
x_0	4
x_1	1
x_2	-1

5.2.2 Forma de Lagrange

Sejam $x_0, x_1, ..., x_n$ pontos distintos e $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$. Considere $p_n(x)$ o polinômio de grau menor do n que interpola $f$em $x_0, x_1, ..., x_n$.

Podemos representar $p_n(x)$ na forma:

$$p_n(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + ... + y_nL_n(x),$$

onde os polinômios $L_k(x)$, para $k = 0, 1, ..., n$ são de grau n.

Para cada i, queremos que a condição $p_n(x_i) = y_i$ seja satisfeita, ou seja:

$$p_n(x_i) = y_0L_0(x_i) + y_1L_1(x_i) + ... + y_nL_n(x_i) = y_i.$$

Para satisfazer esta condição, considere:

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 0 & se \quad k \neq i \\ 1 & se \quad k = i \end{cases}$$

Para isso, definimos $L_k(x)$ por:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)}.$$

É fácil verificar que: $L_k(x_k) = 1$ e $L_k(x_i) = 0$ se $i \neq k$.

Como o numerador de $L_k(x)$ é um produto de n fatores da forma $(x - x_i)$, com $i = 0, 1, ..., n$ e $i \neq k$, então $L_k(x)$ é um polinômio de grau n, e assim $p_n(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a n.

Além disso, para $x = x_i$,$i = 0, 1, ..., n$ temos:

$$p_n(x_i) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x_i) = y_i L_i(x_i) = y_i.$$

Então, a forma de Lagrange para o polinômio interpolador é dado por

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x_i),$$

$L_k(x) = \dfrac{\prod_{j=0}^{n}(x - x_j)}{\prod_{j=0}^{n}(x_k - x_j)}$, $j \neq k$.

Um exemplo teórico de interpolação pela forma de Lagrange, considerando dois pontos distintos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$ com $f(x_0) = y_0$ e $f(x_1) = y_1$ é a interpolação linear.

usando a forma de Lagrange, teremos:

$$p_1(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x),$$

$L_0(x) = \dfrac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)}$ e $L_1(x) = \dfrac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$.

Assim, $p_1(x) = y_0 \dfrac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} + y_1 \dfrac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)}$, ou seja,

$$p_1(x) = \frac{(x_1 - x)y_0 + (x - x_0)y_1}{(x_1 - x_0)},$$

que é exatamente a equaão da reta que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$.

Exemplo 5.2.2. *Encontre o polinômio interpolador usando a forma de Lagrange, para a função $f(x)$, onde:*

x	*f(x)*
-1	*4*
0	*1*
-1	*-1*

5.2.3 Forma De Newton

A forma de Newton para o polinômio $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ em $(n+1)$ pontos distintos $x_0, x_1, ..., x_n$, dado por:

$$p_n(x) = d_0 + d_1(x - x_0) + d_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + d_n(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}),$$

onde os coeficientes $d_k = f[x_0, x_1, ..., x_k]$ para $k = 0, 1, ..., n$ são as *diferenças divididas de ordem K* da função $f(x)$ tabelada sobre os $k+1$ pontos $x_0, x_1, ..., x_k$. As diferenças divididas são definidas da seguinte forma, $\forall i = 0, 1, ..., n.$:

$$\begin{cases} f[x_i] = f(x_i) & Ordem 0 \\ f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i} & Ordem 1 \\ f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} & Ordem 2 \\ \vdots & \vdots \\ f[x_i, ..., x_{i+k}] = \dfrac{f[x_{i+1}, ..., x_{i+k}] - f[x_i, ..., x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} & Ordem k \\ \vdots & \vdots \\ f[x_0, x_1, ..., x_n] = \dfrac{f[x_1, x_2, ..., x_n] - f[x_0, x_1, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_0} & Ordem k \end{cases}$$

Dizemos que $f[x_0, x-1, ..., x_k]$ é a diferença dividida de ordem k da fução $f(x)$ sobre os $k+1$ pontos:$x_0, x_1, ..., x_k$.

Dadouma função $f(x)$ e conhecidos os valores que a função assume no pontos distintos $x_0, x_1, ..., x_n$, podemos construir a tabela:

x	Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	Ordem 3	$\dots$	Ordem n
x_0	$f[x_0]$					
		$f[x_0, x_1]$				
x_1	$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$			
		$f[x_1, x_2]$		$f[x_0, x_1, x_2, x_3]$		
x_2	$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$			
		$f[x_2, x_3]$		f$[x_1, x_2, x_3, x_4]$		
x_3	$f[x_3]$		$f[x_2, x_3, x_4]$	$\vdots$	$\ddots$	$f[x_0, x_1, x_2, ..., x_n]$
		$f[x_3, x_4]$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
x_4	$f[x_4]$	$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$			
$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{n-1}, x_n]$				
x_n	$f[x_n]$					

Exemplo 5.2.3. *Construa a tabela das diferenças divididas até ordem4 da seguinte função tabela abaixo:*

x	*-1*	*0*	*1*	*2*	*3*
f(x)	*1*	*1*	*0*	*-1*	*-2*

Exemplo 5.2.4. *Use a fórmula de Nweton para encontrar o polinômio que interpola as seguintes funções:*

(a)

x	*-1*	*0*	*2*
f(x)	*4*	*1*	*-1*

(b)

x	*-2*	*1*	*2*
f(x)	*5*	*0*	*3*

5.3 Estudo do Erro na Interpolação

O polinômio interpolador $p_n(x)$ para uma função $f(x)$ sobre um conjunto de pontos distintos, $x_0, x_1, ..., x_n$ tem a propriedade:

$$p_n(x_k) = f(x_k), k = 0, 1, ..., n.$$

Nos pontos $\overline{x} \neq x_k$, nem sempre é verdade que $p_n(\overline{x}) = f(\overline{x})$.

Entretanto, para avaliar $f(x)$ nos pontos $\overline{x} \neq x_k$, $k = 0, 1, ..., n.$, consideramos $p_n(x)$ uma aproximação para a função $f(x)$ em um intervalo que contenha os ponto $x_0, x_1, ..., x_n$ e calculamos $f(\overline{x})$ através de $p_n(\overline{x})$. Algumas perguntas que surgem são:

- Podemos ter ideia do erro que cometemos quando substituímos $f(x)$ por $p_n(x)$?
- O polinômio da interpolação é uma boa aproximação para $f(x)$?

Ao se aproximar uma função $f(x)$ por um polinômio interpolador $p_n(x)$, comete-se um erro, ou seja:

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x), \forall x \in [x_0, x_n].$$

Teorema 5.3.1. *Dados* $(n+1)-$*pontos,* $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$*, considere* $f(x)$ *uma função com derivadas até ordem* $(n+1)$ *para todo* $x \in [x_0, x_n]$*. Seja* $p_n(x)$ *o polinômio interpolador de* $f(x)$ *nos pontos* $x_0, x_1, ..., x_n$*. Então, em qualquer ponto* x *pertencente ao intervalo* $[x_0, x_n]$ *o erro é dado por:*

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)\frac{f^{n+1}(\alpha_x)}{(n+1)!},$$

$\alpha_x \in (x_0, x_n)$.

Exemplo 5.3.1. *Obter* $\ln(3.7)$ *por interpolação linear e calcular seu erro, onde* $\ln(x)$ *está tabelada abaixo:*

Teorema 5.3.2. *Com as mesma hipótese do teorema 5.3.1, temos:*

$$f[x_0, x_1, ..., x_n, x] = \frac{f^{n+1}(\alpha_x)}{(n+1)!},$$

$x \in (x_0, x_n)$ *e* $\alpha_x \in (x_0, x_n)$.

Observação 5.3.1. *A fórmula´para o erro* $E_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)\dfrac{f^{n+1}(\alpha_x)}{(n+1)!}$ *com* $\alpha_x \in (x_0, x_n)$ *tem uso limitado na prática, pois são raras as situações e que conheceremos* $f^{(n+1)(x)}$ *e ponto* α_x.

Vamos usar o Teorema 5.3.2 para relacionar o erro com um limitante de $f^{(n+1)}(x)$.

Corolário 5.3.3. *Sob as hipótese do Teorema 5.3.1, se* $f^{(n+1)}(x)$ *for contínua em* $I = [x_0, x_n]$*, podemos escrever a seguinte relação:*

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)|\frac{M_{n+1}}{(n+1)!},$$

onde $M_{n+1} = \max_{x \in I} |f^{(n+1)(x)}|$.

Corolário 5.3.4. *Se além das hipótes do Teorema 5.3.1 , os pontos forem igualmente espaçados, isto é,* $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = ... = x_n - x_{n-1} = h$*, então :*

$$|E_n(x)| = |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{h^{n+1} M_{n+1}}{4(n+1)}.$$

Exemplo 5.3.2. *Seja* $f(x) = e^x + x - 1$ *tabelada abaixo. Obtenha* $f(0.7)$ *por interpolação linear e fazer uma análise do erro cometido.*

x	*0*	*0.5*	*1*	*1.5*	*2.0*
f(x)	*0*	*1.1487*	*2.7183*	*4.9811*	*8.3890*

Se a função $f(x)$ é dada na forma de tabela, o valor absolut do erro $|E_n(x)|$ só poderá ser estimado, pois não é possível obter M_{n+1}.

Mas se construirmos a tabela de diferenças divididas até ordem $n+1$, podemos usar o maior valor (em módulo) destas diferenças com uma aproximação para $\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$ no intervalo $[x_0, x_n]$.

Neste caso, dizemos que:

$$|E_n(x)| \approx |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n)|(\max|\text{diferenças divididas de ordem } n+1|).$$

Exemplo 5.3.3. *Seja* $f(x)$ *dada na forma:*

x	*0.2*	*0.34*	*0.4*	*0.52*	*0.6*	*0.72*
f(x)	*0.16*	*0.22*	*0.27*	*0.29*	*0.32*	*0.37*

(a) *Obter* $f(0.47)$ *usando um polinômio de grau* 2.

(b) *Dar uma estimativa para o erro.*

5.4 Iterpolação Inversa

Dada a tabela :

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
f(x)	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_n)$

o problema de interpolação inversa consiste em: dado $\overline{y} \in (f(x_0), f(x_n))$, obter $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = \overline{y}$.

Formas de se resolver este problema:

(i) obter $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, ..., x_n$ e em seguida encontrar $\overline{x}$ tal que $p_n(\overline{x}) = \overline{y}$.

Exemplo 5.4.1. *Dada a tabela abaixo, encontrar $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = 2$.*

x	*0.5*	*0.6*	*0.7*	*0.8*	*0.9*	*1.0*
f(x)	*1.65*	*1.82*	*2.01*	*2.23*	*2.46*	*2.72*

(ii) Interpolação Inversa:

Se $f(x)$ for inversível num intervalo contendo $\overline{y}$, então faremos a interpolação de $x = f^{-1}(y) = g(y)$.

Observação 5.4.1. *Uma condição para que uma função contínua num intervalo $[a, b]$ seja inversível, é que seja monótona crescente (ou decrescente) neste intervalo.*

Assim, se f for inversível, para obter $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = \overline{y}$, devemos obter um polinômio $p_n(y)$ que interpola $g(y) = f^{-1}(x)$ sonre $[y_0, y_n]$.

Para isto, considere x como função de y e aplique um método de interpolação: $x = f^{-1}(y) = g(y) \approx p_n(y)$.

Exemplo 5.4.2. *Dada a tabela abaixo, obter x tal que $e^x = 1.3165$:*

x	*0*	*0.1*	*0.2*	*0.3*	*0.4*	*0.5*
$f(x) = e^x$	*1*	*1.1052*	*1.2214*	*1.3499*	*1.4918*	*1.6487*

5.5 Escolha do Grau do Polinômio Interpolador

A tabela das diferenças divididas podem nos auxiliar na escolha do grau do polinômio que usaremos para interpolar uma função $f(x)$ dada:

- Construa a tabela das diferenças divididas;
- Examine as diferenças divididas da função na vzinhança do ponto de interesse;
- Se nesta vizinhança as diferenças divididas de ordem k são praticamente constantes, ou se as diferenças de ordem $(k + 1)$ variarem em torno de zer, podemos concluir que um polinômio interpolador de grau k será o que melhor aproximará a função na região considerada na tabela:

Exemplo 5.5.1. *Consideremos $f(x) = \sqrt{x}$ tabela abaixo com 4 casas decimais. Encontre uma boa aproximação para a função:*

x	*1*	*1.01*	*1.02*	*1.03*	*1.04*	*1.05*
$\sqrt{x}$	*1*	*1.0005*	*1.01*	*1.0149*	*1.0198*	*1.0247*

5.6 Funções Spline em Interpolação

Se a função $f(x)$ está tabelada em $(n+1)$ pontos e a aproximamos por um polinômio de grau n que a interpole sobre os pontos tabelados. O resultado dessa aproximação pode ser ruim quando n cresce.

Um alternativa é intepolar $f(x)$ em grupos de poucos pontos, obtendo-se polinômio de grau menor e impor condições para que a função de aproximação seja contínua e tenha derivadas contínuas até uma certa ordem. Passa isso definimos:

Definição 5.6.1. *Considere a função $f(x)$ tabelada nos pontos $x_0 < x_1 < ... < x_n$. Uma função $S_p(x)$ é denominada Spline de grau p com nós nos pontos x_i, $i = 0, 1, ..., n$ se satisfaz as seguintes condições:*

1. *em cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., (n-1)$, $S_p(x)$ é um polinômio de grau p,*
2. *$S_p(x)$ é contínua e tem derivada contínua até ordem $(p-1)$ em $[a, b]$;*
3. *$S_p(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, 1, ..., n$ chamada de Spline interpolante.*

5.6.1 Interpolação por Spline Linear

A função spline linear interpolante de $f(x)$, $S_1(x)$ nos nós $x_0, x_1, ..., x_n$ pode ser escrita em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, ..., n$ como:

$$s_i(x) = f(x_{i-1})\frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}} + f(x_i)\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}},\ \forall x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Observação 5.6.1.

- *$S_1(x)$ é polinômio de grau 1 em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$;*
- *$S_1(x)$ é contínua em (x_{i-1}, x_i) e nos pontos x_i, $S_1(x)$ está bem definida;*
- *$S_1(x_i) = s_i(x_i) = f(x_i) \Rightarrow S_1(x)$ é a interpolação por spline linear de $f(x)$ nos pontos $x_0, x_1, ..., x_n$.*

Exemplo 5.6.1. *Achar a função de interpolação da tabela abaixo por spline linear://*

x	*1*	*2*	*5*	*7*
f(x)	*1*	*2*	*3*	*2.5*

5.7 Exercícios

1- Encontrar o polinômio de grau ≤ 2, que interpola os pontos da tabela:

x	f(x)
-1	15
0	8
3	-1

2- Conhecendo-se a seguinte tabela:

x	f(x)
-1	15
0	8
3	-1

(a) Determine o polinômio de interpolação na forma de Lagrange.

(b) Usando o item (a), calcule uma aproximação para $f(1)$.

3- Considere a tabela:

x	f(x)
1	0
3	6
4	24
5	60

(a) Determine o polinômio de interpolação na forma de Lagrange, sobre todos os pontos.

(b) Usando o item (a), calcular uma aproximação para $f(3.5)$.

4- Construir o polinômio de interpolação, na forma de Lagrange, para a função $f(x) = \sin \pi x$,escolhendo os pontos : $x_0 = 0$, $x_1 = \dfrac{1}{6}$, $x_2 = \dfrac{1}{2}$.

5- Dada a tabela:

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
e^{3x}	1	1.3499	1.8221	2.4596	3.3201	4.4817

calcular um limitante superior para o erro de truncamento quando avaliamos $f(0.25)$, onde $f(x) = xe^{3x}$ usando um polinômio de interpolação do 2°.

6- Conhecendo-se a tabela:

x	0.8	0.9	1.0	1.1	1.3	1.5
$\cos x$	0.6967	0.6216	0.5403	0.4536	0.2675	0.0707

calcular um limitante superior para o erro de truncamento quando calculamos $\cos 1.05$ usando polinômio de interpolaçâo sobre 4 pontos.

7- Para a seguinte função tabelada:

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	-2	29	30	31	62

construir a tabela de diferenças divididas.

8-Conhecendo-se a seguinte tabela:

x	-1	0	3
f(x)	15	8	-1

calcular $f(1)$, usando polinômio de interpolação da forma Newton.

9- Dada a tabela:

x	2	3	4	5	6	7
f(x)	0.13	0.19	0.27	0.38	0.51	0.67

determinar:

(a) o polinômio de interpolação de grau adequado,

(b) calcular $f(4.5)$,

(c) dar uma estimativa para o erro de truncamento.

10- Dada a tabela:

x	0.5	0.7	1.0	1.2	1.5	1.6
f(x)	-2.63	-2.57	-2.00	-1.23	0.63	0.79

determinar $\overline{x}$ tal que $f(\overline{x}) = 0$ usando interpolação inversa sobre 3 pontos.

11- Sabe-se que $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x - 2$ tem um zero no intervalo $[0, 1]$. Usando interpolação inversa sobre uma tabela de 3 pontos, determinar aproximadamente $\overline{x}$ correspondente a $f(\overline{x}) = 0$.

12- Achar a função de interpolação por spline linear da seguinte função f tabelada abaixo:

x	1.0	2.0	5.0	7.0
f(x)	1.0	2.0	3.0	2.5

13- Construa a tabela de difereças dividias com os dados:

x	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
f(x)	-2.78	-2.241	-1.65	-0.594	1.34	4.564

Estime o valor de $f(1.23)$ da melhor maneira possível, de forma que se possa estimar o erro cometido.

14- Seja a tabela:

x	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.4
f(x)	0.12	0.16	0.19	0.22	0.25	0.27

Usando um polinômio interpolador de grau 2, obtenha o valor estimado para $\overline{x}$ para o qual $f(\overline{x}) = 0.23$. Dê uma estimativa do erro cometido, se possível.

15- Obtenha o polinômio interpolador de Lagrange e Newton para as seguintes funções :

(a) $f(x) = \ln x, x_0 = 1, x_1 = 1.1, x_2 = 1.3ex_3 = 1.4, n = 3;$

(b) $f(x) = \cos x + \sin x, x_0 = 0, x_1 = 0.25, x_2 = 0.5ex_3 = 1.0, n = 3.$

16- Utilize o polinômio interpolador de Lagrange e de Newton de grau $1, 2e3$ para aproximar cada um dos seguintes items:

(a) $f(8.4)$ se $f(8.1) = 16.94410$, $f(8.3) = 17 : 56492$, $f(8.6) = 18.50515$ e $f(8.7) = 18.82091$

(b) $f(-\frac{1}{3})$ se $f(-0.75) = -0.07181250$, $f(-0.5) = -0.02475000$, $f(-0.25) = 0.33493750$ e $f(0) = 1.10100000$.

17- Calcular $e^{3.1}$ usando a Fórmula de Lagrange sobre 3 pontos e a tabela:

x	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8
e^x	11.02	13.46	16.44	20.08	24.53	29.96	36.59	44.70

Observe que como queremos $e^{3.1}$ usando 3 pontos, devemos escolher 3 pontos consecutivos na vizinhança de 3.1. Assim temos duas opções. Ou escolhermos: $x_0 = 2.8$, $x_1 = 3.0$, $x_2 = 3.2$, ou então $x_0 = 3.0$ $x_1 = 3.2$, $x_2 = 3.4$. Em ambos os casos o erro na aproximação será da mesma ordem de grandeza.

Capítulo 6

Integração Numérica

6.1 Introdução

Em determinadas situações, integrais são difíceis, ou mesmo impossíveis de se resolver analiticamente. Exemplo: o valor de $f(x)$ é conhecido apenas em alguns pontos, num intervalo $[a, b]$. Como não se conhece a expressão analítica de $f(x)$, não é possível calcular:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

- A ideia básica da integração numérica, é a substituição da função $f(x)$ por um polinômio que a aproxime razoavelmente no intervalo $[a, b]$.
- Integração numérica de uma função $f(x)$ num intervalo $[a, b]$, significa o cálculo da área delimitada por essa função, recorrendo a interpolação polinomial, como forma de obtenção de um polinômio $p_n(x)$.

6.2 Fórmulas de Newton-Cotes

As *fórmulas de Newton-Cotes* são fórmulas de integração do tipo:

$$x_0 = a, \quad x_n = b$$

$$e$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \simeq A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + ... + A_n f(x_n) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i).$$

Nas fórmulas de Newton-COtes a ideia de polinômio que aproxime $f(x)$ razoavelmene é que este polinômio interpole $f(x)$ em pontos de $[a, b]$ igualmente espaçados. COnsidere a partição do intervalo $[a, b]$ em subintervalos, de comprimento h, $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, ..., n-1$. Assim $x_{i+1} - x_i = h = \dfrac{b-a}{n}$.

6.2.1 Regra dos Trapézios

Regra dos Trapézios Simples, consiste em considerar um polinômio $(p_1(x))$ de primeiro grau que aproxima uma função $f(x)$, ou seja, $n = 1$.

Se usarmos a fórmula de Lagrange para expressar o polinômio $p_1(x)$ que interpola $f(x)$ em x_0 e x_1 temos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{a=x_0}^{b=x_1} p_1(x) = I_T,$$

onde $I_T = \dfrac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)]$, que é a área do trapézio de altura $h = x_1 - x_0$ e bases $f(x_0)$ e $f(x_1)$.

Lembre-se que a área do trapézio é dada por $A = h\dfrac{(T+t)}{2}$, onde hé a altura do trapézio e t e T são as bases do trapézios, menor e maior respectivamente.

Exemplo 6.2.1. *Estimar o valor de* $I = \int_{3.0}^{3.6} \frac{1}{x} dx$

6.2.2 Regra dos Trapézios Repetidas

Podemos observar que quando o intervalo $[a, b]$ é relativamente pequeno, a aproximação do valor da integral é aceitável, porém se o intervalo $[a, b]$ for de grande amplitude, a aproximação da do valor da integral pode ser defasada. Neste caso, o que podemos fazer, é subdividi-lo em n suintervalos, e em cada um a função é aproximada por uma função linear.

Dessa forma, a amplitude dos subintervalos será $h = \dfrac{b-a}{n}$, e a integral no intervalo $[a, b]$ será dada plea soma das integrais definidas pelos subintervalos, ou seja, pela soma da área de n trapézios, cada qual definido pelo seu subintervalo.

Portanto, a fórmula para a regra do trapézio repetida é:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left\{f(x_0) + 2[f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n - 1)] + f(x_n)\right\}.$$

Exemplo 6.2.2. *Estimar o valor de* $I = \int_{3.0}^{3.6} \frac{1}{x} dx$ *pela regra dos trapézios repetida, subdividindo o intervalo em* 6 *subintervalos.*

Exemplo 6.2.3. *Seja* $I = \int_0^1 e^x dx$. *Calcule uma aproximação para* I *usando* 10 *subintervalos e a regra dos Trapézios repetida.*

6.2.3 Regra 1/3 de Simpson

Podemos utilizar o polinômio de Lagrange para estabelecer a fórmula de integração resultante da aproximação de $f(x)$ por um polinômio $P_2(x)$, nos pontos $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$ e $x_2 = x_0 + 2h = b$.

$$I_S = \int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx.$$

Lembre-se que o polinômio de Lagrange de grau 2 é dado por:

$$P_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + \frac{(x-x_0)(x-x_2)f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + \frac{(x-x_0)(x-x_1)f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Resolvendo as integrais obtemos a regra 1/3 de Simpson:

$$I_S = \int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].$$

Exemplo 6.2.4. *Calcular uma aproximação para a função abaixo utilizando a regra de 1/3 de Simpson.//*

$$\int_0^1 e^{x^2+2x}$$

6.2.4 Regra 1/3 de Simpson Repetida

Suponha que $x_0, x_1, ..., x_m$ são pontos igualmente espaçados, onde $h = x_{i+1} - x_i$. Ua condição necessária é que m seja par, pois cada parábola utilizará três pontos consecutivos. Dessa forma, em cada par de intervalos, temos:

$$\int_{x_2k-2}^{x_2k} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})].$$

Então:

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx = \sum_{k=1}^{m/2} \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x)dx = \frac{h}{3}\{[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)]+[f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)]+...+[f(x_{m-2})+4$$

Assim, a fórmula de 1/3 de Simpson Repetida fica:

$$I_{SR} = \frac{h}{3}\{[f(x_0)+f(x_m)]+4[f(x_1)+f(x_3)+...+f(x_{m-1})]+2[f(x_2)+f(x_4)+...+f(x_{m-2})]\}.$$

Exemplo 6.2.5. *Calcular uma aproximação para a função abaixo utilizando a regra de 1/3 de Simpson repetida. Considere $m = 6$://*

$$\int_0^6 4\sqrt{36 - x^2}dx.$$

Exemplo 6.2.6. *Calcular uma aproximação para a função abaixo utilizando a regra de 1/3 de Simpson repetida. Considere $m = 10$://*

$$\int_0^1 e^x dx.$$

6.3 Estudos dos Erros

Ao calcular determinada área pelo método da integração numérica, cometemos um erro, mesmo que aumentemos a quantidade subdivisões no intervalo para a interpolação, ainda haverá erro. Então o objetivo desta seção é encontrar este erro, ou um limitante superior para o erro.

Teorema 6.3.1. *(Teorema Geral do Erro) Seja $f \in C^{n+2}[a, b]$. Então o erro na integração numérica, En, usando as fórmulas de Newton-Cotes é:*

- *se n é ímpar:*

$$E_n = \frac{h^{n+2} f^{n+1}(c)}{(n+1)!} \int_0^m u(u-1)...(u-n)du, \quad c \in [a, b];$$

- *se n é par:*

$$E_n = \frac{h^{n+3} f^{n+2}(c)}{(n+2)!} \int_0^m (u - \frac{n}{2})u(u-1)...(u-n)du, \quad c \in [a, b].$$

6.3.1 Erro na Regra dos Trapézios

Sabemos que para calcular a integral aproximada de uma função $f(x)$ delimitada por 2 pontos(x_0, x_1), usamos a regra do trapézio simples, que é dado por:

$$I_T = \frac{h}{2}[f(x_0) + f(x_1)].$$

Pela área do trapézio, de altura h e bases $f(x_0)$ e $f(x_1)$, cometemos um erro, que pode ser calculado por:

$$E_T = -\frac{h^3}{12} f''(c), \ onde \ \ c \in (x_0, x_1).$$

Observação 6.3.1. *Este erro é decorrente da interpolação da função $f(x)$ pelo polinômio $p_1(x)$ da fórmula de Lagrange.*

Por outro lado, o ponto c nem sempre é conhecido, assim, sendo $f''(x)$ contínua em $[x_0, x_1]$, então existe $M = \max_{x \in [x_0, x_1]} |f''(x)|$. Portanto:

$$|E_T| \leq \frac{h^3 M}{12}.$$

Exemplo 6.3.1. *Obter uma estiva para o erro da integral:* $\int_3^{3.6} \frac{1}{x} dx$.

6.3.2 Erro na Regra dos Trapézios Composta

Vimos anteriormente que a aproximação da integral pela Regra do Trapézio, pode não ser de certa forma tão exata para um intervalo. Para melhorar o resultado, pode-se subdividir o intervalo $[a, b]$ de integração em m subintervalos de amplitude h e aplicar a Regra do Trapézio em cada subintervalos, e da mesma forma para o erro.

Se na regra dos Trapézios Composta, a fórmula é dada pela somatória das áreas de cada subintervalo, a do erro para vários subintervalos será resultante da somatória dos erros cometidos.

$$E_T = E_0 + E_1 + E_2 + ... + E_{n-1} + E_m,$$

ou seja, o erro será dado por:

$$|E_{TR}| \leq \frac{mh^3 M}{12},$$

onde $M = \max_{x \in [a,b]} |f''(x)|$. Lembrando que $m = \frac{b-a}{h}$, temos:

$$|E_{TR}| \leq \frac{b-a}{12} h^2 M.$$

Exemplo 6.3.2. *Obter uma estiva para o erro da integral:* $\int_3^{3.6} \frac{1}{x} dx$, *com* 6 *subintervalos.*

6.3.3 Erro na Regra 1/3 de Simpson

Vamos considerar o intervalo de integração subdividido em um número $n = 2$. Assim, pela segunda parte do Teorema 6.3.1, como n é par temos:

$$E_2 = \frac{h^5 f^{(4)}(c)}{4!} \int_0^2 (u-1)u(u-1)(u-2) du, \quad 0 \leq c \leq 2.$$

Desonvelvendo a integral, obtemos $\int_0^2 (u-1)u(u-1)(u-2)du = -\dfrac{4}{15}$. Assim, o erro cometido na Regra 1/3 de Simpson para $n = 2$ é:

$$E_2 = -\frac{h^5 f^{(4)}(c)}{90} \quad 0 \leq c \leq 2 \tag{6.1}$$

Como o número c nem sempre é conhecido, não será possível calcular o erro exatamente, portanto, trabalhamos com um limitante superior para o erro.

Tomando o módulo da equação 6.1, temos:

$$|E_2| \leq \left\| -\frac{h^5}{90} \right\| |f^{(4)}(c)| \quad 0 \leq c \leq 2. \tag{6.2}$$

Considerando o máximo de $|f^{(4)}(c)|$ no intervalo $0 \leq c \leq 2$, um limitante superior para o erro na equação 6.2 é:

$$|E_2| \leq \frac{h^5}{90} \left\{ \max_{0 \leq c \leq 2} |f^{(4)}(x)| \right\}.$$

Exemplo 6.3.3. *Dada a integral* $\int_{0,5}^{1,5} \cos(x)dx$*, calcule o limite superior para o erro.*

6.3.4 Erro na regra 1/3 de Simpson Repetida

Para cada 2 subintervalos (3 pontos equidistantes), aplicamos a regra 1/3, aplicamos a regra 1/3 de Simpson a partir da soma erros cometidos a cada aplicação da regra 1/3 de Simpson a cada dois subintervalos:

$$E_{SR} = \sum_{i=1}^{n/2} -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c_i), \ \ x_{2i-2} \leq c_i \leq x_{2i}.$$

Novamente, supondo que $f^{(4)}(x)$ é ontínua em $[x_0, x_n]$, usamos uma generalização do Teorema do Valor Intermediário e obtemos:

$$E_{SR} = -\frac{h^5}{90} f^{(4)}(c) \frac{n}{2}, \ \ x_0 \leq c \leq x_n.$$

Como o número de subintervalos é $n = \dfrac{x_n - x_0}{h}$, e considerando $M = \max\limits_{x \in [x_0, x_n]} |f^{(4)}(x)|$, então um limitante superior para o erro é dado por:

$$|E_{SR}| \leq \frac{h^4 (x_n - x_0)}{180} M. \tag{6.3}$$

Exemplo 6.3.4. *Calcular o valor aproximado da integral* $\int_0^3 (xe^x + 1)dx$ *usando a Regra* 1/3 *de Simpson para* 2, 4, 6 *subintervalos e um limitante para o erro.*

6.4 Exercícios

1. Seja $I = \int_0^1 e^x$. Calcule uma aproximação para I usando 10 subintervalos e a regra dos Trapézios repetida. Estime o erro cometido. Qual o número mínimo de subdivisões de modo que o erro seja inferior a 10^{-3}.

2. Seja $I = \int_0^1 e^x$. Calcule uma aproximação para I usando a regra de 1/3 de Simpson com $m = 10$. Estime o erro cometido. Para que valor de m teríamos o erro inferior a 10^{-3}.

3. Calcule as integrais a seguir pela regra dos Trapézios e pela de Simpson, usando quatro e seis divisões de $[a, b]$. Compare os resultados:

   (a) $\int_1^2 e^x$

   (b) $\int_1^4 \sqrt{x}$

   (c) $\int_2^{14} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

4. Usando as integrais do exercício anterior, com quantas divisões do intervalo, no mínimo, podemos esperar obter erros menores que 10^{-5}.

5. Calcule o valor aproximado de $\int_0^{0.6} \frac{1}{1+x} dx$ com três casas decimais de precisão usando: Simpson e Trapézio.

6. Qual o erro máximo cometido na aproximação de $\int_0^4 (3x^2 - 3x + 1)dx$ pela regra de Simpson com quatro subintervalos? Calcule por Trapézios e compare os resultados.

7. Use a regra do Trapézio ($n = 1$) e a regra de Simpson ($n = 2$) para aproximar as seguintes integrais:

   (a) $\int_{0.5}^1 x^4$

   (b) $\int_0^{0.5} \frac{2}{x-4} dx$

(c) $\int_1^{1.5} x^2 \ln x dx$

(d) $\int_0^{\pi/4} x \sin x dx$

8. Utilize a regra do Trapézio Repetida e a de Simpson Repetida com os valores indicados de n para aproximar as seguintes integrais:

(a) $\int_1^2 x \ln x dx,\ n = 4$

(b) $\int_0^2 \dfrac{1}{x^2+4} dx,\ n = 8$

(c) $\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx,\ n = 6$

9. Calcule pela regra dos Trapézios e de Simpson, cada uma das integrais abaixo, com erro menor do que ϵ dado:

(a) $\int_0^{\pi} e^{\sin x} dx,\ \epsilon = 2 \times 10^{-2}$

(b) $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{1/2} dx,\ n = 8$

Bibliografia

[1] R.Bowen, **Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms**, volume 470 of Lect. Notes in Math. Springer Verlag, 1975.

[2] R. Bowen and D. Ruelle. **The ergodic theory of Axiom A flows.** Invent. Math., 29:181-202, 1975.

[3] L.J.Díaz and M.Viana, **Discontinuity of Hausdorff dimension and limit capacity on arcs of diffeomorphisms**. Ergodic Theory Dynamic Systems, 9:403-425, 1989.

[4] M.Dysman, **Fractal dimensions for repellers of maps with holes**. J. Stat. Physics, 120: 479-509, 2005.

[5] K.Falconer, **Fractal geometry**. John Wiley & Sons Ltd., 1990. Mathematical foundations and applications.

[6] M.Hirsh, C.Pugh, and M.Shub, **Invariant Manifolds**, volume 583 of Lect. Notes in Math. Springer Verlag, 1977.

[7] V.Horita and M.Viana, **Hausdorff dimension of non-hyperbolic repellers I: Maps with holes**. J. Stat. Physics, 105:835-862, 2001.

[8] V.Horita and M.Viana, **Hausdorff dimension of non-hyperbolic repellers II: DA diffeomorphisms**. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 13 1125-1152, 2005.

[9] A. Manning and H. McCluskey, **Hausdorff dimension of horseshoes.** Ergod. Theor. Dynam. Sys., 3:251-260, 1983.

[10] A. Manning, **There are no new Anosov diffeomorphisms on tori.** Amer. J. Math., 96(3): 422-42, 1974.

[11] M.Marsden and M. McCracken, **The Hopf bifurcation and its applications**. Springer Verlag, 1976.

[12] J.Palis and F.Takens, **Hyperbolicity and sensitive-chaotic dynamics at homoclinic bifurcations**. Cambridge University Press, 1993.

[13] Ya. Pesin, **Dimension theory in dynamical systems.** University of Chicago Press, 1997. Contemporary views and applications.

[14] R. Shafikov and C. Wolf, **Stable sets, hyperbolicity and dimension.** Discrete Conti. Dyn. Syst., 12:403-412, 2005.

[15] P. Walters, **An introduction to ergodic theory.** Springer Verlag, 1982.