# Cálculo Diferencial e Integral I - Notas de Aulas

Luiz Oreste Cauz

Março de 2021

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

## 1.1 Porque Estudar Cálculo

No que segue apresentamos um exemplo que pretende demosntrar que a matemática desenvolvida até o final do ensino médio é insuficiente para atacar alguns problemas importantes com os quais nos deparamos.
Começamos recordando um problema elementar de física do ensino médio.

**Exemplo 1.1.** *(Lançamento Oblíquo de um Projétil). Imagine que, em uma batalha, saibamos que os projéteis lançados pelos nossos canhões tenham velocidade* $V_0$ *ao sair do canhão e que o inimigo situa-se a uma distância* $d$ *de nossos canhões. Qual é o ângulo de disparo para que o alvo seja atingido? Qual é o alcance máximo de nossos canhões? Qual é a altura máxima que o projétil alcançará?*

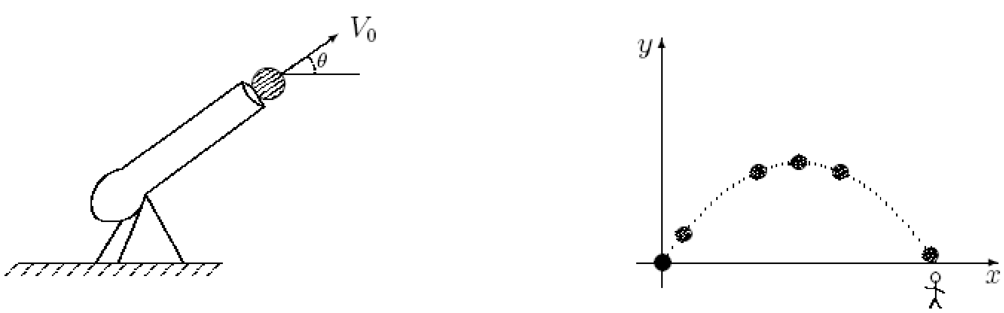


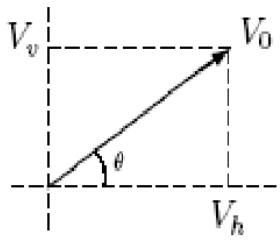

Figura 1.1: Lançamento Oblíquo de um Projétil

**Solução:** Em primeiro lugar, para resolver este problema, é preciso encontrar um modelo

matemático para o lançamento oblíquo de um projétil. Para encontrar este modelo fazemos algumas suposições:
Suponhamos que

- a resistência do ar é desprezível,
- a aceleração da gravidade é constante,
- o ângulo de lançamento é $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$,
- a altura do canhão relativamente ao solo é desprezível e que
- a altitude seja constante no campo da batalha.

Seja $m$ a massa do projétil. A velocidade inicial $V_0$ do projétil pode ser decomposta em velocidade vertical e velocidade horizontal iniciais, isto é




$$V_v^0 = V_0 \text{sen}\theta,$$
$$V_h^0 = V_0 \cos\theta.$$

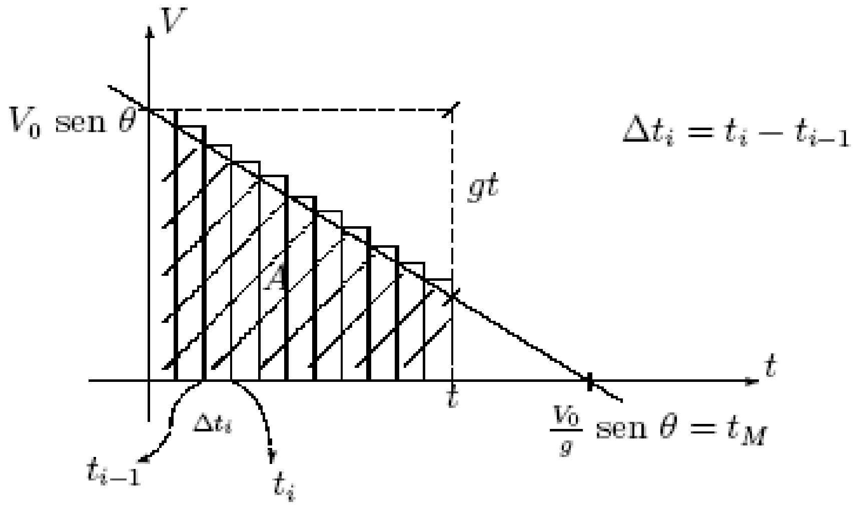
Se $g$ denota a aceleração da gravidade, a velocidade vertical depende do tempo através da relação

$$V_v(t) = V_0 \text{sen}\theta - gt \tag{1.1}$$

enquanto que a velocidade horizontal é constante ao longo do tempo. O projétil atingirá a altura máxima no instante $t_M$ tal que $V_v(T_M) = 0$, ou seja,

$$t_M = \frac{V_0}{g} \text{sen}\theta. \tag{1.2}$$

"Como obter a altura do projétil como função do tempo?"
Note que o gráfico da velocidade vertical como função do tempo é




Seja $t > 0$, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots t_n = t$ uma subdivisão do intervalo $[0, t]$ e $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Como em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ a velocidade é aproximadamente igual a $V_v(t_{i-1})$ temos que neste intervalo o deslocamento vertical é aproximadamente igual a

$$\Delta y_i = y(t_i) - y(t_{i-1}) \sim V_v(t_{i-1})\Delta t_i$$

e o deslocamento vertical correspondente ao intervalo de tempo $[0, t]$ é aproximadamente igual a

$$y = \sum_{i=1}^{n} \Delta y_i \sim \sum_{i=1}^{n} V_v(t_{i-1})\Delta t_i \sim A$$

onde por $\sim$ queremos espressar o fato que a medida que o comprimento dos intervalos $[t_i, t_{i-1}]$ se aproxima de zero, $y$ se aproxima mais e mais da área $A$ sob o gráfico da velocidade no intervalo $[0, t]$. Como

$$A = V_0 \text{sen}\theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

segue que

$$y(t) = V_0 \text{sen}\theta t - \frac{1}{2} g t^2 \tag{1.3}$$

é o deslocamente vertical do projétil (altura do projétil depois de decorridos $t$ unidades de tempo).

O deslocamenteo horizontal ocorre com velocidade constante $V_h = V_0 \cos\theta$. Logo

$$x(t) = V_0 \cos\theta t. \tag{1.4}$$

De posse do modelo matemático para os deslocamentos horizontal e vertical estamos preparados para resolver o problema proposto:

- O projétil alcançará altura máxima em $t = t_M = \dfrac{V_0}{g}\text{sen}\theta$. Logo

$$\begin{aligned} y_M = y(t_M) &= V_0\text{sen}\theta t_M - \frac{1}{2}g(t_M)^2 \\ &= V_0\text{sen}\theta\frac{V_0}{g}\text{sen}\theta - \frac{1}{2}g\frac{V_0^2}{g^2}\text{sen}^2\theta \\ &= \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g}\text{sen}^2\theta \end{aligned}$$

e, portanto,

$$y_M = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g}\text{sen}^2\theta \tag{1.5}$$

- O projétil atinge o seu alvo quando $y(t_\alpha) = 0$. Logo $t_\alpha = \dfrac{2}{g}V_0\text{sen}\theta$ o que implica

$$x_\alpha = x(t_\alpha) = 2\frac{V_0^2}{g}\text{sen}\theta\cos\theta$$

e, portanto,

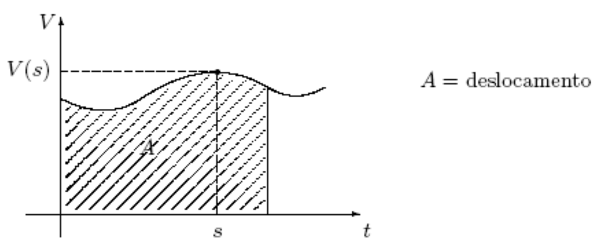
$$x_\alpha = \frac{V_0^2}{g}\text{sen}2\theta. \tag{1.6}$$

- O alcance do projétil é máximo quando $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

**"O que voce observa na matemática contida neste exemplo?"**

1. O procedimento para obtenção do deslocamento vertical é bastante convincente mas requer uma melhor justificativa. O processo de fazer $\Delta t_i$ pequeno (tender a zero) exige uma melhor formulação que é dada pela noção de limite.

2. Se a velocidade depende do tempo de uma forma mais complicada, podemos não ser capazes de encontra a área $A$ sob o gráfico, de forma tão simples. Por exemplo, o projétil



pode ser impulsionado durante o percurso (como ocorre no lançamento de foguetes). Deparamos então com o problema de calcular a área sob o gráfico de uma função cuja resposta requer a introdução do conceito de integral.

3. Quando a massa do projétil depende do tempo, a segunda lei de Newton precisa de uma outra formulação para sermos mais capazes de equacionar o movimento e, mesmo a velocidade instantânea para ser obtida como função do deslocamento, precisa da introdução do conceito de derivada.

## 1.2 Como Aprender Cálculo

Não há uma receita de como aprender cálculo mas algumas dicas podem auxiliar o estudante:

- Não é possível ler e entender cálculo como se lê e entende um romance ou um jornal.
- Leia o texto atentamente e pacientemente procurando entender profundamente os conceitos e resultados apresentados. A velocidade de leitura não é importante aqui.
- Acompanhe os exemplos passo a passo procurando desvendar o porque de cada passagem e tentando enxergar porque o autor adotou esta solução. Tente soluções alternativas
- Pratique os conceitos aprendidos fazendo as tarefas (listas de exercícios). Não se aprende cálculo contemplativamente. É importante fazer muitos exercícios.
- Também não se aprende cálculo apenas assistindo as aulas ou somente fazendo exercícios. É preciso assistir as aulas, estudar e refletir sobre os conceitos e fazer muitos exercícios.
- Procure discutir os conceitos desenvolvidos em sala de aula com os colegas.
- É muito importante frequentar (quando possível) as monitorias ainda que seja somente para inteirar-se das dúvidas dos colegas.
- Não desista de um exercício se a sua solução não é óbvia, insista e descubra o prazer de desvendar os pequenos mistérios do cálculo.

# Aulas - De 17 de Fevereiro a 30 de Março

# Capítulo 2

# Conceitos Preliminares - (NESTE CAPÍTULO NOS BASEAMOS A MAIOR PARTE NO LIVRO PRÉ-CÁLCULO DE DEMANA, WAITS, FOLEY E KENNEDY)

O objetivo deste capítulo é o de fornecer ao leitor o conhecimento necessário sobre operações no conjunto dos números reais, visto que o mesmo é fundamental para o estudo do capítulo seguinte. Veremos nos três exemplos a seguir que a falta de cuidado com operações básicas da matemática pode levar alguns problemas a soluções erradas.

**Exemplo 2.1.** *Procure o erro no seguinte argumento.*

$$0 = 0 \Rightarrow 2 - 2 = 3 - 3 \Rightarrow 2(1 - 1) = 3(1 - 1) \Rightarrow 2 = 3$$

**Exemplo 2.2.** *Qual o erro no seguinte argumento? Sejam $x$ e $y$ números reais tais que $x = y$. Então*

$$x^2 = x \cdot y \Rightarrow x^2 - y^2 = x \cdot y - y^2 \Rightarrow (x + y) \cdot (x - y) = y \cdot (x - y) \Rightarrow x + y = y \Rightarrow 2y = y \Rightarrow 2 = 1$$

**Exemplo 2.3.** *Encontre o erro na seguinte proposição.*

$$
\begin{aligned}
&\frac{3x-1}{x+2} - 5 \geq 0\\
&\frac{3x-1}{x+2} \geq 5\\
&3x - 1 \geq 5(x+2)\\
&3x - 1 \geq 5x + 10\\
&-1 - 10 \geq 5x - 3x\\
&-11 \geq 2x\\
&-\frac{11}{2} \geq x\\
&-5.5 \geq x
\end{aligned}
$$

## 2.1 Conceitos Elementares de Matemática

**Conjunto dos Números Naturais:** é o conjunto, representado por $\mathbb{N}$, formado pelos números $1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots$.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

**Conjunto dos Números Inteiros:** é o conjunto, representado por $\mathbb{Z}$, formado pelos números $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \cdots$.

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

### 2.1.1 Potenciação

Sejam $a$ um número real, uma variável ou uma expressão algébrica, e $n$ um número inteiro positivo. Então

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ fatores}}$$

**Exemplo 2.4.**

$$
\begin{aligned}
&a)\ 2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2\\
&b)\ (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)\\
&c)\ x^2 = x \cdot x\\
&d)\ (x+2)^2 = (x+2) \cdot (x+2)
\end{aligned}
$$

**Propriedades**

Sejam $u$ e $v$ números reais, variáveis ou expressões algébricas e $m$ e $n$ números inteiros. Suponha $u \neq 0$ e $v \neq 0$.

1. $u^m \cdot u^n = u^{m+n}$
2. $\dfrac{u^m}{u^n} = u^{m-n}$
3. $u^0 = 1$
4. $u^{-n} = \dfrac{1}{u^n}$
5. $(u \cdot v)^m = u^m \cdot v^m$
6. $(u^m)^n = u^{m \cdot n}$
7. $\left(\dfrac{u}{v}\right)^m = \dfrac{u^m}{v^m}$

**Exemplo 2.5.**

$$
\begin{aligned}
&a)\ 5^3 \cdot 5^4 = 5^{3+4}\\
&b)\ \frac{x^9}{x^4} = x^{9-4}\\
&c)\ 8^0 = 1\\
&d)\ y^{-3} = \frac{1}{y^3}\\
&e)\ (27)^5 = (3 \cdot 9)^5 = 3^5 \cdot 9^5 = 3^5 \cdot (3^2)^5 = 3^5 \cdot 3^{2 \cdot 5}
\end{aligned}
$$

## 2.1.2 Radiciação

Sejam $n$ um número inteiro positivo maior do que 1 e $a$ e $b$ números reais.

1. Se $b^n = a$, então $b$ é uma raiz $n$-ézima de $a$ é denotada pela expressão com o radical $\sqrt[n]{a}$.

**Exemplo 2.6.**

$$\sqrt{25},\ \sqrt[3]{8},\ \sqrt[5]{(x+2)^2},\ etc$$

**Propriedade 2.1.** *Sejam $u$ e $v$ números reais, variáveis ou expressões algébricas e $m$ e $n$ números inteiros positivos maiores que 1. Suponha que todas as raízes sejam números reais e que todos os denominadores sejam diferentes de zero. Então*

**i)** $\sqrt[n]{u \cdot v} = \sqrt[n]{u} \cdot \sqrt[n]{v}$

**ii)** $\sqrt[n]{\dfrac{u}{v}} = \dfrac{\sqrt[n]{u}}{\sqrt[n]{v}}$

**iii)** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{u}} = \sqrt[m\cdot n]{u}$

**iv)** $(\sqrt[n]{u})^m = \sqrt[n]{u^m}$

**v)** $\sqrt[n]{u^n} = \begin{cases} |u|, & se \quad n \quad par \\ u, & se \quad n \quad ímpar \end{cases}$

**Exemplo 2.7.**

**a)** $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = 5 \cdot \sqrt{3}$

**b)** $\dfrac{\sqrt[4]{96}}{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[4]{\dfrac{96}{6}} = \sqrt[4]{16} = 2$

**c)** $\sqrt{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[2\cdot 3]{7} = \sqrt[6]{7}$

**d)** $\sqrt[4]{5^4} = 5$

**e)** $\sqrt[3]{27^2} = \sqrt[3]{27 \cdot 27} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{27} = 3 \cdot 3 = 9$

**f)** $\sqrt{(-6)^2} = |-6| = 6$

**g)** $\sqrt[3]{(-6)^3} = -6$

### 2.1.3 Potência com Expoente Fracionário

Seja $u$ um número real, variável ou expressão algébrica e $n$ um inteiro maior que 1. Então

$$u^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{u}.$$

Consequentemente, $u^{\frac{m}{n}} = (u^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{u})^m = \sqrt[n]{u^m}$.

**Exemplo 2.8.**

$$
\begin{aligned}
&a)\ \sqrt{(x+y)^3} = (x+y)^{\frac{3}{2}} \\
&b)\ x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}} = (x^2)^{\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}} = (x^2y)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x^2y} \\
&c)\ 3x\sqrt[5]{x^2} = 3x \cdot x^{\frac{2}{5}} = 3x^{(1+\frac{2}{5})} = 3x^{\frac{7}{5}} \\
&d)\ z^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{z^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{z^3}}
\end{aligned}
$$

**Exercícios 2.1.**

Nos exercícios 1 a 6, encontre as raízes reais indicadas.

**1.** Raiz quadrada de 81.

**2.** Raiz quarta de 81.

**3.** Raiz cúbica de 64.

**4.** Raiz quinta de 243.

**5.** Raiz quadrada de 16/9.

**6.** Raiz cúbica de $-27/8$.

Nos exercícios 7 a 12, calcule a expressão sem usar uma calculadora.

**7.** $\sqrt{144}$ **8.** $\sqrt{-16}$

**9.** $\sqrt[3]{-216}$ **10.** $\sqrt[3]{216}$

**11.** $\sqrt[3]{-\frac{64}{27}}$ **12.** $\sqrt{\frac{64}{25}}$

Nos exercícios 13 a 22, use uma calculadora para encontrar o valor da expressão.

**13.** $\sqrt[4]{256}$ **14.** $\sqrt[5]{3125}$

**15.** $\sqrt[3]{15{,}625}$ **16.** $\sqrt{12{,}25}$

**17.** $81^{3/2}$ **18.** $16^{5/4}$

**19.** $32^{-2/5}$ **20.** $27^{-4/3}$

**21.** $\left(-\frac{1}{8}\right)^{-1/3}$ **22.** $\left(-\frac{125}{64}\right)^{-1/3}$

Nos exercícios 23 a 32, simplifique removendo fatores do radicando.

**23.** $\sqrt{288}$ **24.** $\sqrt[3]{500}$

**25.** $\sqrt[3]{-250}$ **26.** $\sqrt[4]{192}$

**27.** $\sqrt{2x^3y^4}$ **28.** $\sqrt[3]{-27x^3y^6}$

**29.** $\sqrt[4]{3x^8y^6}$ **30.** $\sqrt[3]{8x^6y^4}$

**31.** $\sqrt[5]{96x^{10}}$ **32.** $\sqrt{108x^4y^9}$

Nos exercícios 33 a 38, racionalize o denominador.

**33.** $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$ **34.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$

**35.** $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$ **36.** $\frac{2}{\sqrt[4]{y}}$

**37.** $\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}}$ **38.** $\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^2}}$

Nos exercícios 39 a 42, converta para a forma exponencial (forma de potência).

**39.** $\sqrt[3]{(a+2b)^2}$ **40.** $\sqrt[5]{x^2y^3}$

**41.** $2x\sqrt[3]{x^2y}$ **42.** $xy\sqrt[4]{xy^3}$

Nos exercícios 43 a 46, converta para a forma radical.

**43.** $a^{3/4}b^{1/4}$ **44.** $x^{2/3}y^{1/3}$

**45.** $x^{-5/3}$ **46.** $(xy)^{-3/4}$

Nos exercícios 47 a 52, escreva usando um radical simples.

**47.** $\sqrt{\sqrt{2x}}$ **48.** $\sqrt{\sqrt[3]{3x^2}}$

**49.** $\sqrt[4]{\sqrt{xy}}$ **50.** $\sqrt[3]{\sqrt{ab}}$

**51.** $\frac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[3]{a}}$ **52.** $\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}$

Nos exercícios 53 a 60, simplifique as expressões exponenciais.

**53.** $\frac{a^{3/5}a^{1/3}}{a^{3/2}}$ **54.** $(x^2y^4)^{1/2}$

**55.** $(a^{5/3}b^{3/4})(3a^{1/3}b^{5/4})$ **56.** $\left(\frac{x^{1/2}}{y^{2/3}}\right)^6$

**57.** $\left(\frac{-8x^6}{y^{-3}}\right)^{2/3}$ **58.** $\frac{(p^2q^4)^{1/2}}{(27q^3p^6)^{1/3}}$

**59.** $\frac{(x^9y^6)^{-1/3}}{(x^6y^2)^{-1/2}}$ **60.** $\left(\frac{2x^{1/2}}{y^{2/3}}\right)\left(\frac{3x^{-2/3}}{y^{1/2}}\right)$

Nos exercícios 61 a 70, simplifique as expressões radicais.

**61.** $\sqrt{9x^{-6}y^4}$ **62.** $\sqrt{16y^8z^{-2}}$

**63.** $\sqrt[4]{\frac{3x^8y^2}{8x^2}}$ **64.** $\sqrt[5]{\frac{4x^6y}{9x^3}}$

**65.** $\sqrt[3]{\frac{4x^2}{y^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{2x^2}{y}}$ **66.** $\sqrt[5]{9ab^6}\cdot\sqrt[5]{27a^2b^{-1}}$

**67.** $3\sqrt{48}-2\sqrt{108}$ **68.** $2\sqrt{175}-4\sqrt{28}$

**69.** $\sqrt{x^3}-\sqrt{4xy^2}$ **70.** $\sqrt{18x^2y}+\sqrt{2y^3}$

Nos exercícios 71 a 78, substitua ○ por <, = ou > para tornar a expressão verdadeira.

**71.** $\sqrt{2+6} \bigcirc \sqrt{2}+\sqrt{6}$

**72.** $\sqrt{4}+\sqrt{9} \bigcirc \sqrt{4+9}$

**73.** $(3^{-2})^{-1/2} \bigcirc 3$ **74.** $(2^{-3})^{1/3} \bigcirc 2$

**75.** $\sqrt[4]{(-2)^4} \bigcirc -2$ **76.** $\sqrt[3]{(-2)^3} \bigcirc -2$

**77.** $2^{2/3} \bigcirc 3^{3/4}$ **78.** $4^{-2/3} \bigcirc 3^{-3/4}$

**79.** O tempo $t$ (em segundos) que uma pedra leva para cair de uma distância $d$ (em metros) é aproximadamente $t = 0{,}45\cdot\sqrt{d}$. Quanto tempo uma pedra leva para cair de uma distância de 200 metros?

# RESPOSTAS

**17.** 729

**18.** 32

**19.** $\frac{1}{4}$ ou 0,25

**20.** $\frac{1}{81}$ ou 0,012345679

**21.** $-2$

**22.** $-\frac{4}{5}$ ou $-0{,}8$

**23.** $\sqrt{288} = \sqrt{12^2\cdot 2} = \sqrt{12^2}\cdot\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

**24.** $\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{5^3\cdot 4} = \sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{4} = 5\sqrt[3]{4}$

**25.** $\sqrt[3]{-250} = \sqrt[3]{(-5)^3\cdot 2}$

$= \sqrt[3]{(-5)^3}\cdot\sqrt[3]{2} = -5\sqrt[3]{2}$

**26.** $\sqrt[4]{192} = \sqrt[4]{2^4\cdot 12} = \sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{12} = 2\sqrt[4]{12}$

**27.** $\sqrt{2x^3y^4} = \sqrt{(xy^2)^2\cdot 2x} =$

$= \sqrt{(xy^2)^2}\cdot\sqrt{2x} = |x|y^2\sqrt{2x}$

**28.** $\sqrt[3]{-27x^3y^6} = \sqrt[3]{(-3xy^2)^3} = -3xy^2$

**29.** $\sqrt[4]{3x^8y^6} = \sqrt[4]{(x^2y)^4\cdot 3y^2} =$

$= \sqrt[4]{(x^2y)^4}\cdot\sqrt[4]{3y^2} = |x^2y|\sqrt[4]{3y^2} = x^2|y|\sqrt[4]{3y^2}$

**30.** $\sqrt[3]{8x^6y^4} = \sqrt[3]{(2x^2y)^3\cdot y}$

$= \sqrt[3]{(2x^2y)^3}\cdot\sqrt[3]{y} = 2x^2y\sqrt[3]{y}$

**31.** $\sqrt[5]{96x^{10}} = \sqrt[5]{(2x^2)^5\cdot 3} = \sqrt[5]{(2x^2)^5}\cdot\sqrt[5]{3}$

$= 2x^2\sqrt[5]{3}$

**32.** $\sqrt{108x^4y^9} = \sqrt{(6x^2y^4)^2\cdot 3y}$

$= \sqrt{(6x^2y^4)^2}\cdot\sqrt{3y} = 6x^2y^4\sqrt{3y}$

**33.** $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{2} = 2\sqrt[3]{4}$

**34.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

**35.** $\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}}\cdot\frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^3}} = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{\sqrt[5]{x^5}} = \frac{\sqrt[5]{x^3}}{x}$

**36.** $\frac{2}{\sqrt[4]{y}}\cdot\frac{\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[4]{y^3}} = \frac{2\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt[4]{y^4}} = \frac{2\sqrt[4]{y^3}}{y}$

**37.** $\sqrt[3]{\frac{x^2}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{y}}\cdot\frac{\sqrt[3]{y^2}}{\sqrt[3]{y^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{\sqrt[3]{y^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^2y^2}}{y}$

**38.** $\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^2}} = \frac{\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[5]{b^2}}\cdot\frac{\sqrt[5]{b^3}}{\sqrt[5]{b^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^3b^3}}{\sqrt[5]{b^5}} = \frac{\sqrt[5]{a^3b^3}}{b}$

**39.** $[(a+2b)^2]^{1/3} = (a+2b)^{2/3}$

**40.** $(x^2y^3)^{1/5} = (x^2)^{1/5}(y^3)^{1/5} = x^{2/5}y^{3/5}$

**41.** $2x(x^2y)^{1/3} = 2x(x^2)^{1/3}y^{1/3} = 2x^{3/3}x^{2/3}y^{1/3} = 2x^{5/3}y^{1/3}$

**42.** $xy(xy^3)^{1/4} = xyx^{1/4}(y^3)^{1/4} = x^{4/4}y^{4/4}x^{1/4}y^{3/4}$

$= x^{5/4}y^{7/4}$

**43.** $a^{3/4}b^{1/4} = \sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[4]{b} = \sqrt[4]{a^3b}$

**44.** $x^{2/3}y^{1/3} = \sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x^2y}$

**45.** $x^{-5/3} = \sqrt[3]{x^{-5}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$

**46.** $(xy)^{-3/4} = \sqrt[4]{x^{-3}y^{-3}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3y^3}}$

**47.** $\sqrt{\sqrt{2x}} = [(2x)^{1/2}]^{1/2} = (2x)^{1/4} = \sqrt[4]{2x}$

**48.** $\sqrt{\sqrt[3]{3x^2}} = [(3x)^{1/3}]^{1/2} = (3x^2)^{1/6} = \sqrt[6]{3x^2}$

**49.** $\sqrt[4]{\sqrt{xy}} = [(xy)^{1/2}]^{1/4} = (xy)^{1/8} = \sqrt[8]{xy}$

**50.** $\sqrt[3]{\sqrt{ab}} = [(ab)^{1/2}]^{1/3} = (ab^{1/6} = \sqrt[6]{ab}$

**51.** $\frac{\sqrt[5]{a^2}}{\sqrt[3]{a}} = \frac{a^{2/5}}{a^{1/3}} = a^{2/5-1/3} = a^{1/15} = \sqrt[15]{a}$

**52.** $\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2} = a^{1/2}a^{2/3} = a^{1/2+2/3} = a^{7/6}$

$= \sqrt[6]{a^7} = a\sqrt[6]{a}$

**53.** $a^{3/5}a^{1/3}a^{-3/2} = a^{3/5+1/3-3/2} = a^{-17/30} = \frac{1}{a^{17/30}}$

**54.** $\sqrt{x^2y^4} = \sqrt{(xy^2)^2} = |xy^2| = |x|y^2$

**55.** $(a^{5/3}\,b^{3/4})(3a^{1/3}\,b^{5/4}) = 3\cdot a^{5/3}a^{1/3}\cdot b^{3/4}\,b^{5/4} =$
$3\cdot a^{6/3}\cdot b^{8/4} = 3a^2b^2\ (b \geq 0)$

**56.** $\left(\frac{x^{1/2}}{y^{2/3}}\right)^6 = \frac{(x^{1/2})^6}{(y^{2/3})^6} = \frac{x^{6/2}}{y^{12/3}} = \frac{x^3}{y^4}\ (x \geq 0)$

**57.** $\left(\frac{-8x^6}{y^{-3}}\right)^{2/3} = (-8x^6y^3)^{2/3} = (-8)^{2/3}(x^6)^{2/3}(y^3)^{2/3}$

$= [(-8)^2]^{1/3}\, x^{12/3}\, y^{6/3} = 64^{1/3}\, x^4y^2 = 4x^4y^2$

**58.** $\frac{(p^2q^4)^{1/2}}{(27q^3p^6)^{1/3}} = \frac{\sqrt{p^2q^4}}{\sqrt[3]{27q^3p^6}} = \frac{\sqrt{(pq^2)^2}}{\sqrt[3]{(3qp^2)^3}} = \frac{|pq^2|}{3qp^2}$

$= \frac{|p|q^2}{3qp^2} = \frac{q}{3|p|}$

**59.** $\frac{(x^9y^6)^{-1/3}}{(x^6y^2)^{-1/2}} = \frac{(x^6y^2)^{1/2}}{(x^9y^6)^{1/3}} = \frac{\sqrt{x^6y^2}}{\sqrt[3]{x^9y^2}} = \frac{|x^3y|}{x^3y^2}$

$= \frac{1}{|y|} \cdot \frac{|x|}{x} = \frac{|x|}{x|y|}$

**60.** $\left(\frac{2x^{1/2}}{y^{2/3}}\right)\left(\frac{3x^{-2/3}}{y^{1/2}}\right) = \frac{6x^{1/2-2/3}}{y^{2/3+1/2}} = \frac{6x^{-1/6}}{y^{7/6}} = \frac{6}{x^{1/6}y^{7/6}}$

**61.** $\sqrt{9x^{-6}y^4} = |3x^{-3}y^2| = 3y^2|x^{-3}| = \frac{3y^2}{|x^3|}$

**62.** $\sqrt{16y^8z^{-2}} = |4y^4z^{-1}| = 4y^4|z^{-1}| = \frac{4y^4}{|z|}$

**63.** $\sqrt[4]{\frac{3x^8y^2}{8x^2}} = \sqrt[4]{\frac{2\cdot 3x^8y^2}{2\cdot 8x^2}} = \frac{\sqrt[4]{6x^6y^2}}{2} = \frac{\sqrt[4]{6x^4x^2y^2}}{2}$

$= \frac{|x|\sqrt[4]{6x^2y^2}}{2}$

**64.** $\sqrt[5]{\frac{4x^6y}{9x^3}} = \sqrt[5]{\frac{27\cdot 4x^6y}{27\cdot 9x^3}} = \sqrt[5]{\frac{108x^6y}{3^5x^3}} = \frac{\sqrt[5]{108x^3y}}{3}$

**65.** $\sqrt[3]{\frac{4x^2}{y^2}} \cdot \sqrt[3]{\frac{2x^2}{y}} = \sqrt[3]{\frac{(4x^2)(2x^2)}{(y^2)(y)}} = \sqrt[3]{\frac{8x^4}{y^3}} = \frac{2\sqrt[3]{x^4}}{y}$

$= \frac{2x\sqrt[3]{x}}{y}$

**66.** $\sqrt[5]{9ab^6} \cdot \sqrt[5]{27a^2b^{-1}} = \sqrt[5]{(9ab^6)(27a^2b^{-1})}$

$= \sqrt[5]{243a^3b^5} = 3b\sqrt[5]{a^3}$

**67.** $3\sqrt{4^2\cdot 3} - 2\sqrt{6^2\cdot 3} = 3\cdot 4\sqrt{3} - 2\cdot 6\sqrt{3}$

$= 12\sqrt{3} - 12\sqrt{3} = 0$

**68.** $2\sqrt{5^2\cdot 7} - 4\sqrt{2^2\cdot 7} = 2\cdot 5\sqrt{7} - 4\cdot 2\sqrt{7}$

$= 10\sqrt{7} - 8\sqrt{7} = 2\sqrt{7}$

**69.** $\sqrt{x^2\cdot x} - \sqrt{(2y)^2\cdot x} = |x|\sqrt{x} - 2|y|\cdot\sqrt{x}$

$= (|x| - 2|y|)\sqrt{x} = (x - 2|y|)\sqrt{x}$ (como a raiz quadrada é indefinida quando $x < 0$).

**70.** $\sqrt{(3x)^2\cdot 2y} + \sqrt{y^2\cdot 2y}$

$= 3|x|\sqrt{2y} + |y|\cdot\sqrt{2y} =$

$(3|x| + |y|)\sqrt{2y} = (3|x| + y)\sqrt{2y}$ (como a raiz quadrada é indefinida quando $y < 0$).

**71.** $\sqrt{2+6} < \sqrt{2} + \sqrt{6}$ (2,828...< 3,863...)

**72.** $\sqrt{4} + \sqrt{9} > \sqrt{4+9}$ (5 > 3,605...)

**73.** $(3^{-2})^{-1/2} = 3$

**74.** $(2^{-3})^{1/3} < 2$ $\left(\frac{1}{2} < 2\right)$

**75.** $\sqrt[4]{(-2)^4} > -2 (2 > -2)$

**76.** $\sqrt[3]{(-2)^3} = -2$

**77.** $2^{2/2} < 3^{3/4}$ (1,587... < 2,279...)

**78.** $4^{-2/3} < 3^{-3/4}$ (0,396... < 0,438...)

**79.** $t = 0{,}45\sqrt{200} = 4{,}5\sqrt{2} \approx 6{,}36$ s

# RESPOSTAS

### 2.1.4 Polinômios e Fatoração

Um polinômio em $x$ é qualquer expressão que pode ser escrita na forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{2.1}$$

onde $n$ é um inteiro não negativo ($n \geq 0$) e $a_n \neq 0$. Os números $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0$ são números reais chamados coeficientes. O grau do polinômio é $n$ e o coeficiente principal é o número real $a_n$. A expressão dada em 2.1 representa a **forma padrão** de um polinômio de grau $n$.

Para adicionar ou subtrair polinômios, nós adicionamos ou subtraímos termos semelhantes. Termos semelhantes são aqueles que tem a mesma variável, cada uma elevada à mesma potência.

**Exemplo 2.9.** *Adição e Subtração de Polinômios*

*a*) $(2x^3 - 3x^2 + 4x - 1) + (x^3 + 2x^2 - 5x + 3) = (2x^3 + x^3) + (-3x^2 + 2x^2) + (4x - 5x) + (-1 + 3)$

*b*) $(4x^2 + 3x - 4) - (2x^3 + x^2 - 2x - 1) = -2x^3 + (4x^2 - x^2) + (3x + 2x) + (-4 + 1)$

Para expandir o produto de dois polin6omios, utilizamos a propriedade distributiva.

**Exemplo 2.10.** $(3x + 2)(4x - 5) =$

**Exercícios 2.2.**

**Propriedade 2.2.** ***Produtos Notáveis:*** *Sejam $u$ e $v$ números reais, variáveis ou expressões algébricas.*

**i)** $(u + v)(u - v) = u^2 - v^2$

**ii)** $(u + v)^2 = u^2 + 2uv + v^2$

**iii)** $(u - v)^2 = u^2 - 2uv + v^2$

**iv)** $(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$

**v)** $(u - v)^3 = u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3$

Nos exercícios 1 a 4, escreva o polinômio na forma-padrão e verifique seu grau.

**1.** $2x - 1 + 3x^2$ **2.** $x^2 - 2x - 2x^3 + 1$

**3.** $1 - x^7$ **4.** $x^2 - x^4 + x - 3$

Nos exercícios 5 a 8, verifique se a expressão é um polinômio.

**5.** $x^3 - 2x^2 + x^{-1}$ **6.** $\dfrac{2x - 4}{x}$

**7.** $(x^2 + x + 1)^2$ **8.** $1 - 3x + x^4$

Nos exercícios 9 a 18, simplifique a expressão. Escreva sua resposta na forma-padrão.

**9.** $(x^2 - 3x + 7) + (3x^2 + 5x - 3)$

**10.** $(-3x^2 - 5) - (x^2 + 7x + 12)$

**11.** $(4x^3 - x^2 + 3x) - (x^3 + 12x - 3)$

**12.** $-(y^2 + 2y - 3) + (5y^2 + 3y + 4)$

**13.** $2x(x^2 - x + 3)$ **14.** $y^2(2y^2 + 3y - 4)$

**15.** $-3u(4u - 1)$ **16.** $-4v(2 - 3v^3)$

**17.** $(2 - x - 3x^2)(5x)$ **18.** $(1 - x^2 + x^4)(2x)$

**Exemplo 2.11.** *Faça a expansão dos produtos:*

*a)* $(3x + 8)(3x - 8) =$

*b)* $(2x - 3y)^3 =$

*c)* $(5y - 4)^2 =$

**Exercícios** **RESPOSTAS**

1. $3x^2 + 2x - 1$; grau 2.
2. $-2x^3 + x^2 - 2x + 1$; grau 3.
3. $-x^7 + 1$; grau 7.
4. $-x^4 + x^2 + x - 3$; grau 4.
5. Não, não pode haver um expoente negativo como $x^{-1}$.
6. Não, não pode haver uma variável no denominador.
7. Sim.
8. Sim.
9. $(x^2 - 3x + 7) + (3x^2 + 5x - 3 = (x^2 + 3x^2) + (-3x + 5x) + (7 - 3) = 4x^2 + 2x + 4$
10. $(-3x^2 - 5) + (-x^2 - 7x - 12) = (-3x^2 - x^2) - 7x + (-5 - 12) = -4x^2 - 7x - 17$
11. $(4x^3 - x^2 + 3x) + (-x^3 - 12x + 3) = (4x^3 - x^3) - x^2 + (3x - 12x) + 3 = 3x^3 - x^2 - 9x + 3$
12. $(-y^2 - 2y + 3) + (5y^2 + 3y + 4) = (-y^2 + 5y^2) + (-2y + 3y) + (3 + 4) = 4y^2 + y + 7$
13. $2x(x^2) - 2x(x) + 2x(3) = 2x^3 - 2x^2 + 6x$
14. $y^2(2y^2) + y^2(3y) - y^2(4) = 2y^4 + 3y^3 - 4y^2$
15. $(-3u)(4u) + (-3u)(-1) = -12u^2 + 3u$
16. $(-4v)(2) + (-4v)(-3v^3) = -8v + 12v^4 = 12v^4 - 8v$
17. $2(5x) - x(5x) - 3x^2(5x) = 10x - 5x^2 - 15x^3 = -15x^3 - 5x^2 + 10x$
18. $1(2x) - x^2(2x) + x^4(2x) = 2x - 2x^3 + 2x^5 = 2x^5 - 2x^3 + 2x$

### 2.1.5 Fatoração de Polinômios Usando Produtos Notáveis

Quando escrevemos um polinômio como produto de dois ou mais polinômios, estamos fatorando um polinômio. Um polinômio que não pode ser fatorado é chamado de **irredutível.** Um polinômio está fatorado completamente se estiver escrito como produto de fatores irredutíveis.

**Exemplo 2.12.**

$$25x^2 - 16 = (5x - 4)(5x + 4)$$

O polinômio $x^3 - 9x = x(x^2 - 9)$ não está fatorado completamente porque $x^2 - 9$ não é irredutível. De fato,

$$x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3).$$

Logo

$$x^3 - 9x = x(x - 3)(x + 3)$$

está fatorado completamente.

**Exemplo 2.13.** *Colocação dos fatores comuns em evidência,*

$a)$ $2x^3 + 2x^2 - 6x =$

$b)$ $u^3v + uv^3 =$

**Exemplo 2.14.** *Fatoração da difereça de dois quadrados:*

$a)$ $25x^2 - 36 =$

$b)$ $4x^2 - (y + 3)^2 =$

**Exemplo 2.15.** *Fatoração de trinômios quadrados perfeito:*

$a)$ $9x^2 + 6x + 1 =$

$b)$ $4x^2 - 12xy + 9y^2 =$

**Exemplo 2.16.** ***Fatoração da soma e diferença de dois cubos***

**i)** $u^3 + v^3 = (u + v)(u^2 - uv + v^2)$

**ii)** $u^3 - v^3 = (u - v)(u^2 + uv + v^2)$

**Exemplo 2.17.** *Podemos fatorar um trinômio utilizando a identidade*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

*desde que* $x_1$ *e* $x_2$ *sejam soluções da equação* $ax^2 + bx + c = 0$.

**Exemplo 2.18.** *Fatorar os trinômios*

**a)** $x^2 + 5x - 14$

**b)** $35x^2 - x - 12$

**c)** $3x^2 - 7xy + 2y^2$

### 2.1.6 Fatoração por Agrupamento

Note que

$$ac + ad + bc + bd = (a + b)c + (a + b)d = (a + b)(c + d).$$

**Exemplo 2.19.** *Fatore por agrupamento:*

**i)** $3x^3 + x^2 - 6x - 2 =$

**ii)** $2ac - 2ad + bc - bd =$

**Exercícios 2.3.**

Nos exercícios 41 a 44, fatore colocando o fator comum em evidência.

**41.** $5x - 15$

**42.** $5x^3 - 20x$

**43.** $yz^3 - 3yz^2 + 2yz$

**44.** $2x(x + 3) - 5(x + 3)$

Nos exercícios 45 a 48, fatore as diferenças de dois quadrados.

**45.** $z^2 - 49$

**46.** $9y^2 - 16$

**47.** $64 - 25y^2$

**48.** $16 - (x + 2)^2$

Nos exercícios 49 a 52, fatore o trinômio quadrado perfeito.

**49.** $y^2 + 8y + 16$

**50.** $36y^2 + 12y + 1$

**51.** $4z^2 - 4z + 1$

**52.** $9z^2 - 24z + 16$

Nos exercícios 53 a 58, fatore a soma ou a diferença de dois cubos.

**53.** $y^3 - 8$

**54.** $z^3 + 64$

**55.** $27y^3 - 8$

**56.** $64z^3 + 27$

**57.** $1 - x^3$

**58.** $27 - y^3$

Nos exercícios 59 a 68, fatore o trinômio.

**59.** $x^2 + 9x + 14$

**60.** $y^2 - 11y + 30$

**61.** $z^2 - 5z - 24$

**62.** $6t^2 + 5t + 1$

**63.** $14u^2 - 33u - 5$

**64.** $10v^2 + 23v + 12$

**65.** $12x^2 + 11x - 15$

**66.** $2x^2 - 3xy + y^2$

**67.** $6x^2 + 11xy - 10y^2$

**68.** $15x^2 + 29xy - 14y^2$

Nos exercícios 69 a 74, fatore por agrupamento.

**69.** $x^3 - 4x^2 + 5x - 20$

**70.** $2x^3 - 3x^2 + 2x - 3$

**71.** $x^6 - 3x^4 + x^2 - 3$

**72.** $x^6 + 2x^4 + x^2 + 2$

**73.** $2ac + 6ad - bc - 3bd$

**74.** $3uw + 12uz - 2vw - 8vz$

## RESPOSTAS

**41.** $5(x-3)$

**42.** $5x(x^2-4)$

**43.** $yz(z^2-3z+2)$

**44.** $(x+3)(2x-5)$

**45.** $z^2-7^2=(z+7)(z-7)$

**46.** $(3y)^2-4^2=(3y+4)(3y-4)$

**47.** $8^2-(5y)^2=(8+5y)(8-5y)$

**48.** $4^2-(x+2)^2=[4+(x+2)][(4-(x+2)]=(6+x)(2-x)$

**49.** $y^2+2(y)(4)+4^2=(y+4)^2$

**50.** $(6y)^2+2(6y)(1)+1^2=(6y+1)^2$

**51.** $(2z)^2-2(2z)(1)+1^2=(2z-1)^2$

**52.** $(3z)^2-2(3z)(4)+4^2=(3z-4)^2$

**53.** $y^3-2^3=(y-2)[y^2+(y)(2)+2^2]=(y-2)(y^2+2y+4)$

**54.** $z^3+4^3=(z+4)[z^2-(z)(4)+4^2]=(z+4)(z^2-4z+16)$

**55.** $(3y)^3-2^3=(3y-2)[(3y)^2+(3y)(2)+2^2]=(3y-2)(9y^2+6y+4)$

**56.** $(4z)^3+3^3=(4z+3)[(4z)^2-(4z)(3)+3^2]=(4z+3)(16z^2-12z+9)$

**57.** $1^3-x^3=(1-x)[1^2+(1)(x)+x^2]=(1-x)(1+x+x^2)=(1-x)(1+x+x^2)$

**58.** $3^3-y^3=(3-y)[3^2+(3)(y)+y^2]=(3-y)(9+3y+y^2)=(3-y)(9+3y+y^2)$

**59.** $(x+2)(x+7)$

**60.** $(y-5)(y-6)$

**61.** $(z-8)(z+3)$

**62.** $(2t+1)(3t+1)$

**63.** $(2u-5)(7u+1)$

**64.** $(2v+3)(5v+4)$

**65.** $(3x+5)(4x-3)$

**66.** $(x-y)(2x-y)$

**67.** $(2x+5y)(3x-2y)$

**68.** $(3x+7y)(5x-2y)$

**69.** $(x^3-4x^2)+(5x-20)=x^2(x-4)+5(x-4)=(x-4)(x^2+5)$

**70.** $(2x^3-3x^2)+(2x-3)=x^2(2x-3)+1(2x-3)=(2x-3)(x^2+1)$

**71.** $(x^6-3x^4)+(x^2-3)=x^4(x^2-3)+1(x^2-3)=(x^2-3)(x^4+1)$

**72.** $(x^6+2x^4)+(x^2+2)=x^4(x^2+2)+1(x^2+2)=(x^2+2)(x^4+1)$

**73.** $(2ac+6ad)-(bc+3bd)=2a(c+3d)-b(c+3d)=(c+3d)(2a-b)$

**74.** $(3uw+12uz)-(2vw+8vz)=3u(w+12z)-2v(w+4z)=(w+4z)(3u-2v)$

# Capítulo 3

# Os Números Reais (ESTE CAPÍTULO É BASEADO NO CAPÍTULO 1 DO LIVRO CÁLCULO A DE DIVA FLEMMING)

## Retorno das Atividades Remotas - Aula 1 - 15 de Junho

Parte 1

## 3.1 Conjuntos Numéricos

***Conjunto dos números naturais.*** É o conjunto, representado por $I\!N$, formado pelos números $1, 2, 3, ....$

$$I\!N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

***Conjunto dos números inteiros.*** É o conjunto, representado por

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

**Subconjuntos de $\mathbb{Z}$:**

a) Conjunto dos inteiros não negativos $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\} = \mathbb{N}$.

b) Conjunto dos inteiros não positivos $\mathbb{Z}_- = \{..., -4, -3, -2, -1, 0\}$.

c) Conjunto dos inteiros não nulos $\mathbb{Z}^* = \{..., -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

***Conjunto dos números racionais.*** É o conjunto, representado por $\mathbb{Q}$, formado pelos números da forma $\frac{a}{b}$, sendo $a$ e $b$ inteiros e $b \neq 0$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

***Conjunto dos números irracionais.***Existem números que não podem ser representados na forma $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$ e $b \neq 0$, como por exemplo $\sqrt{2} = 1,414\cdots$, $\pi = 3,14159\cdots$, $e = 2,71\cdots$. Esses números fazem parte do conjunto dos números irracionais que denotaremos por $\mathbb{Q}'$ ou $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ (notação de conjuntos).

***Conjunto dos números reais.*** Da união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais resulta o cponjunto dos númeors reais, que denotamos por

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

**Propriedades:** Em $\mathbb{R}$ são definidas duas operações fundamentais, a adição e a multiplicação, que $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, apresentam as seguintes propriedades:

**A1.** Associativa da adição: $(a + b) + c = a + (b + c)$.

**A2.** Comutativa da adição: $a + b = b + a$.

**A3.** Elemento neutro da adição: $a + 0 = a$.

**A4.** Oposto (ou simétrico): Todo $a \in \mathbb{R}$ tem um único oposto, denotado por $-a$, tal que $a + (-a) = 0$.

**M1.** Associativa da multiplicação: $(ab)c = a(bc)$.

**M2.** Comutativa da multiplicação: $ab = ba$.

**M3.** Elemento neutro da multiplicação: $a.1 = a$.

**M4.** Elemento inverso: Todo $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ tem um único inverso, denotado por $\frac{1}{a}$, tal que $a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$.

**D.** Distributiva da multiplicação em relação a adição: $a(b + c) = ab + ac$.

**Definição 3.1.** ***Subtração.*** *Se $a, b \in \mathbb{R}$, a diferença entre $a$ e $b$, denotada por $a - b$, é definida por $a - b = a + (-b)$.*

**Definição 3.2.** ***Divisão.*** *Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, o quociente de $a$ e $b$ é definido por $\dfrac{a}{b} = a \cdot \dfrac{1}{b}$.*

## 3.2 Desigualdades

**Axioma 3.1.** *No conjunto dos números reais existe um subconjunto denominado de números positivos, tal que:*

**i)** *se $a \in \mathbb{R}$, então $a = 0$, ou $a$ é positivo, ou $-a$ é positivo;*

**ii)** *a soma de dois números positivos é positiva;*

**iii )** *o produto de dois números positivos é posito.*

**Definição 3.3.** *O número real $a$ é negativo se, e somente se, $-a$ é positivo.*

**Definição 3.4.** *Os símbolos $<$ (menor que) e $>$ (maior que) são definidos:*

**i)** $a < b \Leftrightarrow b - a$ *é positivo;*

**ii)** $a > b \Leftrightarrow a - b$ *é positivo.*

**Definição 3.5.** *Os símbolos $\leq$ (menor ou igual que) e $\geq$ (maior ou igual que) são definidos:*

**i)** $a \leq b \Leftrightarrow a < b$ *ou* $a = b$*;*

**ii)** $a \geq b \Leftrightarrow a > b$ *ou* $a = b$*.*

Expressões que envolvem os símbolos definidos acima são chamadas de DESIGUALDADES.

Parte 2

**Propriedade 3.1.** *Sejam* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

**i)** *Se* $a > b$ *e* $b > c$*, então* $a > c$.

**ii)** *Se* $a > b$ *e* $c > 0$*, então* $ac > bc$.

**iii)** *Se* $a > b$ *e* $c < 0$*, então* $ac < bc$.

**iv)** *Se* $a > b$*, então* $a + c > b + c$ *para todo número real* $c$.

**v)** *Se* $a > b$ *e* $c > d$*, então* $a + c > b + d$*.*

**vi)** *Se* $a > b > 0$ *e* $c > d > 0$*, então* $ac > bd$*.*

## 3.3 Valor Absoluto (Módulo)

Seja $x$ um número real. Definimos o módulo (valor absoluto) de $x$ por:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{se} \quad x < 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

**Exemplo 3.1.** $|5| = 5, \qquad |-3| = -(-3) = 3$

**Exemplo 3.2.** *Mostre que para todo número real* $x$*,*

$$|x|^2 = x^2.$$

***Solução:***

**Observação 3.1.** *Lembrando que* $\sqrt{a}$ *indica a raiz quadrada positiva de* $a$ $(a \geq 0)$, *então usando o exemplo anterior segue que*

$$\sqrt{|x|^2} = \sqrt{x^2} \Rightarrow |x| = \sqrt{x^2}.$$

**Exemplo 3.3.** *Suponha* $a > 0$. *Resolva a equação* $|x| = a$.

***Solução:***

**Exemplo 3.4.** *Resolva a equaçào* $|2x + 1| = 3$.

***Solução:***

# Aula 2 - 19 de Junho

**Propriedade 3.2.**

**i)** $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$, *onde* $a > 0$.

**ii)** $|x| > a \Leftrightarrow x > a$ *ou* $x < -a$, *onde* $a > 0$.

**iii)** *Se* $a, b \in \mathbb{R}$, *então* $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

**iv)** *Se* $a, b \in \mathbb{R}$ *e* $b \neq 0$, *então* $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

**v)** *(Desigualdade Triangular)*

*Se* $a, b \in \mathbb{R}$, *então* $|a+b| \leq |a| + |b|$.

**vi)** *Se* $a, b \in \mathbb{R}$, *então* $|a-b| \leq |a| + |b|$.

**vii)** *Se* $a, b \in \mathbb{R}$, *então* $|a| - |b| \leq |a-b|$.

## 3.4 Intervalos

Intervalos são conjuntos infinitos de números reais, como segue:

- Intervalo Aberto: $\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\} = (a, b) = ]a, b[$.
- Intervalo Fechado: $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\} = [a, b]$.
- Intervalo Fechado à Direita e Aberto à esquerda: $\{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\} = (a, b] = ]a, b]$.
- Intervalo Aberto à Direita e Fechado à esquerda: $\{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\} = [a, b) = [a, b[$.
- Intervalos Infinitos:

  **i)** $(a, +\infty) = \{x | x > a\}$

  **ii)** $[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$

  **iii)** $(-\infty, b) = \{x | x < b\}$

  **iv)** $(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$

**Exemplo 3.5.**

# Aula 3 - 22 de Junho

**Exemplo 3.6.** *1. Determine a solução das desigualdades:*

**i)** $3 + 7x < 8x + 9$

**ii)** $7 < 5x + 3 \leq 9$

**iii)** $\dfrac{x}{x+7} < 5$ *tal que* $x \neq -7$

**iv)** $(x+5)(x-3) > 0$

*2. Resolva as equações:*

**i)** $|5x-3| = 7$

**ii)** $|7x-1| = |2x+5|$

**iii)** $|9x+7| = -7$

3. *Resolva:*

**i)** $|7x - 2| < 4$

**ii)** $\left|\dfrac{7-2x}{4+x}\right| \leq 2$ *tal que* $x \neq -4$.

## 3.5 Exercícios

1. Determinar todos os intervalos de números que satisfazem as desigualdades abaixo. Fazer a representação gráfica.

   *a)* $3 - x < 5 + 3x$

   *b)* $2 > -3 - 3x \leq -7$

   *c)* $x^2 - 3x + 2 > 0$

$d)$ $\dfrac{x}{x-3} < 4$

2. Resolva as equações em $I\!R$.

   $a)$ $|-4+12x| = 7$

   $b)$ $|2x-3| = |7x-5|$

3. Resolva as inequações em $I\!R$.

   $a)$ $|5-6x| \geq 9$

   $b)$ $\left|\dfrac{7-2x}{5+3x}\right| \leq \dfrac{1}{2}$

# Capítulo 4

# Funções (Este capítulo é baseado no capítulo 2 do livro Cálculo A de Diva Flemming e no capítulo 2 do livro Um Curso de Cálculo Volume 1 de Hamilton Guidorizzi )

## 4.1 Funções de uma variável real a valores reais

Sejam $A$ e $B$ subconjuntos de $\mathbb{R}$. Uma funçào $f : A \to B$ é uma lei (ou regra) que associa a cada elemento de $A$ um único elemento de B. O conjunto $A$ é chamado **domínio** de $f$ e $B$ é chamado de contradomínio.
Escrevemos

$$\begin{aligned} f : A &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

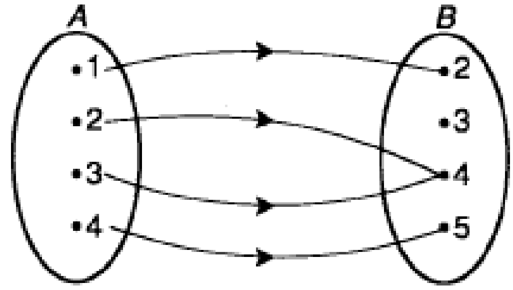
ou

$$\begin{aligned} A &\xrightarrow{f} B \\ x &\longrightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

**Exemplo 4.1.**

1. *Sejam* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *e* $B = \{2, 3, 4, 5\}$.

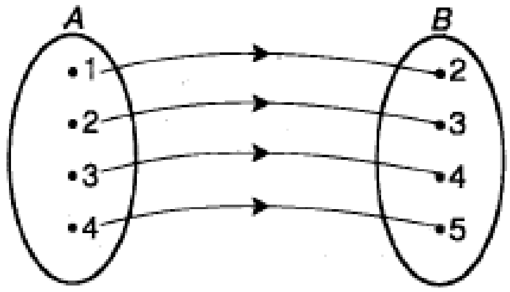
**i)** $f : A \longrightarrow B$ *dada pelo diagrama abaixo é uma função de A em B.*




**ii)**

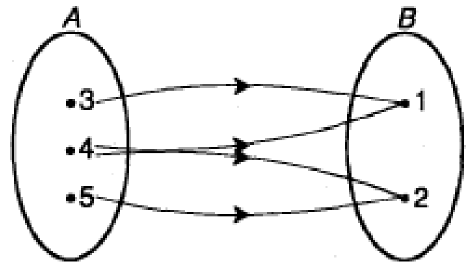
$$g : A \to B$$
$$x \mapsto x + 1$$

*é uma função de A em B. Podemos representar g em diagrama*




2. *Sejam* $A = \{3, 4, 5\}$ *e* $B = \{1, 2\}$.

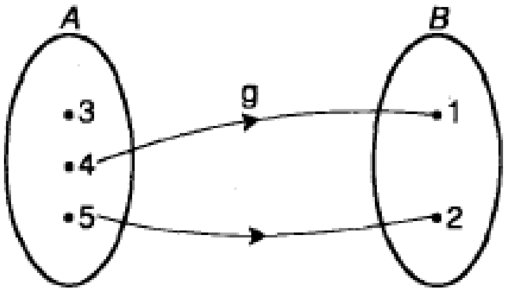
**i)** $f : A \longrightarrow B$ *dada pelo diagrama abaixo não é uma função.*




**ii)**

$$g : A \to B$$
$$x \mapsto x - 3$$

*não é uma função pois* 3 *não tem correspondente em B.*




# Aula 4 - 26 de Junho

**Definição 4.1.** *Seja $f : A \to B$.*

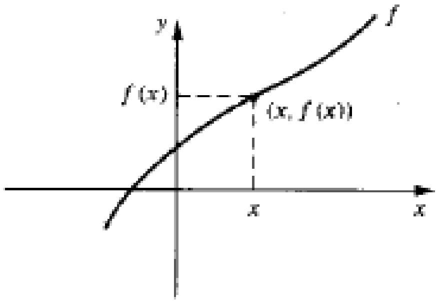
**i)** *Dado $x \in A$, o elemento $f(x) \in B$ é chamado o valor da função $f$ no ponto $x$ ou* ***imagem*** *de $x$ por $f$.*

**ii)** *O conjunto de todos os valores assumidos pela função é chamado conjunto imagem de $f$ e é denotado por $Im(f)$.*

Seja $f : A \to B$ uma função. O conjunto

$$G_f = \{(x, f(x)) | x \in A\}$$

denomina-se *gráfico* de $f$. Munindo-se o plano de um sistema ortogonal de coordenadas cartesianas, o gráfico de $f$ pode então ser pensado como o lugar geométrico descrito pelos pontos $(x, f(x))$ quando $x$ percorre o domínio de $f$.



**Exemplo 4.2.** ***Exemplos de Funções***

1. *Contrua o gráfico das seguintes funções*

   **i)** $y = f(x)$ *tal que* $f(x) = x^3$

   **ii)** $y = g(x)$ *tal que* $g(x) = \dfrac{1}{x}$

*2. Dada a função* $f(x) = -x^2 + 2$ *simplifique*

**i)** $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

**ii)** $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

**Exemplo 4.3.** *Seja $f$ uma função dada por $f(x) = \sqrt{x}$. Tem-se*

**a)** $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$

**b)** $Im_f = \mathbb{R}_+$

**c)** $f(t) = \sqrt{t^2} = |t|$

**Exemplo 4.4.** ***(Função Constante)*** *Uma função $y = f(x)$, $x \in A$, dada por $f(x) = k$, $k$ constatnte, denomina-se funçãs constante.*

- $f(x) = 2$ *é uma função constante*

  **i)** $D_f = \mathbb{R}$

  **ii)** *Gráfico*

# Aula 5 - 29 de Junho

**Exemplo 4.5.** ***(Função Definida Por Partes)*** *Definida de forma diversa em diferentes partes do seu domínio; por exemplo,*

**a)** $f(x) = \begin{cases} 1 - x & se\ x \leq 1 \\ x^2 & se\ x > 1 \end{cases}$

**i)** $D_f = \mathbb{R}$

**ii)** ***Gráfico***

**b)** ***(Função Módulo)*** $g(x) = |x| = \begin{cases} x & se\ x \geq 0 \\ -x & se\ x < 0 \end{cases}$

**i)** $D_f = \mathbb{R}$

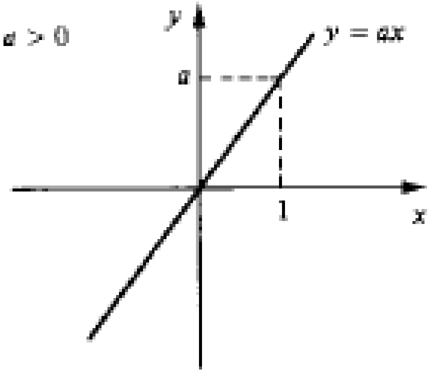
**ii)** ***Gráfico***

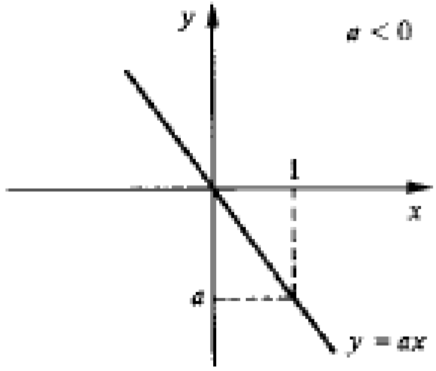
**c)** $f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \geq 0 \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases}$

**i)** $D_f = \mathbb{R}$

**ii)** ***Gráfico***

**Exemplo 4.6.** ***(Função Linear)*** *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax$, a constante, denomina-se função linear. Seu gráfico é a reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1, a)$.*




**Exemplo 4.7.** *Esboce os gráficos.*

**a)** $f(x) = 2x$

**b)** $g(x) = -2x$

**c)** $h(x) = 2|x|$ *(Função definida por partes)*

**Exemplo 4.8.** ***(Função Afim)*** *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = ax + b$*,* $a$ *e* $b$ *constantes, denomina-se função afim. Seu gráfico é a reta que passa pelo ponto* $(0, b)$ *e é paralela à reta* $y = ax$*.*

**Exercícios 4.1.** *Esboce os gráficos.*

**a)** $f(x) = 2x + 1$

**b)** $f(x) = 3x + 1$

**c)** $f(x) = x + 1$

**d)** $f(x) = \dfrac{1}{2}x + 1$

**Exercícios 4.2.** *Esboce os gráficos.*

**a)** $f(x) = 2x$

**b)** $f(x) = 2x + 1$

**c)** $f(x) = 2x - 2$

**Exemplo 4.9.** ***(Função Polinomial)*** *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, *onde* $a_n \neq 0$, $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *são números reais fixos (constantes), denomina-se função polinomial de grau* $n$ $(n \in \mathbb{N})$.

**a)** $f(x) = x^2 - 4$ *é uma função polinomial de grau* $2$.

***<u>Gráfico</u>***

**b)** $g(x) = (x-1)^3$ *é uma função polinomial de grau 3.*

***Gráfico***

**Exemplo 4.10.** ***(Função Racional)*** *Uma função racional $f$ é uma função dada por $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ onde $p$ e $q$ são duas funções polinomiais. O domínio de $f$ é o conjunto*

$$\{x \in \mathbb{R} | q(x) \neq 0\}.$$

***Exemplos de funções racionais***

**a)** $f(x) = \dfrac{1}{x}$

**b)** $g(x) = \dfrac{x+1}{x}$

**c)** $h(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

# Aula 6 - 3 de Julho - EXERCÍCIOS - Obs.: Prova dia 17 de Julho

# Aula 7 - 6 de Julho - Obs.: Prova dia 17 de Julho

## 4.2 Operações com Funções

Sejam $f$ e $g$ duas funções tais que $D_f \cap D_g$ seja diferente do vazio. Definimos

**a)** A função $f+g$ dada por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

denomina-se soma de $f+g$. O domínio de $f+g$ é $D_f \cap D_g$. Observe que $f+g$ é uma notação para indicar a função dada por $y = f(x) + g(x)$.

**b)** A função $f \cdot g$ dada por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

denomina-se produto de $f$ e $g$. O domínio de $f \cdot g$ é $D_f \cap D_g$.

**c)** A função $\dfrac{f}{g}$ dada por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

denomina-se quociente de $f$ e $g$. O domínio de $\dfrac{f}{g}$ é $\{x \in D_f \cap D_g | g(x) \neq 0\}$.

**d)** A função $kf$, $k$ constante, dada por

$$(kf)(x) = kf(x)$$

é o produto de $f$ pela constante $k$; $D_{kf} = D_f$.

**Exemplo 4.11.** *Sejam $f(x) = \sqrt{7-x}$ e $g(x) = \sqrt{x-2}$.*

**a)** $(f+g)(x) = \sqrt{7-x} + \sqrt{x-2}$. *O domínio de $f+g$ é $[2,7] = D_f \cap D_g$.*

**b)** $(f \cdot g)(x) = \sqrt{7-x} \cdot \sqrt{x-2}$. *O domínio de* $f \cdot g$ *é* $[2,7] = D_f \cap D_g$.

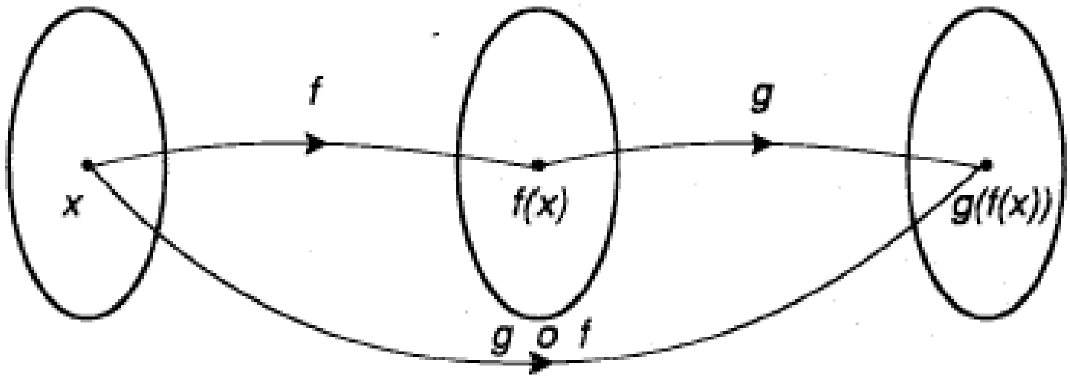
**c)** $\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{\sqrt{7-x}}{\sqrt{x-2}}$. *O domínio de* $\dfrac{f}{g}$ *é* $\{x \in D_f \cap D_g | x \neq 2\} = ]2,7]$.

**Definição 4.2.** ***(Função Composta)*** *Sejam* $f$ *e* $g$ *funções tais que* $Im_f \subset D_g$. *A função dada por*

$$y = g(f(x)), x \in D_f,$$

*denomina-se* *<u>função composta</u>* *de* $g$ *e* $f$. *É usual a notação* $g \circ f$ *para indicar a composta de* $g$ *e* $f$. *Assim*

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in D_f.$$




**Exemplo 4.12.** *Sejam $f$ e $g$ dadas por $f(x) = 2x + 1$ e $g(x) = x^2 + 3x$. Determine $g \circ f$ e $f \circ g$.*

**Exemplo 4.13.** *Sejam $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$. Determine $g \circ f$ e $f \circ g$.*

**Exemplo 4.14.** *Sejam* $f(x) = \sqrt{x}$ *e* $g(x) = x - 1$. *Determine* $g \circ f$ *e* $D_{g \circ f}$.

**Exercícios 4.3.** *Sejam* $f(x) = 2x - 3$ *e* $g(x) = \sqrt{x}$. *Determine* $g \circ f$, $f \circ g$, $f \circ f$, $g \circ g$.

**Definição 4.3.** ***(Igualdade de Funções)*** *Sejam as funções* $f : A \to \mathbb{R}$ *e* $g : A' \to \mathbb{R}$.

*Dizemos que $f$ é igual a $g$, e escrevemos $f = g$, se $A = A'$, e se, par todo $x \in A$, $f(x) = g(x)$.*

**Exemplo 4.15.** *Sejam $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ tais que $f(x) = x + 1$ e $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ onde $A = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1\}$. Temos que $f = g$.*
*De fato,*

**Exemplo 4.16.** *As funções $f$ e $g$ dada por $f(x) = \sqrt{x}\sqrt{x - 1}$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - x}$ são iguais?*

**Exercícios 4.4.** *Dê os domínios e esboce os gráficos de $f + g$ e $\dfrac{f}{g}$.*

*a)* $f(x) = x$ e $g(x) = x^2 - 1$

*b)* $f(x) = 1$ e $g(x) = \sqrt{x - 1}$

**Exercícios 4.5.** *Verifique que $Im_f \subset D_g$ e determine a composta $h(x) = g(f(x))$.*

*a)* $g(x) = 3x + 1$ e $f(x) = x + 2$

*b)* $g(x) = \sqrt{x}$ e $f(x) = 2 + x^2$

*c)* $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$ e $f(x) = x^2 + 3$

**Exercícios 4.6.** *Determine $f$ de modo que $g(f(x)) = x$ para todo $x \in D_f$, sendo $g$ dada por*

*a)* $g(x) = \dfrac{1}{x}$

*b)* $g(x) = x^2, \;\; x \geq 0$

*c)* $g(x) = 2 + \dfrac{3}{x+1}$

*d)* $g(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$

*c)* $g(x) = x^2 - 4x + 3, \;\; x \geq 2$

# Aula 8 - 10 de Julho - Obs.: Prova dia 17 de Julho

## 4.3 Funções Trigonométricas: Seno e Cosseno

**Teorema 4.1.** *Existe um único par de funções definidas em $\mathbb{R}$, indicadas por* ***seno*** *e* ***cosseno****, satisfazendo as propriedades:*

1. $sen 0 = 0$

2. $\cos 0 = 1$

3. *Quaisquer que sejam os números reais $a$ e $b$*

$$sen(a - b) = sena \cos b - senb \cos a.$$

4. *Quaisquer que sejam os números reais $a$ e $b$*

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + sena senb.$$

**Observação 4.1.** *A demosntração do teorema (4.1) requer o conhecimento de propriedades de séries de potências e portanto não será feita aqui.*

**Exemplo 4.17.** ***Consequência imediata do teorema anterior***
*Fazendo em* (4), $a = b = t$ *temos*

$$\cos 0 = \cos(t - t) = \cos t \cos t + sent sent$$

$$\cos^2 t + sen^2 t = 1, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

**Propriedade 4.1.** *Existe um menor número positivo $a$ tal que* $\cos a = 0$*. Para este $a$,* $\operatorname{sen} a = 1$.

**Definição 4.4.** *Definimos o número $\pi$ por $\pi = 2a$, onde $a$ é o número $a$ que se refere a propriedade (4.1).*

**Definição 4.5.** ***(Função Par)*** *Dizemos que $f$ é uma função* ***par*** *se, para todo $x \in D_f$, $f(x) = f(-x)$.*

Exemplo.

**Definição 4.6.** ***(Função Ímpar)*** *Dizemos que $f$ é uma função* ***ímpar*** *se, para todo $x \in D_f$, $f(-x) = -f(x)$.*

Exemplo.

**Definição 4.7.** ***(Função Periódica)*** *Dizemos que uma função $f$ é periódica se existe um número real $T \neq 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in D_f$.*

O número $T$ é chamado período da função $f$. O gráfico de uma função periódica se repete a cada intervalo de comprimento $T$.
Exemplo.

**Exemplo 4.18.** *Mostre que*

**a)** *Seno é uma função ímpar;*

**b)** *Cosseno é uma função par.*

***Solução.***

# Aula 9 - 13 de Julho - Obs.: Prova dia 17 de Julho

**Exemplo 4.19.** *Mostre que quaisquer que sejam os números reais $a$ e $b$*

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - sena senb$$

*e*

$$sen(a+b) = sena \cos b + senb \cos a$$

***Solução.***

**Exemplo 4.20.** *Mostre que, para todo $x$,*

$$\cos 2x = \cos^2 x - sen^2 x$$

*e*

$$sen 2x = 2 senx \cos x$$

***Solução.***

**Exemplo 4.21.** *Mostre que, para todo $x$,*

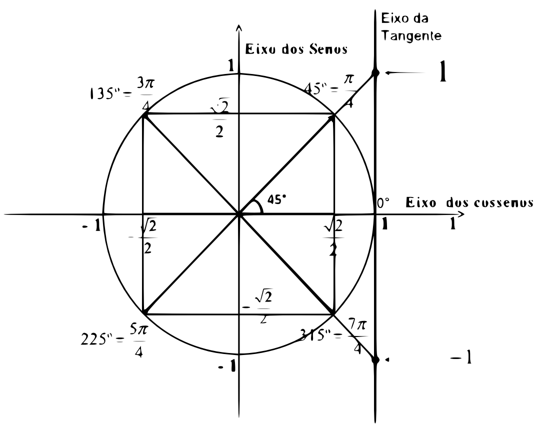
$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$$

*e*

$$sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

***Solução.***

**Observação 4.2.** *Ciclo Trigonométrico*



**Exemplo 4.22.** *Calcule*

**a)** $\cos\frac{\pi}{4}$

**b)** $\cos\pi$

**c)** $sen\frac{\pi}{4}$

**d)** $sen\pi$

**Exemplo 4.23.** *Verifique que as funções seno e cosseno são periódicas de período* $2\pi$.

**Exercícios 4.7.** *Sejam* $a$ *e* $b$ *reais quaisquer. Verifique que*

$a)$ $sen a \cos b = \frac{1}{2}\left[sen(a+b) + sen(a-b)\right]$

$b)$ $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

## 4.4 As funções Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante

Estas funções são definidas em termos das funções *seno* e *cosseno*.

As funções *tangente* e *secante* são, respectivamente, denotadas pelos símbolos *tg* e *sec* e definidas por:

$$\mathrm{tg} x = \frac{\mathrm{sen} x}{\cos x}; \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

para todos os números reais $x$ tais que $\cos x \neq 0$.

As funções *cotangente* e *cossecante* são ,respectivamente, denotadas pelos símbolos *cotg* e *cosec* e definidas por:

$$\mathrm{cotg} x = \frac{\cos x}{\mathrm{sen} x}; \qquad \mathrm{cosec} x = \frac{1}{\mathrm{sen} x}$$

para todos os números reais $x$ tais que $\mathrm{sen} x \neq 0$.

**Exercícios 4.8.** *Verifique que* $\sec^2 x = 1 + tg^2 x$ *para todo* $x$ *tal que* $\cos x \neq 0$.

# Aula 10 - 17 de Julho -Prova P1

# Capítulo 5

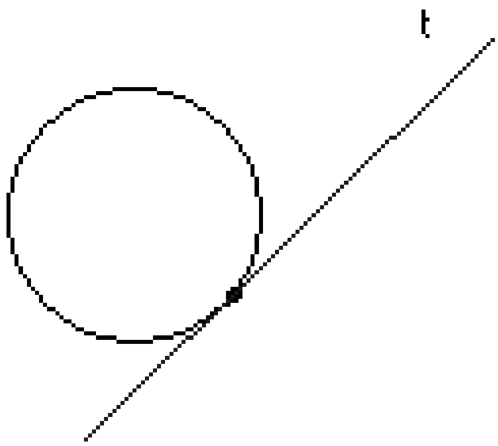
# Limite e Continuidade

Aula 11 - 20 de Julho - INÍCIO DO CONTEÚDO DA P2

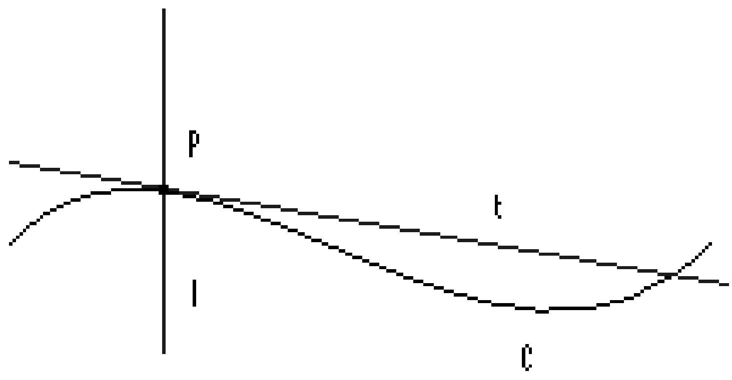
## 5.1 O Problema da Tangente

A palavra *tangente* vem do latim *tangens*, que significa "tocando". Assim, uma tangente a uma curva é uma reta que toca a curva. Ou seja, uma reta tangente deve ter a mesma direção e sentido que a curva no ponto de contato. Como tornar precisa essa idéia?

Para um circulo poderíamos simplesmente seguir Euclides e dizer que a tangente é uma reta que intercepta o círculo uma única vez, conforme a figura a seguir. Para as curvas mais




complicadas essa definiçào é inadequada. A próxima figura mostra duas retas,$l$ e $t$, passando por um ponto $P$ sobre uma curca $C$. A reta $l$ intercepta $C$ somente uma vez, mas certamente não aparenta o que pensamos ser uma reta tangente. A reta $t$, por outro lado, aparenta ser uma tangente, mas intercepta $C$ duas vezes. O importante a observar é que a reta $t$ é tangente à curva $C$ no ponto $P$. Examinemos alguns problemas.




**Exemplo 5.1.** *Encontre a equação da reta que passa pelos pontos de coordenadas* $(0,1)$ *e* $(1,3)$.

*Solução:*

*Temos que* $y = ax + b$ *é a reta procurada.*

*Usando os pontos dados acima temos:*

$$\begin{cases} 1 = a \cdot 0 + b \\ 3 = a \cdot 1 + b \end{cases} \tag{5.1}$$

*e portanto,* $a = 2$ *e* $b = 1$.

*Logo,* $y = 2x + 1$ *é a reta procurada.*

***Obs.:*** *O importante a observar é que, dado dois pontos no plano sempre conseguimos determinar a equação da reta que passa por esses dois pontos, isto é, conseguimos determinar a sua inclinação* $a$ *e o seu deslocamento linear vertical* $b$.

Podemos encontrar a equação de uma reta se conhecermos um ponto pertencente a essa reta e a sua inclinação. Entende-se aqui por inclinação da reta a *tangente ângulo* que esta reta forma com eixo dos $x$. A tangente citada aqui é uma razão trigonométrica e não pode ser confundida com *reta tangente*.

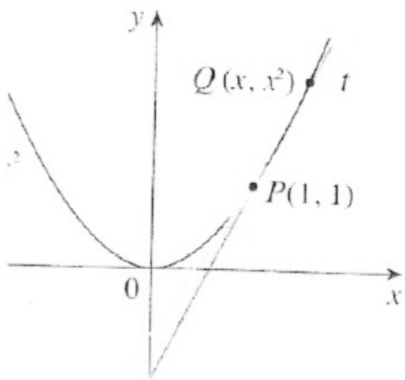
Examinemos agora o seguinte problema:

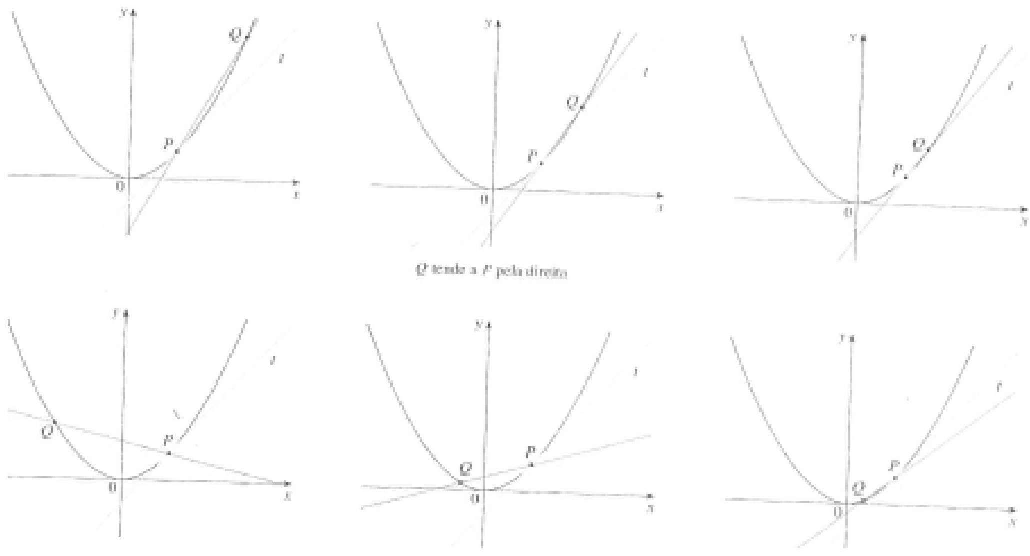
**Exemplo 5.2.** *Encontre uma equação da reta* $t$ *tangente à parábola* $y = x^2$ *no ponto* $P$ *de coordenadas* $(1,1)$.

Solução:

*Como a reta $t$ é tangente à parábola $y = x^2$ no ponto $P$, então se pudermos encontrar a sua inclinção $m$, seremos capazes de determinar a sua equação.*

*O problema é ter somente um ponto $P$, sobre $t$, ao passo que para calcularmos a inclinação são necessário dois pontos. Podemos calcular uma aproximação de $m$ escolhendo um ponto $Q$ de coordenadas $(x, x^2)$ (sobre a parábola) próxima de $P$ computando a inclinação $m_{PQ}$ da reta secante $PQ$.*




*Vamos escolher $x \neq 1$ de forma que $Q \neq P$. Então*

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$

*Temos*

| $x$ | 2 | 1.5 | 1.1 | 1.01 | 1.001 |
|---|---|---|---|---|---|
| $m_{PQ}$ | 3 | 2.5 | 2.1 | 2.01 | 2.001 |

*Observe que quanto mais próximo $Q$ está de $P$, mais próximo $x$ está de 1, e fica evidente que $m_{PQ}$ estará mais próximo de 2. Isto sugere que a inclinaçào da reta $t$ deve ser $m = 2$. Dizemos que a inclinação da reta tangente $t$ é o limite das inclinações da reta secante. Simbolicamente temos*

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m \qquad e \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2.$$

*Supondo que a inclinação de $t$ é 2, temos*

$$t = 2x + b.$$

*Como $t$ passa pelo ponto $P$ de coordenadas $(1, 1)$ temos*

$$1 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = -1.$$

*Logo*

$$t = 2x - 1.$$

## 5.2 Noção Intuitiva de Limites

Analisemos os seguintes exemplos de sequências numéricas:

**Exemplo 5.3.**

*1)* $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$

*2)* $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \cdots$

*3)* $1, 0, -1, -2, -3, -4, \cdots$

*4)* $1, \frac{3}{2}, 3, \frac{5}{4}, 5, \frac{7}{6}, 7, \cdots$

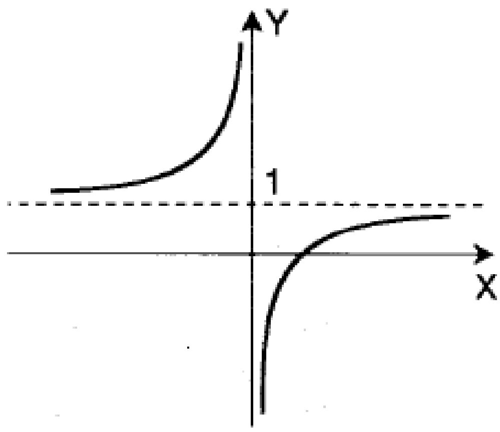
Aplicaremos agora, o conceito de "limites" para diversos casos de limites de funções.

**Exemplo 5.4.** *Seja $y = 1 - \frac{1}{x}$. Temos*

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\cdots$ | 500 | $\cdots$ | 1000 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{5}$ | $\frac{5}{6}$ | $\cdots$ | $\frac{499}{500}$ | $\cdots$ | $\frac{999}{1000}$ | $\cdots$ |

| $x$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ | $-5$ | $-6$ | $\cdots$ | $-100$ | $\cdots$ | $-500$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $2$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{6}{5}$ | $\frac{7}{6}$ | $\cdots$ | $\frac{101}{100}$ | $\cdots$ | $\frac{501}{500}$ | $\cdots$ |

*Esta função tende para* $1$ *quando* $x$ *tende para infinito. Basta observar as tabelas e o gráfico para constatar que* $y \to 1$ *quando* $x \to \pm\infty$.



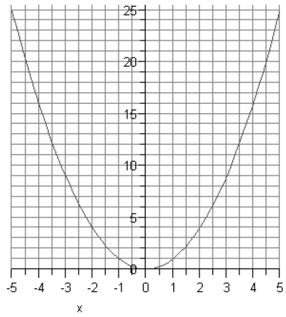

**Exemplo 5.5.** *Dada a função* $y = x^2$, $y \to +\infty$ *quando* $x \to \pm\infty$ *e* $y \to 4$ *quando* $x \to 2$.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | $\cdots$ |

| $x$ | $-1$ | $-2$ | $-3$ | $-4$ | $-5$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | $\cdots$ |

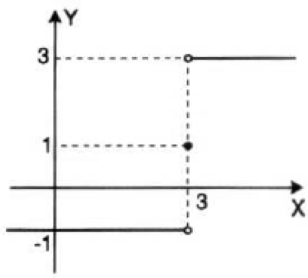
| $x$ | 3 | 2.5 | 2.1 | 2.01 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 9 | 6.25 | 4.41 | 4.0401 | $\cdots$ |

| $x$ | 1 | 1.5 | 1.9 | 1.99 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 2.25 | 3.61 | 3.9601 | $\cdots$ |




# Exercícios

**1.** Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:

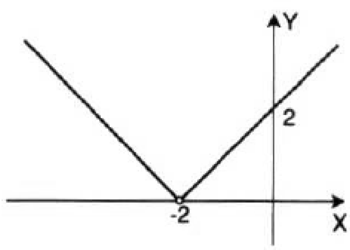



Intuitivamente, encontre se existir:

(*a*) $\lim_{x \to 3^-} f(x)$. (*b*) $\lim_{x \to 3^+} f(x)$. (*c*) $\lim_{x \to 3} f(x)$.

(*d*) $\lim_{x \to -\infty} f(x)$. (*e*) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$. (*f*) $\lim_{x \to 4} f(x)$.

**2.** Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:

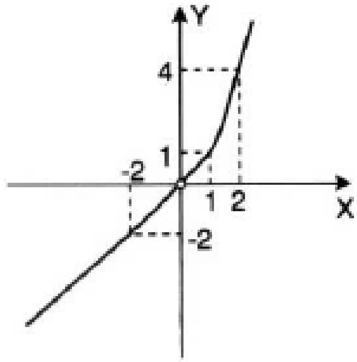


Intuitivamente, encontre se existir:

(a) $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x)$. (b) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$.

(c) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$. (d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

**3.** Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:

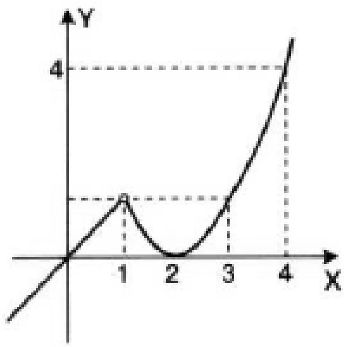



Intuitivamente, encontre se existir:

(a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$. (b) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$. (c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

(d) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (e) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. (f) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

**4.** Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:

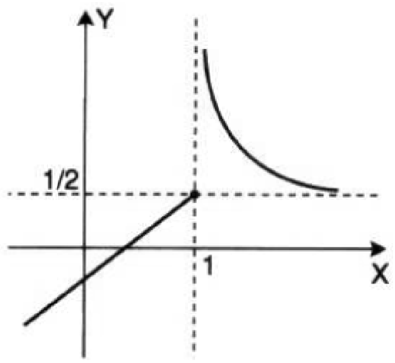



Intuitivamente, encontre se existir:

(a) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$. (b) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$. (c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

(d) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. (e) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

**5.** Seja $f(x)$ a função definida pelo gráfico:




Intuitivamente, encontre se existir:

(*a*) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$. (*b*) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$. (*c*) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

(*d*) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. (*e*) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

**6.** Descrever analítica e graficamente uma função $y = f(x)$ tal que $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ não existe e $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$ existe.

**7.** Definir uma função $y = g(x)$ tal que $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 4$, mas $g(x)$ não é definida em $x = 2$.

## Seção 3.6

**1.** a) $-1$ b) $3$ c) $\nexists$ d) $-1$ e) $3$ f) $3$

**2.** a) $0$ b) $0$ c) $0$ d) $+\infty$

**3.** a) $0$ b) $0$ c) $0$ d) $+\infty$ e) $-\infty$ f) $4$

**4.** a) $0$ b) $0$ c) $+\infty$ d) $-\infty$ e) $1$

**5.** a) $+\infty$ b) $1/2$ c) $\nexists$ d) $1/2$ e) $-\infty$

# Aula 12 - 27 de Julho

**Definição 5.1.** *Escrevemos*

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

*e dizemos, "o limite de $f(x)$, quando $x$ tende a $a$, é igual a $L$", se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de $L$ (tão próximos quanto quisermos), tomando $x$ suficientemente próximo de $a$ (por ambos os lados de $a$) mas não igual a $a$.*

**Teorema 5.1.** *(Unicidade do Limite) Se $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$ então $L_1 = L_2$.*

## Propriedades dos Limites

**Proposição 5.1.** *Se $a$, $m$ e $n$ são números reais, então*

$$\lim_{x\to a} mx + n = ma + n.$$

**Observação 5.1.** *Se $p(x)$ é um polinômio, então $\lim_{x\to a} p(x) = p(a)$.*

**Proposição 5.2.** *Se $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$ existem, e $c$ é um número real qualquer, então:*

*a)* $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$;

*b)* $\lim_{x\to a} cf(x) = c \lim_{x\to a} f(x)$;

*c)* $\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$;

*d)* $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, *desde que* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$;

*e)* $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^n, \ \forall n \in \mathbb{Z}_+^*$;

*f)* $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$, *se*

*f1)* $\lim_{x\to a} f(x) > 0$ *e* $n \in \mathbb{Z}$, $n > 2$,

*f2)* $\lim_{x\to a} f(x) \leq 0$ *e $n$ inteiro positivo ímpar;*

*g)* $\lim_{x\to a} \cos[f(x)] = \cos\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$;

*h)* $\lim_{x \to a} sen[f(x)] = sen\left[\lim_{x \to a} f(x)\right].$

**Exemplo 5.6.** *Calcule*

*1)* $\lim_{x \to 2}(x^2 + 3x + 5)$

*2)* $\lim_{x \to 2}(5x^3 - 8)$

*3)* $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 2x + 1}{x^3 + 3x^2 + 1}$

*4)* $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

***<u>Solução</u>***

**Exercícios 5.1.** *Os Exercícios a seguir encontram-se nas páginas* 75 *da seção* 3.6 *do Livro Cálculo A, sexta edição.*

**17.** Mostrar que:

(i) Se $f$ é uma função polinomial, então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ para todo real $a$.

(ii) Se $g$ é uma função racional e $a$ pertence ao domínio de $g$, então $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$.

Calcular os limites nos exercícios 18 a 37 usando as propriedades de Limites.

**18.** $\lim\limits_{x \to 0} (3 - 7x - 5x^2)$.

**19.** $\lim\limits_{x \to 3} (3x^2 - 7x + 2)$.

**20.** $\lim\limits_{x \to -1} (-x^5 + 6x^4 + 2)$.

**21.** $\lim\limits_{x \to 1/2} (2x + 7)$.

**22.** $\lim\limits_{x \to -1} [(x + 4)^3 \cdot (x + 2)^{-1}]$.

**23.** $\lim\limits_{x \to 0} [(x - 2)^{10} \cdot (x + 4)]$.

**24.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x + 4}{3x - 1}$.

**25.** $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t + 3}{t + 2}$.

**26.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$.

**27.** $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t^2 + 5t + 6}{t + 2}$.

**28.** $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{t^2 - 5t + 6}{t - 2}$.

**29.** $\lim\limits_{s \to 1/2} \dfrac{s + 4}{2s}$.

**30.** $\lim\limits_{x \to 4} \sqrt[3]{2x + 3}$.

**31.** $\lim\limits_{x \to 7} (3x + 2)^{2/3}$.

**32.** $\lim\limits_{x \to \sqrt{2}} \dfrac{2x^2 - x}{3x}$.

**33.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x\sqrt{x} - \sqrt{2}}{3x - 4}$.

**34.** $\lim\limits_{x \to \pi/2} [2 \operatorname{sen} x - \cos x + \operatorname{cotg} x]$.

**35.** $\lim\limits_{x \to 4} (e^x + 4x)$.

**36.** $\lim\limits_{x \to -1/3} (2x + 3)^{1/4}$.

**37.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\operatorname{senh} x}{4}$.

## RESPOSTAS

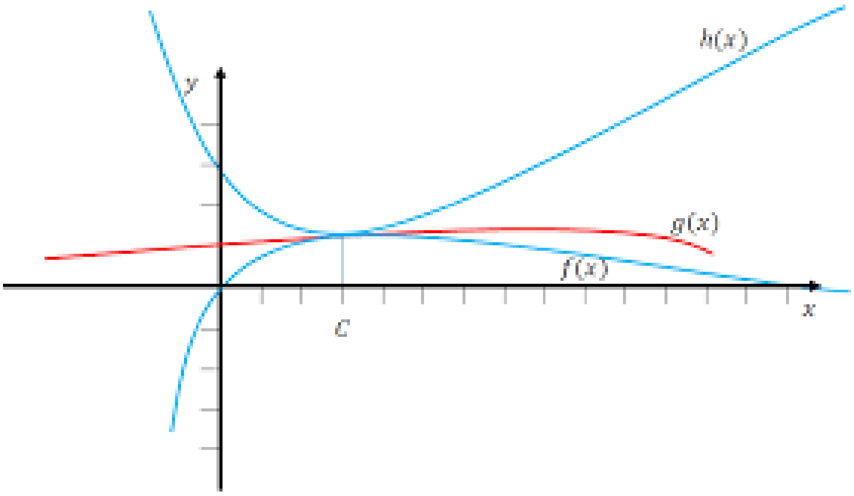
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **18.** 3 | **19.** 8 | **20.** 9 | **21.** 8 | **22.** 27 |
| **23.** 4.096 | **24.** 6/5 | **25.** 5/4 | **26.** 2 | **27.** 5 |
| **28.** −1 | **29.** 9/2 | **30.** $\sqrt[3]{11}$ | **31.** $\sqrt[3]{23^2}$ | **32.** $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$ |
| **33.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | **34.** 2 | **35.** $e^4+16$ | **36.** $\sqrt[4]{7/3}$ | **37.** $\frac{\operatorname{senh} 2}{4}$ |

# Aula 13 - 31 de Julho - Aula prática - Exercícios

# Aula 14 - 03 de agosto

**Teorema 5.2.** *(Teorema do Confronto) Se $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x$ em um intervalo aberto contendo $c$, exceto possivelmente em $x = c$, e se $\lim_{x\to c} f(x) = L = \lim_{x\to c} h(x)$ então*

$$\lim_{x\to c} g(x) = L.$$




**Exemplo 5.7.** *Aplicações do Teorema do Confronto.*

*1) Seja $f$ uma função e suponha que para todo $x$*

$$|f(x)| \leq x^2.$$

*Calcule, caso exista* $\lim_{x \to 0} f(x)$.

***Solução***

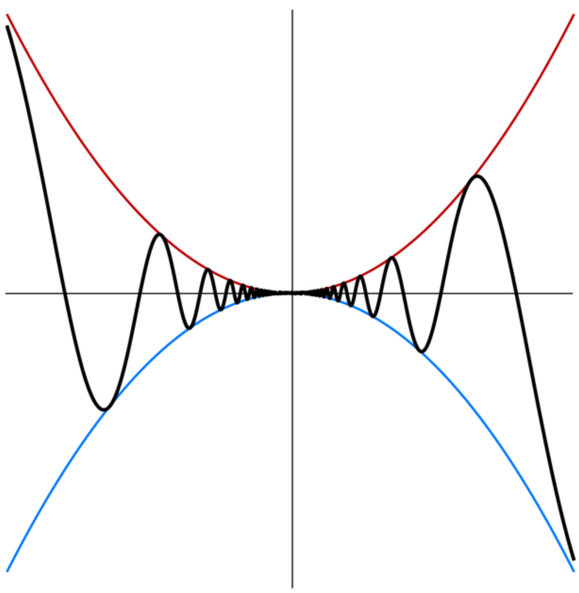
*2) Sejam* $f$ *e* $g$ *duas funções com um mesmo domínio* $A$ *tais que* $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ *e* $|g(x)| \leq M$ *para todo* $x \in A$*, onde* $M > 0$ *é um número real fixo. Prove que*

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = 0.$$

***Solução***

*3) Calcule,caso exista,* $\lim\limits_{x\to 0} x^2 sen\dfrac{1}{x}$.

***Solução***

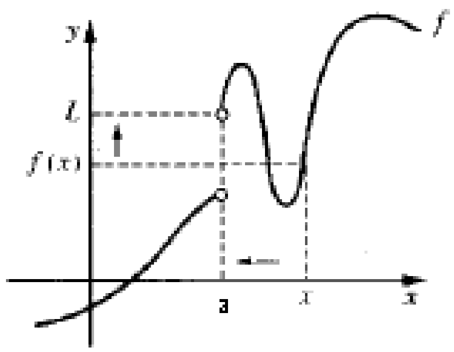


## 5.3 Limites Laterais

**Definição 5.2.** *Escrevemos*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

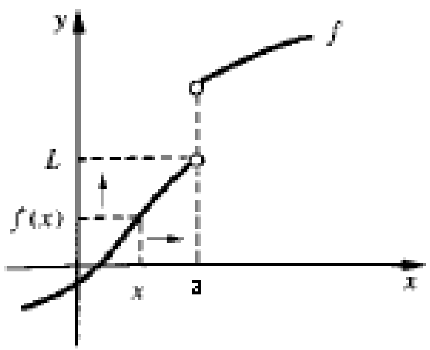
*e dizemos, "o limite de $f(x)$, quando $x$ tende a $a$* ***pela direita****, é igual a $L$", se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de $L$ (tão próximos quanto quisermos), tomando $x$ suficientemente próximo de $a$ com $x > a$.*




**Definição 5.3.** *Escrevemos*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

*e dizemos, "o limite de $f(x)$, quando $x$ tende a $a$* ***pela esquerda****, é igual a $L$", se pudermos tornar os valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de $L$ (tão próximos quanto quisermos), tomando $x$ suficientemente próximo de $a$ com $x < a$.*



**Exemplo 5.8.** *Calcule* $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ *e* $\lim_{x\to 1^-} f(x)$*, sendo* $f(x) = \begin{cases} x^2, & se\ x < 1 \\ 2x, & se\ x > 1 \end{cases}$.

***Solução***

**Exemplo 5.9.** *Calcule* $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$ *e* $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$.

***Solução***

**Teorema 5.3.** *Se $f$ é uma função definida em um intervalo aberto contendo $a$, exceto possivelmente no ponto $a$, então $\lim_{x\to a} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$.*

**Observações**

1) Se $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existirem e forem *diferentes*, então $\lim_{x\to a} f(x)$ **não existirá.**

2) Se existirem números reais $r > 0$ e $b$ tais que $(a, b) \subset D_f$ e $(a - r, a) \cap D_f = \emptyset$, então $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$, desde que o limite lateral à direita exista. Se ocorrer $(b, a) \subset D_f$ e $(a, a + r) \cap D_f = \emptyset$, então $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$, desde que o limite lateral à esquerda exista.

**Exemplo 5.10.** *O* $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ *existe? Por quê?*

***Solução***

**Exemplo 5.11.** *O* $\lim_{x \to 3} \sqrt{x-3}$ *existe? Por quê?*

***Solução***

**Exercícios 5.2.** *Os Exercícios a seguir encontram-se nas páginas* 79 *e* 80 *da seção* 3.8 *do Livro Cálculo A, sexta edição.*

## 3.8 Exercícios

**1.** Seja $f(x) = \begin{cases} x - 1, x \leq 3 \\ 3x - 7, x > 3. \end{cases}$

Calcule:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$. (*b*) $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x)$. (*c*) $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

(*d*) $\lim\limits_{x \to 5^-} f(x)$. (*e*) $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$. (*f*) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.

Esboçar o gráfico de $f(x)$.

**2.** Seja $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x \neq 3 \\ 7 & , \quad x = 3. \end{cases}$

Calcule $\lim\limits_{x \to 3} h(x)$. Esboce o gráfico de $h(x)$.

**3.** Seja $F(x) = |x - 4|$. Calcule os limites indicados se existirem:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 4^+} F(x)$. (*b*) $\lim\limits_{x \to 4^-} F(x)$. (*c*) $\lim\limits_{x \to 4} F(x)$.

Esboce o gráfico de $F(x)$.

**4.** Seja $f(x) = 2 + |5x - 1|$. Calcule se existir:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 1/5^+} f(x)$. (*b*) $\lim\limits_{x \to 1/5^-} f(x)$. (*c*) $\lim\limits_{x \to 1/5} f(x)$.

Esboce o gráfico de $f(x)$.

5. Seja $g(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-3|}{x-3}, & x \neq 3 \\ 0 \quad , & x = 3. \end{cases}$

(*a*) Esboce o gráfico de $g(x)$.

(*b*) Achar, se existirem $\lim\limits_{x \to 3^+} g(x)$, $\lim\limits_{x \to 3^-} g(x)$ e $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$.

6. Seja $h(x) = \begin{cases} x/|x|, & \text{se } x \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Mostrar que $h(x)$ não tem limite no ponto 0.

8. Verifique se $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}$ existe.

9. Seja $f(x) = \begin{cases} 1/x \quad , & x < 0 \\ x^2 \quad , & 0 \leq x < 1 \\ 2 \quad , & x = 1 \\ 2 - x, & x > 1. \end{cases}$

Esboce o gráfico e calcule os limites indicados se existirem:

(*a*) $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.
(*b*) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.
(*c*) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.
(*d*) $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$.
(*e*) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
(*f*) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$.
(*g*) $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$.
(*h*) $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

10. Seja $f(x) = (x^2 - 25)/(x - 5)$.

Calcule os limites indicados se existirem:

(*a*) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.
(*b*) $\lim\limits_{x \to 5^+} f(x)$.
(*c*) $\lim\limits_{x \to -5^-} f(x)$.
(*d*) $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$.
(*e*) $\lim\limits_{x \to -5} f(x)$.

**Seção 3.8**

**1.** a) 2 b) 2 c) 2 d) 8 e) 8 f) 8

**2.** 4 **3.** a) 0 b) 0 c) 0

**4.** a) 2 b) 2 c) 2 **5.** b) 1, $-1$ e $\nexists$ **7.** $\frac{\pi}{2}$ e $\frac{-\pi}{2}$

**9.** a) $-1$ b) 1 c) 0 d) $-\infty$ e) $\nexists$ f) 0 g) 0 h) 0

**10.** a) 5 b) 10 c) 0 d) 10 e) 0

# Aula 15 - 07 de agosto

## 5.4 Cálculo de Limites

**Expressões Indeterminadas:** $\boxed{\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \times \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty}$

### 5.4.1 Indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

Sejam $f$ e $g$ duas funções tais que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. Não se pode afirmar nada, *a priori*, sobre $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.
Vejamos os seguintes exemplos:

**Exemplo 5.12.** *Sejam* $f(x) = x^3$ *e* $g(x) = x^2$.
*Temos,* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ *e* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$.

**Exemplo 5.13.** *Sejam* $f(x) = x^2$ *e* $g(x) = 2x^2$.
*Temos,* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ *e* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$.

**Exemplo 5.14.** *Calcule*

*1)* $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 4}$

*2)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}}{x}$

*3)* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

*4)* $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

**Exercícios 5.3.** *Os Exercícios a seguir encontram-se nas páginas* 83 *e* 84 *da seção* 3.10 *do Livro Cálculo A, sexta edição.*

## 3.10 Exercícios

1. Para cada uma das seguintes funções ache

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}.$$

(*a*) $f(x) = 3x^2$. (*b*) $f(x) = 1/x,\ x \neq 0$. (*c*) $f(x) = 2/3x^2$.

(*d*) $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$. (*e*) $f(x) = \dfrac{1}{x+1},\ x \neq -1$. (*f*) $f(x) = x^3$.

Nos exercícios 4 a 27 calcule os limites.

4. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$.

5. $\lim_{t\to -2} \dfrac{t^3 + 4t^2 + 4t}{(t+2)(t-3)}$.

6. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$.

7. $\lim_{t\to 5/2} \dfrac{2t^2 - 3t - 5}{2t - 5}$.

8. $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2 + (1-a)x - a}{x - a}$.

9. $\lim_{x\to 4} \dfrac{3x^2 - 17x + 20}{4x^2 - 25x + 36}$.

10. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 3x - 4}$.

11. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$.

12. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

13. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$.

14. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^4 - 16}{h}$.

15. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(4+t)^2 - 16}{t}$.

16. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{25+3t} - 5}{t}$.

17. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{a^2+bt} - a}{t}$, $a > 0$.

18. $\lim\limits_{h\to 1} \dfrac{\sqrt{h} - 1}{h - 1}$.

19. $\lim\limits_{h\to -4} \dfrac{\sqrt{2(h^2-8)} + h}{h+4}$.

20. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+h} - 2}{h}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{-x}$.

22. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+a^2} - a}{\sqrt{x^2+b^2} - b}$, $a, b > 0$.

23. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{x - a}$, $a \neq 0$.

24. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$.

25. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2}$.

26. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$.

27. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

## Seção 3.10

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1.** a) 12 | b) $-1/4$ | c) 8/3 | d) 17 | e) $-1/9$ | f) 12 |
| **3.** a) 6 | b) $-9/4$ | c) 2/3 | d) 1/3 | | |
| **4.** $-3/2$ | **5.** 0 | **6.** 1 | **7.** 7/2 | **8.** $a+1$ | |
| **9.** 1 | **10.** $-4/5$ | **11.** $-2$ | **12.** 4 | **13.** 1/8 | |
| **14.** 32 | **15.** 8 | **16.** 3/10 | **17.** $b/2a$ | **18.** 1/2 | |
| **19.** $-1$ | **20.** 1/12 | **21.** $-1/2$ | **22.** $b/a$ | **23.** $1/3\sqrt[3]{a^2}$ | |
| **24.** 4/3 | **25.** 1/9 | **26.** $-1/3$ | **27.** 1 | | |

## Aula 16 - 14 de Agosto - Obs.: Data da prova $P2$ : 04 de setembro - Prazo limite para entrega: 12 de setembro

## 5.5 Limites no Infinito

Vimos anteriormente que $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$.

**Definição 5.4.** *Seja $f$ uma função definida em um intervalo aberto $(a, +\infty)$. Então*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$$

*significa que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de $L$ tomando-se $x$ suficientemente grande.*

**Definição 5.5.** *Seja $f$ uma função definida em um intervalo aberto $(-\infty, b)$. Então*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

*significa que os valores de $f(x)$ podem ficar arbitrariamente próximos de $L$ tomando-se $x$ suficientemente grande em módulo, mas negativo.*

**Exemplo 5.15.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

**Teorema 5.4.** *Seja $k$ uma constante e suponha que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = M$. Então*

*a)* $\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = L + M$

*b)* $\lim_{x\to+\infty} kf(x) = k \lim_{x\to+\infty} f(x) = kL$

*c)* $\lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot g(x) = L \cdot M$

*d)* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L}{M}$, *desde que* $M \neq 0$

**Exemplo 5.16.** *Calcule* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n}$, *onde $n > 0$ é um número natural dado.*

<u>*Solução:*</u>

**Exemplo 5.17.** *Calcule os limites:*

*a)* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^5 + x^4 + 1}{2x^5 + x + 1}$

*b)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2}$

*c)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{x+3}$

*d)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+3x+1}$

*e)* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+3}{3x^2+x+1}$

<u>*Solução:*</u>

# Aula 17 - 17 de Agosto - Obs.: Data da prova $P2$ : 04 de setembro - Prazo limite para entrega: 12 de setembro

## 5.6 Limites Infinitos

**Exemplo 5.18.** *Encontre se existir o* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$.

**Definição 5.6.** *Seja $f$ uma função em ambos os lados de $a$, exceto possivelmente em $a$. Então*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

*significa que podemos fazer os valores de $f(x)$ ficarem arbitrariamente grandes (tão grandes quanto quisermos) tomando $x$ suficientemente próximo de $a$, mas não igual a $a$.*

**Definição 5.7.** *Seja $f$ uma função em ambos os lados de $a$, exceto possivelmente em $a$. Então*

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

*significa que os valores de $f(x)$ podem ser em módulo arbitrariamente grandes, porém negativos, tomando $x$ suficientemente próximo de $a$, mas não igual a $a$.*

**Exemplo 5.19.** $\lim\limits_{x\to 0} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\infty.$

Além dos limites infinitos definidos acima, podemos considerar os limites laterais infinitos e os limites infinitos no infinito. Existem definições para cada um dos seguintes limites:

i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$

ii) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

iii) $\lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$

iv) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$

v) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

vi) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

vii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

viii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

**Exemplo 5.20.** *Calcule* $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x}$.

**Teorema 5.5.**

$$a)\ \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = +\infty \end{cases}$$

$$b)\ \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = L,\ L \ real \\ \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = +\infty,\ se\ L > 0 \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = -\infty,\ se\ L < 0 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = +\infty$$

$$d)\ \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = L,\ L \ real \\ \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = +\infty$$

$$e)\ \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = L,\ L \ real \\ \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty$$

$$f)\ \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to +\infty} [f(x) + g(x)] = -\infty \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = +\infty \end{cases}$$

*g)* $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L, \ L \ real \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x) = -\infty, \ se \ L > 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x) = +\infty, \ se \ L < 0 \end{cases}$

**Observação 5.2.** *O teorema anterior continua válido se substituirmos "$x \to +\infty$" por "$x \to -\infty$", "$x \to a^+$", "$x \to a^-$", "$x \to a$".*

Em resumo temos

| | |
|---|---|
| *a)* | $+\infty + (+\infty) = +\infty$ <br> $+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$ |
| *b)* | $L \cdot (+\infty) = +\infty, \text{ se } L > 0$ <br> $L \cdot (+\infty) = -\infty, \text{ se } L < 0$ |
| *c)* | $+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$ |
| *d)* | $L + (+\infty) = +\infty$ |
| *e)* | $L + (-\infty) = -\infty$ |
| *f)* | $-\infty + (-\infty) = -\infty$ <br> $-\infty \cdot (-\infty) = +\infty$ |
| *g)* | $L \cdot (-\infty) = -\infty, \text{ se } L > 0$ <br> $L \cdot (-\infty) = +\infty, \text{ se } L < 0$ |

**Exemplo 5.21.** *Calcule*

*1)* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2$

*2)* $\lim\limits_{x\to+\infty} [3x^2 - 5x + 2]$

*3)* $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 + 3x - 1}{2x^2 + x + 1}$

**Exemplo 5.22.** *Calcule*

*1)* $\lim_{x \to +\infty} 3x^5 - 4x^3 + 1$

*2)* $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 3}{x + 2}$

*3)* $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5 - x^3}{8x + 2}$

*4)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^4 + 3x^2 + 2x + 1}{4 - x^4}$

**Exercícios 5.4.** *Os Exercícios a seguir encontram-se nas páginas* 93 *a* 95 *da seção* 3.13 *do Livro Cálculo A, sexta edição.*

## 3.13 Exercícios

**1.** Se $f(x) = \dfrac{3x + |x|}{7x - 5|x|}$, calcule:

(*a*) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. (*b*) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

**2.** Se $f(x) = \dfrac{1}{(x + 2)^2}$, calcule:

(*a*) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$. (*b*) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Nos exercícios 3 a 40 calcule os limites.

3. $\lim_{x \to +\infty} (3x^3 + 4x^2 - 1)$.

4. $\lim_{x \to +\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}\right)$.

5. $\lim_{t \to +\infty} \frac{t + 1}{t^2 + 1}$.

6. $\lim_{t \to -\infty} \frac{t + 1}{t^2 + 1}$.

7. $\lim_{t \to +\infty} \frac{t^2 - 2t + 3}{2t^2 + 5t - 3}$.

8. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + 2}{-x^2 + 7}$.

9. $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^5 - x^2 + 7}{2 - x^2}$.

10. $\lim_{x \to -\infty} \frac{-5x^3 + 2}{7x^3 + 3}$.

11. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{x}$.

12. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x\sqrt{x} + 3x - 10}{x^3}$.

13. $\lim_{t \to +\infty} \frac{t^2 - 1}{t - 4}$.

14. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x(2x - 7\cos x)}{3x^2 - 5\operatorname{sen} x + 1}$.

15. $\lim_{v \to +\infty} \frac{v\sqrt{v} - 1}{3v - 1}$.

16. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$.

17. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$.

18. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$.

19. $\lim_{x \to +\infty} x(\sqrt{x^2 - 1} - x)$.

20. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{3x^2 + 2x + 1} - \sqrt{2}x)$.

21. $\lim_{x \to +\infty} \frac{10x^2 - 3x + 4}{3x^2 - 1}$.

22. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^2 - 1}$.

23. $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x^3 - x^2 + x - 1}{x^4 + x^3 - x + 1}$.

24. $\lim_{s \to +\infty} \frac{8 - s}{\sqrt{s^2 + 7}}$.

25. $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 7}}{x + 3}$.

26. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{16x^4 + 15x^3 - 2x + 1} - 2x)$.

27. $\lim_{s \to +\infty} \sqrt[3]{\frac{3s^7 - 4s^5}{2s^7 + 1}}$.

28. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{2x^2 - 7}}{x + 3}$.

29. $\lim_{y \to +\infty} \frac{3 - y}{\sqrt{5 + 4y^2}}$.

30. $\lim_{y \to -\infty} \frac{3 - y}{\sqrt{5 + 4y^2}}$.

31. $\lim_{x\to 3^+} \frac{x}{x-3}$.

32. $\lim_{x\to 3^-} \frac{x}{x-3}$.

33. $\lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x^2-4}$.

34. $\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x^2-4}$.

35. $\lim_{y\to 6^+} \frac{y+6}{y^2-36}$.

36. $\lim_{y\to 6^-} \frac{y+6}{y^2-36}$.

37. $\lim_{x\to 4^+} \frac{3-x}{x^2-2x-8}$.

38. $\lim_{x\to 4^-} \frac{3-x}{x^2-2x-8}$.

39. $\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{|x-3|}$.

40. $\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{|x-3|}$.

## Seção 3.13

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1. a) 2 | b) 1/6 | 2. a) $+\infty$ | b) 0 | |
| 3. $+\infty$ | 4. 2 | 5. 0 | 6. 0 | 7. 1/2 |
| 8. $-\infty$ | 9. $+\infty$ | 10. $-5/7$ | 11. $+\infty$ | 12. 0 |
| 13. $+\infty$ | 14. 2/3 | 15. $+\infty$ | 16. 1 | 17. $-1$ |
| 18. 0 | 19. $-1/2$ | 20. $+\infty$ | 21. 10/3 | 22. $-\infty$ |
| 23. 0 | 24. $-1$ | 25. $-\sqrt{2}$ | 26. $+\infty$ | 27. $\sqrt[3]{3/2}$ |
| 28. $\sqrt{2}$ | 29. $-1/2$ | 30. 1/2 | 31. $+\infty$ | 32. $-\infty$ |
| 33. $+\infty$ | 34. $-\infty$ | 35. $+\infty$ | 36. $-\infty$ | 37. $-\infty$ |
| 38. $+\infty$ | 39. $+\infty$ | 40. $+\infty$ | | |

# Aula 18 - 20 de Agosto - Obs.: Data da prova $P2$ : 04 de setembro - Prazo limite para entrega: 12 de setembro

## 5.7 Limites Fundamentais

**Proposição 5.3.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{senx}{x} = 1$

| $x \neq 0$ | $f(x)$ |
|---:|---:|
| $\pm 1$ | 0.8414 |
| $\pm 0.5$ | 0.9588 |
| $\pm 0.2$ | 0.9933 |
| $\pm 0.1$ | 0.9983 |
| $\pm 0.01$ | 0.99998 |
| $\pm 0.001$ | 0.99999 |

**Exemplo 5.23.** *Calcule*

*1)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen5x}{x}$

*2)* $\lim_{x \to 0} \frac{sen4x}{sen3x}$

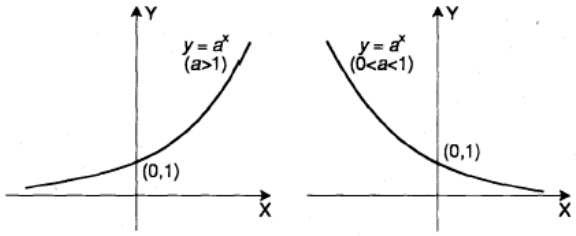
*3)* $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

**Definição 5.8.** *(Função Exponencial) Chamamos de função exponencial de base $a$, a função $f$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que associa a cada $x$ real o número real $a^x$, sendo $a$ um número real, $0 < a \neq 1$, isto é,*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = a^x.$$

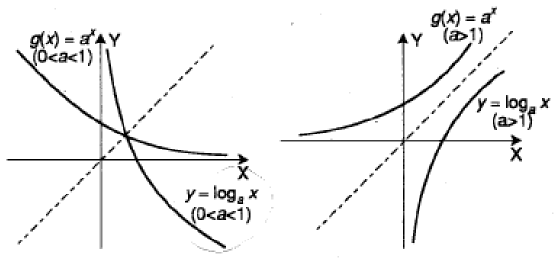
$D_f = \mathbb{R}$ *e* $Im_f = (0, +\infty)$

**Definição 5.9.** *(Função Logarítmica) Dado um número real $a$ $(0 < a \neq 1)$, chamamos de função logarítmica de base $a$ a função de $\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ que associa a cada $x$ o número real $\log_a x$,*




*isto é,*

$$f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = \log_a x.$$




**Observação 5.3.**

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x; \;\; 0 < a \neq 1$$

**Proposição 5.4.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ *onde* $e$ *é o número irracional neperiano cujo valor aproximado é* $2,71828182459\cdots$.

Façamos uma tabela para a função $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

| $x > 0$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $10^1$ | 2.59374 |
| $10^2$ | 2.70481 |
| $10^3$ | 2.71692 |
| $10^4$ | 2.71815 |

| $x < 0$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $-10^1$ | 2.86797 |
| $-10^2$ | 2.73200 |
| $-10^3$ | 2.71964 |
| $-10^4$ | 2.71842 |

**Proposição 5.5.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$, $(a > 0, a \neq 1)$.

**Exercícios 5.5.** *Os Exercícios a seguir encontram-se nas páginas* 104 *e* 105 *da seção* 3.16 *do Livro Um Cálculo A, sexta edição.*

Nos exercícios 5 a 27, calcule os limites aplicando os limites fundamentais.

**5.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 9x}{x}$.

**6.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 4x}{3x}$.

**7.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } 10x}{\text{sen } 7x}$.

**8.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } ax}{\text{sen } bx}, b \neq 0$.

**9.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } ax}{x}$.

**10.** $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\text{tg}^3 \frac{x+1}{4}}{(x+1)^3}$.

**11.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x}$.

**12.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

**13.** $\lim\limits_{x \to 3} (x - 3) \cdot \cos ec\, \pi x$.

**14.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{6x - \text{sen } 2x}{2x + 3 \text{ sen } 4x}$.

**15.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - \cos 3x}{x^2}$.

**16.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - 2\cos x + \cos 2x}{x^2}$.

**17.** $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$.

**18.** $\lim\limits_{x \to \pi/2} (1 + 1/\text{tg } x)^{\text{tg } x}$.

**19.** $\lim\limits_{x \to 3\pi/2} (1 + \cos x)^{1/\cos x}$.

**20.** $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{10}{x}\right)^x$.

**21.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{10^{x-2} - 1}{x - 2}$.

**22.** $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{4^{\frac{x+3}{5}} - 1}{x + 3}$.

**23.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5^x - 25}{x - 2}$.

**24.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3^{\frac{x-1}{4}} - 1}{\text{sen } [5(x-1)]}$.

**25.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}$.

**26.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{tg } h\, ax}{x}$.

**27.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{ax} - e^{bx}}{\text{sen } ax - \text{sen } bx}$.

## Seção 3.16

**5.** 9 **6.** 4/3 **7.** 10/7 **8.** $a/b$ **9.** $a$

**10.** 1/64 **11.** 0 **12.** 1/2 **13.** $-1/\pi$

**14.** 2/7 **15.** 5/2 **16.** −1 **17.** $e$ **18.** $e$ **19.** $e$ **20.** $e^{10}$

**21.** ln 10 **22.** 2/5 ln 2 **23.** 25 ln 5 **24.** $\frac{\ln 3}{20}$ 25. $b-a$

**26.** $a$ **27.** 1 **28.** a) e b) $e^2$ c) 1/e

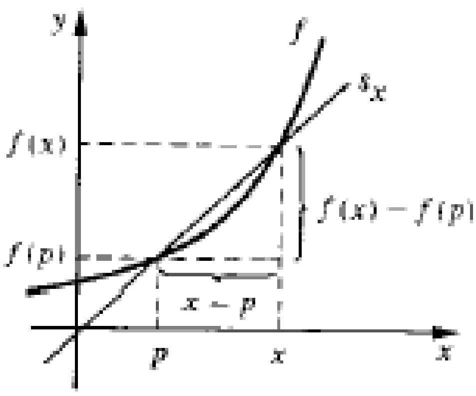
# Capítulo 6

# A Derivada

## Aula 20 - 28 de Agosto - Obs.: Data da prova $P2$ : 04 de setembro - Prazo limite para entrega: 12 de setembro

### 6.1 Reta Tangente

Consideremos o problema de definir a reta tangente ao gráfico de $f$ no ponto de coordenadas $(p, f(p))$. Evidentemente, tal reta deve passar pelo ponto $(p, f(p))$. Assim, a reta tangente fica determinada se dissermos qual deve ser o seu coeficiente angular.




Coeficiente angular de $s_x = \dfrac{f(x) - f(p)}{x - p}$.

Quando $x \to p$, $s_x \to f^{'}(p)$, onde

$$f^{'}(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

**Observação 6.1.** *$f^{'}(p)$ é apenas uma notação para indicar o limite acima. Assim, à medida que $x$ se aproxima de $p$, a reta $s_x$ se aproxima da reta $T$ de equação*

$$y - f(p) = f^{'}(p)(x - p).$$

## 6.2 Derivada de uma função

**Definição 6.1.** *Seja $f$ uma função e $p$ um ponto do seu domínio. O limite*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

*quando existe e é finito, denomina-se derivada de $f$ em $p$ e indica-se por $f^{'}(p)$(leia: $f$ linha de $p$). Assim*

$$f^{'}(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

*Se $f$ admite derivada em $p$, então diremos que $f$ é derivável ou diferenciável em $p$.*

**Exemplo 6.1.** *Segue das propriedades de limites que*

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}.$$

*Assim*

$$f^{'}(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \quad ou \quad f^{'}(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}.$$

**Exemplo 6.2.** *Seja $f(x) = x^2$. Calcule*

*a)* $f^{'}(1)$

*b)* $f'(x)$

*c)* $f'(-3)$

*d) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de* $f$ *em* $(1, f(1))$

*e) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f$ em $(-1, f(-1))$*

**Exercícios 6.1.**

*1) Seja $f(x) = c$ uma função constante. Mostre que $f'(x) = 0$ para todo $x$.*

*2) Seja $f(x) = x$. Prove que $f'(x) = 1$, para todo $x$.*

*3) Seja* $f(x) = \begin{cases} x^2 sen\dfrac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0. \end{cases}$ *Calcule, caso exista,* $f'(0)$.

*4) Mostre que* $f(x) = |x|$ *não é derivável em* $p = 0$.

**Exemplo 6.3.** *Recorde que*

*1)* $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + +a^{n-2}x + a^{n-1})$

*2)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$

## 6.3 Derivadas de $x^n$ e $\sqrt[n]{x}$

**Teorema 6.1.** *Seja $n \neq 0$ um natural. São válidas as fórmulas de derivação*

*a)* $f(x) = x^n \Rightarrow f^{'}(x) = nx^{n-1}$.

*b)* $f(x) = x^{-n} \Rightarrow f^{'}(x) = -nx^{-n-1}, x \neq 0$

*c)* $f(x) = x^{\frac{1}{n}} \Rightarrow f^{'}(x) = \dfrac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$, *onde* $x > 0$ *se* $n$ *for par e* $x \neq 0$ *se* $n$ *for ímpar* $(n \geq 2)$*.*

**Exercícios 6.2.** *Calcule as derivadas de* $f$ *nos seguintes casos*

*a)* $f(x) = x^4$

*b)* $f(x) = x^3$

*c)* $f(x) = x^{-3}$

*d)* $f(x) = \sqrt{x}$

# Aula 21 - 14 de Setembro

## 6.4 Derivadas das funções Seno e Cosseno

**Teorema 6.2.** *São válidas as fórmulas de derivação*

*a)* $f(x) = senx \Rightarrow f^{'}(x) = \cos x$

*b)* $f(x) = \cos x \Rightarrow f^{'}(x) = -senx$

**Exercícios 6.3.**

*1) Seja* $f(x) = sen x$. *Calcule*

$a) f'(x) \quad b) f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

*2) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de* $f(x) = sen x$ *no ponto de abscissa* 0.

*3) Seja* $f(x) = \cos x$. *Calcule*

$a) f'(x) \quad b) f'(0) \quad c) f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad d) f'\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

## 6.5 Derivadas de $e^x$ e $\ln x$.

**Teorema 6.3.** *São válidas as fórmulas de derivação*

*a)* $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

*b)* $g(x) = \ln x \Rightarrow g^{'}(x) = \dfrac{1}{x}, \; x > 0.$

**Exercícios 6.4.**

*1) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de* $f(x) = e^x$ *no ponto de abscissa* $0$.

*2) Seja* $f(x) = a^x$, *onde* $a > 0$ *e* $a \neq 1$ *é um número real dado. Mostre que* $f^{'}(x) = a^x \ln a$.

*3) Calcule* $f^{'}(x)$.

$a)f(x) = 2^x \quad b)f(x) = 5^x \quad c)f(x) = \pi^x \quad d)f(x) = e^x$

*4) Seja* $g(x) = \log_a x$*, onde* $a > 0$ *e* $a \neq 1$ *é uma constante. Mostre que* $g^{'}(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$.

*5) Calcule* $g^{'}(x)$

$a) g(x) = \log_3 x \quad b) g(x) = \log_5 x \quad c) g(x) = \log_\pi x \quad d) g(x) = \ln x$

## 6.6 Regras de derivação

**Teorema 6.4.** *Sejam $f$ e $g$ deriváveis em $p$ e seja $k$ uma constante. Então as funções $f+g$, $kf$ e $f \cdot g$ são deriváveis em $p$ e têm-se*

*a)* $(f+g)^{'}(p) = f^{'}(p) + g^{'}(p)$

*b)* $(kf)^{'}(p) = kf^{'}(p)$

*c)* $(f \cdot g)^{'}(p) = f^{'}(p)g(p) + f(p)g^{'}(p)$

**Teorema 6.5.** *Se $f$ e $g$ forem deriváveis em $p$ e se $g(p) \neq 0$, então $\dfrac{f}{g}$ é derivável em $p$ e*

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{'}(p) = \frac{f^{'}(p)g(p) - f(p)g^{'}(p)}{[g(p)]^2}.$$

**Exercícios 6.5.** *Mostre que*

*a)* $f(x) = tgx \Rightarrow f^{'}(x) = \sec^2 x$

*b)* $f(x) = \sec x \Rightarrow f^{'}(x) = \sec x \cdot tgx$

*c)* $f(x) = cotgx \Rightarrow f^{'}(x) = -cosec^2 x$

$d)\ f(x) = cosecx \Rightarrow f^{'}(x) = -cosecx \cdot cotgx$

# Aula 22 - 18 de Setembro

## 6.7 Função derivada e derivadas de ordem superior

Sejam $f$ uma função e $A$ o conjunto dos $x$ para os quais $f^{'}(x)$ existe. A função $f^{'} : A \to \mathbb{R}$ é chamada de função derivada ou, simplesmente, derivada de $f$. Podemos dizer também que $f^{'}$ é a derivada de primeira ordem de $f$. Podemos indicar, $f^{'}(x) = f^{(1)}(x)$.
A derivada de $f^{'}$ denomina-se derivada de $2^{a.}$ ordem de $f$ e é indicada por $f^{''}$ ou $f^{(2)}$. Assim

$$f^{(2)}(x) = f^{''}(x) = (f^{'})^{'}(x).$$

De modo análogo, define-se as derivadas de ordens superiores a 2 de $f$.

**Exemplo 6.4.** *Seja $f(x) = 3x^3 - 6x + 1$. Determine $f^{'}$, $f^{''}$ e $f^{'''}$.*

**Exemplo 6.5.** *Seja $f(x) = sen x$.*

*a) Determine sucessivamente as deridas de $f$.*

*b) Estabeleça uma fórmula para a derivada de ordem $n$ de $f$.*

## 4.12 Exercícios

Nos exercícios 1 a 22 encontrar a derivada das funções dadas.

**1.** $f(r) = \pi r^2$

**2.** $f(x) = 3x^2 + 6x - 10$

**3.** $f(w) = aw^2 + b$

**4.** $f(x) = 14 - \frac{1}{2}x^{-3}$

**5.** $f(x) = (2x + 1)(3x^2 + 6)$

**6.** $f(x) = (7x - 1)(x + 4)$

**7.** $f(x) = (3x^5 - 1)(2 - x^4)$

**8.** $f(x) = \frac{2}{3}(5x - 3)^{-1}(5x + 3)$

**9.** $f(x) = (x - 1)(x + 1)$

**10.** $f(s) = (s^2 - 1)(3s - 1)(5s^3 + 2s)$

**11.** $f(x) = 7(ax^2 + bx + c)$

**12.** $f(u) = (4u^2 - a)(a - 2u)$

**13.** $f(x) = \dfrac{2x + 4}{3x - 1}$

**14.** $f(t) = \dfrac{t - 1}{t + 1}$

**15.** $f(t) = \dfrac{3t^2 + 5t - 1}{t - 1}$

**16.** $f(t) = \dfrac{2 - t^2}{t - 2}$

**17.** $f(x) = \dfrac{4 - x}{5 - x^2}$

**18.** $f(x) = \dfrac{5x + 7}{2x - 2}$

**19.** $f(x) = \dfrac{x + 1}{x + 2}(3x^2 + 6x)$

**20.** $f(t) = \dfrac{(t - a)^2}{t - b}$

**21.** $f(x) = \dfrac{3}{x^4} + \dfrac{5}{x^5}$

**22.** $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{2}{x^6}$

**23.** Seja $p(x) = (x - a)(x - b)$, sendo $a$ e $b$ constantes. Mostrar que se $a \neq b$, então $p(a) = p(b) = 0$, mas $p'(a) \neq 0$ e $p'(b) \neq 0$.

**24.** Dadas as funções $f(x) = x^2 + Ax$ e $g(x) = Bx$, determinar $A$ e $B$ de tal forma que

$$\begin{cases} f'(x) + g'(x) = 1 + 2x \\ f(x) - g(x) = x^2 \end{cases}$$

**25.** Dada a função $f(t) = 3t^3 - 4t + 1$, encontrar $f(0) - tf'(0)$.

**26.** Encontrar a equação da reta tangente à curva $y = \dfrac{2x + 1}{3x - 4}$ no ponto de abscissa $x = -1$. Usando uma ferramenta gráfica, esboçar o gráfico da função e da reta tangente.

**27.** Encontrar a equação da reta normal à curva $y = (3x^2 - 4x)^2$ no ponto de abscissa $x = 2$.

**28.** Encontrar as equações das retas tangentes à curva $y = \dfrac{x - 1}{x + 1}$ que sejam paralelas à reta $y = x$. Usando uma ferramenta gráfica, esboçar o gráfico da curva, da reta dada e das tangentes encontradas.

**29.** Em que pontos o gráfico da função $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x$ tem tangente horizontal? Esboçar o gráfico e analisar o resultado obtido.

**30.** Seja $y = ax^2 + bx$. Encontrar os valores de $a$ e $b$, sabendo que a tangente à curva no ponto $(1, 5)$ tem inclinação $m = 8$.

## Seção 4.12

1. $2\pi r$

2. $6x + 6$

3. $2\,a\,w$

4. $\dfrac{3}{2x^4}$

5. $18x^2 + 6x + 12$

6. $14x + 27$

7. $-27x^8 + 30x^4 + 4x^3$

8. $\dfrac{-20}{(5x-3)^2}$

9. $2x$

10. $(s^2-1)(3s-1)(15s^2+2) + 3(s^2-1)(5s^3+2s) + 2s(3s-1)(5s^3+2s)$

11. $7(2a\,x + b)$

12. $-24u^2 + 8au + 2a$

13. $\dfrac{-14}{(3x-1)^2}$

14. $\dfrac{2}{(t+1)^2}$

15. $\dfrac{3t^2-6t-4}{(t-1)^2}$

16. $\dfrac{-t^2+4t-2}{t^2-4t+4}$

17. $\dfrac{-x^2+8x-5}{(5-x^2)^2}$

18. $\dfrac{-24}{(2x-2)^2}$

19. $\dfrac{6x^3+27x^2+36+12}{(x+2)^2}$

20. $\dfrac{t^2-2bt-a^2+2ab}{(t-b)^2}$

21. $\dfrac{-12}{x^5} - \dfrac{25}{x^6}$

22. $2x^3 - \dfrac{12}{x^7}$

24. $A = B = 1/2$

25. $4t + 1$

26. $11x + 49y + 4 = 0$

27. $x + 64y - 1026 = 0$

28. $x - y - 2\sqrt{2} + 2 = 0;\ x - y + 2 + 2\sqrt{2} = 0$

29. $(2, 2/3); (1, 5/6)$

30. $a = 3;\ b = 2$

**Exercícios 6.6.** *Determine a derivada de ordem n de:*

*a)* $f(x) = e^x$

*b)* $f(x) = \cos x$

*c)* $f(x) = \ln x$

# Aula 23 - 21 de Setembro

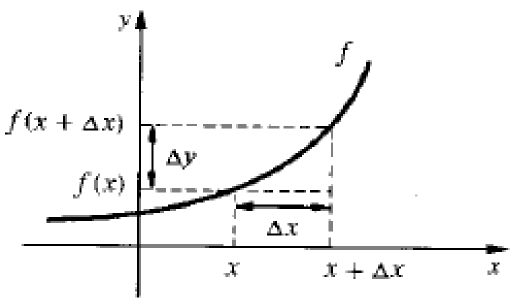
## 6.8 Notações para derivada

A notação (devido a Leibniz) $\dfrac{dy}{dx}$ é usada para indicar a derivada de $f$ em $x$, isto é, $\dfrac{dy}{dx} = f^{'}(x)$. Portanto

$$\frac{dy}{dx} = f^{'}(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x}$$

onde $\triangle x$ desempenha aqui o mesmo papel do $h$ em $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Fazendo $\triangle y = f(x+\triangle x) - f(x)$ resulta

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x}.$$




**Observação 6.2.**

1) $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = f^{'}(x_0)$.

2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d}{dx}\left(f^{'}(x)\right) = f^{''}(x)$.

**Exemplo 6.6.**

1) *Seja* $y = 5x^3 + x^2$. *Calcule* $\dfrac{dy}{dx}$.

*2) Seja* $x = t^2 sent$. *Calcule*

*a)* $\dfrac{dx}{dt}$

*b)* $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=\pi}$

*3) Sejam* $u = u(x)$ *e* $v = v(x)$ *funçõs deriváveis em um mesmo conjunto* $A$. *Segue que*

*a)* $y = u + v \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{d}{dx}[u + v] = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

*b)* $y = uv \Rightarrow$

*c)* $y = \dfrac{u}{v} \Rightarrow$

*4)*

*a) Seja* $y = u^2$ *onde* $u = u(x)$ *é uma função derivável. Verifique que*

$$\frac{dy}{dx} = 2u\frac{du}{dx}.$$

*b) Calcule* $\dfrac{dy}{dx}$*, onde* $y = (x^2+3x)^2$.

**Observação 6.3.** *Vimos no exemplo anterior, que sendo* $y = u^2$ *com* $u = u(x)$ *derivável, resulta*

$$\frac{dy}{dx} = 2u\frac{du}{dx}.$$

*Por outro lado,* $y = u^2 \Rightarrow \dfrac{dy}{du} = 2u$*. Assim*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \tag{6.1}$$

*onde* $\dfrac{dy}{du}$ *deve ser calculado em relaçào a* $u$.

*Mais adiante, veremos que esta regra (6.1) é conhecida como "regra da cadeia" e é válida sempre* $y = y(u)$ *e* $u = u(x)$ *forem deriváveis.*

**Exemplo 6.7.**

*1) Seja* $y = 3x^3 - 6x + 2$*. Calcule*

*a)* $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

*b)* $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$

*2) Seja* $y = t^3x$ *onde* $x = x(t)$ *é uma função derivável até* $2^{a.}$ *ordem. Verifique que*

*a)* $\dfrac{dy}{dx} = 3t^2x + t^3\dfrac{dx}{dt}$

*b)* $\dfrac{d^2y}{dt^2} = 6tx + 6t^2\dfrac{dx}{dt} + t^3\dfrac{d^2x}{dt^2}$

## 6.9 Derivada da função composta

Sejam $f$ e $g$ funções tais que $Im_g \subset D_f$. Podemos então considerar a composta $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Nosso objetivo é obter uma regra para calcular a derivada de uma função composta.

**Exemplo 6.8.** *(Função composta). A função $y = (x^2 + 5x + 2)^7$ pode ser vista como a composta de $y = u^7 = f(u)$ e $u = x^2 + 5x + 2 = g(x)$, isto é,*

$$f(u) = u^7 \Rightarrow f(g(x)) = (g(x))^7 = (x^2 + 5x + 2)^7.$$

A seguir apresentaremos a regra da cadeia que nos dá a derivada de uma função composta.

**Teorema 6.6.** *(Regra da cadeia). Se $y = f(u)$, $u = g(x)$ e as derivadas $\dfrac{dy}{du}$ e $\dfrac{du}{dx}$ existem, então a função composta $y = f(g(x))$ tem derivada que é dada por*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \quad ou \quad y'(x) = [f(g(x))]' = f'(g(x)).g'(x) = f'(u).g'(x).$$

**Exercícios 6.7.**

*1) Dada a função $y = (x^2 + 5x + 2)^7$, determine $\dfrac{dy}{dx}$.*

*2) Dada a função $y = \left(\dfrac{3x + 2}{2x + 1}\right)^5$, determine $y'$*

*3) Calcule a derivada*

*a)* $y = e^{3x}$

*b)* $y = sent^2$

*4) Calcule* $f'(x)$*, sendo*

*a)* $f(x) = (3x^2 + 1)^3$

*b)* $f(x) = \cos 3x$

*5) Calcule* $\dfrac{dy}{dx}$*, sendo* $y = \ln(x^2 + 3)$.

*6) Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função derivável e seja* $g(x) = f(\cos x)$. *Calcule* $g^{'}\left(\frac{\pi}{3}\right)$ *supondo* $f^{'}\left(\frac{1}{2}\right) = 4$.

**Exemplo 6.9.** *(Regras de derivação). Suponha g derivável. Verifique que*

*a)* $[e^{g(x)}]^{'} = e^{g(x)}g^{'}(x)$

*b)* $[\ln g(x)]^{'} = \dfrac{g^{'}(x)}{g(x)}$

*c)* $[\cos g(x)]^{'} = -g^{'}(x) seng(x)$

*d)* $[seng(x)]^{'} = g^{'}(x)\cos g(x)$

**Exemplo 6.10.** *(Regras de derivação). Suponha $g$ derivável e $n \neq 0$ inteiro. Verifique que*

*a)* $[(g(x))^n]' = n(g(x))^{n-1}.g'(x)$

*b)* $[(g(x))^{\frac{1}{n}}]' = \frac{1}{n}(g(x))^{\frac{1}{n}-1}.g'(x)$; $n \geq 2$

**Exercícios 6.8.**

*1) Determine a derivada.*

*a)* $y = sen4x$

*b)* $f(x) = e^{3x}$

*c)* $f(x) = \cos 8x$

*d)* $y = sent^3$

*e)* $x = e^{sent}$

*f)* $f(x) = \cos e^x$

*g)* $y = (senx + \cos x)^3$

*h)* $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$

*i)* $x = \ln(t^2 + 3t + 9)$

*j)* $y = sen(\cos x)$

*2) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável e seja $g(t) = f(t^2 + 1)$. Supondo $f'(2) = 5$, calcule $g'(1)$.*

*3) Derive.*

*a)* $y = xe^{3x}$

*b)* $f(x) = e^{-x}senx$

*c)* $f(x) = e^{-x^2} + \ln(2x + 1)$

*d)* $g(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$

*e)* $f(x) = (e^{-x} + e^{x^2})^3$

*f)* $g(x) = e^{x^2} \ln(1 + \sqrt{x})$

*g)* $y = \sqrt{x^2 + e^{\sqrt{x}}}$

*h)* $y = [\ln(x^2 + 1)]^3$

*i)* $y = \cos^3 x^3$

*j)* $f(t) = \dfrac{te^{2t}}{\ln(3t+1)}$

*4) Calcule a derivada segunda.*

*a)* $x = sen\omega t$, $\omega$ *constante*

*b)* $f(x) = \dfrac{sen3x}{e^x}$

*c)* $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$

*d)* $y = sen(\cos x)$

*5) Seja* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável e seja* $f$ *dada por* $f(x) = xg(x^2)$. *Calcule* $f^{'}(1)$ *supondo* $g(1) = 4$ *e* $g^{'}(1) = 2$.

*6) Seja* $y = xe^{2x}$. *Verifique que* $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$.

*7) Seja* $y = e^{\alpha x}$, *onde* $\alpha$ *é uma raiz da equação* $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$, *com* $a$ *e* $b$ *constantes. Verifique que*

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

*8) Seja* $g$ *uma funçào derivável. Verifique que*

*a)* $[tg(g(x))]^{'} = \sec^2 g(x) \cdot g^{'}(x)$

*b)* $[\sec(g(x))]^{'} = \sec(g(x))tg(g(x)) \cdot g^{'}(x)$

*c)* $[cotg(g(x))]^{'} = -cosec^2(g(x)) \cdot g^{'}(x)$

*d)* $[cosec(g(x))]^{'} = -cosec(g(x))cotg(g(x)) \cdot g^{'}(x)$

*9) Derive.*

*a)* $y = tg(3x)$

*b)* $y = cotg(x^2)$

*c)* $y = \sec(x^3)$

*d)* $y = cosec(2x)$

*e)* $y = \ln(\sec(3x) + tg(3x))$

*f)* $y = (x^2 + cotg(x^2))^3$

*g)* $y = \sec(4x)$

*h)* $y = \sec(tg(x))$

*i)* $y = e^{tg(x^2)}$

*j)* $y = x^3 tg(4x)$

*l)* $y = e^{-x}\sec(x^2)$

*m)* $y = x^2 tg(2x)$

## 6.10 Tabela de Derivadas

Sejam $f$ e $g$ funções deriváveis.

1. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$
2. $[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
3. $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
4. $[(g(x))^n]' = n(g(x))^{n-1}.g'(x)$
5. $[(g(x))^{\frac{1}{n}}]' = \frac{1}{n}(g(x))^{\frac{1}{n}-1}.g'(x)$; $n \geq 2$
6. $[e^{g(x)}]' = e^{g(x)}g'(x)$
7. $[\ln g(x)]' = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$
8. $\left[f(x)^{g(x)}\right]' = f(x)^{g(x)}[g(x)\ln f(x)]'$
9. $[\cos g(x)]' = -g'(x) \cdot \text{sen} g(x)$
10. $[\text{sen} g(x)]' = g'(x) \cdot \cos g(x)$
11. $[\text{tg}\, g(x)]' = g'(x) \cdot \sec^2 g(x)$
12. $[\text{cotg}\, g(x)]' = -g'(x) \cdot \text{cosec}^2 g(x)$
13. $[\sec\, g(x)]' = g'(x) \cdot \sec g(x) \cdot \text{tg}\, g(x)$
14. $[\text{cosec}\, g(x)]' = -g'(x) \cdot \text{cosec} g(x) \cdot \text{cotg}\, g(x)$

# Capítulo 7

# Aplicações da Derivada

## Aula 24 - 28 de Setembro

## 7.1 Estudo de Variação das Funções

**Definição 7.1** (Continuidade). *Dizemos que uma função $f$ é contínua em um ponto $p$ se as seguintes condições forem satisfeitas:*

*a)* *$f$ é definida no ponto $p$;*

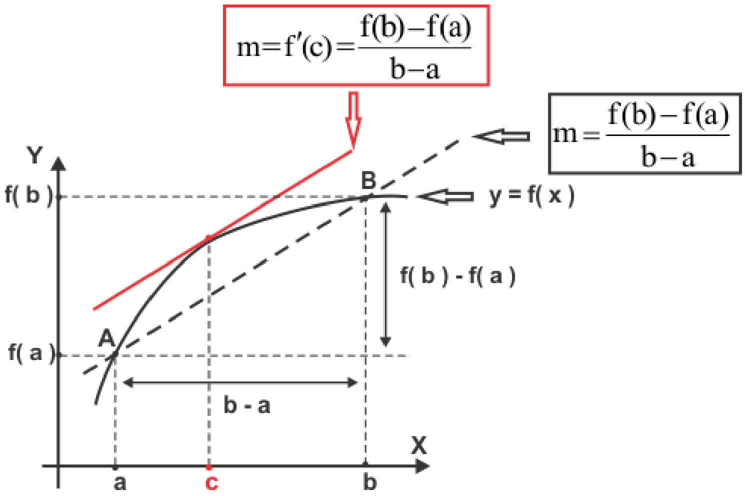
*b)* $\lim_{x \to p} f(x)$ *existe;*

*c)* $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$.

**Teorema 7.1** (Continuidade). *Se $f$ for derivável em $p$, então $f$ será contínua em $p$.*

**Teorema 7.2** (TVM). *Se $f$ dor contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existirá pelo menos um $c$ em $]a, b[$ tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad ou \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$




**Definição 7.2.** *Sejam $f$ uma função e $A$ um subconjunto do domínio de $f$.*

*i) Dizemos que $f$ é estritamente crescente em $A$ se, quaisquer que sejam $s$ e $t$ em $A$,*

$$s < t \Rightarrow f(s) < f(t).$$

*ii) Dizemos que $f$ é estritamente decrescente em $A$ se, quaisquer que sejam $s$ e $t$ em $A$,*

$$s < t \Rightarrow f(s) > f(t).$$

*iii) Dizemos que $f$ é crescente em $A$ se, quaisquer que sejam $s$ e $t$ em $A$,*

$$s < t \Rightarrow f(s) \leq f(t).$$

*iv) Dizemos que $f$ é decrescente em $A$ se, quaisquer que sejam $s$ e $t$ em $A$,*

$$s < t \Rightarrow f(s) \geq f(t).$$

### 7.1.1 Intervalos de Crescimento e de decrescimento

**Teorema 7.3.** *Seja $f$ contínua no intervalo $I$.*

*a) Se $f'(x) > 0$ para todo $x$ no interior de $I$, então $f$ será estritamente crescente em $I$.*

*b) Se $f^{'}(x) < 0$ para todo $x$ no interior de $I$, então $f$ será estritamente decrescente em $I$.*

**Exemplo 7.1.** *Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$.*

**Exemplo 7.2.** *Seja $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{1 + 3x^2}$. Estude $f$ com relação a crescimento e de decrescimento. Esboce o gráfico.*

**Exemplo 7.3.** *Determine os intervalos de crescimento e de decrescimento de* $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$. *Esboce o gráfico.*

### 7.1.2 Concavidade e Pontos de Inflexão

Seja $f$ uma função derivável no intervalo aberto $I$. A reta tangente ao gráfico de $f$ em $(p, f(p))$ é

$$y - f(p) = f^{'}(p)(x - p) \quad \text{ou} \quad y = f(p) + f^{'}(p)(x - p).$$

Deste modo, a reta tangente em $(p, f(p))$ é o gráfico da função $T$ dada por

$$T(x) = f(p) + f^{'}(p)(x - p).$$

**Definição 7.3.** *Dizemos que $f$ tem concavidade para cima no intervalo $I$ se*

$$f(x) > T(x)$$

*quaisquer que sejam $x$ e $p$ em $I$, com $x \neq p$.*

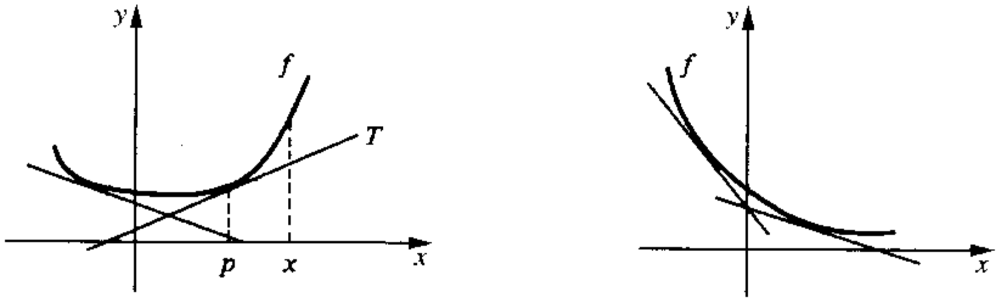


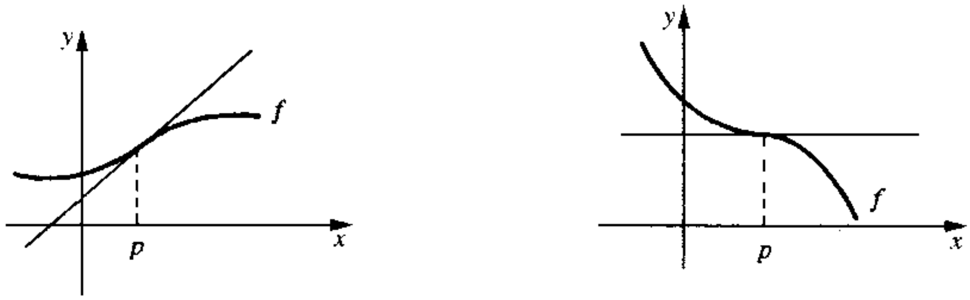

Figura 7.1: Concavidade para cima

**Definição 7.4.** *Dizemos que $f$ tem concavidade para baixo no intervalo $I$ se*

$$f(x) < T(x)$$

*quaisquer que sejam $x$ e $p$ em $I$, com $x \neq p$.*

**Definição 7.5.** *Sejam $f$ uma função e $p \in D_f$, com $f$ contínua em $p$. Dizemos que $p$ é um ponto de inflexão de $f$ se existirem números reais $a$ e $b$, com $p \in (a, b) \subset D_f$, tal que $f$ tenha concavidades de nomes contrários em $(a, p)$ e em $(p, b)$.*




$p$ é ponto de inflexão de $f$
(ponto de inflexão oblíquo)

$p$ é ponto de inflexão de $f$
(ponto de inflexão horizontal)

Figura 7.2: Pontos de inflexão

**Teorema 7.4.** *Seja $f$ uma função que admite derivada até $2^a$ ordem no intervalo aberto $I$.*

*a) Se $f''(x) > 0$ em $I$, então $f$ terá concavidade para cima em $I$.*

*b) Se $f''(x) < 0$ em $I$, então $f$ terá concavidade para baixo em $I$.*

**Exemplo 7.4.** *Seja $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Estude com relação à concavidade e determine os pontos de inflexão. Esboce o gráfico.*

# Aula 25 - 05 de Outubro

### 7.1.3 Regras de L‘Hospital

**1.$^a$ REGRA DE L´HOSPITAL**

Sejam $f$ e $g$ deriváveis em $(p-r,p)$ e em $(p,p+r)$, com $r>0$, e suponha que $g^{'}(x)\neq 0$ para $0<|x-p|<r$. Nessas condições, se

$$\lim_{x\to p} f(x) = 0 = \lim_{x\to p} g(x)$$

e se $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$ existir (finito ou infinito), então $\displaystyle\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e

$$\lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}.$$

**Observação 7.1.** *A 1.$^a$ REGRA DE L´HOSPITAL continua válida se substituirmos $x\to p$ por $x\to p^+$ ou por $x\to p^-$ ou por $x\to\pm\infty$.*

**2.$^a$ REGRA DE L´HOSPITAL**

Sejam $f$ e $g$ deriváveis em $(m,p)$, com $r>0$, e suponha que $g^{'}(x)\neq 0$ em $(m,p)$. Nessas condições, se

$$\lim_{x\to p^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x\to p^-} g(x) = +\infty$$

e se $\displaystyle\lim_{x\to p^-}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}$ existir (finito ou infinito), então $\displaystyle\lim_{x\to p^-}\frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e

$$\lim_{x\to p^-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p^-}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}.$$

**Observação 7.2.** *A 2.$^a$ REGRA DE L´HOSPITAL continua válida se substituirmos $x\to p^-$ por $x\to p^+$ ou por $x\to p$ ou por $x\to\pm\infty$. A regra continua válida se substituirmos um dos símbolos $+\infty$, ou ambos, por $-\infty$.*

**Exemplo 7.5.** *Calcule*

*a)* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^5 - 6x^3 + 8x - 3}{x^4 - 1}$

*b)* $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x}$

*c*) $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$

### 7.1.4 Gráficos

Para o esboço do gráfico de uma função $f$, sugerimos o roteiro:

*a*) explicitar o domínio;

*b*) determine os intervalos de crescimento e de decrescimento;

*c*) estudar a concavidade e determinar os pontos de inflexão;

*d*) calcular os limites laterais de $f$, em $p$, nos casos:

- (*i*) $p \notin D_f$, mas $p$ é extremos de um dos intervalos que compõem o $D_f$;
- (*ii*) $p \in D_f$, mas $f$ não é contínua em $p$;

*e*) Calcular os limites para $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$;

*f*) determinar ou localizar as raízes de $f$;

$g)$ esboce o gráfico utilizando as informações obtidas nos itens anteriores.

**Exemplo 7.6.** *Esboce o gráfico de* $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$.

**Exemplo 7.7.** *Esboce o gráfico de* $f(x) = \dfrac{4x+5}{x^2-5}$.

# Aula 26 - 09 de Outubro

### 7.1.5 Máximos e Mínimos

**Definição 7.6.** *Sejam $f$ uma função, $A \subset D_f$ e $p \in A$. Dizemos que:*

*i)* *$f(p)$ é o **valor máximo** de $f$ em $A$ ou que $p$ é um **ponto de máximo** de $f$ em $A$ se $f(x) \leq f(p)$ para todo $x$ em $A$.*

*ii)* *$f(p)$ é o **valor mínimo** de $f$ em $A$ ou que $p$ é um **ponto de mínimo** de $f$ em $A$ se $f(x) \geq f(p)$ para todo $x$ em $A$.*

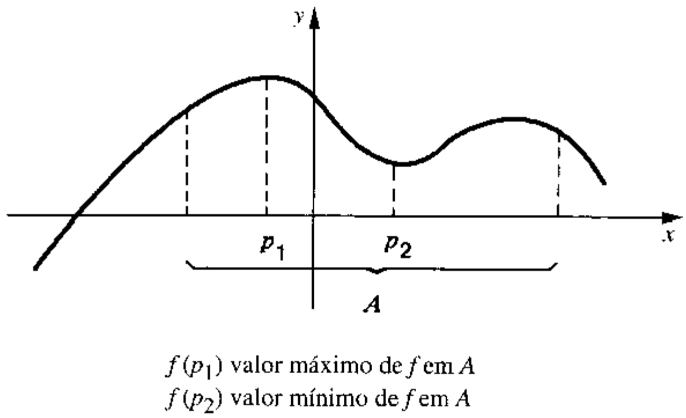



Figura 7.3: Valor Máximo e Valor Mínimo

**Definição 7.7.** *Sejam $f$ uma função e $p \in D_f$. Dizemos que:*

*i)* *$f(p)$ é o **valor máximo global** de $f$ ou que $p$ é um **ponto de máximo global** de $f$ se, para todo $x \in D_f$, $f(x) \leq f(p)$.*

*ii)* *$f(p)$ é o **valor mínimo global** de $f$ ou que $p$ é um **ponto de mínimo global** de $f$ se, para todo $x \in D_f$, $f(x) \geq f(p)$.*

**Definição 7.8.** *Sejam $f$ uma função e $p \in D_f$. Dizemos que:*

*i)* *$p$ é **ponto de máximo local** de $f$ se existir $r > 0$ tal que*

$$f(x) \leq f(p)$$

*para todo $x$ em $(p - r, p + r) \cap D_f$.*

*ii)* *p é* ***ponto de mínimo local*** *de f se existir* $r > 0$ *tal que*

$$f(x) \geq f(p)$$

*para todo x em* $(p - r, p + r) \cap D_f$.

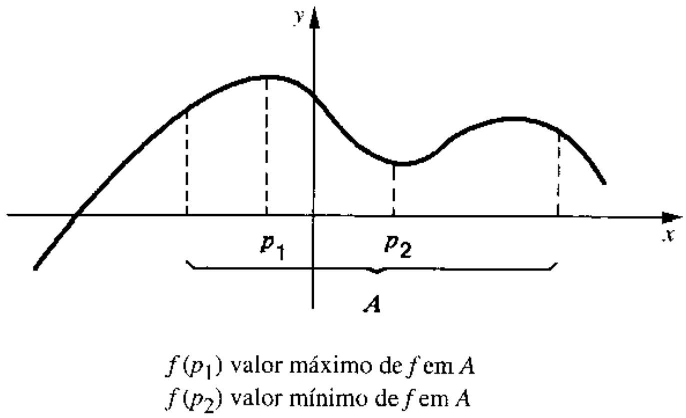



Figura 7.4: Valor Máximo e Valor Mínimo

**Exemplo 7.8.** *Seja* $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

*a)* *Estude f com relação a máximos e mínimos.*

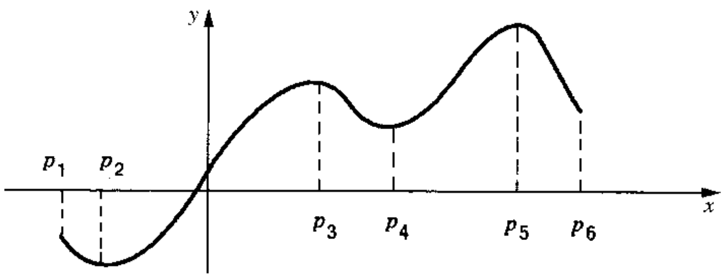
*b)* *Determine os valores máximo e mínimo de f em* $[-2, 3]$. *Em que pontos estes valores são atingidos?*

**Exemplo 7.9.** *Determine dois números positivos cuja soma seja* $4$ *e tal que a soma do cubo do menor com o quadrado do maior seja mínima.*

### 7.1.6 Condição Necessária e Condições Suficientes para Máximos e Mínimos Locais

Sejam $f$ uma função e $p$ um ponto interior ao domínio de $f$. Suponha $f$ derivável em $p$. O próximo teorema conta-nos que uma condição necessária, mas não suficiente, para que $p$ seja um ponto de máximo ou de mínimo local é que $f^{'}(p) = 0$. A figura abaixo nos dá uma ideia.

**Teorema 7.5.** *Seja* $f$ *uma função derivável em* $p$, *em que* $p$ *é um ponto interior ao domínio de* $f$. *Um condição necessária para que* $p$ *seja ponto de máximo ou de mínimo local é que* $f^{'}(p) = 0$.




$p_1$, $p_3$ e $p_5$ são pontos de máximo local; $f(p_5)$ é o valor máximo global de $f$
$p_2$, $p_4$ e $p_6$ são pontos de mínimo local; $f(p_2)$ é o valor mínimo global de $f$

Figura 7.5: Máximos e Mínimos

**Teorema 7.6.** *Sejam $f$ uma função que admite derivada de $2.^a$ ordem contínua no intervalo aberto $I$ e $p \in I$.*

*i) Se $f^{'}(p) = 0$ e $f^{''}(p) > 0$, então $p$ é **ponto de mínimo local**.*

*ii) Se $f^{'}(p) = 0$ e $f^{''}(p) < 0$, então $p$ é **ponto de máximo local**.*

**Exercícios 7.1.**

*Esboce o gráfico*

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$
2. $f(x) = x^3 - x^2 + 1$
3. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$
4. $f(x) = xe^{-3x}$
5. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$

6) *Achar dois números positivos cuja soma seja* 70 *e cujo produto seja o maior possível.*

7) *Determinar as dimensões de uma lata cilíndrica, com tampa, com volume* $V$, *de forma que sua área total seja mínima.*

8) *Usando uma folha quadrada de cartolina, de lado* $a$, *deseja-se construir uma caixa sem tampa, cortando em seus cantos quadrados iguais e dobrando convenientemente a parte restante. Determinar o lado dos quadrados que devem ser cortados de mode que o volume da caixa seja o maior possível.*

9) *Qual é o retângulo de perímetro máximo inscrito no círculo de raio* 12*cm?*

10 *Uma cerca de* 1 *metro de altura está situada a uma distância de* 1 *metro da parede de um galpão. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apoiam na parede do galpão e no chão do lado de fora da cerca?*

# Capítulo 8

# A Integral

## Aula 27 - 19 de outubro

### 8.1 Relação entre funções com derivadas iguais

**Teorema 8.1.** *Seja $f$ contínua no intervalo $I$. Se $f^{'}(x) = 0$ em todo $x$ interior a $I$, então existirá uma constante $k$ tal que $f(x) = k$ para todo $x$ em $I$.*

**Corolário 8.1.** *Sejam $f$ e $g$ contínuas no intervalo $I$. Se $f^{'}(x) = g^{'}(x)$ em todo $x$ interior a $I$, então existirá uma constante $k$ tal que*

$$g(x) = f(x) + k$$

*para todo $x$ em $I$.*

**Exemplo 8.1.** *Seja $f$ definida e derivável em $\mathbb{R}$ e tal que , para todo $x$, $f^{'}(x) = f(x)$. Prove que existe uma constante $k$ tal que, para todo $x$, tem-se $f(x) = ke^x$.*

**Exemplo 8.2.** *Determine $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, tal que*

$$\frac{dy}{dx} = y \ e \ f(0) = 2.$$

## 8.2 Primitiva de uma função

Seja $f$ uma função definida num intervalo $I$. Uma *Primitiva* de $f$ em $I$ é uma função $F$ definida em $I$, tal que

$$F'(x) = f(x)$$

para todo $x$ em $I$.

**Exemplo 8.3.** *$F(x) = \frac{1}{3}x^3$ é uma primitiva de $f(x) = x^2$ em $\mathbb{R}$.*

**Exemplo 8.4.** *Para toda constante $k$, $F(x) = 2x + k$ é primitiva, em $\mathbb{R}$, de $f(x) = 2$, pois,*

$$F'(x) = (2x + k)' = 2 = f(x)$$

*para todo $x$.*

Se $F$ é uma primitiva de $f$ em $I$, então, para toda constante $k$, $F(x) + k$ é, também, primitiva de $f$. Alé disso, vimos anteriormente que se duas funções tem derivadas iguais num intervalo, elas diferem, neste intervalo, por uma constante. Segue que as primitvas de $f$ em $I$ são as funções da forma $F(x) + k$, com $k$ constante. Diremos, então, que

$$y = F(x) + k, \quad k \text{ constante}$$

é a *família das primitivas* de $f$ em $I$. A notação $\int f(x)dx$ é usada para representar a família de primitivas de $f$, isto é,

$$\int f(x)dx = F(x) + k.$$

Na notação $\int f(x)dx$, a função $f$ denomina-se integrando. Uma primitiva de $f$ será, também, denominada uma *integral indefinida* de $f$. É comum referir-se a $\int f(x)dx$ como a *integral indefinida* de $f$.

**Exercícios 8.1.** *Calcule*

*a)* $\displaystyle\int x^2 dx$

*b)* $\displaystyle\int dx$

**Exercícios 8.2.** *Calcule* $\int x^\alpha dx$, *onde* $\alpha \neq -1$ *é um número real fixo.*

**Exercícios 8.3.** *Calcule*

*a)* $\displaystyle\int x^3 dx$

*b)* $\displaystyle\int \frac{1}{x^2} dx$

*c)* $\displaystyle\int \sqrt[3]{x^2} dx$

*d)* $\displaystyle\int \left( x^5 + \frac{1}{x^3} + 4 \right) dx$

**Exercícios 8.4.** *Calcule* $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx,\ x > 0.$

Seja $\alpha$ uma constante real. Dos exercícios 8.2 e 8.4 resulta

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k \text{ se } \alpha \neq -1 \\ (\ln x) + k \text{ se } \alpha = -1 \, (x > 0) \end{cases}$$

**Exercícios 8.5.** *Calcule* $\displaystyle\int \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right) dx$*,* $x > 0$*.*

**Exercícios 8.6.** *Seja* $\alpha$ *uma constante real,* $\alpha \neq 0$*. Calcule* $\displaystyle\int e^{\alpha x} dx$*.*

**Exercícios 8.7.** *Calcule*

*a)* $\displaystyle\int e^x dx$

*b)* $\displaystyle\int e^{2x} dx$

## 8.3 Primitivas imediatas

Sejam $\alpha \neq 0$ e $k$ constantes reais. Das fórmulas de derivação já vistas seguem as seguintes fórmulas de integração:

a) $\displaystyle\int c dx = cx + k$

b) $\displaystyle\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k \ \ (\alpha \neq -1)$

c) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + k$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k \ \ (x > 0)$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln(-x) + k \ \ (x < 0)$

f) $\displaystyle\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + k$

g) $\displaystyle\int \cos x dx = \text{sen} x + k$

h) $\displaystyle\int \text{sen} x dx = -\cos x + k$

i) $\displaystyle\int \sec^2 x dx = \text{tg} x + k$

j) $\displaystyle\int \sec x \text{tg} x dx = \sec x + k$

l) $\displaystyle\int \sec x dx = \ln|\sec x + \text{tg} x| + k$

m) $\displaystyle\int \text{tg} x dx = -\ln|\cos x| + k$

n) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} dx = \text{arctg} x + k$

o) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \text{arcsen} x + k$

## 8.4 Algumas Integrais que decorrem das Primitivas Imediatas

Sejam $\alpha \neq 0$ e $k$ constantes reais.

1. $\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + k$

2. $\int \cos \alpha x dx = \frac{1}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha x + k$

3. $\int \operatorname{sen} \alpha x dx = -\frac{1}{\alpha} \cos \alpha x + k$

# Aula 28 - 23 de outubro

## 8.5 Área e o Teorema Fundamental do Cálculo

**Definição 8.1** (Integral Definida)**.** *Seja $f$ não negativa e contínua no intervalo fechado $[a, b]$. A área da região limitada pelo gráfico de $f$, pelo eixo $x$ e pelas retas $x = a$ e $x = b$ é denotada por*

$$\acute{A}rea = \int_a^b f(x)dx.$$

*A expressão $\int_a^b f(x)dx$ é chamada de integral definida de $a$ até $b$, em que $a$ é o limite inferior de integração e $b$ é o limite superior de integração.*

**Exemplo 8.5.** *Calcule* $\displaystyle\int_0^2 2xdx.$

### 8.5.1 Teorema Fundamental do Cálculo - TFC

Consideremos uma função $A$, que denota a área da região mostrada na figura 8.1. Para descobrir a relação entre $A$ e $f$, considere que $x$ aumente por uma quantidade $\Delta x$. Isto aumenta a área em $\Delta A$. Sejam $f(m)$ e $f(M)$ os valores mínimos e máximos de $f$ no intervalo $[x, x+\Delta x]$.

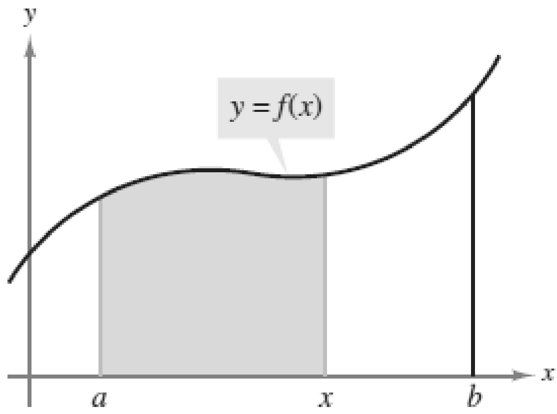



Figura 8.1: $A(x) =$ área de $a$ até $x$

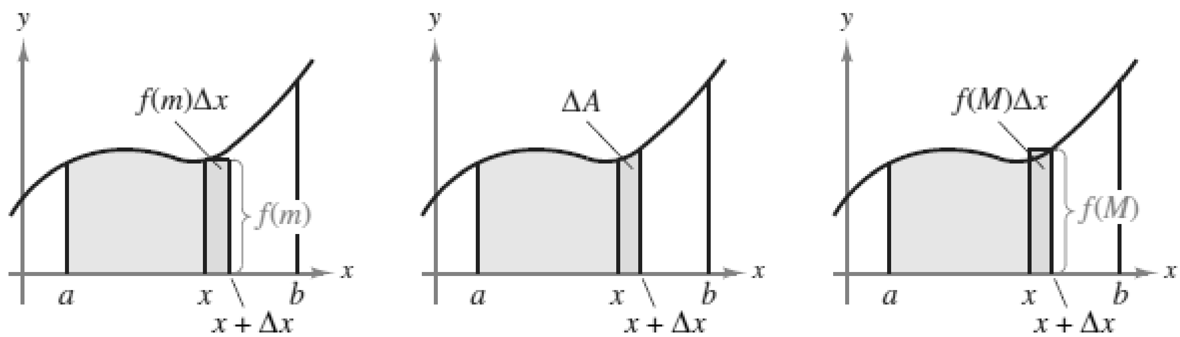



Figura 8.2:

Conforme indicado na figura 8.2 , podemos escrever a desigualdade abaixo

$$
\begin{array}{ccccc}
f(m)\Delta x & \leq & \Delta A & \leq & f(M)\Delta x \\
\\
f(m) & \leq & \dfrac{\Delta A}{\Delta x} & \leq & f(M) \\
\\
\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(m) & \leq & \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta A}{\Delta x} & \leq & \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(M) \\
\\
f(x) & \leq & A^{'}(x) & \leq & f(x)
\end{array}
$$

Então, $f(x) = A^{'}(x)$, e $A(x) = F(x) + C$, onde $F^{'}(x) = f(x)$. Como $A(a) = 0$ segue que $C = -F(a)$. Então $A(x) = F(x) - F(a)$, o que significa que

$$A(b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Este último resultado é conhecido como Teorema Fundamental do Cálculo.

**Teorema 8.2** (Teorema Fundamental do Cálculo - caso Particular)**.** *Se $f$ for não negativa e contínua no intervalo $[a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

*em que $F$ é qualquer função com $F^{'}(x) = f(x)$ para todo $x$ em $[a, b]$.*

**Definição 8.2.**

*i) Se $a > b$, então*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

*se a integral a direita existir.*

*ii) Se $a = b$ e $f(a)$ existe, então*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

**Propriedade 8.1** (Propriedades das Integrais Definidas)**.** *Sejam $f$ e $g$ integráveis em $[a, b]$ e $k$ uma constante. Entâo*

*a)* $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

*b)* $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

*c)* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;\ a < c < b$

*d) Se $f(x) \geq 0$ em $[a, b]$, então* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geq 0.$

### 8.5.2 Cálculo de Áreas

O cálculo de áreas de figuras planas pode ser feito por integração. Vejamos os casos a seguir.

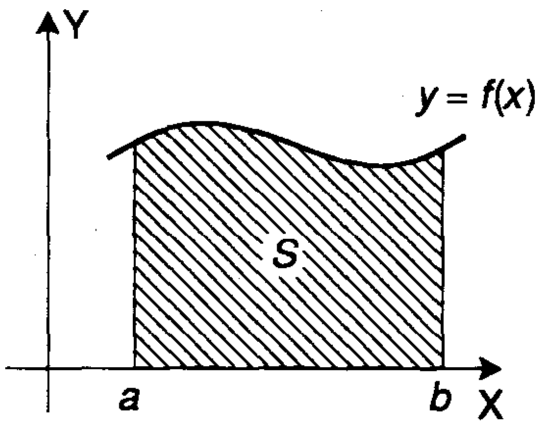



Figura 8.3:

Caso I. Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de $f$, pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$, (eixo dos $x$) onde $f$ é contínua e $f(x) \geq 0$, para todo $x$ em $[a, b]$ (figura 8.3). Neste caso, a área é dada por

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

**Exemplo 8.6.** *Calcule a área do conjunto do plano limitado pelas retas* $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ *e pelo gráfico de* $f(x) = x^2$.

Caso II. Cálculo da área da figura plana limitada pelo gráfico de $f$, pelas retas $x = a$, $x = b$, $y = 0$, (eixo dos $x$) onde $f$ é contínua e $f(x) \leq 0$, para todo $x$ em $[a, b]$ (figura 8.4).

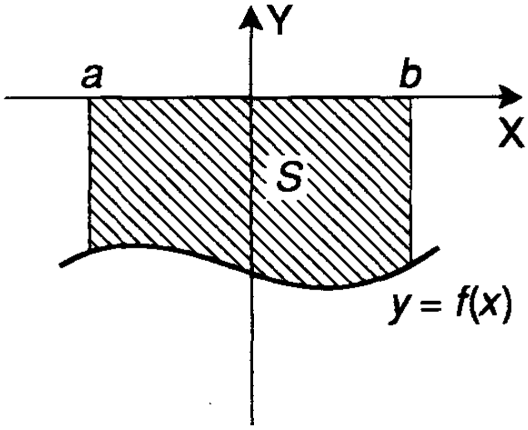



Figura 8.4:

Neste Caso, é fácil de ver que a área é dada por

$$A = -\int_a^b f(x)dx.$$

**Exemplo 8.7.** *Encontre a área da região limitada pela curva* $y = -4 + x^2$ *e pelo eixo dos* $x$.

# Aula 29 - 26 de outubro

**Exemplo 8.8.** *Encontre a área da região do plano, limitada pela curva* $y = senx$, *pelo eixo dos* $x$ *de* $0$ *até* $2\pi$. *Observe a figura 8.5.*

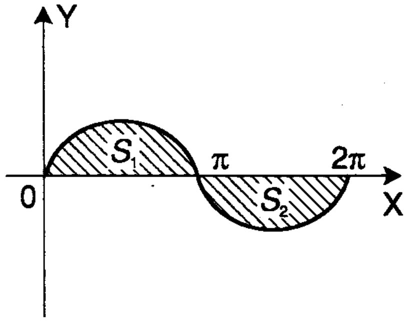



Figura 8.5:

Caso III. Cálculo da área da figura plana limitada pelos gráficos de $f$ e $g$, pelas retas $x = a$ e $x = b$, onde $f$ e $g$ são funções contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$, para todo $x$ em $[a, b]$ (figura 8.6).

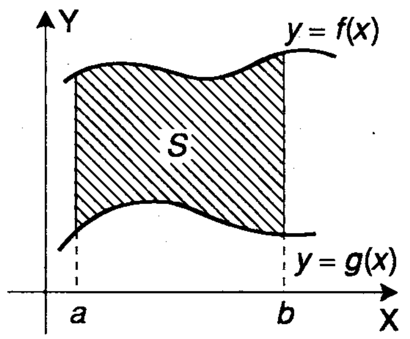



Figura 8.6:

A área é calculada pela diferença entre a área sob o gráfico de $f$ e a área sob o gráfico de $g$, ou melhor,

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Para o caso geral, obtemos o mesmo resultado. Basta imaginar o eixo dos $x$ deslocado de tal maneira que as funções se tornem não negativas, para todo $x$ em $[a, b]$ (figura 8.7).

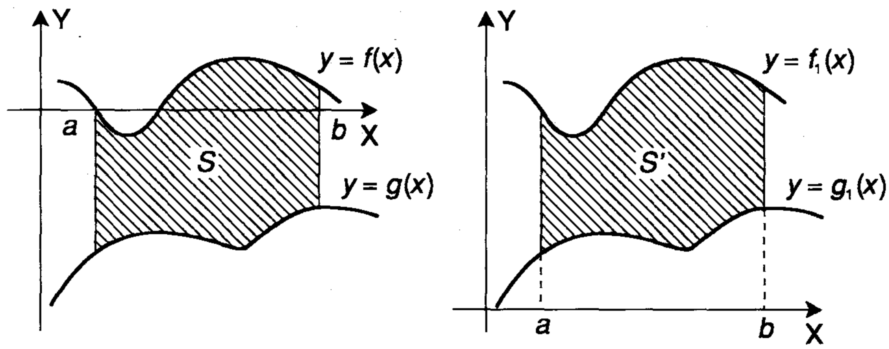



Figura 8.7:

Observando a figura 8.7, concluímos que

$$A' = A = \int_a^b (f_1(x) - g_1(x))dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

**Exemplo 8.9.** *Encontre a área da região limitada por* $y = x^2$ *e* $y = x + 2$.

**Exercícios 8.8.** *Os Exercícios a seguir encontram-se nas páginas* 340 *a* 343 *e* 316 *e* 317 *do Livro Um Curso de Cálculo Volume 1.*

## *Exercícios 12.1*

1. Calcule e verifique sua resposta por derivação.

$a)\ \int 3\,dx$ $\qquad$ $b)\ \int x\,dx$

$c)\ \int x^5\,dx$ $\qquad$ $d)\ \int \sqrt{x}\,dx$

$e)\ \int \sqrt[5]{x^2}\,dx$ $\qquad$ $f)\ \int x^{-4}\,dx$

$g)\ \int \frac{1}{x^3}\,dx$ $\qquad$ $h)\ \int \frac{x + x^2}{x^2}\,dx$

$i)\ \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$ $\qquad$ $j)\ \int \left(x^2 + \frac{3}{x}\right) dx$

$l)\ \int \frac{x+1}{x}\,dx$ $\qquad$ $m)\ \int (e^x + 4)\,dx$

$n)\ \int e^{5x}\,dx$ $\qquad$ $o)\ \int e^{-2x}\,dx$

$p)\ \int (e^{2x} + e^{-x})\,dx$ $\qquad$ $q)\ \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{e^x}\right) dx$

$r)\ \int \left(e^{4x} + \frac{1}{x^2}\right) dx$ $\qquad$ $s)\ \int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}\right) dx$

$t)\ \int \frac{x^5 + x + 1}{x^2}\,dx$ $\qquad$ $u)\ \int e^{\sqrt{2}\,x}\,dx$

2. Calcule.

$a)\ \int_0^1 e^{2x}\,dx$ $\qquad$ $b)\ \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx$

$c)\ \int_{-1}^1 e^{-x}\,dx$ $\qquad$ $d)\ \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2}\,dx$

$e)\ \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$ $\qquad$ $f)\ \int_1^2 \frac{x^3 + 1}{x}\,dx$

3. Calcule e verifique sua resposta por derivação.

$a)\ \int \operatorname{sen} x\,dx$ $\qquad$ $b)\ \int \operatorname{sen} 2x\,dx$

$c)\ \int \cos 5x\,dx$ $\qquad$ $d)\ \int \operatorname{sen} 4t\,dt$

$e)\ \int \cos 7t\,dt$ $\qquad$ $f)\ \int \cos \sqrt{3}\,t\,dt$

$g)\ \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$ $\qquad$ $h)\ \int \left(2 + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 2x\right) dx$

$i)\ \int \left(x + \frac{1}{5}\cos 3x\,dx\right)$ $\qquad$ $j)\ \int \left(\frac{1}{x} + 4\operatorname{sen} 3x\right) dx$

$l)\ \int \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{2}\cos 7x\right) dx$ $\qquad$ $m)\ \int \left(\cos 3x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x\right) dx$

$n)\ \int \left(\frac{1}{3}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}\cos 3x\right) dx$ $\qquad$ $o)\ \int \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos x}\,dx$

$p)\ \int \left(\frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{7}\operatorname{sen} 7x\right) dx$ $\qquad$ $q)\ \int \left(\frac{1}{3}e^{3x} + \operatorname{sen} 3x\right) dx$

4. Calcule.

$a)\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen} 2x\,dx$ $\qquad$ $b)\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{x}{2}\,dx$

$c)\ \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\operatorname{sen} 3x + \cos 3x)\,dx$ $\qquad$ $d)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx$

5. *a*) Verifique que $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$.

*b*) Calcule $\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$.

6. Calcule.

*a*) $\int \cos^2 2x \, dx$

*b*) $\int \cos^2 5x \, dx$

*c*) $\int \operatorname{sen}^2 3x \, dx$

*d*) $\int \cos^2 \frac{x}{2} \, dx$

*e*) $\int \cos^4 x \, dx$

*f*) $\int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx$

*g*) $\int (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 \, dx$

*h*) $\int (\operatorname{sen} x - \cos x)^2 \, dx$

*i*) $\int (5 + \operatorname{sen} 3x)^2 \, dx$

*j*) $\int (1 - \cos 2x)^2 \, dx$

7. Calcule.

*a*) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \cos^2 x \, dx$

*b*) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}^2 x \, dx$

*c*) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 \, dx$

*d*) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx$

8. Calcule $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos x} \, dx$.

9. *a*) Verifique que

$$\int \sec x \, dx = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + k$$

com $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

*b*) Mostre que

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \operatorname{tg} x| + k.$$

10. Calcule.

*a*) $\int \operatorname{tg} x \, dx$

*b*) $\int \sec^2 x \, dx$

*c*) $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$

*d*) $\int \sec x \, dx$

*e*) $\int \operatorname{tg} 2x \, dx$

*f*) $\int \sec 3x \, dx$

*g*) $\int 3^x \, dx$

*h*) $\int \frac{5}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$

*i*) $\int (5^x + e^{-x}) \, dx$

*j*) $\int (x + \sec^2 3x) \, dx$

*l*) $\int (1 + \sec x)^2 \, dx$

*m*) $\int \frac{\cos x + \sec x}{\cos x} \, dx$

11. *a*) Determine $\alpha$ e $\beta$ de modo que

$$\text{sen } 6x \cos x = \frac{1}{2} (\text{sen } \alpha x + \text{sen } \beta x)$$

$$\left( \textit{Sugestão}: \text{sen } a \cos b = \frac{1}{2} [\text{sen } (a+b) + \text{sen } (a-b)]. \right)$$

*b*) Calcule $\int \text{sen } 6x \cos x \, dx$.

12. Calcule.

*a*) $\int \text{sen } 5x \cos x \, dx$

*b*) $\int \text{sen } 3x \cos 4x \, dx$

*c*) $\int \text{sen } x \cos 3x \, dx$

*d*) $\int \text{sen } 3x \cos 3x \, dx$

13. *a*) Determine $\alpha$ e $\beta$ de modo que

$$\text{sen } 3x \text{ sen } 2x = -\frac{1}{2} (\cos \alpha x - \cos \beta x)$$

$$\left( \textit{Sugestão}: \text{sen } a \text{ sen } b = \frac{1}{2} [\cos (a-b) - \cos (a+b)]. \right)$$

*b*) Calcule $\int \text{sen } 3x \text{ sen } 2x \, dx$.

14. Calcule $\int \cos 5x \cos 2x \, dx$.

$$\left( \textit{Sugestão}: \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos (a+b) + \cos (a-b)]. \right)$$

15. Calcule.

*a*) $\int \text{sen } x \text{ sen } 3x \, dx$

*b*) $\int \text{sen } 2x \text{ sen } 5x \, dx$

*c*) $\int \text{sen } 3x \cos 2x \, dx$

*d*) $\int \cos 5x \cos x \, dx$

*e*) $\int \cos 7x \cos 3x \, dx$

16. Calcule.

*a*) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \text{ sen } 3x \, dx$

*b*) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } 3x \text{ sen } 4x \, dx$

17. Sejam $m$ e $n$ naturais. Calcule.

*a*) $\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen } mx \text{ sen } nx \, dx$

*b*) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \text{ sen } nx \, dx$

Nos Exercícios de 1 a 22, desenhe o conjunto $A$ dado e calcule a área.

1. $A$ é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 1$, $x = 3$, pelo eixo $0x$ e pelo gráfico de $y = x^3$.
2. $A$ é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$.
3. $A$ é o conjunto de todos $(x, y)$ tais que $x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 0$.
4. $A$ é o conjunto de todos $(x, y)$ tais que $0 \leqslant y \leqslant 4 - x^2$.
5. $A$ é o conjunto de todos $(x, y)$ tais que $0 \leqslant y \leqslant |\operatorname{sen} x|$, com $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
6. $A$ é a região do plano compreendida entre o eixo $0x$ e o gráfico de $y = x^2 - x$, com $0 \leqslant x \leqslant 2$.
7. $A$ é o conjunto do plano limitado pela reta $y = 0$ e pelo gráfico de $y = 3 - 2x - x^2$, com $-1 \leqslant x \leqslant 2$.
8. $A$ é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = -1$, $x = 2$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = x^2 + 2x + 5$.
9. $A$ é o conjunto do plano limitado pelo eixo $0x$, pelo gráfico de $y = x^3 - x$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
10. $A$ é o conjunto do plano limitado pela reta $y = 0$ e pelo gráfico de $y = x^3 - x$, com $0 \leqslant x \leqslant 2$.

11. $A$ é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = \cos x$.
12. $A$ é o conjunto de todos $(x, y)$ tais que $x \geqslant 0$ e $x^3 \leqslant y \leqslant x$.
13. $A$ é o conjunto do plano limitado pela reta $y = x$, pelo gráfico de $y = x^3$, com $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
14. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ e } \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 3\}$.
15. $A$ é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ e pelos gráficos de $y = \operatorname{sen} x$ e $y = \cos x$.
16. $A$ é o conjunto de todos os pontos $(x, y)$ tais que $x^2 + 1 \leqslant y \leqslant x + 1$.
17. $A$ é o conjunto de todos os pontos $(x, y)$ tais que $x^2 - 1 \leqslant y \leqslant x + 1$.
18. $A$ é o conjunto do plano limitado pelas retas $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ e pelos gráficos de $y = \cos x$ e $y = 1 - \cos x$.
19. $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0 \text{ e } x^3 - x \leqslant y \leqslant -x^2 + 5x \}$.
20. $A$ é o conjunto do plano limitado pelos gráficos de $y = x^3 - x$, $y = \operatorname{sen} \pi x$, com $-1 \leqslant x \leqslant 1$.
21. $A$ é o conjunto de todos os pontos $(x, y)$ tais que $x \geqslant 0$ e $-x \leqslant y \leqslant x - x^2$
22. $A$ é o conjunto de todos $(x, y)$ tais que $x > 0$ e $\dfrac{1}{x^2} \leqslant y \leqslant 5 - 4x^2$.
23. Uma partícula desloca-se sobre o eixo $x$ com velocidade $v(t) = 2t - 3$, $t \geqslant 0$.
    *a*) Calcule o deslocamento entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$.
    *b*) Qual o espaço percorrido entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$?
    *c*) Descreva o movimento realizado pela partícula entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$
24. Uma partícula desloca-se sobre o eixo $0x$ com velocidade $v(t) = \operatorname{sen} 2t$, $t \geqslant 0$. Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = \pi$.
25. Uma partícula desloca-se sobre o eixo $0x$ com velocidade $v(t) = -t^2 + t$, $t \geqslant 0$. Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = 2$.
26. Uma partícula desloca-se sobre o eixo $0x$ com velocidade $v(t) = t^2 - 2t - 3$, $t \geqslant 0$. Calcule o espaço percorrido entre os instantes $t = 0$ e $t = 4$.

# Capítulo 9

# Técnicas de Integração

## Aula 30 - 16 de novembro

### 9.1 Técnica para Cálculo de Integral Indefinida da Forma $\int f(g(x))g^{'}(x)dx$

Sejam $f$ e $g$ funções tais que $Im_g \subset D_f$ com $g$ derivável. Suponhamos que $F$ seja uma primitiva de $f$, isto é, $F^{'} = f$. Segue $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x))g^{'}(x)$. De fato,

$$(F(g(x)))^{'} = F^{'}(g(x))g^{'}(x) = f(g(x))g^{'}(x).$$

Deste modo, de

$$\int f(u)du = F(u) + k$$

segue

$$\int f(g(x))g^{'}(x)dx = F(g(x)) + k.$$

**Observação 9.1.** *Fazendo* $u = g(x)$ *então* $du = g^{'}(x)dx$. *Segue que*

$$\int f(\overbrace{g(x)}^{u})\underbrace{g^{'}(x)dx}_{du} = \int f(u)du = F(u) + k = F(g(x)) + k$$

**Exemplo 9.1.** *Calcule* $\int x \cos x^2 dx$.

**Exemplo 9.2.** *Calcule* $\int e^{3x} dx$.

**Exemplo 9.3.** *Calcule* $\int (2x+1)^3 dx$.

**Exemplo 9.4.** *Calcule* $\int \frac{x}{1+x^2} dx$.

**Exemplo 9.5.** *Calcule* $\int \frac{1}{3x+2} dx$.

**Exemplo 9.6.** *Calcule* $\int x\sqrt{1+x^2}dx$.

**Exemplo 9.7.** *Calcule* $\int x^3\sqrt{1+x^2}dx$.

**Exemplo 9.8.** *Calcule* $\int sen^3 x \cos x dx$.

# Aula 31 - 23 de novembro

## 9.2 Integração por Partes

Suponhamos $f$ e $g$ definidas e deriváveis num mesmo intervalo $I$. Temos

$$[f(x)g(x)]^{'} = f^{'}(x)g(x) + f(x)g^{'}(x)$$

ou

$$f(x)g^{'}(x) = [f(x)g(x)]^{'} - f^{'}(x)g(x).$$

Supondo, então, que $f^{'}(x)g(x)$ admita primitiva em $I$ e observando que $f(x)g(x)$ é uma primitiva de $[f(x)g(x)]^{'}$, então $f(x)g^{'}(x)$ também admitirá primitiva em $I$ e

$$\boxed{\int f(x)g^{'}(x)dx = f(x)g(x) - \int f^{'}(x)g(x)dx}$$

que é a regra de ***integração por partes***.

**Observação 9.2.** *Fazendo* $u = f(x)$ *e* $dv = g^{'}(x)dx$ *teremos* $du = f^{'}(x)dx$ *e* $v = g(x)$ *o que nos permite escrever*

$$\int \overbrace{f(x)}^{u} \underbrace{g^{'}(x)dx}_{dv} = \underbrace{f(x)}_{u} \underbrace{g(x)}_{v} - \int \underbrace{f^{'}(x)g(x)dx}_{vdu}$$

*ou*

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

**Observação 9.3.** *Sejam* $f$ *e* $g$ *duas funções com derivadas contínuas em* $[a, b]$. *Então*

$$\int_a^b f(x)g^{'}(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f^{'}(x)g(x)dx.$$

**Exemplo 9.9.** *Calcule* $\int x \cos x dx$.

**Exemplo 9.10.** *Calcule* $\int x^2 sen x dx$.

**Exemplo 9.11.** *Calcule* $\int e^x \cos x dx$.

**Exemplo 9.12.** *Calcule* $\int \cos^2 x dx$.

**Exemplo 9.13.** *Calcule* $\displaystyle\int_1^t x \ln x dx$.

# Aula 32 - 30 de novembro

## 9.3 Integrais Indefinidas do Tipo $\displaystyle\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)}dx$

Para calcular $\displaystyle\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)}dx$, vamos precisar do seguinte teorema

**Teorema 9.1.** *Sejam $\alpha$, $\beta$, $m$ e $n$ números reais dados, com $\alpha \neq \beta$. Então existem constantes reais $A$ e $B$ tais que*

*a)* $\displaystyle\frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$

*b)* $\displaystyle\frac{mx+n}{(x-\alpha)^2} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{(x-\alpha)^2}$

*Demonstração.* Ver Guidorizzi Volume 1, quinta edição, página 371. □

**Observação 9.4.** *Note que em cada fração que ocorre no teorema anterior, o **grau do numerador é estritamente menor que o grau do denominador.** Vejamos como calcular*

$$\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)}dx, \quad \text{com } \alpha \neq \beta,$$

*onde $P(x)$ é um polinômio.*

*a) Se o grau de $P$ for estritamente menor que o grau do denominador (grau de $P < 2$) pelo teorema anterior*

$$\frac{mx+n}{(x-\alpha)(x-\beta)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B}{x-\beta}$$

*e, assim,*

$$\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)}dx = A\ln|x-\alpha| + B\ln|x-\beta| + k.$$

*b) Se o grau de $P$ for maior ou igual ao grau do denominador (grau de $P \geq 2$), precisamos antes extrair os inteiros*

$$\frac{P(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)} = Q(x) + \frac{R(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$

*em que $Q(x)$ e $R(x)$ são, respectivamente, o quociente e resto da divisão de $P(x)$ por $(x-\alpha)(x-\beta)$. Observe que o grau de $R$ é estritamente menor do que o grau do denominador.*

**Exemplo 9.14.** *Calcule* $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2-3x+2}dx.$

**Exemplo 9.15.** *Calcule* $\int \frac{x^2+2}{x^2-3x+2}dx$.

**Observação 9.5.** *Para calcular* $\int \frac{P(x)}{(x-\alpha)^2}dx$, *é mais interessante fazer a mudança de variável* $u = x - \alpha$ *do que utilizar o item (b) do teorema anterior*

**Exemplo 9.16.** *Calcule* $\int \frac{x^3+2}{(x-1)^2}dx$.

**Exemplo 9.17.** *Calcule* $\int \frac{1}{\cos x}dx$.

## 9.4 Integrais de Produtos de Senos e Cossenos

Nesta seção serão utilizados as fórmulas a seguir:

$$\mathrm{sen} a \cos b = \frac{1}{2}[\mathrm{sen}(a+b) + \mathrm{sen}(a-b)]$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\mathrm{sen} a \mathrm{sen} b = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$$

**Exemplo 9.18.** *Calcule* $\int sen 3x \cos 2x dx$

**Exemplo 9.19.** *Calcule* $\int \cos^2 x dx$

**Exemplo 9.20.** *Calcule* $\int sen 3x sen 5x dx$

**Exemplo 9.21.** *Calcule* $\int \cos nx \cos mx dx$, *sendo* $m$ *e* $n$ *naturais não-nulos.*

**Exercícios 9.1.** *Os Exercícios a seguir encontram-se nas páginas* 351, 352, 360, 375 *e* 385 *do Livro Um Curso de Cálculo Volume 1, quinta edição.*

*Exercícios 12.2*

1. Calcule.

a) $\int (3x-2)^3\,dx$

b) $\int \sqrt{3x-2}\,dx$

c) $\int \frac{1}{3x-2}\,dx$

d) $\int \frac{1}{(3x-2)^2}\,dx$

e) $\int x \operatorname{sen} x^2\,dx$

f) $\int x\,e^{x^2}\,dx$

g) $\int x^2\,e^{x^3}\,dx$

h) $\int \operatorname{sen} 5x\,dx$

i) $\int x^3 \cos x^4\,dx$

j) $\int \cos 6x\,dx$

l) $\int \cos^3 x \operatorname{sen} x\,dx$

m) $\int \operatorname{sen}^5 x \cos x\,dx$

n) $\int \frac{2}{x+3}\,dx$

o) $\int \frac{5}{4x+3}\,dx$

p) $\int \frac{x}{1+4x^2}\,dx$

q) $\int \frac{3x}{5+6x^2}\,dx$

r) $\int \frac{x}{(1+4x^2)^2}\,dx$

s) $\int x\sqrt{1+3x^2}\,dx$

t) $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$

u) $\int \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$

v) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$

x) $\int x\,e^{-x^2}\,dx.$

2. Calcule (veja a Seção 11.7).

a) $\int_0^1 x\,e^{-x^2}\,dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{sen}^4 x \cos x\,dx$



c) $\int_0^1 \frac{3}{2x+1}\,dx$

d) $\int_1^2 \frac{x}{1+3x^2}\,dx$

e) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

f) $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

g) $\int_{-\frac{3}{2}}^{-1} (2x+3)^{100}\,dx$

h) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x \operatorname{sen} 3x^2\,dx$

i) $\int_2^3 \frac{1}{(x-1)^3}\,dx$

j) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}\,dx$

l) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\,dx$

m) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 2x\,dx$

3. Calcule.

a) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos x\,dx$

b) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\,dx$

c) $\int \cos^3 x \operatorname{sen}^3 x\,dx$

d) $\int \operatorname{sen} x\sqrt{\cos x}\,dx$

e) $\int \operatorname{sen} 2x\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$

f) $\int \operatorname{sen} 2x\sqrt{5+\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

g) $\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$

h) $\int \cos^5 x\,dx$

i) $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x\,dx$

j) $\int \operatorname{tg} x \sec^2 x\,dx$

l) $\int \operatorname{tg} x \sec^3 x\,dx$

m) $\int \operatorname{tg}^3 x \sec^4 x\,dx$

n) $\int \operatorname{sen} x\sqrt{3+\cos x}\,dx$

o) $\int \operatorname{sen} x \sec^2 x\,dx$

p) $\int \operatorname{sen} x \sec^3 x\,dx$

q) $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\,dx$

r) $\int \operatorname{tg}^3 x \cos x\,dx$

s) $\int \frac{\sec^2 x}{3+2\operatorname{tg} x}\,dx$

*Exercícios 12.3*

1. Calcule.

a) $\int x e^x \, dx$

b) $\int x \operatorname{sen} x \, dx$

c) $\int x^2 e^x \, dx$

c) $\int x \ln x \, dx$

e) $\int \ln x \, dx$

f) $\int x^2 \ln x \, dx$

g) $\int x \sec^2 x \, dx$

h) $\int x (\ln x)^2 \, dx$

i) $\int (\ln x)^2 \, dx$

j) $\int x e^{2x} \, dx$

l) $\int e^x \cos x \, dx$

m) $\int e^{-2x} \operatorname{sen} x \, dx$

n) $\int x^3 e^{x^2} \, dx$

o) $\int x^3 \cos x^2 \, dx$

p) $\int e^{-x} \cos 2x \, dx$

q) $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$

*Exercícios 12.5*

Calcule.

1. $\int \frac{1}{x^2 - 4} \, dx$

2. $\int \frac{x}{x^2 - 5x + 6} \, dx$

3. $\int \frac{x}{x^2 - 4} \, dx$

4. $\int \frac{2x + 1}{x^2 - 1} \, dx$

5. $\int \frac{5x^2 + 1}{x - 1} \, dx$

6. $\int \frac{x + 3}{(x - 1)^2} \, dx$

7. $\int \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3} \, dx$

8. $\int \frac{x^2 + 1}{(x - 2)^3} \, dx$

9. $\int \frac{x + 3}{x^2 - x} \, dx$

10. $\int \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x} \, dx$

11. $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 2x + 1} \, dx$

12. $\int \frac{x^3 + x + 1}{x^2 - 4x + 3} \, dx$

13. $\int \frac{1}{x^2 + 5} \, dx$

14. $\int \frac{x + 1}{x^2 + 9} \, dx$

15. $\int \frac{x^2 + 3}{x^2 - 9} \, dx$

16. $\int \frac{1}{x^2 - x - 2} \, dx$

*Exercícios 12.8*

1. Calcule.

a) $\int \operatorname{sen} 7x \cos 2x dx$

b) $\int \operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 5x dx$

c) $\int \cos 2x \cos x dx$

d) $\int \cos x \operatorname{sen} 2x dx$

e) $\int \operatorname{sen} nx \cos mx dx$, sendo $m$ e $n$ naturais não-nulos.

f) $\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x dx$

g) $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$

2. Calcule $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos mx dx$, sendo $m$ e $n$ naturais não-nulos.

3. Calcule $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx dx$, sendo $m$ e $n$ naturais não-nulos.