UEMS – UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MATO GROSSO DO SUL
Campus: Nova Andradina

Apostila-Matemática Elementar

Professor: Oyran Silva Rayzaro

Nova Andradina, 2018

Sumário

Capítulo 1

Lógica Matemática

1.1 Proposição

Definição 1.1.1. *Chama-se proposição ou sentença, toda oração declarativa que pode ser classificada verdadeira V ou falsa F.*

Observação 1.1.1. *Toda proposição apresenta 3 característica obrigatórias:*

1. *sendo oração, tem sujeito e predicado. Sujeito: Termo sobre o qual o restante da oração diz algo. Predicado: Termo que contém o verbo e informa algo sobre o sujeito.*

2. *é declarativa (não é exclamativa nem interrogativa).*

3. *tem um, e somente um, dos dois valores lógicos: V ou F.*

Exemplo 1.1.1. *Proposição:*

(a) *Nove é diferente de sete ($9 \neq 7$)*
(b) *Três é divisor de onze ($3|11$)*
(c) *Quatro é maior que dois ($4 > 2$)*

Exemplo 1.1.2. *Não é proposição:*

(a) *Três vezes cinco mais um ($3.5 + 1$)*
(b) *A raíz quadrada de dois é um número racional ? ($\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$)*
(c) *O triplo de um número menos um é igual a onze ($3x - 1 = 11$)*

1.2 Negação

A partir de uma proposição p qualquer, sempre podemos construir outra, denominada negação de p e indica-se com o símbolo $\sim p$.

Exemplo 1.2.1. .

(a) p : *Nove é diferente de cinco*$(9 \neq 5)$

$\sim p$:

(b) p : *Três é divisor de onze* $(3|11)$

$\sim p$:

(c) p : *Quatro é maior que dois* $(4 > 2)$

$\sim p$:

Para que $\sim p$ seja realmente uma proposição, devemos ser capazes de classificá-la em verdadeira V ou falsa F. Assim, a proposição $\sim p$ tem sempre valor oposto da proposição p.

Tabela Verdade(Negação)

p	$\sim$ p
V	
F	

1.3 Proposição Composta-Conectivos

A partir de proposições dadas, podemos construir novas proposições mediante o emprego de 2 símbolos lógicos chamados conectivos:

- conectivo $\vee$(lê-se: ou)
- conectivo $\wedge$(lê-se: e)

1.3.1 Conectivo $\vee$

Colocando o conectivo $\vee$ entre 2 proposições p e q, obtemos uma nova proposição, $p \vee q$, denominada disjunção das sentenças p e q.

Exemplo 1.3.1. .

1. $p : 5 > 0$
   $q : 5 > 1$
   $p \vee q :$

2. $p : 3 = 3$
   $q : 3 < 3$
   $p \vee q :$

3. $p : 3^4 < 2^6$
   $q : 2^2 < (-3)^5$
   $p \vee q :$

A disjunção $p \vee q$ é verdadeira se ao menos uma das proposições p ou q é verdadeira. Se p e q são ambas falsas, então $p \vee q$ é falsa.

Tabela Verdade da Proposição $p \vee q$

p	q	$p \vee q$

1.3.2 Conectivo $\wedge$

Colocando o conectivo $\wedge$ entre 2 proposições p e q, obtemos uma nova proposição, $p \wedge q$, denominada conjunção das sentenças p e q.

Exemplo 1.3.2. .

1. $p : 2 > 0$
   $q : 2 \neq 1$
   $p \wedge q :$

2. $p : -2 < -1$
   $q : (-2)^2 < (-1)^2$
   $p \wedge q :$

3. $p : 2|5$
$q : 3|5$
$p \wedge q :$

A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira se as proposições p e q são ambas verdadeiras. Se ao menos uma delas for falsa, então $p \wedge q$ é falsa.

Tabela Verdade da Proposição $p \wedge q$

p	q	$p \wedge q$

1.4 Condicionais

A partir de duas proposições dadas p, q, podemos construir novas proposições mediante o emprego de 2 outros símbolos lógicos, chamados condicionais.

1. Condicional: *se p então q*
   Símbolo: $p \rightarrow q$

2. Condicional: *p se e somente se q*
   Símbolo: $p \leftrightarrow q$

Colocando o condicional $\rightarrow$ entre duas proposições p e q, obtemos uma nova proposição $p \rightarrow q$, que se lê: *"se p então q"*, ou *"p é condição necessária para q"* ou *"q é condição suficiente para p"*.

No condicional $p \rightarrow q$, a proposição p é chamada de *antecedente* e q é chamada de *consequente*.

Exemplo 1.4.1. .

1. p : *dois é divisor de quatro (*$2|4$)
q : *quatro é divisor de vinte(*$4|20$*)*
$p \rightarrow q :$

2. p : *dois vezes cinco é igual a dez(*$2.5 = 10$)
q : *três é divisor de dez(*$3|10$*)*
$p \rightarrow q :$

3. p : *cinco é menor que dois* $(5 < 2)$.
   q : *dois é um número inteiro*$(2 \in \mathbb{Z})$
   $p \to q$:

4. p : *um meio é menor que um terço* $(1/2 < 1/3)$
   q : *três é igual a cinco.*$(3 = 5)$
   $p \to q$:

Vamos postular um critério de classificação para a proposição $p \to q$, baseado nos valores lógicos de p e q.

"O condicional $p \to q$ é falso somente quando p é verdadeiro e q é falso, caso contrário, $p \to q$ é verdadeiro."

Tabela Verdade da Proposição $p \to q$

p	q	$p \to q$

Colocando o condicional $\leftrightarrow$ entre duas proposições p e q, obtemos uma nova proposição $p \leftrightarrow q$, que se lê: *"p se, e somente se, q"*, ou *" p é condição necessária e suficiente para q"* ou *" q é condição necessária e suficiente para p"*.

Exemplo 1.4.2. .

1. $p : 2|12$.
   $q : 2.7|12.7$
   $p \leftrightarrow q$:

2. $p : 3/2 = 6/4$.
   $q : 3.4 \neq 12$
   $p \leftrightarrow q$:

3. $p : 6 = 12/3$.
   $q : 3.6 = 18$
   $p \leftrightarrow q$:

4. $p : 4 \leq 3$.
   $q : 4.5 \leq 3.5$
   $p \leftrightarrow q$:

Vamos postular um critério de classificação para a proposição $p \leftrightarrow q$, baseado nos valores lógicos de p e q.

"O condicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro somente quando p e q são ambos verdadeiro ou falso, caso contrário, o condicional $p \leftrightarrow q$ é falso."

Tabela Verdade da Proposição $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$

1.5 Tautologias

Definição 1.5.1. *Seja v uma proposição formada a partir de outras proposições $(p, q, r, ...)$ mediante o emprego de conectivos $(\vee, \wedge)$ ou do modificador $(\sim)$ ou de condicionais $(\rightarrow, \leftrightarrow)$. Dizemos que v é uma tautologia ou proposição logicamente verdadeira quando v tem o valor lógico V (verdadeiro) independentemente dos valores lógicos de $p, q, r,$ etc.*

Observação 1.5.1. *Assim, a tabela verdade de uma tautologia v apresenta só V na coluna de v.*

Exemplo 1.5.1. *Verifique se as seguintes proposições são uma tautologia:*

(a) $(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \vee p)$

p	q	$\sim p$	$p \wedge \sim p$	$q \vee p$	$(p \wedge \sim p) \rightarrow (q \vee p)$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

(b) $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

p	q	$p \wedge q$	$\sim (p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
V	V						
V	F						
F	V						
F	F						

1.6 Proposições Logicamente Falsas

Definição 1.6.1. *Seja f uma proposição formada a partir de outras proposições $(p, q, r, ...)$ mediante o emprego de conectivos $(\vee, \wedge)$ ou do modificador $(\sim)$ ou de condicionais $(\rightarrow, \leftrightarrow)$. Dizemos que f é uma proposição logicamente falsa quando f tem o valor lógico F(falso) independentemente dos valores lógicos de p, q, r, etc.*

Observação 1.6.1. *Assim, a tabela verdade de uma proposição logicamente falsa f apresenta só F na coluna de f.*

Exemplo 1.6.1. *Verifique se as seguintes proposições são logicamente falsas:*

(a) $(p \wedge \sim p)$

p	q	$p \wedge \sim p$
V	F	
F	V	

(b) $(p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \wedge q$	$(p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

1.7 Relação de Implicação

Definição 1.7.1. *Dadas as proposições p e q, dizemos que "p implica q" quando na tabela de p e q não ocorre VF em nenhuma linha, isto é, quando não temos simultaneamente p verdadeiro e q falso.*

Notação: p implica q: $p \Rightarrow q$

Observação 1.7.1. .

1. *Notemos que p implica q quando o condicional $p \rightarrow q$ é verdadeiro;*

2. *Teorema é uma afirmação que pode ser provada, dessa forma, todo teorema é implicação da forma (*hipótese $\Rightarrow$ tese*). Assim, demonstrar um teorema significa mostrar que não ocorre o caso de a hipótese ser verdadeira e a tese falsa.*

Exemplo 1.7.1. .

1. $(2|4) \Rightarrow (2|4 \times 5)$. *Significa dizer que o condicional "se* 2 *é divisor de* 4 *então* 2 *é divisor de* 4×5 *"*

2. x *é positivo e primo* $\Rightarrow mdc(x, x^2) = x$. *Quer dizer que o condicional "se* x *é um número primo e positivo, então o máximo divisor comum de* x *e* x^2 *é* x*."*

1.8 Relação de Equivalência

Definição 1.8.1. *Dadas as proposições* p *e* q*, dizemos que "*p *é equivalente a* q*" quando* p *e* q *têm tabelas verdades iguais, isto é, quando* p *e* q *têm o mesmo valor lógico.*

Notação: p é equivalente a q: $p \Leftrightarrow q$

Observação 1.8.1. .

1. *Notemos que* p *equivale a* q *quando o condicional* $p \leftrightarrow q$ *é verdadeiro;*

2. *Todo teorema, cuja recíproca também é verdadeira, é uma equivalência, ou seja:* hipótese $\Leftrightarrow$ tese.

Exemplo 1.8.1. .

1. $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim q \to \sim p)$.

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \to \sim p$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

2. $\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$*(negação de uma disjunção).*

p	q	$p \vee q$	$\sim (p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p \wedge \sim q)$
V	V					
V	F					
F	V					
F	F					

3. $\sim(p \to q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$*(negação de um condicional simples).*

p	q	$p \to q$	$\sim(p \to q)$	$\sim q$	$(p \wedge \sim q)$
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

1.9 Sentenças Abertas, Quantificadores

As expressões da forma "$x + 1 = 7$","$x > 2$" e "$x^3 = 2x^2$", dependem do valor atribuído à variável. Dessa forma, definimos:

Definição 1.9.1. *Orações que contêm variáveis são chamadas sentenças abertas.*

Tais orações não são proposições. Entretanto há duas maneiras de transformar sentenças abertas em proposições:

1. atribuir valor as variáveis;
2. utilizar quantificadores.

Quantificador Universal: O *quantificador universal* é indicado pelo símbolo $\forall$, que se-lê: "para todo", "para cada", "qualquer que seja."

Exemplo 1.9.1. .

$\forall x,\ x + 1 = 7$*("qualquer que seja o número* x*, temos* $x + 1 = 7$*");*

$\forall x,\ x^3 = 2x^2$ *("para todo número* x*, temos* $x^3 = 2x^2$*");*

$\forall y,\ y^2 + 1 > 0$*("para cada número* y*, temos* $y^2 + 1$ *positivo").*

Quantificador Existencial: O *quantificador existencial* é indicado pelo símbolo $\exists$, que se-lê: "existe", "existe pelo menos um", "existe um."

Exemplo 1.9.2. .

$\exists x,\ x + 1 = 7$*("existe um número* x*, tal que* $x + 1 = 7$*");*

$\exists x,\ x^3 = 2x^2$ *("existe um número* x*, tal que* $x^3 = 2x^2$*");*

$\exists y,\ y^2 + 1 > 0$*("existe um número* y*, tal que* $y^2 + 1$ *positivo").*

Observação 1.9.1. *Utilizaremos também o quantificador* $\exists|$, *que se-lê: "existe um único", "existe um e um só", "existe só um"*

Exemplo 1.9.3. .

1. $\exists|x,\ x+1=7$(*"existe um único número* x*, tal que* $x+1=7$*");*

2. $\exists|x,\ x+2>3$ (*"existe um só número* x*, tal que* $x+2>3$*").*

1.10 Negação de Proposições Quantificadas

Uma sentença quantificada com o quantificador universal, do tipo $(\forall x, p(x))$, é negada assim: Substitui-se o quantificador universal pelo quantificador existencial e nega-se a proposição $p(x)$, obtendo: $\exists x, \sim (p(x))$.

Exemplo 1.10.1. .

1. *Sentença:* $\forall x,\ x+3=5$
   Negação: $\exists x,\ x+3\neq 5$

2. *Sentença: Todo losango é um quadrado.*
   Negação: Existe um losango que não é um quadrado.

Uma sentença quantificada com o quantificador existencial, do tipo $(\exists x, p(x))$, é negada assim: Substitui-se o quantificador existencial pelo quantificador universal e nega-se a proposição $p(x)$, obtendo: $\forall x, \sim (p(x))$.

Exemplo 1.10.2. .

1. *Sentença:* $\exists a,\ a+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{3}$
   Negação: $\forall,\ a+\frac{1}{2}<\frac{1}{3}$

2. *Sentença:* $\exists a,\ \frac{1}{a}\in\mathbb{R}$
   Negação: $\forall a\ \frac{1}{a}\notin\mathbb{R}$

1.11 Métodos de Demonstração

Até este momento, demonstramos as proposições através das tabelas-verdade. Mas existe outro método de demonstração, método dedutivo, é uma maneira mais eficiente de verificar a validade das proposições. O método dedutivo é um processo de obter uma regra através de definições e resultados já conhecidos. O método dedutivo necessita de alguns elementos.

1. **Noções Primitivas:** São noções adotadas sem definição. A maioria das noções matemáticas são obtidas por meio de outras noções. Exemplo clássico são as noções primitivas em Geometria, onde são adotadas as noções de ponto, reta e plano sem definição.

2. **Axiomas ou Postulados:** Assim como as noções, os axiomas ou postulados são os primeiros resultados que não pode ser demonstrados. Os axiomas diferem das noções por serem resultados relativos a noções apresentados.

3. **Definição** São noções dadas através de outras noções ou resultados obtidos anteriormente.

4. **Resultados:** Resultados em matemática recebem alguns nomes especiais.

   Propriedades: Resultados relacionados especificamente a um certo objeto matemático;

   Proposições: Resultados simples que estão dentro de um certo contexto;

   Lemas: Resultados que são utilizados para demonstrar outros resultados;

   Teoremas: Resultados não-triviais que abrangem contextos mais gerais;

   Corolários: Consequências imediatas dos teoremas.

Esses nomes apresentados são para resultados matemáticos que já foram demonstrados. Existem proposições em matemática, que apesar de serem intuitivamente verdadeiras, não foram demonstradas. Essas proposições são chamadas conjecturas.

Exemplo 1.11.1. Conjectura de Goldbach
"Todos número par maior do que 2 é a soma de 2 números primos"

Definição 1.11.1. *Um* argumento *é uma sequência finita de* $n+1$ *proposições* $H_1, H_2, ..., H_n, T$, *onde* $H_1, H_2, ..., H_n$ *são chamadas hipóteses ou premissas e* T *é denominada tese ou conclusão.*

Notação:$H_1, H_2, ..., H_n \vdash T$.

Definição 1.11.2. *Um* silogismo *é um argumento constituído de duas hipóteses e uma conclusão, ou seja:* $H_1, H_2 \vdash T$

Exemplo 1.11.2. *Considere o argumento(que é um silogismo),*$H_1, H_2 \vdash T$*, onde:*

- H_1 : *Ter tempo é ter dinheiro*
- H_2 : *Quem não trabalha tem muito tempo.*
- T : *Quem não trabalha tem muito dinheiro.*

Observe que a hipótese H_1 nem sempre é verdadeira, a hipótese H_2 pode ser considerada sempre verdadeira e a conclusão T não é necessariamente verdadeira. Apesar disso, vemos que, quando H_1 e H_2 são verdadeiras, temos que T é verdadeira. Isso nos leva a crer na "validade" do argumento.

Exemplo 1.11.3. *Considere o argumento(outro silogismo),*$H_1, H_2 \vdash T$*, onde:*

- H_1 : *Penso, logo existo.*
- H_2 : *Pedras não pensam.*
- T : *Pedras não existem.*

Note que a hipótese H_1 é verdadeira, a hipótese H_2 também é verdadeira e a conclusão T é falsa. Assim, se temos todas as hipóteses verdadeiras com conclusão falsa, parece-nos razoável dizer que esse argumento não é válido.

Definição 1.11.3. *Sejam* $H_1, H_2, ..., H_n$ *e* T *proposições quaisquer. Diremos que o argumento* $H_1, H_2, ..., H_n \vdash T$ *é* válido *se a tese* T *for verdadeira sempre que as hipóteses* $H_1, H_2, ..., H_n$ *tiverem valor lógico verdadeiro.*

Teorema 1.11.1. *Um argumento* $H_1, H_2, ..., H_n \vdash T$ *é válido se, e somente se,* $H_1 \wedge H_2 \wedge ... \wedge H_n \Rightarrow T$

Definição 1.11.4. *Seja* $H_1, H_2, ..., H_n \vdash T$ *um argumento válido, e* $H_1, H_2, ..., H_n, T_1, T_2, ..., T_p, T$ *proposições que forneceram a validade do argumento. Essa sequência é chamada de* demonstração *e a conclusão* T *é denominada resultados.*

Para efetuar uma demonstração, utilizaremos a seguinte tabela: Na primeira coluna enumere as linhas, na segunda coluna comece colocando as hipóteses e depois pelas proposições, e na terceira coluna coloque as justificativas. O objetivo é obter na última linha da tabela, a conclusão T.

Ordem	Proposição	Justificativa
1	H_1	Hipótese 1
2	H_2	Hipótese 2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	H_n	Hipótese n
$n+1$	T_1	Justificativa 1
$n+2$	T_2	Justificativa 2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n+p$	T_p	Justificativa p
$n+p+1$	T	Justificativa $p+1$

Na lógica formal, para a verificação da validade de um argumento, podemos utilizar três tipos de demonstração: *direta*, *direta condicional* e *indireta*.
Demonstração Direta: Na demonstração direta, utilizamos o procedimento apresentado na Tabela 1.11.

Exemplo 1.11.4. *Considere o argumento* $H_1, H_2, H_3, H_4 \vdash T$, *onde:*

- H_1 : *Todos os advogados são ricos.*
- H_2 : *Os poetas são temperamentais.*
- H_3 : *Mané é um advogado.*
- H_4 : *Nenhuma pessoa temperamental é rica.*
- T : *Mané não é um poeta.*

Ordem	Proposição	Justificativa
1	(Para todo x)(x é advogado condiciona x é rico)	Hipótese 1
2	(Para todo x)(x é poeta condiciona x é temperamental)	Hipótese 2
3	Mané é um advogado	Hipótese 3
4	(para todo x)(x é temperamental condiciona x não é rico)	Hipótese 4
5	Mané é advogado condiciona Mané é rico	Por 1
6	Mané é rico	Por $3, 5$
7	Mané é temperamental condiciona Mané não é rico	Por 4
8	Mané não é temperamental	Por $6, 7$
9	Mané é poeta condiciona Mané é temperamental	Por 2
10	Mané não é poeta	Por $8, 9$

Demonstração Direta Condicional: A demonstração direta condicional pode ser feita quando a conclusão é uma condicional, ou seja, quando o argumento é do tipo:

$$H_1, H_2, ..., H_n \vdash H \rightarrow T.$$

Para iso, considera-se a antecedente H como uma hipótese adicional, e a consequente T a tese a ser demonstrada. Assim, argumento modificado fica da forma:

$$H_1, H_2, ..., H_n, H \vdash T.$$

Demonstração Indireta: Alguns argumentos são mais facilmente validados quando se utiliza a negação da tese, a chamada *prova por absurdo.*

Exemplo 1.11.5. *Mostre que* $\sqrt{2}$ *não é um número racional.*

Demonstração. Método indireto. □

1.12 Princípio da Indução Finita

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ o conjunto dos números naturais e considere $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$. Considere $P(n)$ uma afirmação sobre o número natural n. O objetivo é provar que a afirmação $P(n)$ é verdadeira ou não sobre n.

Exemplo 1.12.1. .

1. $P(n)$: *A soma dos* n *primeiros números ímpares é* n^2, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
   $P(1) : 1 = 1^2;$
   $P(2) : 1 + 3 = 4 = 2^2;$

$P(3): 1+3+5=9=3^2$;
$P(4): 1+3+5+7=16=4^2$.

2. $P(n)$:, n^2-n+41 *é um número primo* $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
$n=1$,$P(1): 1-1+41=41$;
$n=2$,$P(2): 2^2-2+41=43$;
$n=3$,$P(3): 3^2-3+41=47$;
$n=4$,$P(4): 4^2-4+41=53$.
....
$n=40$,$P(40): 40^2-40+41=1601$
$n=41$, $P(41): 41^2-41+41=41^2$

3. $P(n)$: *Todo número n par e maior que* 2 *é a soma de* 2 *números primos.*
$n=4$,$P(4): 4=2+2$;
$n=6$,$P(6): 6=3+3$;
$n=8$,$P(8): 8=5+3$;
$n=10$,$P(10): 10=7+3$
....
Até hoje não se sabe se é verdadeira ou não.

Princípio da Indução Finita(PIF): Dado $a \in \mathbb{N}$, seja $P(n)$ uma sentença associado a cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq a$. Suponhamos que:

(i)$P(a)$ é verdadeira;

(ii) Para $k \geq a$, $P(k)$ verdadeira $\Rightarrow P(k+1)$ também é verdadeira. Então $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq a$.

Observação 1.12.1. *A hipótese "P(k) verdadeira " em (ii) é chamada de* Hipótese de Indução*(H.I.)*

Exemplo 1.12.2. *Demonstre as seguintes afirmações por indução:*

1. *A soma dos n primeiros números naturais é* $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
$P(n): 1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. *A soma dos n primeiros números ímpares é* n^2.
$P(n): 1+3+5+...+(2n-1)=n^2$.

3. A soma dos quadrados dos n primeiros naturais é igual a $\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$
$P(n): 1^2+2^2+3^2+4^2+...+n^2=\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$.

1.13 Exercícios

1- Quais proposições são verdadeiras.

(a) $5.4=20$

(b) $5-4=3$

(c) $2+(7.3)=(5.4)+3$

(d) $5(3+1)=(5.3)+(5.1)$

(e) $1+3\neq 1+6$

(f) $(-2)^5\geq(-2)^3$

2- Qual é a negação de cada uma das seguintes proposições ? Que negações são verdadeiras?

(a) $3.7=21$

(b) $3.(11-7)\neq 5$

(c) $3.2+1>4$

(d) $5.7-2\leq 5.6$

(e) $\left(\frac{1}{2}\right)^7<\left(\frac{1}{2}\right)^3$

(f) $\sqrt{2}<1$

3- Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das seguintes proposições compostas :

(a) $3>1$ e $4>2$

(b) $3>1$ ou $3=1$

(c) $2\mid 4$ ou $2\mid(4+1)$

(d) $3(5+2)=3.5+3.2$ e $3\mid 7$

(e) $\frac{1}{2}<\frac{3}{4}$ ou $5\mid 11$

(f) $(-1)^6=-1$ e $2^5<(-2)^7$

4- Classifique em verdadeira ou falsa cada uma das proposições abaixo :

(a) $2-1=1\rightarrow 5+7=3.4$

(b) $2^2=4\leftrightarrow(-2)^2=4$

(c) $5 + 7.1 = 10 \to 3.3 = 9$

(d) $mdc(3, 6) = 1 \leftrightarrow 4$ é um número primo

(e) $2 \mid 8 \to mmc(2, 8) = 2$

(f) $6 \leq 2 \leftrightarrow 6 - 2 \geq 0$

5- Admitindo que p e q são verdadeiras e r é falsa, determine o valor lógico (V ou F) de cada proposição abaixo.

(a) $p \to r$

(b) $p \leftrightarrow q$

(c) $r \to p$

(d) $(p \vee r) \leftrightarrow q$

(e) $p \to (q \to r)$

(f) $p \to (q \vee r)$

6- Verifique, por meio das tabelas-verdades, a validade das equivalências abaixo.

(a) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

(b) $p \wedge p \Leftrightarrow p$

(c) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

(d) $p \vee p \Leftrightarrow p$

(e) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(f) $\sim (\sim p) \Leftrightarrow p$

7-Transforme as seguintes sentenças abertas em proposições verdadeiras usando quantificadores.

(a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

(b) $(a + 1)(a - 1) = a^2 - 1$

(c) $\frac{y}{3} + \frac{y}{4} \neq \frac{y}{7}$

(d) $-(-x) = x$

(e) $5a + 4 \leq 11$

(f) $x + 1 = 7$

8-Qual é a negação de cada proposição abaixo.

(a) $mdc(2, 3) = 1 \quad \text{ou} \quad mmc(2, 3) \neq 6$

(b) $\dfrac{3}{5} = \dfrac{6}{10} \quad \text{ou} \quad 3.10 \neq 6.5$

(c) $\dfrac{3}{7} \geq 1 \quad \text{e} \quad (-3) \geq (-7)$

(d) $(2)^2 = 4 \rightarrow \sqrt{4} = 2$

(e) $(-3)^2 = 9 \rightarrow \sqrt{9} \neq -3$

(f) $2 \leq 5 \rightarrow 3^2 \leq 5^2$

9- Considere as proposições

$$p : \text{Está frio} \;\text{ e }\; q : \;\text{Está chovendo.}$$

Construa uma frase que descreva cada umas das seguintes proposições.

(a) $\sim p$

(b) $p \wedge q$

(c) $p \vee q$

(d) $p \leftrightarrow q$

(e) $p \rightarrow \;\; q$

(f) $q \vee \sim p$

10- Demonstre usando o princípio da indução finita:

(a) $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2} \;\; n \geq 1$

(b) $1 + 3 + 5 + 7 + ... + (2n-1) = n^2 \;\; n \geq 1$

(c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \;\; n \geq 1$

Capítulo 2

Logaritmos

2.1 Potenciação

Definição 2.1.1. *Sejam* $a \in \mathbb{R}$ *e* $n \in \mathbb{N}$*. Definimos potência de base* a *e expoente* n*,o número* a^n*, tal que:*

$$\begin{cases} a^0 = 1 & para \quad a \neq 0 \\ a^n = aa....a & \forall n \geq 1 \end{cases}$$

Exemplos 2.1.1.

1. $5^0 = 1$
2. $(-3)^0 = 1$
3. $4^1 = 4$
4. $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$
5. $(\frac{2}{3})^4 = \frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3}.\frac{2}{3} = \frac{16}{81}$
6. $0^2 = 0.0 = 0$
7. $0^1 = 0$

Propriedades: Se $a, b \in \mathbb{R}$ e $m, n \in \mathbb{N}$ com $a \neq 0$ e $n \neq 0$, vale:

(P_1) $a^m a^n = a^{m+n}$;

(P_2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, com $a \neq 0$, $m \geq n$;

(P_3) $(a.b)^n = a^n.b^n$;

(P_4) $(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$

(P_5) $(a^m)^n = a^{m.n}$.

Definição 2.1.2. *Seja $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Define-se a potência de a^{-n} por:*

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Exemplos 2.1.2.

1. $3^{-1} = \frac{1}{3}$
2. $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$
3. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} = \frac{1}{(-\frac{1}{3})^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9$
4. $(\frac{2}{3})^{-3} = \frac{1}{(\frac{2}{3})^3} = \frac{1}{\frac{8}{9}} = \frac{9}{8}$

Observação 2.1.1. *Temos que $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, com $a \neq 0$.*

Definição 2.1.3. *Dado $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Dizemos que b é a raiz n-ésima de a se $b^n = a$.*

Notação: $\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$
Observe que $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Exemplos 2.1.3.

1. $\sqrt[5]{32} = 2$, pois $2^5 = 32$
2. $\sqrt[3]{8} = 2$, pois $2^3 = 8$
3. $\sqrt{9} = 3$, pois $3^2 = 9$
4. $\sqrt[7]{0} = 0$, pois $0^7 = 0$
5. $\sqrt[6]{1} = 1$, pois $1^6 = 1$

Observação 2.1.2. *Note que $(\sqrt[n]{a})^n = a$, pois $(\sqrt[n]{a})^n = (a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n}.n} = a^1 = 0$.*

Propriedades: Sejam $a, b \in R_+$, $n, p \in \mathbb{N}^*$ e $m \in \mathbb{Z}$, então:

(R_1) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n.p]{a^{m.p}}$;

(R_2) $\sqrt[n]{a.b} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$;

(R_3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;

(R_4) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$;

(R_5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$.

Definição 2.1.4. *Dados $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*)$, define-se potência de base a e expoente $\frac{p}{q}$ por:*

$$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Observação 2.1.3. *:*

- *Se $a = 0$ e $\frac{p}{q} > 0$, definimos $0^{\frac{p}{q}} = 0$;*
- *Toda potência de base positiva e expoente racional é um real positivo.*

Exemplos 2.1.4.

1. $3^{\frac{1}{2}} =$
2. $2^{\frac{1}{3}} =$
3. $7^{\frac{-2}{3}} =$
4. $(\frac{2}{3})^{\frac{-1}{3}} =$

Propriedades: Sejam $a, b \in R_+^*$, $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, então:

(P_1) $a^{\frac{p}{q}}.a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}}$;

(P_2) $\frac{a^{\frac{p}{q}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}}$;

(P_3) $(a.b)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}}.b^{\frac{p}{q}}$;

(P_4) $(\frac{a}{b})^{\frac{p}{q}} = \frac{a^{\frac{p}{q}}}{b^{\frac{p}{q}}}$;

(P_5) $(a^{\frac{p}{q}})^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{p}{q}.\frac{r}{s}}$.

Definição 2.1.5. *Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$ e x um número irracional $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Definimos a potência de a pelo número x através de aproximações racionais do número x.*

Por exemplo, quanto vale $5^{\sqrt{2}}$? Podemos tomar aproximações racionais de $\sqrt{2}$, como : $1;\ 1,4;\ 1,41;\ 1,414;....$ Assim, os valore são: $5^1, 5^{1,4}, 5^{1,41}, 5^{1,414}, ...$ A sequência se aproxima cada vez mais de $5^{\sqrt{2}}$.

Definição 2.1.6. *Como já definimos as potências de base $a (a \in \mathbb{R}_+^*)$ e expoente b (racional ou irracional), então está definida a potência a^b, com $a \in \mathbb{R}_+^*$ e $b \in \mathbb{R}$.*

Observação 2.1.4.

- $a > 0 \Rightarrow a^b > 0,\ \forall b \in \mathbb{R}$
- Todas as propriedades são válidas para as potências de expoente real.

2.2 Função Exponencial

Definição 2.2.1. *Dado $a \in \mathbb{R}$, com $0 < a \neq 1$. Chamamos de* **função exponencial de base** a *, a função*

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \to f(x) = a^x \end{aligned} \tag{2.1}$$

Exemplos 2.2.1. .

(a) $f(x) = 2^x$

(b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

(c) $f(x) = (\sqrt{2})^x$

Propriedades:

1. Se $x = 0$, temos $f(0) = a^0 = 1$.

2. A função exponencial $f(x) = a^x$ é crescente se $a > 1$, ou seja, se $a > 1$ e $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = a^{x_1} < f(x_2) = a^{x_2}$.

3. A função exponencial $f(x) = a^x$ é decrescente se $0 < a < 1$, ou seja, se $0 < a < 1$ e $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) = a^{x_2} < f(x_1) = a^{x_1}$.

4. A função exponencial $f(x) = a^x$, com $0 < a \neq 1$ é injetora. De fato, dados $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{R}$, podemos supor $x_1 < x_2$, então:

   - Se $a > 1$, pelo item 3, temos $f(x_1) < f(x_2)$, ou seja, $f(x_1) \neq f(x_2)$

   - Se $0 < a < 1$, pelo item 4, temos $f(x_2) < f(x_1)$, ou seja, $f(x_1) \neq f(x_2)$;

5. Sendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ e $b \in \mathbb{R}$, temos: $a^b > 1 \Leftrightarrow b > 0$.

6. Sendo $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$ e $b \in \mathbb{R}$, temos: $a^b > 1 \Leftrightarrow b < 0$.

Gráfico da função exponencial

Seja $a \in \mathbb{R}_+$, tal que $0 < a \neq 1$. Definimos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = a^x$. Note que $a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, por definição de a. Vamos construir o gráfico da função , observando os seguintes itens:

1. Como $f(x) > 0$, o gráfico da função esta todo acima do eixo x;

2. Corta o eixo y no ponto 1, pois $f(0) = a^0 = 1$, para qualquer a;

3. Se $a > 1$, f é crescente;

4. Se $0 < a < 1$, f é decrescente;

5. Gráficos:

Exemplo 2.2.1. *Construa o gráfico das seguintes funções:*

(a) $f(x) = 2^x$

(b) $f(x) = (\frac{1}{2})^x$

(c) $f(x) = e^x$

2.3 Equações Exponenciais

Definição 2.3.1. *Equações exponenciais são equações com incógnita no expoente. Por exemplo:*

$2^x = 64$, $(\sqrt{3})^x = \sqrt[x]{81}$, $4^x - 2^x = 2$.

Objetivo: Reduzir os membros da equação para uma mesma base, logo:

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y (0 < a \neq 1)$$

.

Exemplo 2.3.1. *Resolva as seguintes equações exponenciais.*

(a) $2^x = 64$

(b) $8^x = \frac{1}{32}$

(c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}$

(d) $(2^x)^{x-1} = 4$

(e) $3^{2x-1}.9^{3x+4} = 27^{x+1}$

(f) $4^x - 2^x = 56$

2.4 Inequações Exponenciais

Definição 2.4.1. *Inequações exponenciais são as inequações com incógnita no expoente. Por exemplo:*

$2^x > 32, \qquad (\sqrt{5})^x > \sqrt[3]{25}, \qquad 4^x - 2 > 2^x$

Objetivo: Reduzir os membros da inequação a uma mesma base. Se $x, y \in \mathbb{R}$, então:

- para $a > 1$, têm-se $a^x < a^y \Leftrightarrow x < y$
- para $0 < a < 1$, têm-se $a^x < a^y \Leftrightarrow x > y$

Exemplo 2.4.1. *Resolva as seguintes inequações exponenciais.*

(a) $2^x > 128$

(b) $(\frac{3}{5})^x \geq \frac{125}{27}$

(c) $(\sqrt[3]{2})^x < \sqrt[4]{8}$

(d) $(3^x)^{2x-7} > \frac{1}{27}$

(e) $(\frac{1}{2^x})^{3x+1}.4^{1+2x-x^2} \geq (\frac{1}{8})^{x-1}$

(f) $2^x - 1 > 2^{1-x}$

Exercícios:

1. Construa o gráfico da função em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2^x + 1$.

2. Resolva as equações exponenciais:

   (a) $3^{2x+1} + \frac{1}{3^{1-2x}} = 10$;

   (b) $(0,01)^x = \frac{1}{\sqrt{1000}}$.

3. Resolva as seguintes inequações;

   (a) $4 < 8^{|x|} < 32$

   (b) $(0,001)^x \leq \frac{0,1}{\sqrt{1000}}$

2.5 Logaritmos

Definição 2.5.1. *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, *com* $a \neq 1$. *Chama-se* **logaritmo** *de* b *na base* a *o expoente* x, *tal que* $a^x = b$

Notação: $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$. Dizemos que a é a base do logaritmo, b é logaritmando e x é o logaritmo.

Exemplo 2.5.1. *Determine os seguintes logaritmos:*

(a) $\log_2 8 =$

(b) $\log_3 \frac{1}{9} =$

(c) $\log_7 1 =$

(d) $\log_5 5 =$

(e) $\log_8 4 =$

(f) $\log_{0,2} 25 =$

Definição 2.5.2. *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, *com* $a \neq 1$. *Se* $\log_a b = x$, *dizemos que* b *é o* **antilogaritmo** *de* x *na base* a.

Notação: $\log_a b = antlog_a x = b \Leftrightarrow a^x = b$.

Exemplo 2.5.2. *Determine os seguintes antilogaritmo:*

(a) $antilog_3 2 =$

(b) $antilog_{\frac{1}{2}} 3 =$

(c) $\log_2(-2) =$

Observação 2.5.1. *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, *com* $a \neq 1$.

1. $\log_a 1 = 0, \forall a$.
2. $\log_a a = 1, \forall a$.
3. $a^{\log_a b} = b$.
4. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$
5. *Se* $a = 10$, *chamamos de logaritmo decimal, denotando apenas por* $\log$.

6. *Se* $a = e$, *chamamos de logaritmo natural ou neperiano, denotado por* $\ln$.

Propriedades dos logaritmos:

1. **Logaritmo do Produto**

   Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, com $a \neq 1$, então:

$$\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$$

   Observação 2.5.2. *Se* $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}_+^*$ *e* $b_1.b_2.\cdots.b_n > 0$, *então:*

$$\log_a(b_1.b_2.\cdots.b_n) = \log_a |b_1| + \log_a |b_2| + \cdots + \log_a |b_n|.$$

   Exemplo 2.5.3. *:*

   (a) $\log_5(3.4) =$

   (b) $\log_4(2.3.5) =$

   (c) $\log_2((-4).(-7)) =$

   (d) $\log_2[x.(x+1)] =$

   (e) $\log_5[x.(x-2)] =$

2. **Logaritmo do Quociente**

   Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, com $a \neq 1$, então:

$$\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

   Observação 2.5.3. *Se* $b = 1$ *então* $\log_a \frac{1}{c} = \log_a 1 - \log_a c = -\log_a c$.

   Exemplo 2.5.4. *:*

   (a) $\log_5(\frac{2}{3}) =$

   (b) $\log(\frac{3.5}{7}) =$

   (c) $\log(\frac{3}{5.7}) =$

   (d) $\log_2(\frac{x}{x+1}) =$

   (e) $\log_3(\frac{x+1}{x-1}) =$

3. **Logaritmo da Potência**

   Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, com $a \neq 1$ e $y \in \mathbb{R}$ então:

$$\log_a(b^y) = y. \log_a b$$

Observação 2.5.4. *.*

- $\log_a \sqrt[n]{b} = \log_a b^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log_a b.$
- *Seja* $b^y > 0$*, mas não sabemos o valor de* b*, então:* $\log_a b^y = y\log_a |b|$

Exemplo 2.5.5. *:*

(a) $\log_3 2^5 =$

(b) $\log \sqrt[4]{3} =$

(c) $\log_2(\frac{1}{3^4}) =$

(d) $\log(x-1)^4 =$

(e) $\log x^2 =$

4. **Mudança de base**

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, com $a \neq 1$ e $c \neq 1$ então:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Observação 2.5.5. *.*

- *Sejam* $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ *e* $a \neq 1$ *e* $c \neq 1$*, então:* $\log_b a = \log_c b.\log_a c.$
- *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}^*$ *e* $a \neq 1$ *e* $b \neq 1$*, então:* $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}.$
- *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}^*$ *e* $a \neq 1$ *,* $b \neq 1$ *e* $y \neq 0$ *então:* $\log_{a^y} b = \frac{1}{y}.\log_a b$

Exemplo 2.5.6. *:*

(a) $\log_3 5$ *convertido para a base* 2 *é:*

(b) $\log_2 7$ *convertido para a base* 10 *é:*

(c) $\log_{100} 3$ *convertido para a base* 10 *é:*

2.6 Função Logarítmica

Dado $a \in \mathbb{R}$, com $0 < a \neq 1$, chamamos função logarítmica de base a a função f definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \to & f(x) = \log_a x \end{aligned} \tag{2.2}$$

Exemplo 2.6.1. .

(a) $f(x) = \log_2 x$

(b) $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

(c) $h(x) = \log x$

(d) $p(x) = \ln x$

Propriedades:

1. Se $0 < a \neq 1$, então as funções $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $g(x) = a^x$ são inversa uma da outra.

2. Se $a > 1$, então $f(x) = \log_a x$ é crescente, ou seja, se $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

3. Se $0 < a < 1$, então $f(x) = \log_a x$ é decrescente, ou seja, se $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

   Exemplo 2.6.2. *Determine qual é a desigualdade para as seguintes funções logarítmicas:*

   (a) $\log_2 4; \log_2 2$*;*

   (b) $\log \sqrt{5}; \log 7$*;*

   (c) $\ln 0,3; \log 4$*;*

   (d) $\log_{\frac{1}{2}} 8; \log_{\frac{1}{2}} 2$*;*

   (e) $\log_{0,1} \sqrt{3}; \log_{0,1} 7$*;*

   (f) $\log_{0,2} 0,3; \log_{0,2} 2,4$*;*

4. Se $a > 1$, temos
   $0 < x < 1 \Leftrightarrow \log_a x < \log_a 1 \Leftrightarrow \log_a x < 0$;
   $x > 1 \Leftrightarrow \log_a x > \log_a 1 \Leftrightarrow \log_a x > 0$.

5. Se $0 < a < 1$, temos
   $0 < x < 1 \Leftrightarrow \log_a x > \log_a 1 \Leftrightarrow \log_a x > 0$;

   $x > 1 \Leftrightarrow \log_a x < \log_a 1 \Leftrightarrow \log_a x < 0$.

   Exemplo 2.6.3. *Quais funções abaixo são positivas e quais são negativas?*

   (a) $\log_2 0,25$*;*

   (b) $\log_2 32$*;*

(c) $\ln 0,3; \log 4$*;*

(d) $\log_{0,1} 0,003$*;*

(e) $\log_{0,2} \sqrt{3}$*;*

Antes de analisarmos o gráfico de uma função logarítmica, faremos uma breve revisão sobre **Equação do Segundo Grau**.

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in R$. Lembre-se que $\Delta = b^2 - 4.a.c$.

Característica da função f:

1. O gráfico de f é uma parábola.

2. Se $a > 0$ a parábola têm concavidade voltada para cima.
   Se $a < a$ a parábola tem concavidade voltada para baixo.

3. Se $\Delta > 0$ então f têm duas raízes reais, $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
   Se $\Delta = 0$ então f têm uma raiz real $x_1 = \dfrac{-b}{20 = a}$.
   Se $\Delta < 0$ então f não possui nenhuma raiz real.

4. Analisar o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

   (a) $a > 0$ e $\Delta > 0$.
   $f(x) > 0 \Leftrightarrow x < x_1$ ou $x > x_2$
   $f(x) < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ ou $x = x_1$ ou $x = x_2$

   (b) $a > 0$ e $\Delta = 0$.
   $f(x) > 0, \forall x \neq x_1$
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x$
   $\nexists x; f(x) < 0$

   (c) $a > 0$ e $\Delta < 0$.
   $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
   $\nexists x; f(x) \leq 0$

   (d) $a < 0$ e $\Delta > 0$.
   $f(x) > 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2$
   $f(x) < 0 \Leftrightarrow x < x_1$ ou $x > x_2$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ ou $x = x_1$ ou $x = x_2$

(e) $a < 0$ e $\Delta = 0$.
$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \neq x_1$
$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$
$\nexists x; f(x) > 0$

(f) $a < 0$ e $\Delta < 0$.
$f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$
$\nexists x; f(x) \geq 0$

Gráfico da função $f(x) = \log_a x$

Seja $a \in \mathbb{R}$ com $a \neq 1$, então:

1. Está todo à direita do eixo y, pois $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. Corta o eixo x no ponto 1, pois $\log_a 1 = 0$.
3. Se $a > 1$ a função é crescente, e se $0 < a < 1$ a função é decrescente.
4. $Im\ f = \mathbb{R}$
5. Gráficos:

Exemplo 2.6.4. *Construa o gráfico das seguintes funções:*

(a) $f(x) = \log_2 x$.

(b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

2.7 Equações Exponenciais e Logarítmicas

-Equações Exponenciais

A resolução de equações exponenciais que não têm a mesma base, pode ser resolvida da seguinte forma:

Se $0 < a \neq 1$ e $b > a$, então:

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b.$$

Exemplo 2.7.1. *Resolva as seguintes equações exponenciais:*

(a) $2^x = 3 \Rightarrow$

(a) $5^{2x-3} = 3 \Rightarrow$

(a) $2^{3x-2} = 3^{2x+1} \Rightarrow$

-Equações Logarítmicas:

1º**Tipo:** $\log_a f(x) = \log_a g(x)$.

Se $0 < a \neq 1$, então $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x) > 0$.

Exemplo 2.7.2. *Resolva as equações:*

(a) $\log_2(3x-5) = \log_2 7$

(b) $\log_3(2x-3) = \log_3(4x-5)$

(c) $\log_5(x^2-3x-10) = \log_5(2-2x)$

2º**Tipo:** $\log_a f(x) = y$.

Se $0 < a \neq 1$ e $y \in \mathbb{R}$ então $\log_a f(x) = y \Rightarrow f(x) = a^y$.Note que, como $a > 0$ então $a^y > 0$.

Exemplo 2.7.3. *Resolva as equações:*

(a) $\log_2(3x+1) = 4$

(b) $\log_3(x^2+3x-1) = 2$

(c) $\log_2(1+\log_3(1-2x)) = 2$

1º**Tipo:**Incógnita Auxiliar

Exemplo 2.7.4. *Resolva as equações:*

(a) $\log_2^2 x - \log_2 x = 2$

(b) $\frac{2+\log_3 x}{\log_3 x} + \frac{\log_3 x}{1+\log_3 x} = 2$

2.8 Inequações Exponenciais e Logarítmicas

Inequações Exponenciais

A resolução de uma inequação exponencial depende do crescimento ou decrescimento da função logarítmica. De fato, se $a^x > 0$, $b > 0$ e $0 < c \neq 1$, temos:

$$\text{(I)}\;\; a^x > b \Leftrightarrow \begin{cases} \log_c a^x & > & \log_c b & se & \;\;\; c > 1 \\ \log_c a^x & < & \log_c b & se & 0 < c < 1 \end{cases}$$

$$\text{(II)}\;\; a^x < b \Leftrightarrow \begin{cases} \log_c a^x & < & \log_c b & se & \;\;\; c > 1 \\ \log_c a^x & > & \log_c b & se & 0 < c < 1 \end{cases}$$

Exemplo 2.8.1. *Resolva a inequação exponencial* $3^x > 2$

Inequações Logarítmicas

A resolução de inequações logarítmicas se dá de 3 formas:

1ºtipo: $\log_a f(x) > \log_a g(x)$.

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$, então:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) > 0 & se & \;\;\; a > 1 \\ & ou & \\ 0 < f(x) < g(x) & se & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Exemplo 2.8.2. *Resolva as inequações:*

(a) $\log_2(2x - 1) < \log_2 6$

(b) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 4x) > \log_{\frac{1}{3}} 5$

2ºtipo: $\log_a f(x) > k$ ou $\log_a f(x) < k$.

Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a \neq 1$, então:

$$\log_a f(x) > k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > a^k & se & \;\;\; a > 1 \\ & ou & \\ 0 < f(x) < a^k & se & 0 < a < 1 \end{cases}$$

$$\log_a f(x) < k \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < a^k & se & \;\;\; a > 1 \\ & ou & \\ f(x) > a^k & se & 0 < a < 1 \end{cases}$$

Exemplo 2.8.3. *Resolva as inequações:*

(a) $\log_3(3x+2) < 2$

(b) $\log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 7x + 5) \leq -2$

3^{o}**tipo:** Incógnita Auxiliar:

Exemplo 2.8.4. *Resolva a inequação:* $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 > 2$.

2.9 Exercícios

1. Calcule.

   (a) $(-3)^2$

   (b) -3^2

   (c) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$

   (d) $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^4$

   (e) 3^{-1}

   (f) $(-3)^{-2}$

   (g) $-\left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}$

   (h) $-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$

   (i) $(0,1)^{-2}$

   (j) $(-0,5)^{-3}$

   (k) $\dfrac{1}{(0,001)^{-2}}$

2. Classifique em verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo:

   (a) $5^3.5^2 = 5^6$

   (b) $3^6 : 3^2 = 3^3$

   (c) $2^3.3 = 6^3$

   (d) $(2+3)^4 = 2^4 + 3^4$

(e) $(5^3)^2 = 5^6$

(f) $(-2)^6 = 2^6$

(g) $(5^3)^{-6} = -5^{18}$

(h) $2^{-4} = -16$

(i) $3^{-4}.3^5 = \dfrac{1}{3}$

(j) $\dfrac{5^2}{5^{-6}} = 5^8$

3- Construa o gráfico cartesiano das seguintes funções exponenciais :

(a) $f(x) = 3^x$

(b) $g(x) = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$

4- Resolva as seguintes equações exponenciais :

(a) $2^x = 64$

(b) $8^x = \dfrac{1}{32}$

(c) $(\sqrt{3})^x = \sqrt[3]{81}$

(d) $2^{3x-1} = 32$

(e) $5^{2x^2+3x-2} = 1$

(f) $(2^x)^{x-1} = 4$

(g) $(2^x)^{x+4} = 32$

(h) $2^{3x-1} \times 4^{2x+3} = 8^{3-x}$

(i) $4^x - 2^x = 56$

(j) $4^{x+1} - 9 \times 2^x + 2 = 0$

5- Classifique em V ou F as seguintes sentenças.

(a) $3^{2,7} > 1$

(b) $(0,3)^{0,2} > 1$

(c) $\left(\frac{7}{5}\right)^{-0,32} < 1$

(d) $2^{1,3} > 2^{1,2}$

(e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2,3} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-1,7}$

(f) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{4,3} < \left(\frac{1}{\pi}\right)^{-1,5}$

(f) $2^{0,4} > 4^{0,3}$

(g) $9^{3,4} < 3^{2,3}$

6- Resolva as seguintes inequações exponenciais:

(a) $2^x > 128$

(b) $\left(\frac{3}{5}\right)^x \geq \frac{125}{27}$

(c) $(\sqrt[3]{2})^x < \sqrt[4]{8}$

(d) $(0,001)^x \leq \frac{1}{\sqrt{1000}}$

(e) $(0,008)^x > \sqrt[3]{25}$

(f) $3^{2x+3} > 243$

(g) $7^{5x-6} < 1$

(h) $(0,3)^{x^2-2x-8} \geq 1$

(i) $8^{3x^2-5x} > \frac{1}{16}$

(j) $8 < 2^x < 32$

(k) $0,0001 < (0,1)^x < 0,01$

(l) $\frac{1}{8} \leq 4^x \leq 32$

(m) $4 < 8^{|x|} < 32$

(n) $3^{2x+2} - 3^{x+3} > 3^x - 3$

(o) $2^x - 1 > 2^{1-x}$

7-Calcule pela definição os seguintes logaritmos:

(a) $\log_2 \dfrac{1}{8}$

(b) $\log_8 4$

(c) $\log_{0,25} 32$

(d) $\log_{0,01} 0,001$

(e) $\log_{\sqrt{8}} \sqrt{32}$

(f) $\log_{\sqrt{27}} \sqrt[3]{9}$

8-Calcule a soma S nos seguintes casos

(a) $S = \log_{100} 0,001 + \log_{1,5} \dfrac{4}{9} - \log_{1,25} 0,64$

(b) $S = \log_8 \sqrt{2} + \log_{\sqrt{2}} 8 - \log_{\sqrt{2}} \sqrt{8}$

(c) $S = \log_{\sqrt[3]{9}} \left(\sqrt{\dfrac{1}{27}} \right) - \log_{\sqrt[3]{0,5}}(\sqrt{8}) + \log_{\sqrt[3]{100}}(\sqrt[6]{0,1})$

9- Calcule o valor de :

(a) $8^{\log_2 5}$

(b) $3^{1+\log_3 4}$

(c) $3^{2-\log_3 6}$

(d) $9^{2-\log_3 \sqrt{2}}$

10-

(a) Sabendo que $\log 2 = 0,301$, determine o valor da expressão $\log \dfrac{125}{\sqrt[5]{2}}$.

(b) Se $\log 2 = 0,301$, calcule o valor da expressão $\log 20 + \log 40 + \log 800$.

(c) Sabendo que $\log_{30} 3 = a$ e $\log_{30} 5 = b$, calcule $\log_{10} 2$. Use o fato que $2 = \dfrac{30}{3.5}$ e $10 = \dfrac{30}{3}$.

(d) Sabendo que $\log_{14} 7 = a$ e $\log_{14} 5 = b$, calcule o valor de $\log_{35} 28$. Use o fato que $28 = \dfrac{(14)^2}{7}$.

11- Classifique em V ou F cada proposição :

(a) $\log_2 3 > \log_2 0,2$

(b) $\log_3 5 < \log_3 7$

(c) $\log_{\frac{1}{2}} 6 > \log_{\frac{1}{2}} 3$

(d) $\log_{0,1} 0,13 > \log_{0,1} 0,32$

(e) $\log_4 0,1 > \log_4 0,9$

(f) $\log_{0,2} 2,3 < \log_{0,2} 3,5$

(g) $\log \frac{1}{2} > \log \frac{1}{3}$

12- Construa os gráficos das funções :

(a) $f(x) = \log_3 x$

(b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

13- Resolva as equações exponenciais :

(a) $2^x = 3$

(b) $5^{2x-3} = 3$

(c) $7^{\sqrt{x}} = 2$

(d) $3^(x^2) = 5$

(e) $2^{3x-2} = 3^{2x+1}$

(f) $2^x = 3^{x+2}$

(g) $5^{x-1} = 3^{4-2x}$

(h) $4^x - 5 \times 2^x + 6 = 0$

(i) $9^x - 3^{x+1} - 4 = 0$

13- Resolva as equações :

(a) $\log_4(3x+2) = \log_4(2x+5)$

(b) $\log_{\frac{1}{3}}(3x^2 - 4x - 17) = \log_{\frac{1}{3}}(2x^2 - 5x - 3)$

(c) $\log_5(4x-3)=1$

(d) $\log_{\frac{1}{2}}(3+5x)=0$

14- Resolva as equações :

(a) $\log_x(2x+23)=2$

(b) $\log_4(3x^2-13x+15)=2$

(c) $\log_{(x-2)}(2x^2+5x+6)=4$

15- Resolva as inequações :

(a) $3^x>2$

(b) $2^{3x-1}\leq\dfrac{1}{5}$

(c) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\leq 5$

(d) $3^{\sqrt{x}}>4$

(e) $3^{2x-1}>2^{3x+1}$

(f) $2^{x-2}>3^{2x-1}$

16- Resolva as inequações:

(a) $\log_3(5x-2)<\log_3(4)$

(b) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)>\log_{\frac{1}{2}}(3x+9)$

(c) $\log_2(3x+5)>3$

(d) $\log_{\frac{1}{2}}(2x^2-6x+3)<1$

(e) $2<\log_2(3x+1)<4$

(f) $\dfrac{1}{2}<\log_{\frac{1}{2}}(2x)<1$

(g) $\log_2[\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x)]>0$

(h) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_2 x)<0$

Capítulo 3

Progressões:Aritmética e Geométrica

3.1 Sequência

Definição 3.1.1. *Chama-se* **sequência finita** *toda aplicação f, tal que:*

$$\begin{aligned} f :&\{1,2,3,...,n\} \subset \mathbb{N}^* \to \mathbb{R} \\ i &\to f(i) = a_i \end{aligned} \tag{3.1}$$

ou seja, $f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ..., (i, a_i), ..., (n, a_n)\}$.

Definição 3.1.2. *Chama-se* **sequência infinita** *toda aplicação f, tal que:*

$$\begin{aligned} f :&\mathbb{N}^* \to \mathbb{R} \\ i &\to f(i) = a_i \end{aligned} \tag{3.2}$$

ou seja, $f = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ..., (i, a_i), ..., (n, a_n), ...\}$.

Notação: Denotaremos uma sequência f apenas por: $f = (a_1, a_2, ..., a_i, ...)$ ou simplesmente por $f = (a_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$.

Exemplo 3.1.1. *:*

(a) $(1, 2, 3, 4, 6, 12)$ *é a sequência finita dos divisores inteiros positivos de* 12 *em ordem crescente.*

(b) $(2, 4, 6, 8, ..., 2i, ...)$ *é a sequência infinita dos múltiplos inteiros positivos de* 2.

(c) $(2, 3, 5, 7, 11, ...)$ *é a sequência infinita dos números primos.*

Definição 3.1.3. *Duas sequências infinitas $f = (a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $g = (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ são iguais quando $f(i) = g(i)$, isto é, $a_i = b_i, \forall i \in \mathbb{N}^*$. Em símbolos:*

$$f = g \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in \mathbb{N}^*.$$

Lei de Formação

1. Por fórmula de recorrência.
   São dadas duas regras, uma para identificar o primeiro termo a_1 e outro para calcular cada termo a_n a partir do antecedente a_{n-1}.

   Exemplo 3.1.2. .

   (a) *Escrever a sequência finita que obedece a seguinte lei de recorrência:* $a_1 = 2$ *e* $a_n = a_{n-1} + 3$, $\forall n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

   (b) *Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g dada ela seguinte fórmula de recorrência:* $b_1 = 1$ *e* $b_n = 3.b_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *com* $n \geq 2$.

2. Expressando cada termo em função de sua posição. É dada uma fórmula que expressa a_n em função de n.

   Exemplo 3.1.3. .

   (a) *Escrever a sequência finita* f*, cuja lei é dada por* $a_n = 2^n$, $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

   (b) *Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita* g*, cuja lei é* $b_n = 3n + 1$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

3. Por propriedade dos termos.
   É dada uma propriedade que os termos da sequência devem apresentar.

   Exemplo 3.1.4. .

   (a) *Escrever a sequência finita de seis termos em que cada termo é igual ao número de divisores inteiros do respectivo índice.*

   (b) *Escrever os cinco termos iniciais da sequência infinita g formada pelos números primos positivos colocados em ordem crescente.*

Exemplos 3.1.1. .

1. *Escreva os seis termos iniciais das sequências:*

   (a) $a_1 = 5$ *e* $a_n = a_{n-1} + 2, \forall n \geq 2$.

   (b) $a_1 = 3$ *e* $a_n = 2a_{n-1}, \forall n \geq 2$.

   (c) $a_1 = -2$ *e* $a_n = (a_{n-1})^n$, $\forall n \geq 2$.

   (d) $a_n = 3n - 2, \forall n \geq 1$.

(e) $a_n = 2.3^n, \forall n \geq 1$.

(f) $a_n = n.(n+1), \forall n \geq 1$.

2. *Descreva a fórmula de recorrência de cada sequência:*

   (a) $(3, 6, 9, 12, 15, 18, ...)$.

   (b) $(1, 2, 4, 8, 16, 32, ...)$.

   (c) $(1, -1, 1, -1, 1, -1, ...)$.

   (d) $(5, 6, 7, 8, 9, 10, ...)$.

   (e) $(0, 1, 2, 3, 4, 5, ...)$.

3.2 Progressão Aritmética

Definição 3.2.1. *Chama-se* **progressão aritmética (P.A)** *uma sequência dada pelo seguinte fórmula de recorrência:*

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$$

em que a e r são números reais dados.

a : chamado de termo inicial da P.A.
r : razão da P.A ($r = a_n - a_{n-1}$).

Exemplo 3.2.1. *Determine o termo inicial e a razão de cada P.A.*

(a) $f_1 = (1, 3, 5, 7, 9, ...)$

(b) $f_2 = (0, -2, -4, -6, ...)$

(c) $f_3 = (4, 4, 4, 4, 4, ...)$

(d) $f_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}, ...)$

(e) $f_1 = (4, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3, \frac{8}{3}, ...)$

Classificação:

1. **Crescentes:** São as P.A. onde $a_n > a_{n-1}$, ou seja, $r > 0$, pois $a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} > 0 \Leftrightarrow r > 0$.

2. **Decrescentes:** São as P.A., onde $a_n < a_{n-1}$, ou seja, $r < 0$, pois $a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} < 0 \Leftrightarrow r > 0$.

3. **Constantes:** São as P.A. em que $a_n = a_{n-1}$. Logo $r = 0$, pois $a_n = a_{n-1} \Leftrightarrow a_n - a_{n-1} = 0 \Leftrightarrow r = 0$.

Notações Especiais:

Quando procuramos obter uma P.A. com 3 ou 4 ou 5 termos, é muito prático usarmos as seguintes notações:

1. Para 3 termos:

   $(x, x+r, x+2r)$ ou $(x-r, x, x+r)$.

2. Para 4 termos:
   $(x, x+r, x+2r, x+3r)$ ou $(x - \frac{3r}{2}, x - \frac{r}{2}, x + \frac{r}{2}, x + \frac{3r}{2})$.

3. Para 5 termo:
   $(x, x+r, x+2r, x+3r, x+4r)$ ou $(x-2r, x-r, x+r, x+2r)$.

Exemplos 3.2.1. .

1. *Determine* x *de modo que* $(x, 2x+1, 5x+7)$ *seja uma P.A.*

2. *Obtenha uma P.A. de três termos, tais que a soma de seus termos seja* 24 *e o produto de seus termos seja* 440.

3. *Determine quatro números em uma P.A. crescente, conhecendo sua soma* 8 *e a soma de seus quadrados* 36.

3.2.1 Fórmula do Termo Geral da P.A.

Pela fórmula de recorrência, temos:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 + r \\ a_3 = a_2 + r \\ a_4 = a_3 + r \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} + r \end{cases}$$

Somando essas $n-1$ igualdades, temos:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + (n-1)r.$$

Então obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.1. *Na P.A. em que o primeiro termo é a_1 e a razão é r, o n-ésimo termo é:*

$$a_n = a_1 + (n-1)r \tag{3.3}$$

Exemplos 3.2.2. .

1. *Calcule o* 17^o *termo de uma P.A., cujo o primeiro termo é* 3 *e a razão é* 5.

2. *Obtenha a razão da P.A., em que o primeiro termo é o* -8 *e o vigésimo é* 30.

3. *Em uma P.A., o* 5^o *termo vale* 30 *e o vigésimo vale* 50. *Quanto vale o* 8^o *termo dessa progressão?*

3.2.2 Interpolação Aritmética

Em uma sequência finita $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ os termos a_1 e a_n são chamados extremos, e os demais são chamados de meios. Por exemplo, na sequência $(0, 3, 6, 9, 12, 15)$, os extremos são: $0, 15$ e os meios são: $3, 6, 9, 12$.

Definição 3.2.2. *Interpolar, inserir ou intercalar k meios aritméticos entre os números a e b significa obter uma P.A. de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b$, com $n = k+2$ termos.*

Para determinar essa P.A. devemos calcular a razão, ou seja:

$$a_n = a_1 + (n-1)r \Leftrightarrow b = a + (k+1)r \Leftrightarrow r = \frac{b-a}{k+1}$$

Exemplos 3.2.3. .

1. *Interpolar* 5 *meios aritméticos entre* 1 *e* 2.

2. *Quantos meios aritméticos devem ser interpolados entre* 12 *e* 34, *para que a razão da interpolação seja* $\frac{1}{2}$.

3.2.3 Soma

Vamos deduzir uma fórmula para calcular a soma S_n dos n termos iniciais de uma P.A.

Teorema 3.2.2. *A soma dos n primeiros números inteiros positivos é:*

$$\frac{n(n+1)}{2}. \tag{3.4}$$

Demonstração. □

Teorema 3.2.3. *A soma dos n primeiros termos de uma P.A. é:*

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}.r \tag{3.5}$$

Demonstração. □

Corolário 3.2.1. *Em toda P.A. tem-se:*

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}. \tag{3.6}$$

Demonstração. □

Exemplos 3.2.4. .

1. *A soma dos* 50 *termos iniciais da sequência dos inteiros positivos é:*
2. *A soma dos* 15 *termos inicias da P.A.*$(-2, 1, 4, 7, ...)$ *é:*
3. *Determine a soma dos múltiplos inteiros de* 2 *desde* 4 *até* 100.
4. *Determine a P.A. em que o vigésimo termo é* 2 *e a soma dos* 50 *termos iniciais é* 650.

3.3 Progressão Geométrica

Definição 3.3.1. *Chama-se* **progressão geométrica (P.G.)** *uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:*

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1}.q \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$$

em que a_1 é o termo inicial, a_n é o termo geral e q a razão,onde,

$$q = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = ... = \frac{a_2}{a_1}$$

.

Exemplos 3.3.1. .

(a) $f_1 = (1, 2, 4, 8, 16, ...)$, *então* $a_1 =$ *e* $q =$

(b) $f_2 = (-1, -2, -4, -8, -16...)$, *então* $a_1 =$ *e* $q =$

(c) $f_3 = (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...)$, *então* $a_1 =$ *e* $q =$

(d) $f_4 = (-54, -18, -6, -2, -\frac{2}{3}, ...)$, *então* $a_1 =$ *e* $q =$

(e) $f_5 = (7, 7, 7, 7, 7, ...)$, *então* $a_1 =$ *e* $q =$

(f) $f_6 = (5, -5, 5, -5, 5, ...)$, *então* $a_1 =$ *e* $q =$

(g) $f_7 = (3, 0, 0, 0, 0, ...)$, *então* $a_1 =$ *e* $q =$

Classificação: As progressões geométricas podem ser classificadas em cinco categorias:

1. **Crescentes:**

   (a) P.G. com termos positivos, $a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow q > 1$.

   (b) P.G. com termos negativos, $a_n > a_{n-1} \Leftrightarrow 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow 0 < q < 1$.

2. **Decrescentes:**

   (a) P.G. com termos positivos, $a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow 0 < \frac{a_n}{a_{n-1}} < 1 \Leftrightarrow 0 < q < 1$.

   (b) P.G. com termos negativos, $a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} > 1 \Leftrightarrow q > 1$.

3. **Constantes:**

   (a) P.G. com termos todos nulos, $a_1 = 0$ e q qualquer.

   (b) P.G. com termos iguais e não nulos, $a_n = a_{n-1} \Leftrightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 \Leftrightarrow q = 1$.

4. **Alternantes:**

   São as P.G. em que cada termo tem sinal contrário ao do termo anterior. Isso ocorre quando $q < 0$.

5. **Estacionários:**

   São as P.G. em que $a_1 \neq 0$ e $a_2 = a_3 = a_4 = ... = 0$. Isso ocorre quando $q = 0$.

Notações Especiais:

Quando procuramos obter uma P.G. com 3 ou 4 ou 5 termos, é muito prático usarmos as seguintes notações:

1. Para 3 termos:
   (x, xq, xq^2) ou $(\frac{x}{q}, x, xq)$.

2. Para 4 termos:
   (x, xq, xq^2, xq^3) ou $(\frac{x}{y^3}, \frac{x}{y}, xy, xy^3)$ em que $q = y^2$.

3. Para 5 termo:
   $(x, xq, xq^2, xq^3, xq^4)$ ou $(\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, xq, xq^2)$.

Exemplo 3.3.1. *Qual é o número que deve ser somado a* $1, 9, 15$ *para termos nessa ordem, três números em P.G.?*

3.3.1 Fórmula do Termo Geral da P.G

Utilizando a fórmula de recorrência de uma P.G., sabendo que $a_1 \neq 0$ e $q \neq 0$, temos: Pela fórmula de recorrência, temos:

$$\begin{cases} a_2 = a_1 q \\ a_3 = a_2 q \\ a_4 = a_3 q \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} q \end{cases}$$

Multiplicando essas $n-1$ igualdades, temos:

$$a_2 a_3 a_4 \ldots a_{n-1} a_n = a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots a_{n-1} q^{n-1}.$$

Então obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.3.1. *Na P.G. em que o primeiro termo é a_1 e a razão é q, o n-ésimo termo é:*

$$a_n = a_1 q^{n-1} \tag{3.7}$$

Exemplos 3.3.2. .

1. *Obtenha a 10^o e o 15^o termos de uma P.G.* $(1, 2, 4, 8, ...)$.
2. *Se o oitavo termo de uma progressão geométrica é $\frac{1}{2}$ e a razão é $\frac{1}{2}$, qual o primeiro termo dessa progressão?*

3.3.2 Interpolação Geométrica

Definição 3.3.2. *Interpolar, inserir ou intercalar k meios geométricos entre os números a e b significa obter uma P.G. de extremos $a_1 = a$ e $a_n = b$, com $n = k + 2$ termos.*

Para determinar essa P.G. devemos calcular a razão, ou seja:

$$a_n = a_1 q^{n-1} \Leftrightarrow b = a q^{k+1} \Leftrightarrow q = \sqrt[k+1]{\frac{b}{a}}$$

Exemplo 3.3.2. *Interpolar* 8 *meios aritméticos entre* 5 *e* 2560.

3.3.3 Produto

Vamos deduzir uma fórmula para calcular o produto P_n dos n termos iniciais de uma P.G.

$$\begin{cases} a_1 = a_1 a_2 = a_1 q \\ a_3 = a_1 q^2 \\ a_4 = a_1 q^3 \\ \vdots \\ a_n = a_1 q^{n-1} \end{cases}$$

Multiplicando essas n igualdades, temos:

$$a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_{n-1} a_n = (a_1 a_1 ... a_1)(q q^2 q^3 ... q^{n-1}).$$

Então obtemos o seguinte resultado:

Teorema 3.3.2. *Na P.G. em que o primeiro termo é a_1 e a razão é q, o produto dos n primeiros termos é:*

$$P_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \tag{3.8}$$

Exemplo 3.3.3. *Calcule o produto dos* 10 *termos iniciais da P.G.* $(1, 2, 4, 8, ...)$

3.3.4 Soma dos Termos de P.G. Finita

Seja a_1 e q valores de uma P.G.. A soma dos n termos iniciais da sequência é:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n.$$

Teorema 3.3.3. *A soma dos n termos números iniciais de uma P.G. é :*

$$Sn = \frac{a_1 q^n - a_1}{q - 1}$$

Demonstração. □

Como consequência do teorema anterior temos que :

$$Sn = \frac{a_n q - a_1}{q - 1},$$

pois $a_n = a_1 q^{n-1}$

Exemplos 3.3.3. .

1. *Calcular a soma dos* 10 *termos iniciais da P.G.*$(1, 3, 9, 27, ...)$.
2. *Calcular a soma das potências de* 5 *com expoentes inteiros consecutivos, desde* 5^2 *até* 5^{26}.

3.3.5 Soma dos termos de uma P.G. infinita

Seja $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ uma P.G. de razão q, onde, $|q| < 1$, ou seja, $-1 < q < 1$. Lembramos que $Sn = \frac{a_1 q^n - a_1}{q-1}$. Agora, como $|q| < 1$ então $q^n \to 0$, quando $n \to \infty$.

Portanto,

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Teorema 3.3.4. *Se a sequência $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ é uma P.G. de razão q, onde, $|q| < 1$, então a soma dos seus termos é:*

$$S = \frac{a_1}{1-q}.$$

Observação 3.3.1. *Se $|q| > 1$, então a soma dos elementos de uma P.G. infinita não converge.*

Exemplos 3.3.4. .

1. *Calcular a soma dos termos da P.G.* $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...)$.
2. *Calcular a soma dos termos da P.G.* $(2, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, ...)$.
3. *Calcular a geratriz das dizimas:*
   (a) $0,1414...$
   (b) $1,7111...$

3.4 Exercícios

1. Determine x de modo que $(x, 2x + 1, 5x + 7)$ seja uma P.A.
2. Obtenha uma P.A. de três termos tais que sua soma seja 24 e seu produto seja 440.
3. Obtenha 3 números em P.A. de modo que sua soma seja 3 e a soma de seus quadrados seja 11.
4. Calcule o 17° termo da P.A. cujo primeiro termo é 3 e cuja razão é 5.
5. Obtenha a razão da P.A. em que o primeiro termo é -8 e o vigésimo é 30.
6. Obtenha a P.A em que $a_{10} = 7$ e $a_{12} = -8$.
7. Quantos números ímpares há entre 14 e 192.

8. Qual é o primeiro termo negativo da P.A. $(60, 53, 46, ...)$?

9. Quantos meios aritméticos devem ser interpolados entre 12 e 34 para que a razão da interpolação seja $\frac{1}{2}$?

10. Intercale 12 meios aritméticos entre 100 e 200.

11. Quantos números inteiros e positivos, formados com 3 algarismos, são múltiplos de 13?

12. De 100 a 1000, quantos são os múltiplos de 2 ou 3?

13. Qual é a soma dos números inteiros de 1 a 350?

14. Qual é a soma dos 120 primeiros números pares positivos ?

15. Determine a $P.A.$ em que o vigésimo termo é 2 e a soma dos 50 termos iniciais é 650.

16. Se a soma dos 10 primeiros termos de uma progressão aritmética é 50 e a soma dos 20 primeiros termos também é 50, determine o valor da soma dos 30 primeiros termos.

17. Um matemático (com pretensões a carpinteiro) compra uma peça de madeira de comprimento suficiente para cortar os 20 degraus de uma escada de obra. Se os comprimentos dos degraus formam uma progressão aritmética, se o primeiro degrau mede $50cm$ e o último $30cm$ e supondo que não há desperdício de madeira no corte, termine o comprimento mínimo da peça.

18. Qual é o número que deve ser somado a $1, 9$ e 15 para termos, nessa ordem, três números em P.G.

19. Há 10 anos o preço de certa mercadoria era de $1 + x$ reais. Há 5anos era de $13 + x$ reais e hoje é $49+x$ reais. Sabendo que tal aumento deu-se em progressão geométrica e de 5 em 5 anos, determine a razão do aumento.

20. Obtenha o $10°$ e o $15°$ termos da P.G. $(1, 2, 4, 8, ...)$.

21. Se o oitavo termo de uma progressão geométrica é $\frac{1}{2}$ e a razão é $\frac{1}{2}$, qual é o primeiro termo dessa progressão ?

22. Sabendo que a população de certo município foi de 120.000 habitantes em 2012 e que essa população vem crescendo a uma taxa de 3% ao ano, determine a melhor aproximação para o número de habitantes desse município em 2015.

23. Intercale 6 meios geométricos reais entre 640 e 5.

24. Quantos meios devem ser intercalados entre 78.125 e 128 para obter uma P.G. de razão $\frac{2}{5}$?

25. Em cada uma das P.G., calcule o produtos dos n termos iniciais:

(a)$(1, 2, 4, 8, ...)$ e $n = 10$.

(b)$(-2, -6, -18, -54, ...)$ e $n = 20$.

26. Calcule a soma dos 20 termos iniciais da série $1 + 3 + 9 + 27 + ...$

27. Numa progressão geométrica de 4 termos, a soma dos termos de ordem par é 10 e a soma dos termos de ordem ímpar é 5. Determine o 4° termo dessa progressão.

28. Em um triângulo, a medida da base, a medida da altura e a medida da área formam, nessa ordem, uma P.G. de razão 8. Calcule a medida da base.

29. Calcule a soma dos termos das seguintes sequências :

(a)$\left(2, \frac{2}{5}, \frac{2}{25}, \frac{2}{125}, ...\right)$

(b)$\left(5, -1, \frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, ...\right)$

30. Determine o limite da soma dos termos da progressão geométrica $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, ...$

31. Qual é a geratriz das dizimas periódicas abaixo?

(a)$0, 417417417...$

(b)$0, 17090909...$

Capítulo 4

Trigonometria

4.1 Sistemas de Medidas de Ângulos Trigonométricos

Definição 4.1.1. *Dados dois pontos distintos A e B sobre uma circunferência, esta fica dividida em duas partes, cada uma dessas partes é chamada* arco de circunferência $\widehat{AB}$

Para medir um arco, limitamos as unidades de arcos a apenas duas medidas: *grau* e *radiano.*

- **Grau** (Símbolo $^\circ$) é um arco unitário igual a 1/360 da circunferência que contém o arco a ser medido, ou seja $1^\circ = \dfrac{1}{360}$ da circunferência.
- **Radiano**(Símbolo rad) é um arco unitário cujo comprimento é igual ao raio da circunferência que contém o arco a ser medido.

Observação 4.1.1. *Uma circunferência mede* 360° *ou* $2\pi rad$*, assim:*

$$360^\circ \leftrightarrow 2\pi rad$$

$$180^\circ \leftrightarrow \pi rad$$

Exemplo 4.1.1.

1. Exprimir 150° e 225° em radianos.
2. Exprimir $\dfrac{11\pi}{6} rad$ e $\dfrac{2\pi}{3} rad$ em graus.

Definição 4.1.2. Ângulo, *figura formada por 2 semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ de mesma origem O. Notação: $A\hat{O}B$ ou simplesmente $\hat{O}$.*

Observação 4.1.2.

1. Se $A = B$, então temos 2 ângulos: um *ângulo nulo* ou um *ângulo de uma volta.*

2. Se as semi-retas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ forem opostas, teremos um *ângulo raso.*

A medida do ângulo central $A\hat{O}B$ é a medida do arco $\widehat{AB}$ e vice-versa. Assim um ângulo de πrad é um ângulo central correspondente a um arco de πrad e um ângulo de $60°$ é um ângulo central correspondente a um arco de $60°$.

Para medir em radianos um ângulo $A\hat{O}B$, basta calcular o quociente entre o comprimento l do arco $\widehat{AB}$ pelo raio r da circunferência:

$$\alpha = \frac{l}{r} (\alpha \text{ em radianos}).$$

Exemplo 4.1.2.

1. Se o ângulo central $A\hat{O}B$ determina numa circunferência de raio $r = 5cm$, um arco $\widehat{AB}$ de medida $l = 8cm$, então a medida de $A\hat{O}B$ em radianos é:

2. Se o ângulo central $A\hat{O}B$ determina numa circunferência de raio $r = 10cm$, um arco $\widehat{AB}$ de medida $l = 3cm$, então a medida de $A\hat{O}B$ em graus é:

Observação 4.1.3. *Um grau* $1°$ *se divide em* 60*minutos* $(60')$ *e um minuto* $1'$ *se divide em* 60 *segundos* $(60'')$*. Assim, um arco de* $30'$ *é um arco de* $0,5°$*.*

Exemplo 4.1.3.

1. Converta em radianos $22°30'$.

2. Converter a graus o arco $1rad$.

4.2 Triângulo Retângulo

Definição 4.2.1. *Dizemos que os ângulos* $\hat{A}$ *e* $\hat{B}$ *são* ângulos congruentes *se eles têm a mesma medida* $\hat{A} = \hat{B}$*.*

Exemplos de ângulos congruentes, são os ângulos: opostos pelo vértice, correspondentes, alternos internos e alternos externos.

Exemplo 4.2.1. *Mostre que a soma dos ângulos internos de um triângulo é* $180°$*.*

Definição 4.2.2. *Dois triângulos* $\triangle_1$ *e* $\triangle_2$ *são semelhantes se existe uma correspondência entre seus vértices, de forma que ângulos correspondentes são congruentes e lados correspondentes são proporcionais. Notação:* $\triangle_1 \sim \triangle_2$*.*

As semelhanças de triângulos se dão em três casos:

- AA(ângulo-ângulo);
- LAL(lado-ângulo-lado);
- LLL(lado-lado-lado).

Definição 4.2.3. *Dizemos que um triângulo é* retângulo *quando um de seus ângulos internos é reto.*

No decorrer do texto, utilizaremos as seguintes notações para os elementos de um triângulo ABC:

Lados: $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$;

ângulos internos: $B\hat{A}C, A\hat{B}C, B\hat{C}B$;

medidas dos lados: a =medida de $\overline{BC}$, b =medida de $\overline{AC}$,c =medida de $\overline{AB}$;

medidas dos ângulos: $\hat{A}$ =medida de $B\hat{A}C$, $\hat{B}$ =medida de $A\hat{B}C$, $\hat{C}$ =medida de $A\hat{C}B$

Teorema 4.2.1. (Teorema de Pitágoras)

Considere o triângulo ABC, retângulo em A, e a, b, c lados opostos aos vértices A, B, C respectivamente. Então:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Demonstração. □

4.3 Funções Trigonométricas

Dado um ângulo θ no vértice O, vamos marcar sobre um de seus lados os pontos $A_1, A_2, A_3, ...$ e vamos conduzir por eles, as perpendiculares $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, \overline{A_3B_3}, ...$, conforme figura abaixo:

Figura:

Assim, os triângulos $OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3, ...$ são semelhantes entre si. Então:

$$\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}} = \frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_3B_3}}{\overline{OA_3}} = ...$$

Essa relação depende apenas do ângulo θ e não dos comprimentos envolvidos. Desse modo, vamos dar um nome a essa função de θ, definida para $0° < \theta < 90°$.

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{OA_1}}$$

Observação 4.3.1. *Num triângulo ABC retângulo em A(colocar figura), e ângulo $\theta = \hat{b}$ temos:*

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{cateto\ \ oposto}{hipotenusa} = \frac{b}{a}$$
$$\cos\theta = \frac{cateto\ \ adjacente}{hipotenusa} = \frac{c}{a}$$
$$\tan\theta = \frac{cateto\ \ oposto}{cateto\ \ adjacente} = \frac{b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

Exemplo 4.3.1.

1. Através do teorema de Pitágoras4.2.1, mostre

$$1 = \operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta \ (\textbf{relação fundamental})$$

2. Determine o valor de $\operatorname{sen} 45°, \cos 45°, \tan 45°$ através de um quadrado de lado a.

3. Determine o valor de $\operatorname{sen} 60°, \cos 60°, \tan 60°, \operatorname{sen} 30°, \cos 30°, \tan 30°$, através de um triângulo equilátero de lado l.

Proposição 4.3.1.

1. Se $\theta \in]0°, 45°[$, então

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$

2. Se $\theta \in]0°, 90°[$, então

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

3. Se $\theta \in]0°, 45°[$, então

$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}$$

Proposição 4.3.2. *Sejam a, b tais que $0 < a + b < 90°$. Então:*

1. $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

2. $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \operatorname{sen} b \cos a$

Corolário 4.3.1. *Sejam a, b tais que $0 < a+b < 90°$. Então:*

1. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

2. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Exemplo 4.3.2. *Sabendo que* $\operatorname{sen} 18° = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$*, calcule seno e o cosseno dos arcos medindo* $18°, 36°, 72°$.

4.4 Trigonometria em Triângulos Quaisquer

Lei dos Cossenos: Sejam a, b, c lados de um triângulo $\triangle_{ABC}$ opostos aos ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ respectivamente. Então:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

Demonstração. □

Exemplo 4.4.1. *Calcular o valor do lado c de um triângulo $\triangle_{ABC}$ qualquer, sabendo que* $a = 4$,$b = 3\sqrt{2}$*,* $\hat{C} = 45°$

Lema 4.4.1. *Sejam a, b, c lados de um triângulo $\triangle_{ABC}$ opostos aos ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ respectivamente. Então a área S do triângulo é dado por:*

$$S = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} \hat{C} = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen} \hat{B}$$

Demonstração. □

Lei dos Senos: Sejam a, b, c lados de um triângulo $\triangle_{ABC}$ opostos aos ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ respectivamente. Então vale a seuinte relação:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

Demonstração. □

Corolário 4.4.1. *Sejam a, b, c lados de um triângulo $\triangle_{ABC}$ opostos aos ângulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ respectivamente. Considere uma circunferência de raio R circunscrita no triângulo $\triangle_{ABC}$. Então:*

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = 2R$$

Demonstração. □

Exemplo 4.4.2.

1. Calcular os lados b, c de um triângulo $\triangle_{ABC}$ no qual $a = 10, \hat{B} = 30°$ e $\hat{C} = 45°$.

2. Calcular o raio da circunferência circunscrita a um triângulo $\triangle_{ABC}$ em que $a = 15cm$ e $\hat{A} = 30°$

4.5 Funções Trigonométricas

Tabela Trigonométrica

Arco/Função	sen	cos	tan	cot	sec	csc
0	0	1	0	$\nexists$	1	$\nexists$
$30° = \frac{\pi}{6}$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	2
$45° = \frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$60° = \frac{\pi}{3}$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	2	$2\sqrt{3}/3$
$90° = \frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$	0	$\nexists$	1
$120° = \frac{2\pi}{3}$	$\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$	-2	$2\sqrt{3}/3$
$135° = \frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$150° = \frac{5\pi}{6}$	$1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}/3$	2
$180° = \pi$	0	-1	0	$\nexists$	-1	$\nexists$
$210° = \frac{7\pi}{6}$	$-1/2$	$-\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$	$-2\sqrt{3}/3$	-2
$225° = \frac{5\pi}{4}$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$240° = \frac{4\pi}{3}$	$-\sqrt{3}/2$	$-1/2$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$	-2	$-2\sqrt{3}/3$
$270° = \frac{3\pi}{2}$	-1	0	$\nexists$	0	$\nexists$	-1
$300° = \frac{5\pi}{3}$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}/3$	2	$-2\sqrt{3}/3$
$315° = \frac{7\pi}{4}$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$330° = \frac{11\pi}{6}$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}/3$	-2
$360° = 2\pi$	0	1	0	$\nexists$	1	$\nexists$

Sejam $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$(círculo de centro $0 = (0, 0)$ e raio 1) e $A = (1, 0) \in S^1$ origem dos arcos, onde o sentido positivo é o anti-horário.

Função de Euler Vamos definir uma função $E : \mathbb{R} \to S^1$. Dado $a \in \mathbb{R}$, percorremos sobre S^1 um arco de comprimento $|a|$ no sentido positivo, se $a > 0$, e no sentido negativo se $a < 0$. Seja $E(a) = (x, y)$, então: $E(0) = (1, 0)$,$E(\frac{\pi}{2}) = (1, 1)$,$E(\pi) = (-1, 0)$,$E(\frac{3\pi}{2}) = (0, -1)$,$E(-\frac{\pi}{2}) = (0, -1)$,$E(-\pi) = (-1, 0)$,$E(-3\frac{\pi}{2}) = (0, 1)$.

Observação 4.5.1.

1. Se $x > 2\pi$ ou $x < -2\pi$, "da-se" mais de uma volta na circunferência.

2. $E(x) = E(x + 2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq x < 2\pi$.

Definição 4.5.1. *Para cada $x \in R$, definimos:*

- $\cos x =$abcissa de $E(x)$;
- $\operatorname{sen} x =$ordenada de $E(x)$;
- $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$;
- $\cot x = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$;
- $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$;
- $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.

Note que, como:
$E(0) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0) \Rightarrow \cos 0 = 1$ e $\operatorname{sen} 0 = 0$.
$E(\frac{\pi}{2}) = (\cos \frac{\pi}{2}, \sin \frac{\pi}{2}) = (0, 1) \Rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0$ e $\operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$.
$E(\pi) = (\cos \pi, \sin \pi) = (-1, 0) \Rightarrow \cos \pi = -1$ e $\operatorname{sen} \pi = 0$.
$E(\frac{3\pi}{2}) = (\cos \frac{3\pi}{2}, \sin \frac{3\pi}{2}) = (0, -1) \Rightarrow \cos \frac{3\pi}{2} = 0$ e $\operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = -1$.

Observação 4.5.2. *Como $E(x) = E(x + 2k\pi)$, com $k \in \mathbb{Z}$, segue que* $\cos(x) = \cos(x + 2k\pi)$ *e* $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x + 2k\pi)$.

Definição 4.5.2. *Uma função $f : A \to B$ é* **periódica***, se existir um número $p > 0$ satisfazendo à condição:*

$$f(x + p) = f(x), \forall x \in A.$$

O menor valor de p que satisfaz a condição acima é chamada período de f.

Propriedades das Funções Trigonométricas

-Função Seno:

1. A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

2. Se x pertence ao 1º ou 2º quadrante, então $\operatorname{sen} x$ é positivo. Agora, se x pertence ao 3º ou 4º quadrante, então $\operatorname{sen} x$ é negativo;

3. Se x percorre o 1º ou 4º quadrante, então $\operatorname{sen} x$ é crescente. Agora, se x percorre o 2º ou 3º quadrante, então $\operatorname{sen} x$ é decrescente.

4. A função seno é periódica, e seu período é 2π;

5. Gráfico

-Função Cosseno:

1. A imagem da função cosseno é o intervalo $[-1, 1]$, isto é, $-1 \leq \cos x \leq 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$;

2. Se x pertence ao 1º ou 4º quadrante, então $\cos x$ é positivo. Agora, se x pertence ao 2º ou 3º quadrante, então $\cos x$ é negativo;

3. Se x percorre o 1º ou 2º quadrante, então $\cos x$ é decrescente. Agora, se x percorre o 3º ou 4º quadrante, então $\cos x$ é crescente.

4. A função cosseno é periódica, e seu período é 2π;

5. Gráfico

-Função Tangente:

1. O domínio da função tangente é $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$,

2. A imagem da função tangente é todo a reta $\mathbb{R}$, isto é, $\forall y \in \mathbb{R}$, existe um $x \in D$, tal que $\tan x = y$;

3. Se x pertence ao 1º ou 3º quadrante, então $\tan x$ é positivo. Agora, se x pertence ao 2º ou 4º quadrante, então $\tan x$ é negativo;

4. A função tangente é crescente em todo domínio;

5. A função tangente é periódica, e seu período é π, ou seja, $\tan(x) = \tan(x + k\pi)$;

6. Gráfico

-Função Cotangente:

1. O domínio da função cotangente é $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$,

2. A imagem da função cotangente é todo a reta $\mathbb{R}$, isto é, $\forall y \in \mathbb{R}$, existe um $x \in D$, tal que $\cot x = y$;

3. Se x pertence ao 1º ou 3º quadrante, então $\cot x$ é positivo. Agora, se x pertence ao 2º ou 4º quadrante, então $\cot x$ é negativo;

4. A função cotangente é decrescente em todo domínio;

5. A função cotangente é periódica, e seu período é π, ou seja, $\cot(x) = \tan(x+k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

6. Gráfico

-Função Cossecante:

1. O domínio da função cossecante é $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$,

2. A imagem da função cossecante é o intervalo $\mathbb{R}-]-1, 1[$;

3. Se x pertence ao 1º ou 2º quadrante, então $\csc x$ é positivo. Agora, se x pertence ao 3º ou 4º quadrante, então $\cos x$ é negativo;

4. Se x percorre o 2º ou 3º quadrante, então $\csc x$ é crescente. Agora, se x percorre o 1º ou 4º quadrante, então $\csc x$ é decrescente;

5. A função cossecante é periódica, e seu período é 2π ou seja, $\csc(x) = \csc(x+2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

6. Gráfico

-Função Secante:

1. O domínio da função secante é $D = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$,

2. A imagem da função secante é o intervalo $\mathbb{R}-]-1, 1[$;

3. Se x pertence ao 1º ou 4º quadrante, então $\sec x$ é positivo. Agora, se x pertence ao 2º ou 3º quadrante, então $\sec x$ é negativo;

4. Se x percorre o 1º ou 2º quadrante, então $\sec x$ é crescente. Agora, se x percorre o 3º ou 4º quadrante, então $\sec x$ é decrescente;

5. A função secante é periódica, e seu período é 2π,ou seja, $\sec(x) = \sec(x+2k\pi), k \in \mathbb{Z}$.

6. Gráfico

Teorema 4.5.1. *$\forall x \in \mathbb{R}$, com $x \in [0, 2\pi]$, vale a relação:*

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.(\textit{Relação Fundamental})$$

Corolário 4.5.1. *$\forall x \in \mathbb{R}$, com $x \in [0, 2\pi]$ e $x \notin \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$, valem as relações:*

- $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$;
- $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$;
- $\cos^2 x = \dfrac{1}{1 + \tan^2 x}$;
- $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{\tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$.

Exemplo 4.5.1. *Sabendo que $\operatorname{sen} x = \frac{4}{5}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule as demais funções trigonométricas de x.*

Vamos deduzir fórmulas para calcular as razões trigonométricas de x, com x não pertencente ao 1º quadrante, relacionando x com algum elemento do 1º quadrante.
Redução do 2º ao 1º quadrante: Seja $x \in \mathbb{R}$, tal que $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, então:

- $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)$;
- $\cos x = -\cos(\pi - x)$;
- $\tan x = -\tan(\pi - x)$;
- $\cot x = -\cot(\pi - x)$;
- $\sec x = -\sec(\pi - x)$;
- $\csc x = \csc(\pi - x)$.

Redução do 3º ao 1º quadrante: Seja $x \in \mathbb{R}$, tal que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então:

- $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(x - \pi)$;
- $\cos x = -\cos(x - \pi)$;
- $\tan x = \tan(x - \pi)$;
- $\cot x = \cot(x - \pi)$;

- $\sec x = -\sec(x-\pi)$;
- $\csc x = -\csc(x-\pi)$.

Redução do 4^{o} ao 1^{o} quadrante: Seja $x \in \mathbb{R}$, tal que $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, então:

- $\operatorname{sen} x = -\operatorname{sen}(2\pi - x)$;
- $\cos x = \cos(2\pi - x)$;
- $\tan x = -\tan(2\pi - x)$;
- $\cot x = -\cot(2\pi - x)$;
- $\sec x = \sec(2\pi - x)$;
- $\csc x = -\csc(2\pi - x)$.

Redução de $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ a $[0, \frac{\pi}{4}]$: Seja $x \in \mathbb{R}$, tal que $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, então:

- $\operatorname{sen} x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$;
- $\cos x = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} - x)$;
- $\tan x = \cot(\frac{\pi}{2} - x)$;
- $\cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$;
- $\sec x = \csc(\frac{\pi}{2} - x)$;
- $\csc x = \sec(\frac{\pi}{2} - x)$.

Exemplo 4.5.2. *Faça a redução ao 1^o quadrante das seguintes funções trigonométricas:* $\operatorname{sen} 115°$,$\cos 130°$, $\tan \frac{2\pi}{3}$,$\operatorname{sen} 210°$,$\tan \frac{4\pi}{3}$,$\sec \frac{7\pi}{6}$,$\cos 340°$,$\csc \frac{5\pi}{3}$, $\operatorname{sen} 71°$, $\cos \frac{5\pi}{12}$, $\tan \frac{3\pi}{8}$.

4.6 Operações Com Arcos

Definição 4.6.1. *Uma função $f : A \to B$ é chamada de* **função par***, se:*

$$f(x) = f(-x), \forall x \in A.$$

Da definição, decorre que o gráfico de uma função par é simétrico em relação ao eixo y.

Exemplo 4.6.1. .

1. *$f(x) = |x|$ é uma função par, pois $|-x| = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$;*

2. *$f(x) = x^2$ é uma função par, pois $(-x)^2 = x^2, \forall x \in R$;*

3. *$f(x) = \frac{1}{x^2}$ é uma função par, pois $\frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}, \forall x \in R^*$.*

Definição 4.6.2. *Uma função $f : A \to B$ é chamada de* **função ímpar***, se:*

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in A.$$

Da definição, decorre que o gráfico de uma função ímpar é simétrico em relação à origem do sistema cartesiano.

Exemplo 4.6.2. .

1. *$f(x) = 2x$ é uma função ímpar, pois $2(-x) = -2x, \forall x \in \mathbb{R}$;*

2. *$f(x) = x^3$ é uma função ímpar, pois $(-x)^3 = -x^3, \forall x \in R$;*

3. *$f(x) = \frac{1}{x}$ é uma função ímpar, pois $\frac{1}{(-x)} = -\frac{1}{x}, \forall x \in R^*$.*

Das definições 4.6.1,4.6.2, temos que a função cosseno é par e a função seno é ímpar, isto é:

$$\cos(-x) = \cos x \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x \forall x \in \mathbb{R}$$

Propriedades:

1. Cosseno da diferença:
   $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

2. Cosseno da soma:
   $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

3. Seno da soma:
   $\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$

4. Seno da diferença:
   $\operatorname{sen}(a - b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b$

5. Tangente da diferença:
   $\tan(a - b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

6. Tangente da soma:
   $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$
7. Cotangente da diferença:
   $\cot(a-b) = \dfrac{\cot a \cot b + 1}{\cot b - \cot a}$
8. Cotangente da soma:
   $\cot(a+b) = \dfrac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b}$

Exemplos 4.6.1.

1. Calcule os valores de: $\cos 15°, \operatorname{sen} 105°, \tan 75°, \sec 285°$.
2. Dados $\operatorname{sen} x = \frac{3}{5}$ e $\cos y = \frac{5}{13}$, calcule o valor de $\cos(x+y)$, sabendo que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$.
3. Sabendo que $\tan a = \frac{2}{3}$ e $\operatorname{sen} b = \frac{4}{5}$ com $\frac{\pi}{2} < b < \pi$, calcule $\tan(a+b)$.

Fórmulas de Multiplicação:

1. Funções circulares de $2a$:

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$
$$\operatorname{sen}(2a) = 2 \operatorname{sen} a \cos a$$
$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

2. Funções circulares de $3a$:

$$\cos(3a) = 4\cos^3 a - 3\cos a$$
$$\operatorname{sen}(3a) = 3\operatorname{sen} a - 4\operatorname{sen}^3 a$$
$$\tan(3a) = \frac{3\tan a - \tan^3 a}{1 - 3\tan^2 a}$$

Exemplos 4.6.2.

1. Sendo $\tan x = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule $\operatorname{sen} 2x$.
2. Sendo $\cot x = \frac{12}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule $\cos 2x$.
3. Sendo $\sec x = \frac{25}{24}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ calcule $\tan 2x$.

Fórmulas de Divisão:

Sabemos que $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ e $\cos 2a = 1 - 2\,\text{sen}^2\, a$, portanto fazendo $2a = x$, teremos:

1. $\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow \cos \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$
2. $\cos x = 1 - 2\,\text{sen}^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \text{sen}\, \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$
3. $\tan \frac{x}{2} = \dfrac{\text{sen}\, \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} \Rightarrow \tan \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

Exemplo 4.6.3. *Se* $\text{sen}\, x = \frac{24}{25}$ *e* $\frac{\pi}{2} < x < \pi$*, calcule as funções circulares de* $\frac{x}{2}$.

Transformação em Produto:

1. $\cos p + \cos q = 2(\cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2})$
2. $\cos p - \cos q = -2\,\text{sen}(\frac{p+q}{2}\, \text{sen}\, \frac{p-q}{2})$
3. $\text{sen}\, p + \text{sen}\, q = 2\,\text{sen}(\frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2})$
4. $\text{sen}\, p - \text{sen}\, q = 2\,\text{sen}(\frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2})$
5. $\tan p + \tan q = \dfrac{\text{sen}(p+q)}{\cos p \cos q}$
6. $\tan p - \tan q = \dfrac{\text{sen}(p-q)}{\cos p \cos q}$

Exemplos 4.6.3.

1. Calcule o valor da expressão $y = \text{sen}\, \frac{13\pi}{12} \cos \frac{11\pi}{12}$.
2. Mostre que $\text{sen}\, 20° + \text{sen}\, 40° = \text{sen}\, 80°$.

4.7 Equações Trigonométricas

Equações Fundamentais

1. $\text{sen}\, x = \text{sen}\, a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = (\pi - a) + 2k\pi \end{cases}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\cos x = \cos a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = -a + 2k\pi \end{cases}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

3. $\tan x = \tan a \Leftrightarrow x = a + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplos 4.7.1.

1. Resolva as seguintes equações, para $x \in \mathbb{R}$.

   (a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{5}$

   (b) $\csc x = \csc \frac{2\pi}{3}$

   (c) $\cos x = \cos \frac{\pi}{5}$

   (d) $\sec x = \sec \frac{2\pi}{3}$

   (e) $\tan x = 1$

   (f) $\cot x = \sqrt{3}$

2. Resolva a equação $\operatorname{sen} 2x = \cos x$

3. Resolva as equações abaixo, no domínio $\mathbb{R}$:

   (a) $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4}$

   (b) $2\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen} x$

   (c) $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   (d) $\operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$

Equações Clássicas

A equação do tipo $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ pode ser resolvida da seguinte maneira:

- Método 1 :
  Fazemos a mudança de variável $\operatorname{sen} x = u$ e $\cos x = v$, e resolvemos o sistema:

$$\begin{cases} au + bv & = & c \\ u^2 + v^2 & = & 1 \end{cases}$$

  Calculando u, v, determinamos os possíveis valores de x.

- Método 2 :
  Fazendo $\frac{b}{a} = \tan y$, temos:
  $a \operatorname{sen} x + b \cos x = c \Rightarrow senx + \frac{b}{a} \cos x = \frac{c}{a} \Rightarrow senx + \tan y \cos x = \frac{c}{a} \Rightarrow$
  $\Rightarrow senx + \dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y} \cos x = \dfrac{c}{a} \Rightarrow senx \cos y + \operatorname{sen} y \cos x = \dfrac{c}{a} \cos y \Rightarrow$

$$\operatorname{sen}(x + y) = \frac{c}{a} \cos y$$

Exemplos 4.7.2.

1. Resolva a equação $\sqrt{3} \cos x + \operatorname{sen} x = 1$, em $\mathbb{R}$.

2. Determine $x \in \mathbb{R}$, tal que $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$.

4.8 Inequações

Sejam f, g duas funções trigonométricas de variável real x. Resolver a inequação $f(x) < g(x)$ significa obter o conjunto solução S, dos números r para os quais $f(r) < g(r)$.

Quase todas as inequações trigonométricas podem ser reduzidas a inequações de um dos seguintes 6 tipos.

1. $\operatorname{sen} x > m$. Método: Sobre o eixo y(eixo do seno), marcamos o ponto P tal que $OP = m$. Traçamos uma reta r passando por P e perpendicular ao eixo y. As imagens dos reais x tais que $\operatorname{sen} x > m$, estão na intersecção do ciclo com o semiplano situado acima da reta r.

2. $\operatorname{sen} x < m$. Método: Sobre o eixo y(eixo do seno), marcamos o ponto P tal que $OP = m$. Traçamos uma reta r passando por P e perpendicular ao eixo y. As imagens dos reais x tais que $\operatorname{sen} x < m$, estão na intersecção do ciclo com o semiplano situado abaixo da reta r.

3. $\cos x > m$. Método: Sobre o eixo x(eixo do cosseno), marcamos o ponto P tal que $OP = m$. Traçamos uma reta r passando por P e perpendicular ao eixo x. As imagens dos reais x tais que $\cos x > m$, estão na intersecção do ciclo com o semiplano situado a direita da reta r.

4. $\cos x < m$. Método: Sobre o eixo x(eixo do cosseno), marcamos o ponto P tal que $OP = m$. Traçamos uma reta r passando por P e perpendicular ao eixo x. As imagens dos reais x tais que $\cos x < m$, estão na intersecção do ciclo com o semiplano situado a esquerda da reta r.

5. $\tan x > m$. Método: Considere os pontos $A = (1, 0)$,$B = (0, 1)$,$O = (0, 0)$,$B' = (0, -1)$. Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que $AT = m$. Traçamos a reta $r = \overleftrightarrow{OT}$. As imagens dos reais x tais que $\tan x > m$ estão na intersecção do ciclo com o ângulo $r\hat{O}B$ e na intersecção do ciclo com o ângulo $r\hat{O}B'$.

6. $\tan x < m$. Método: Considere os pontos $A = (1, 0)$,$B = (0, 1)$,$O = (0, 0)$,$B' = (0, -1)$. Marcamos sobre o eixo das tangentes o ponto T tal que $AT = m$. Traçamos a reta $r = \overleftrightarrow{OT}$. As imagens dos reais x tais que $\tan x < m$ estão na intersecção do ciclo com o ângulo $B\hat{O}r$ e na intersecção do ciclo com o ângulo $B'\hat{O}r$.

Exemplos 4.8.1.

1. Resolver a inequação $\operatorname{sen} x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ em $\mathbb{R}$.
2. Resolver a inequação $\operatorname{sen} x < \frac{1}{2}$ em $\mathbb{R}$.
3. Resolver a inequação $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ em $\mathbb{R}$.
4. Resolver a inequação $\cos x < -\frac{1}{2}$ em $\mathbb{R}$.
5. Resolver a inequação $\tan x > 1$ em $\mathbb{R}$.
6. Resolver a inequação $\tan x < \sqrt{3}$ em $\mathbb{R}$.

4.9 Função Inversa

Definição 4.9.1. *Seja $f : A \to B$ uma função, então:*

1. f é **sobrejetora** se:

$$\forall y \in B, \exists x \in A | f(x) = y$$

ou

$$Im(f) = B$$

2. f é **injetora**, se:

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

ou

$$\forall x_1, x_2 \in A, f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

3. f é **bijetora** se, e somente se, f for sobrejetora e injetora.

4. f admite uma função inversa, se existir uma função f^{-1}, tal que $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$.

Observação 4.9.1. *Toda função bijetora admite uma função inversa.*

Função Arco-Seno A função seno, ou seja, $\operatorname{sen} x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é sobrejetora, pois $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen} x = 2$ e não é injetora pois $\frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$ e $\operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{6}$.

Agora, se considerarmos a função seno, restrita a intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ e com contra-domínio $[-1, 1]$, então a função $\operatorname{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ é bijetora, logo pela observação 4.9.1 admite inversa. Definimos a inversa desta função seno, por arcsin, ou seja:

$$\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Note que $y = \arcsin x \Leftrightarrow \operatorname{sen} y = x$ e $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

Exemplo 4.9.1. *Determine y tal que $y = \arcsin \frac{1}{2}$.*

Função Arco-Seno A função cosseno, ou seja, $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é sobrejetora, pois $\nexists x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = 3$ e não é injetora pois $0 \neq 2\pi$ e $\cos 0 = \cos 2\pi$.

Agora, se considerarmos a função cosseno, restrita a intervalo $[0, \pi]$ e com contra-domínio $[-1, 1]$, então a função $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ é bijetora, logo pela observação 4.9.1 admite inversa. Definimos a inversa desta função cosseno, por arccos, ou seja:

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

Note que $y = \arccos x \Leftrightarrow \cos y = x$ e $0 \leq y \leq \pi$

Exemplo 4.9.2. *Determine y tal que $y = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$.*

Função Arco-Tangente

Se considerarmos a função tangente, restrita a intervalo aberto $]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e com contra-domínio em $\mathbb{R}$, ou seja, $\tan :]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ então a função tangente é bijetora, logo pela observação 4.9.1 admite inversa. Definimos a inversa desta função tangente, por arctan, ou seja:

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

Note que $y = \arctan x \Leftrightarrow \tan y = x$ e $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Exemplo 4.9.3. *Determine y tal que $y = \arctan 1$.*

4.10 Exercícios

1. Dado um triângulo ABC retângulo em A, com $a = 15cm$,$b = 9cm$ e $c = 12cm$. Calcule:

   (a) $\operatorname{sen} \widehat{B}$

   (b) $\cos \widehat{B}$

   (c) $\tan \widehat{B}$

   (d) $cotg\ \widehat{B}$

   (e) $\operatorname{sen} \widehat{C}$

   (f) $\cos \widehat{C}$

   (g) $\tan \widehat{C}$

   (h) $cotg\ \widehat{C}$

2. Num triângulo ABC reto em A, determine as medidas dos catetos, sabendo que a hipotenusa vale $50m$ e $\operatorname{sen} \widehat{B} = \dfrac{4}{5}$

3. Uma escada de bombeiro pode ser estendida até um comprimento máximo de $25m$, formando um ângulo de $70°$ com a base, que está apoiada sobre um caminhão, a $2m$ do solo. Qual é a altura máxima que a escada atinge?

4. Um observador vê um prédio, construído em terreno plano, sob um ângulo de $60°$. Afastando-se do edifício mais $30m$, passa a ver o edifício sob o ângulo de $45°$. Qual é a altura do prédio ?

5. Dois lados de um triângulo medem 8m e 12m e formam entre si um ângulo de $120°$. Calcule o terceiro lado.

6. Dois lados consecutivos de um paralelogramo medem 8m e 12m e formam um ângulo de $60°$. Calcule as diagonais.

7. Calcule o raio da circunferência circunscrita a um triângulo ABC em que $a = 15$cm e $\widehat{A} = 30°$.

8. Calcule os lados b e c de um triângulo ABC no qual $a = 10$, $\widehat{B} = 30°$ e $\widehat{C} = 45°$. Dado $\operatorname{sen} 105° = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

9. Um triângulo tem lados $a = 10m$, $b = 13m$ e $c = 15m$. Calcule os ângulos deste triângulo.

10. Exprimir em radianos.

    (a) $210°$

    (b) $240°$

    (c) $270°$

    (d) $300°$

    (e) $315°$

    (f) $330°$

11. Exprimir em graus.

    (a) $\dfrac{\pi}{6}$rad

    (b) $\dfrac{\pi}{4}$rad

    (c) $\dfrac{\pi}{3}$rad

    (d) $\dfrac{2\pi}{3}$rad

    (e) $\dfrac{3\pi}{4}$rad

(f) $\dfrac{5\pi}{6}$rad

12. Um arco de circunferência mede 30cm e o raio da circunferência mede 10cm. Calcular a medida do arco em radianos.

13. Um grau se divide em $60'$ (60 minutos) e um minuto se divide em $60''$(60segundos). Por exemplo, um arco de medida $30'$ é um arco de $0,5°$. Converta em radianos os seguintes arcos:

    (a) $22°30'$

    (b) $31°15'45''$

14. Calcular o menor dos ângulos formados pelos ponteiro de um relógio que está marcando.

    (a) 1h

    (b) 1h e 15min

    (c) 1h e 40min

15. Determinar o período, a imagem e fazer o gráfico de um período completo das seguintes funções:

    (a) $f(x) = -\operatorname{sen} x$

    (b) $f(x) = 2 \cdot \operatorname{sen} x$

    (c) $f(x) = -\cos x$

    (d) $f(x) = 2 \cdot \cos x$

16. Qual é o domínio das seguintes funções reais ?

(a) $f(x) = \tan 3x$

(b) $f(x) = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

(c) $f(x) = cotg\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

(d) $f(x) = \sec 2x$

(d) $f(x) = cossec\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

17. Sabendo que $\tan x = \frac{12}{5}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule as demais funções trigonométricas de x.

18. Sabendo que $\sec x = 3$. calcule o valor da expressão $y = \operatorname{sen}^2 x + 2\tan^2 x$.

19. Sabendo que $cotg\ x = \frac{24}{7}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule o valor da expressão

$$y = \frac{\tan x \cdot \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}$$

.

20. Calcule $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, sabendo que $3\cos x + \operatorname{sen} x = -1$.

21. Calcule m de modo que $\sin x = 2m + 1$ e $\cos x = 4m + 1$.

22. Calcule m de modo que $\tan x = m - 2$ e $cotg\ x = \frac{m}{3}$.

23. Reduza ao 1° quadrante:

(a) $\cos 178°$

(b) $\operatorname{sen} \frac{7\pi}{6}$

(c) $\tan 290°$

(d) $cotg\ \dfrac{7\pi}{6}$

(e) $\sec 124°$

(f) $cossec\ \dfrac{11\pi}{6}$

24. Reduza ao intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$:

(a) $\cos 341°$

(b) $\text{sen}\ \dfrac{4\pi}{3}$

(c) $\tan 151°$

(d) $\cos\ \dfrac{4\pi}{3}$

(e) $\text{sen}\ 261°$

(f) $\tan \dfrac{2\pi}{3}$

25. Verifique quais funções são pares ou ímpares.

(a) $\tan x$

(b) $cotg\ x$

(c) $\sec x$

(d) $cossec\ x$

26. Calcule os valores de:

(a) $\cos 15°$

(b) $\text{sen}\, 105°$

(c) $\tan 75°$

(d) $\sec 285°$

(e) $cotg\ 165°$

(f) $cossec\ 15°$

27. Calcule o valor da expressão $\text{sen}\, 105° - \cos 75°$.

28. Dados $\text{sen}\, x = \frac{3}{5}$ e $\cos x = \frac{5}{13}$, calcule o $\cos(x+y)$, sabendo que $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$.

29. Sabendo que $\tan a = \frac{2}{3}$ e $\sin b = \frac{4}{5}$ com $\frac{\pi}{2} < y < \pi$, calcule $\tan(a+b)$.

30. Sabendo que $\text{sen}\, x = \frac{15}{17}$, $\sin y = \frac{-3}{5}$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$ e $\pi < y < \frac{3\pi}{2}$, calcule $\text{sen}(x+y)$, $\cos(x+y)$ e $\tan(x+y)$.

31. Sendo $\tan x = \frac{3}{4}$ e $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, calcule $\text{sen}\, 2x$.

32. Sendo $cotg\ x = \frac{12}{5}$ e $0 < x < \frac{\pi}{2}$, calcule $\cos 2x$.

33. Sendo $\sec x = \frac{25}{24}$ e $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$, calcule $\tan 2x$.

34. Se $\operatorname{sen} x = \dfrac{24}{25}$ e $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule as funções $\sin \dfrac{x}{2}$, $\cos \dfrac{x}{2}$ e $\tan \dfrac{x}{2}$.

35. Transforme em produtos:

(a) $y = \operatorname{sen} 5x + \operatorname{sen} 3x$

(b) $y = \cos 3x + \cos x$

(c) $y = 1 + \operatorname{sen} 2x$

(d) $y = 1 + \cos x$

36. Calcule o valor numérico das expressões:

(a) $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{5}$

(b) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(c) $cossec\ x = cossec\ \dfrac{2\pi}{3}$

(d) $\cos x = \cos \dfrac{\pi}{5}$

(e) $\cos x = \frac{1}{2}$

(f) $\sec x = \sec \dfrac{2\pi}{3}$

(g) $\tan x = 1$

(h) $\tan 3x = 1$

(i) $cotgx = \sqrt{3}$

(j) $\operatorname{sen} 2x = \dfrac{1}{2}$

(k) $\operatorname{sen} 3x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(l) $\cos 2x = \cos x$

37. Resolva as equações abaixo, no domínio $\mathbb{R}$:

(a) $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1}{4}$

(b) $\operatorname{sen}^2 x - \sin x = 0$

(c) $4.\cos^2 x = 3$

(d) $\cos^2 x + \cos x = 0$

(e) $\operatorname{sen} x - \sqrt{3}.\cos x = 0$

(f) $\tan x + cotg\ x = 2$

38. Resolva as equações abaixo, em $\mathbb{R}$:

(a) $\sqrt{3}.\cos x + \operatorname{sen} x = 1$

(b) $\cos x + \operatorname{sen} x = 1$

(c) $\sqrt{3}.\operatorname{sen} x - \sin x = -\sqrt{3}$

(e) $\cos 6x + \cos 2x = 0$

(f) $\operatorname{sen} 4x - \cos x = 0$

(g) $\cos 3x + \operatorname{sen} 2x = 0$

Capítulo 5

Matrizes

Definição 5.0.1. *Dados dois números naturais m, n e não nulos, chama-se matriz m por n (indica-se $m \times n$) toda tabela M formada por números reais distribuídas em m linhas e n colunas.*

Observação 5.0.1. .

1. *Cada elemento da matriz M é indicado por a_{ij}, onde o índice i indica a linha e o índice j indica a coluna.*

2. *Uma matriz M do tipo $m \times n$, é indicado por $M = (a_{ij})_{m\times n}$, onde $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, 3, ..., n\}$.*

Exemplos 5.0.1. .

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 0 & \frac{4}{5} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, *matriz* 2×3.

(b) $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & \frac{3}{7} \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, *matriz* 3×2.

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 9 & -1 \end{pmatrix}$, *matriz* 1×3.

(d) $\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 15 \end{bmatrix}$, *matriz* 3×1.

5.1 Matrizes Especiais

1. **Matriz Linha:** É toda matriz do tipo $1 \times n$, isto é, é uma matriz que tem uma única linha.

2. **Matriz Coluna:** É toda matriz do tipo $m \times 1$, isto é, é uma matriz que tem uma única coluna.

3. **Matriz Nula:** É toda matriz que tem todos os elementos iguais a zero.

4. **Matriz Quadrada:** É toda matriz da forma $n \times n$, isto é, toda matriz que possui o número de linhas igual ao de colunas. Chamamos matriz quadrada de ordem n.

   Observação 5.1.1. .

   (a) Chama-se diagonal principal de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm os 2 índices iguais, isto é:$\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}\}$.

   (b) Chama-se diagonal secundária de uma matriz quadrada de ordem n o conjunto dos elementos que têm soma dos índices igual a $n+1$, isto é:$\{a_{1,n}, a_{2,n-1}, a_{3,n-2}, ..., a_{n,1}\}$.

   Exemplos 5.1.1. .

   (a) $M = \begin{pmatrix} 8 & 9 & -7 \\ 6 & 4 & -5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$*, matriz de ordem 3, e a diagonal principal* $\{8, 4, 3\}$ *e a diagonal secundária* $\{-7, 4, -1\}$.

   (b) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & -1 & -2 \\ -3 & -4 & -5 & -6 \end{bmatrix}$*, matriz de ordem 4, e a diagonal principal é* $\{0, 5, -1, -6\}$ *e a diagonal secundária* $\{3, 6, 9, -3\}$.

5. **Matriz Diagonal:** É toda matriz quadrada em que os elementos que não pertencem a diagonal principal são iguais a zero.

   Exemplos 5.1.2. .

   (a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. **Matriz Identidade(ou matriz unidade):** É toda matriz diagonal em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1. Uma matriz identidade de ordem n é indicada por I_n.

   Exemplos 5.1.3. .

   (a) $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exemplo 5.1.1. *Construa a seguinte matriz* $A = (a_{ij})_{3\times 3}$*, tal que* $a_{ij} = i - j$*.*

Definição 5.1.1. *Duas matrizes* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *e* $B = (b_{ij})_{m\times n}$ *são iguais quando* $a_{ij} = b_{ij}$ *para todo* i, j*.*

Exemplo 5.1.2. .

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} = B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix} \neq B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$,

5.2 Operação sobre Matrizes

1. **Adição**

   Definição 5.2.1. *Dadas duas matrizes* $A = (a_{ij})_{m\times n}$ *e* $B = (b_{ij})_{m\times n}$*, chama-se soma* $A + B$ *a matriz* $C = (c_{ij})_{m\times n}$*, tal que* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *para todo* i *e todo* j*.*

   Exemplo 5.2.1. .

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}$

Propriedades:

(a) **Associativa:** $\forall A, B, C$ do tipo $m \times n$, temos: $A + (B + C) = (A + B) + C$;

(b) **Comutativa:** $\forall A, B$ do tipo $m \times n$, temos: $A + B = B + A$;

(c) **Elemento Neutro:** Existe uma matriz M(matriz nula), tal que $A + M = A$, para qualquer matriz A do tipo $m \times n$;

(d) **Elemento Simétrico:** Para toda matriz A do tipo $m \times n$, existe uma matriz A'(matriz simétrica), tal que $A + A' = M$(matriz nula).

Definição 5.2.2. *Dada a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se* **oposta** *de A(indica-se por $-A$) a matriz A' tal que $A + A' = 0$.*

Exemplo 5.2.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Definição 5.2.3. *Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{m \times n}$, chama-se diferença $A - B$ a matriz soma de A com a oposta de B.*

Exemplo 5.2.3. *Sejam $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$, então*

$$A - B =$$

Exemplo 5.2.4. *Resolva a equação matricial $X - A - B = C$, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$*

2. **Produto de matriz por uma constante:**

Definição 5.2.4. *Dado uma constante k e uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, chama-se de produto $k.A$, a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n}$, tal que $b_{ij} = k.a_{ij}$, $\forall i, j$.*

Exemplo 5.2.5. *Seja $k = 3$ e $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, então $B = 3.A$ é ?*

Propriedades: Para todas matrizes A, B do tipo $m \times n$ e a, b números reais quaisquer, temos:

(a) $a.(b.A) = (a.b).A$;

(b) $a.(A + B) = a.A + a.B$;

(c) $(a + b).A = a.A + b.A$.

Exemplo 5.2.6. *Determine as matrizes X e Y que satisfazem o sistema:*

$$\begin{cases} X & + & Y & = & A \\ X & - & Y & = & B \end{cases},$$

sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

3. **Produto de Matrizes**

Definição 5.2.5. *Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{jk})_{n\times p}$, chama-se produto $A.B$ a matriz $C = (c_{ik})_{m\times p}$ tal que:*

$$c_{ik} = a_{i1}.b_{1k} + a_{i2}.b_{2k} + a_{i3}.b_{3k} + ... + a_{in}.b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.b_{jk},$$

para todo $i \in \{1, 2, 3, ..., m\}$ e todo $k \in \{1, 2, ..., p\}$.

Observação 5.2.1. .

(a) O produto $A.B$ existe se o número de colunas de A for igual ao número de linhas de B.

(b) O produto $A.B$ é uma matriz C que têm o número de linhas de A e o número de colunas de B.

(c) Um elemento c_{ik} da matriz $C = A.B$ é obtido da seguinte maneira:

(i) Toma-se a linha i da matriz A, $(a_{i1}a_{i2}a_{i3}...a_{in})$(n elementos);

(ii) Toma-se a coluna k da matriz B,

$$\begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ b_{3k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix} (n \ \ elementos);$$

(iii) *Coloca-se a linha i de A na vertical ao lado da coluna k, e calcula-se os n produtos dos elementos que ficaram lado a lado, e depois soma-se esses produtos, obtendo c_{ik}:*

Exemplo 5.2.7. *.Calcule $A.B$, sendo:*

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Propriedades

(a) Sejam $A_{m\times n}$. Então $A_{m\times n}.I_n = A_{m\times n}$ e $I_m.A_{m\times n} = A_{m\times n}$.

(b) Associativa: $\forall A_{m\times n}, B_{n\times p}, C_{p\times r} \Rightarrow A.(B.C) = (A.B).C$.

(c) Distributiva a direita: $(A + B).C = A.C + B.C$.

(d) Distributiva a esquerda: $C.(A + B) = C.A + C.B$.

(e) Seja $k \in \mathbb{R}$, então $k.(A.B) = (k.A).B = A.(k.B)$.

Observação 5.2.2. .

(a) *A multiplicação de matrizes não é comutativa, isto é, dado duas matrizes quaisquer A, B, nem sempre temos $A.B = B.A$. Por exemplo:*

(i) *Sejam $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$, com $m \neq p$. Então $A.B$ existe, mas $B.A$ não existe.*

(ii) *Sejam $A_{m\times n}r$ e $B_{n\times m}$, com $m \neq n$. Logo existem $A.B = C_{m\times m}$ e $B.A = D_{n\times n}$, porém $C \neq D$, pois as matrizes são de diferentes tipos.*

(iii) *Existe o caso também, em que $A.B$ e $B.A$ existem e são do mesmo tipo, mas $A.B \neq B.A$. De fato, considere* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) *Note que a implicação $A.B = 0 \Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$ não é válida para matrizes, isto é, é possível encontrar duas matrizes não nulas cujo o produto é a matriz nula. Considere* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. **Matriz Transposta**

Definição 5.2.6. *Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se* **transposta de** *A, a matriz $A^t = (a'_{ji})_{n\times m}$, tal que $a'_{ji} = a_{ij}$, $\forall i = 1, 2, ..., m$ e $\forall j = 1, 2, ..., n$.*

Exemplo 5.2.8. .

(a) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

Propriedades da Transposta:

(a) $(A^t)^t = A$;

(b) $(A + B)^t = A^t + B^t$;

(c) Se $k \in \mathbb{R}$ então $(k.A)^t = k.A^t$;

(d) $(A.B)^t = B^t.A^t$.

Definição 5.2.7. *Chama-se* **matriz simétrica***, toda matriz quadrada A de ordem n, tal que: $A^t = A$.*

São simétricas as matrizes: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$

Definição 5.2.8. *Chama-se* **matriz anti-simétrica***, toda matriz quadrada A de ordem n, tal que: $A^t = -A$.*

São simétricas as matrizes: $\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$

5. **Matriz Inversível**

Definição 5.2.9. *Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Dizemos que A* **é inversível** *se existir uma matriz B tal que $A.B = B.A = I_n$. Se A não é inversível, dizemos que A é* **singular***.*

Teorema 5.2.1. *Se A é inversível, então é única a matriz B tal que $A.B = B.A = I_n$.*

Demonstração. $\square$

Definição 5.2.10. *Dada uma matriz inversível A, chama-se* **inversa** *de A a matriz A^{-1}, que é a única tal que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$.*

Exemplo 5.2.9. *Verifique se a matriz A^{-1} é a inversa de A:*

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ *e* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 31 & -19 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 3 \end{pmatrix}$

Exemplo 5.2.10. *Qual é a inversa da matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$*?*

Exemplo 5.2.11. *A matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ *é inversível?*

Exemplo 5.2.12. *Qual é a inversa da matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$*?*

5.3 Determinantes

Seja M uma matriz quadrada de ordem n. Chamamos de **determinante da matriz** M o número que pode ser obtido da seguinte forma para os seguintes casos:

$$\text{Notação: } \det M = |M| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

1º caso: Se $n = 1$, o $\det M$ será o único elemento de M, ou seja, se $M = [a_{11}] \Rightarrow \det M = a_{11}$.

Exemplo 5.3.1. *Seja $M = [6]$, então* $\det M = 6$.

2º caso: Se $n = 2$, o determinante de M é o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária, ou seja, se $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ então:

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exemplo 5.3.2. *O determinante da matriz* $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ *é:*

$\det M = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 3.2 - (-1).4 = 10$

3º caso: Se $n = 3$, isto é, $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, definimos o determinante de M por:

$$\det M = a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32} - (a_{12}.a_{21}.a_{33} + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{13}.a_{22}.a_{31}).$$

Exemplo 5.3.3. *Calcule o determinante das matrizes:* $A = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 11 & 5 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

5.3.1 Menor Complementar e Complemento Algébrico

Definição 5.3.1. *Sejam M uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ e $a_{ij} \in M$. Definimos o* **menor complementar** *do elemento a_{ij} e indicamos por D_{ij}, como sendo o determinante da matriz que se obtém suprimindo a linha i e a coluna j de M.*

Exemplo 5.3.4. .

(a) Seja $M = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, *calcule* D_{11}, D_{12} , D_{21} *e* D_{22}.

(b) Seja $M = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, *calcule* D_{11}, D_{21} *e* D_{31}.

Definição 5.3.2. *Sejam M uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ e $a_{ij} \in M$. Definimos o* **cofator** *ou* **complemento algébrico** *do elemento a_{ij} e indicamos por A_{ij}, como sendo o $A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$.*

Exemplo 5.3.5. *Seja* $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ *e calcule A_{11}, A_{12}, A_{13}.*

5.3.2 Determinante- Caso Geral

Definiremos o determinante de uma matriz no caso geral por recorrência. Seja M uma matriz quadrada de ordem n, com $n \geq 2$. Ou seja:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

assim definimos o determinante de M por:

$$\det M = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + \cdots + a_{1n}.A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}.A_{1j}.$$

Isto é, o determinante de uma matriz de ordem $n \geq 2$ é a soma dos produtos dos elementos da 1º linha pelos seus respectivos cofatores.

Observação 5.3.1. .

(a) Para calculamos um determinante, não precisamos necessariamente dos elementos da 1º linha e seus cofatores, qualquer outra linha ou outra coluna com seus respectivos cofatores permitem seu cálculo.

(b) Para facilitar o cálculo, escolhemos sempre a linha ou coluna que tiver mais zeros.

Exemplo 5.3.6. *Calcule o determinante pelo caso geral, das seguintes matrizes:*

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

5.4 Propriedades dos Determinantes

P_1- **Matriz Transposta**

Se M é uma matriz de ordem n e M^t é a sua transposta, então $\det M = \det M^t$.

Exemplo 5.4.1. *Verifique nos casos abaixo que* $\det M = \det M^t$.

(a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

P_2- **Fila Nula**

Se os elemento de uma fila qualquer(linha ou coluna) de uma matriz M de ordem n forem todos nulos, então o $\det M = 0$.

Exemplo 5.4.2. *Verifique que o* $\det M = 0$ *nos seguintes casos:*

(a) $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 19 \end{pmatrix}$

P_3- **Multiplicação de uma fila por uma constante**

Se multiplicarmos uma fila qualquer de uma matriz M de ordem n por uma constante k, o determinante da nova matriz M', será $\det M' = k.\det M$, ou seja, se:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ e } M' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{k}.a_{i1} & \mathbf{k}.a_{i2} & \cdots & \mathbf{k}.a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \det M' = k. \det M.$

Exemplo 5.4.3. .

(a) $\begin{vmatrix} 7 & 14 & 49 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 7. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 10 & 28 & 8 \\ 15 & 7 & 16 \end{vmatrix} = 140. \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

Observação 5.4.1. *Se multiplicarmos uma matriz M de ordem n por k, então* $\det(k.M) = k^n. \det M$.

Exemplo 5.4.4. *Sejam* $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *e* $k.M = \begin{pmatrix} k.a & k.b & k.c \\ k.d & k.e & k.f \\ k.g & k.h & k.i \end{pmatrix}$ *então,* $\det(k.M) = k^3. \det M$.

P_4- **Troca de Filas Paralelas** Seja M uma matriz de ordem $n \geq 2$. Se trocarmos de posição duas filas paralelas(duas linhas ou duas colunas), obteremos uma nova matriz M, tal que $\det M' = -\det M$.

Exemplo 5.4.5. .

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = -22$ *então* $\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 22$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -37$ *então* $\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 37$

P_5- **Filas Paralelas Iguais**

Se uma matriz M de ordem $n \geq 2$ tem 2 filas paralelas formadas por elementos iguais, o $\det M = 0$

Exemplo 5.4.6. *Por exemplo,* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$ *e* $\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ 2 & y & y \\ 0 & z & z \end{vmatrix} = 0$

P_6- **Teorema de Cauchy**

A soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer de uma matriz M, ordenadamente pelos cofatores dos elementos de uma fila paralela é igual a zero.

Exemplo 5.4.7. *Dada a matriz* $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$*, calcule* $A = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}$ *e* $B = a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}$

P_7- **Filas Paralelas Proporcionais**

Se uma matriz M de ordem $n \geq 2$ tem duas filas paralelas formadas por elementos respectivamente proporcionais, então $\det M = 0$

Exemplo 5.4.8. *Mostre que* $\begin{vmatrix} 1 & 2x & x \\ 2 & 2y & y \\ 3 & 2z & z \end{vmatrix} = 0$

P_8- **Adição de Determinante**

Seja M uma matriz de ordem n, em que os elementos da $j-$ésima colunas são tais que:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & b_{1j} + c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} + c_{2j} & \cdots & a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} + c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

então $\det M = \det M' + \det M''$, onde

$$M' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ e } M'' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Observação 5.4.2. *A propriedade também é válida se tivermos uma linha cujos elementos se decompõe em soma.*

Exemplo 5.4.9. .

(a) $\begin{vmatrix} 1 & a+b & 3 \\ 2 & c+d & 5 \\ -1 & e+f & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 2 & c & 5 \\ -1 & e & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & b & 3 \\ 2 & d & 5 \\ -1 & f & 7 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ x+y & z+t & m+n \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ x & z & m \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ y & t & n \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

P_9- **Teorema de Jacobi**

Adicionando a uma fila de uma matriz M, de ordem n uma outra fila paralela, previamente multiplicada por uma constante, obteremos uma nova matriz M', tal que $\det M = \det M'$.

Seja $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Adicionamos a $j-$ésima coluna á $p-$ésima coluna multiplicada pela constante k. Obtemos a matriz:

$M' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & \cdots & (a_{1j}+ka_{1p}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} & \cdots & (a_{2j}+ka_{2p}) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & \cdots & (a_{nj}+ka_{np}) & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Exemplo 5.4.10. .

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & -10 & 7 \\ 4 & -11 & -6 \end{vmatrix}$ *?*

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & -4 & -5 \\ 2 & -3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ *?*

P_{10}- **Matriz Triangular**

Chamamos matriz triangular aquela cujos elementos situados "de um mesmo lado" da diagonal principal são iguais a zero. Ou seja, $M = (a_{ij})$ é triangular se:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ ou } M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Portanto $\det M = a_{11}.a_{22}.a_{33}.\ldots.a_{nn}$, ou seja, é o produto dos elementos da diagonal principal.

P_{11}- **Teorema de Binet**

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n, então

$$\det(A.B) = \det A.\det B \tag{5.1}$$

Exemplo 5.4.11. *Sejam as matrizes* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. *Verifique que* $\det(A.B) = \det A.\det B$.

Observação 5.4.3. *Seja* A^{-1} *a inversa de* A*, então* $A.A^{-1} = I_n$. *Pelo teorema anterior, como* $\det I_n = 1$*, segue que* $\det(A.A^{-1}) = 1$*, então* $\det A.\det A^{-1} = 1$*, ou seja:*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tag{5.2}$$

5.5 Cálculo da Matriz Inversa Por Meio de Determinantes

Definição 5.5.1. *Seja* M *uma matriz quadrada de ordem* n*. Chamamos de* **matriz dos cofatores** *de* M *e indicamos por* M'*, a matriz que se obtém de* M*, substituindo cada elemento de* M *por seu cofator. Assim, se* $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *então*

$$M' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemplo 5.5.1. *Dado a matriz M determine a sua respectiva matriz do cofatores M'.*

(a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Definição 5.5.2. *Seja M uma matriz quadrada de ordem n e M' a matriz dos cofatores de M. Chamamos de* **matriz adjunta** *de M, e indicamos por $\overline{M}$, a transposta da matriz M', isto é, $\overline{M} = (M')^t$.*

Em resumo:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, M' = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\overline{M} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Exemplo 5.5.2. *Determine a matriz adjunta do Exemplo5.5.1.*

Teorema 5.5.1. *Se M é uma matriz quadrada de ordem n, e $\det M \neq 0$, então a inversa de M é:*

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M}.\overline{M} \tag{5.3}$$

Exemplo 5.5.3. *Determine a matriz inversa dos exemplos anteriores.*

Corolário 5.5.1. *Seja M uma matriz quadrada de ordem n. A inversa de M existe se, e somente se, $\det M \neq 0$.*

Demonstração. □

Exemplo 5.5.4. *Calcule as inversas das seguintes matrizes:*

(a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5.6 Exercícios

1. Construa as seguintes matrizes:

   (a) $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ tal que $a_{ij} = \left\{ \begin{array}{llcl} 1, & se & i = & j \\ 0, & se & i \neq & j \end{array} \right\}$

   (b) $B = (b_{ij})_{3\times 3}$ tal que $b_{ij} = \left\{ \begin{array}{llcl} 1, & se & i+j = & 4 \\ 0, & se & i+j \neq & 4 \end{array} \right\}$

2. Determine as variáveis, de modo que tenhamos a igualdade de matrizes.

   (a) $\begin{bmatrix} 2x & 3y \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 & 2y \\ 3 & y+4 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} x^2 & 2x & y \\ 4 & 5 & t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & x & 3 \\ z & 5t & t \end{bmatrix}$

3. Dados $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 3 & 9 & 11 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$, calcule $A+B = C$, $A - B - C$ e $-A + B - C$.

4. Calcule a soma $C = (c_{ij})_{3\times 3}$ das matrizes $A = (a_{ij})_{3\times 3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times 3}$ tais que $a_{ij} = i^2 + j^2$ e $b_{ij} = 2ij$.

5. Se $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, e $C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, determine a matriz X de ordem 2 tal que $\dfrac{X - A}{2} = \dfrac{B + X}{3} + C$.

6. Obtenha X e Y a partir do sistema: $A = \left\{ \begin{array}{lcl} 2X + 3Y & = & A + B \\ 3X + 4Y & = & A - B \end{array} \right\}$,

em que $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$.

7. Considere as matrizes
$A = (a_{ij})_{4\times 7}$, definida por $a_{ij} = i - j$. $B = (b_{ij})_{7\times 9}$, definida por $b_{ij} = i$. $C = (c_{ij})$,

definida por $C = AB$. Determine o elemento c_{23}.

8. Calcule o produto ABC, sendo dadas: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

9. Resolva as seguintes equações:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

10. Determine x e y de modo que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$, comutem.

11. Obtenha todas as matrizes B que comutam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

12. Calcule todas as matrizes X, quadradas de ordem 2, tais que $X^2 = 0$.

13. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e A^t a matriz transposta de A, determine o valor de $A^t \times B$.

14. Determine x, y, z para que a matriz:

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & x & 5 \\ 2 & 7 & -4 \\ y & z & -3 \end{bmatrix}$, seja simétrica.

(b) $B = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ x & 0 & 1-z \\ y & 2z & 0 \end{bmatrix}$, seja anti-simétrica.

15. Determine a inversa de cada matriz abaixo:

(a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

(b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

16. Resolva a equação matricial: $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times X = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

17. Expresse X em função de A, B, C, sabendo que A, B, C são matrizes quadradas de ordem n inversíveis e $AXB = C$.

18. Prove que, se A e B são matrizes inversíveis de ordem n, então $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

19. Calcule os de determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 13 & 7 \\ 11 & 5 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \sin y & \cos y \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 2 & \log_5 25 & \log_5 5 \\ 5 & \log_5 125 & \log_5 25 \\ 8 & \log_3 27 & \log_3 243 \end{vmatrix}$

20. Chama-se traço de uma matriz quadrada a soma dos elementos da diagonal principal. Sabendo que o traço vale 9 e o determinante 15, calcule os elementos x, y da

matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & x & z \\ 0 & 0 & y \end{bmatrix}$$

21. Seja $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 7 & 6 \end{bmatrix}$, calcule D_{13},D_{43},D_{24},D_{32}.

22. Calcule os determinantes das matrizes abaixo utilizando o teorema de Laplace.

(a) $M = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$,

(b) $M = \begin{bmatrix} 0 & a & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & a & 0 & b \\ 1 & b & a & 0 \end{bmatrix}$,

23. Calcule os determinantes, utilizando suas propriedades:

(a) $\begin{vmatrix} ax & 2a & a^2 \\ x & 4 & 1 \\ 3x & 6 & 2 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} x^2 & xy^2 & x \\ xy & y^3 & y \\ x^2 & y^2 & x \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & 6 & 11 \\ -2 & 14 & 9 & 22 \\ 4 & 21 & 15 & 55 \\ 6 & 49 & 30 & 121 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 0 & 4 & 7 \\ 2 & 13 & 0 & 19 & 17 \\ 9 & 27 & 0 & 25 & 35 \\ 16 & 51 & 0 & 42 & 47 \\ 21 & 73 & 0 & 54 & 49 \end{vmatrix}$

24. Prove que o determinante é múltiplo de 17, sem desenvolvê-lo. Dado $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 1 & 8 & 7 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

25. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule o valor do determinante de A^{-1}.

26. Sejam A, B, C matrizes reais 3×3 que satisfazem as seguintes relações $AB = C^{-1}$, $B = 2A$. Se o determinante de C é 32, qual é o valor do módulo do determinante de A?

27. Calcule a matriz inversa das seguintes matrizes, usando suas respectivas matrizes adjuntas:

(a) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$.

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$.

28. Para que valores reais de m existe a inversa da matriz $M = \begin{bmatrix} m & 5 \\ 5 & m \end{bmatrix}$?

29. Qual a condição sobre a para que a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$, seja inversível?

Capítulo 6

Sistemas Lineares

Definição 6.0.1. *Chamamos de* **equação linear**, *nas incógnitas* $x_1, x_2, ..., x_n$ *toda equação do tipo:*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1.$$

Os números $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}$ são reais chamados de coeficientes e b também é um número real chamado de termo independente da equação.

Exemplos de equações lineares:

(a) $3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 = 0$;

(b) $2x_1 - x_2 - x_3 = 0$;

(c) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 4$;

(d) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$.

Agora, exemplos de equações que não são lineares:

(a) $2x_1^2 + 4x_2 + x_3 = 0$;

(b) $2x_1.x_2 + x_3 + x_4 = 3$;

(c) $x_1 + \sqrt{x_2} - x_3 = 4$

Definição 6.0.2. *Dizemos que a sequência de números reais* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ *é uma solução da equação linear* $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$ *se:*

$$a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + a_{13}\alpha_3 + \cdots + a_{1n}\alpha_n = b_1,$$

for uma sentença verdadeira.

Exemplo 6.0.1. *Considere a equação linear* $2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 3$. *Verifique se as sequências* $(1, 2, 3, -2)$ *e* $(1, 1, 2, 1)$ *são soluções da equação linear.*

Observação 6.0.1. *Dada equação linear onde todos os seus coeficientes e o seu termo independente são iguais a zero do tipo* $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_n = 0$, *então qualquer sequência* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *é solução da equação.*

Definição 6.0.3. *Um sistema linear* S *é um conjunto* m *de equações lineares nas incógnitas* $x_1, x_2, ..., x_n$, *definido da seguinte maneira:*

$$S : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & \cdots & a_{3n}x_n & = & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

O sistema linear S pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

Exemplos:

1. Seja $S_1 : \left\{ \begin{array}{ccccc} 2x & + & 3y & = & 4 \\ x & - & y & = & 2 \end{array} \right.$, então sua forma matricial é:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Seja $S_2 : \left\{ \begin{array}{ccccccc} 3x & + & y & - & z & = & 4 \\ 2x & + & 5y & + & 7z & = & 0 \end{array} \right.$, então sua forma matricial é:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Seja $S_3 : \left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & 3y & = & 4 \\ 3x & - & y & = & 1 \\ 2x & - & y & = & 0 \end{array} \right.$, então sua forma matricial é:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definição 6.0.4. *Dizemos que uma sequência de números reais* $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ *é solução de um sistema linear* S*, se for solução de todas as equações do sistema* S*(Equação 6.1), isto é, se todas as sentenças abaixo forem verdadeiras:*

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 & + & a_{12}\alpha_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\alpha_n & = & b_1 \\ a_{21}\alpha_1 & + & a_{22}\alpha_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\alpha_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}\alpha_1 & + & a_{m2}\alpha_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\alpha_n & = & b_m \end{cases}$$

Exemplos:

1. Verifique se as sequências $(1, 2, 3)$ e $(-5, 11, 0)$ são soluções do sistema linear:
$$S : \begin{cases} x & + & y & + & z & = & 6 \\ 2x & + & y & - & z & = & 1 \\ 3x & - & y & + & z & = & 4 \end{cases} .$$

2. O sistema linear $S : \begin{cases} x & + & 2y & + & 3z & = & 5 \\ x & - & y & + & 4z & = & 1 \\ 0x & + & 0y & + & 0z & = & 6 \end{cases}$, não admite solução, pois a última equação não é satisfeita para nenhuma solução $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Classificação: Um sistema linear pode ser classificado em relação ao número de soluções:

- **Sistema Possível e Determinado:** Possui apenas uma solução.
- **Sistema Possível e Indeterminado:** Possui mais de uma solução.
- **Sistema Impossível:** Não possui solução.

Definição 6.0.5. *Chamamos de sistema linear homogêneo quando o termo independente de todas as equações lineares são iguais a zero.*

Por exemplos, os sistemas abaixo são homogêneo:

$$S_1 : \begin{cases} x & + & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \end{cases} \text{ e } S_2 : \begin{cases} 3x & + & 4y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ 4x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & + & 2z & = & 0 \end{cases} .$$

Observação 6.0.2. *É fácil notar que um sistema linear homogêneo admite sempre como solução a sequência* $(0, 0, ..., 0)$.

6.1 Matrizes de um Sistema

Dado um sistema linear S de m equações e n incógnitas, consideremos as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

A é chamada de matriz incompleta do sistema, e B é chamada de matriz completa.

Exemplos:

1. Considere o sistema linear $S_1 : \begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$, então sua matriz completa e incompleta são?
2. Considere o sistema linear $S_2 : \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases}$, então sua matriz completa e incompleta são?

Teorema 6.1.1. (Teorema de Cramer)
Seja S um sistema linear, de modo que o número de equação seja igual ao número de incógnitas, isto é, $m = n$. Se $\det A = D \neq 0$(determinante da matriz incompleta), então o sistema será possível e tera solução única $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ tal que:

$$\alpha_i = \frac{D_i}{D}, \forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\},$$

em que D_i é o determinante da matriz obtida de A, substituindo-se a $i-$ésima coluna pela coluna dos termos independentes das equações do sistema.

Exemplos: Encontre a solução dos sistemas abaixo usando a regra de Cramer:

(a) $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -x - 4y = 0 \\ 3x + 2y = 5 \end{cases}$

6.2 Sistemas Escalonados

Definição 6.2.1. *Dado um sistema linear*

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

de modo que cada equação existe pelo menos um coeficiente não nulo. Dizemos que S está na forma escalonada, se o número de coeficientes nulos aumenta de equação para equação.

Exemplos:

1. $S_1:\begin{cases} x & + & y & + & 3z & = & 1 \\ & & y & - & z & = & 4 \\ & & & & 2z & = & 5 \end{cases}$

2. $S_2:\begin{cases} 4x & - & y & + & z & + & t & + & w & = & 1 \\ & & & & z & - & t & + & w & = & 0 \\ & & & & & & 2t & - & w & = & 1 \end{cases}$

3. $S_3:\begin{cases} x & - & 4y & + & z & = 5 \\ & & 2y & - & z & = & 0 \end{cases}$

Resolução de um sistema na forma escalonada.

1º Tipo: Número de equações igual ao número de incógnitas:

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases},$$

em que $a_{ii} \neq 0$, $\forall i \in \{1, 2, 3, ..., n\}$. A matriz incompleta do sistema é a matriz triangular:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Como $\det A = a_{11}a_{22}....a_{nn} \neq 0$, logo pelo Teorema de Cramer, o sistema S é possível e determinado. A solução do sistema pode ser obtida partindo da última equação, obtendo x_n, e em seguida substituindo esse valor na equação anterior. Continuando esse raciocínio até obtermos x_1.

Exemplo 6.2.1. *Encontre a solução do sistema abaixo:*

$$\begin{cases} x + 2y - z + 3t = 6 \\ \quad\; y + 3z - t = -5 \\ \qquad\quad 5z + 7t = 21 \\ \qquad\qquad\quad 2t = 6 \end{cases}$$

2º Tipo: Número de equações é menor que o número de incógnita:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{2j}x_j + a_{2,j-1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (j \geq 2) \\ \qquad\qquad \ddots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad a_{mr}x_r + \dots + a_{mn}x_n = b_m \quad (r > j) \end{cases}$$

com $m < n$.

Para resolvermos tal sistema, devemos transpor as incógnitas que não aparecem no começo de nenhuma das equações para o segundo membro. Em seguida, atribuímos valores as incógnitas do 2º membro e assim teremos um sistema do 1º tipo.

Observação 6.2.1. .

1. *Como os valores atribuídos para as incógnitas do 2º membro é arbitrário, então teremos um número infinito de soluções. Um tal sistema é dito possível e indeterminado.*
2. *Chama-se grau de indeterminação o número de variáveis livres do sistema, isto é, $n - m$.*

Exemplo 6.2.2. *Resolva os seguintes sistemas lineares:*

(a) $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ \quad\; y - z = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y - z - t = 0 \\ \qquad\; 3z + 2t = 4 \end{cases}$

6.3 Sistemas Equivalentes

Definição 6.3.1. *Dizemos que dois sistemas lineares S_1 e S_2 são equivalentes, se toda solução de S_1 for solução de S_2 e toda solução de S_2 for solução de S_1.*

Exemplo 6.3.1. *Os sistemas* $S_1 : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ *e* $S_2 : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ - 3y = -5 \end{cases}$ *são equivalentes, pois ambos são determinados(determinante são diferentes de zero) e admitem como solução* $(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$

Objetivo: Transformar um sistema linear qualquer num outro equivalente, mas na forma escalonado.

Teorema 6.3.1. *Multiplicando-se os membros de uma equação qualquer de um sistema linear S por um número $k \neq 0$, o novo sistema S' obtido será equivalente a S.*

Exemplo 6.3.2. *Dado o sistema* $S_1 : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$*, multiplicando a primeira equação deste sistema sistema por (-2), obtemos um novo sistema S_2 equivalente a S_1.(Verifique)*

Teorema 6.3.2. *Se substituirmos uma equação de um sistema linear S pela soma membro a membro dela com uma outra, o novo sistema obtido S' será equivalente a S.*

Exemplo 6.3.3. *Seja* $S_2 : \begin{cases} -2x - 4y = -6 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$*, substituindo a 2^oequação do sistema S_2 pela soma com a 1^oequação, obtemos* $S_3 : \begin{cases} -2x - 4y = -6 \\ - 3y = -5 \end{cases}$ *, onde $(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3})$ é solução de S_3. Logo S_2 e S_3 são equivalentes.*

Exemplo 6.3.4. *Os sistemas* $S : \begin{cases} 2x + y + 3z = 4 \\ x - y + 2z = 1 \\ 4x + y + z = 0 \end{cases}$ *e* $S' : \begin{cases} 2x + y + 3z = 4 \\ 3x + 5z = 5 \\ 4x + y + z = 0 \end{cases}$ *são equivalentes, pois S' foi obtido a partir de S, substituindo a 2^o equação pela soma, membro a membro, dela com a 1^o equação.*

Escalonamento de um Sistema

1ºPasso: Colocamos como 1º equação aquela em que o coeficiente da 1ºincógnita seja diferente de zero.

2ºPasso: Anulamos o coeficiente da 1ºincógnita de todas as equações (com exceção da 1º equação) substituindo a i-ésima equação ($i \geq 2$) pela soma da mesma com a 1º multiplicada por um número conveniente.

3ºPasso: Deixamos de lado a 1º equação e aplicamos o 1º e 2º passos nas equações restantes.

4ºPasso: Repetimos este processo em todas as equações até o sistema ficar escalonado.

Exemplos: Escalonar os sistemas lineares:

(a) $\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$.

(b) $\begin{cases} x + y - 3z + t = 1 \\ 3x + 3y + z + 2t = 0 \\ 2x + y + z - 2t = 4 \end{cases}$.

(c) $\begin{cases} x - y + z = 4 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 5x + 5y + z = -4 \end{cases}$.

(d) $\begin{cases} x + 4y = -8 \\ 3x - y = 15 \\ 10x - 12y = 7 \end{cases}$

Observação 6.3.1. .

(a) Se ocorrer uma equação do tipo: $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = 0$ *está deverá ser retirada do sistema.*

(b) Se ocorrer uma equação do tipo: $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = b$*, com* $b \neq 0$ *o sistema será impossível.*

6.4 Sistema Linear Homogêneo

Sistema homogêneo é da forma:

$$S; \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}.$$

Vimos que este sistema admite sempre a solução trivial ou nula $(0, 0, ..., 0)$. Logo ele é sempre possível. Se existir outras soluções além da solução nula, serão chamadas soluções próprias.

Exemplos: Escalonar os sistemas lineares homogêneos.

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ 3x & - & y & + & 4z & = & 0 \\ 5x & - & y & + & 6z & = & 0 \end{array}\right.$.

(b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 3z & = & 0 \\ 4x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & - & 3y & + & z & = & 0 \end{array}\right.$.

6.5 Característica de uma matriz

Definição 6.5.1. *Dizemos que uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ está a forma escalonada, se o número de zeros que precedem o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta, linha por linha.*

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \; B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Definição 6.5.2. *Dizemos que a matriz A' é linha equivalente a matriz A, se A' for obtida de A por meio de uma sequência finita de operações. Tais operações são:*

1. *Troca de posição de duas linhas;*

2. *Multiplicação de uma linha qualquer por uma constante $K \neq 0$;*

3. *Substituição de uma linha, plea soma desta com outra qualquer.*

Com estas 3 operações podemos encontrar uma matriz na forma escalonada.

Exemplo 6.5.1. *Encontre a matriz escalonada da matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Definição 6.5.3. *Seja A' uma matriz escalonada, linha equivalente a A. Chamamos de característica da matriz A e indicamos por $c(A)$, ao número de linhas não nulas de A'.*

Exemplos: Determine a característica das seguintes matrizes:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -10 \end{pmatrix}$

(c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Teorema 6.5.1. (Teorema de Rouche-Capeli)

Consideramos o sistema linear:

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}.$$

Sejam A e B matrizes incompleta e completa do sistema S, isto é:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

O sistema linear S será possível se, e somente se, $c(A) = c(B)$.

Observação 6.5.1. *Além disse, se $c(A) = c(b) = m$(numero de linhas), então o sistema S será possível e determinado. Agora se $c(A) = c(b) < m$, então o sistema S será possível e indeterminado.*

Exemplos: Classifique e resolva o sistemas abaixo, utilizando o Teorema de Rouché-Capelli.

(a) $\begin{cases} x & + & y & - & 2z & = & 4 \\ -x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} -x & + & 3y & - & z & = & 2 \\ 3x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 3 \end{cases}$

6.6 Exercícios

1- Dizer quais das equações abaixo são lineares:

(a) $x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = 3$;

(b) $x_1 + mx_2 + x_3^2 = n$, onde m, n são constantes dadas;

(c) $x - 2y + 3z = 4$;

(d) $2x_1 + \log x_2 + x_3 = \log 2$.

2- Escrever na forma matricial os seguintes sistemas

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & 2y & + & 2z & = & 5 \\ 5x & - & y & + & 5z & = & 1 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & by & + & cz & = & 7 \\ -mx & + & ny & & & = & e \\ abx & - & b^2y & + & mz & = & f \end{array}\right.$

3- Quais são os sistemas correspondentes às representações matriciais.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 \\ ab \\ b^2 \end{pmatrix}$

4- Construa as matrizes incompleta e completa dos sistemas:

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & - & z & = & 2 \\ -x & + & 3y & - & 2z & = & 4 \\ 3x & - & y & + & 4z & = & -3 \end{array}\right.$

(b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} ax & - & y & + & bz & = & c \\ a^2x & + & abz & & & = & d \\ -by & + & az & & & = & e \end{array}\right.$, em que a, b, c, d, e são dadas.

5- Resolva os sistemas abaixo pela regra de Cramer:

(a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} -x & - & 4y & = & 0 \\ 3x & + & 2y & = & 5 \end{array}\right.$

(b) $\begin{cases} -x + y - z = 5 \\ x + 2y + 4z = 4 \\ 3x + y - 2z = -3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \dfrac{2x - y}{3z + 2} = \dfrac{z + 1}{2x + y} = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{z} = -1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 0 \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{y} + \dfrac{1}{z} = 4 \end{cases}$

6- Calcule o valor de y no sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x + 2y}{-3t - 1} = \dfrac{2x - y}{z - 2t} = 1 \\ \dfrac{x - 2z}{t - y} = \dfrac{3t - 1}{2z - y} = 2 \end{cases}$$

7- Quais dos sistemas abaixo estão na forma escalonada?

(a) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ -y - z = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x + 2z = -2 \\ y - 3z = 1 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x - y - z + 5t = 9 \\ 3y + 2z - 3t = 4 \\ -z + t = 2 \end{cases}$

8- Resolva os seguintes sistemas:

(a) $\begin{cases} -x + 3y - z = 1 \\ 2y + z = 2 \\ 5z = 10 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2x - 3y + z - t = 4 \\ y - z + 2t = 3 \\ 3z + t = 2 \end{cases}$

9- Escalone, classifique e resolva os sistemas:

(a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x - 2y = -1 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - y - 2z = 1 \\ -x + y + z = 2 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y - z + t = 1 \\ 3x - y - 2z + t = 2 \\ -x - 2y + 3z + 2t = -1 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z + t = -1 \\ y - z + 2t = 2 \\ 2x + z - t = -1 \end{cases}$

10- Discuta os sistemas abaixo:

(a) $\begin{cases} ax + 3ay = 0 \\ 2x - ay = 4 \end{cases}$

(a) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x + ay = b \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + my = 6 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + mz = 2 \\ mx + 2y + z = -1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} ax + y + 2z = b \\ 2ax - y + 2z = 1 \\ 2x + y + 2z = 3 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} px - y + 2z = 0 \\ x + pz = p \\ 3x + 2y + pz = 5 \end{cases}$

11- Determine os valores de a e b para que o sistema abaixo seja indeterminado.

$$\begin{cases} 6x + ay = 12 \\ 4x + 4y = b \end{cases}$$

12- Determine o valor de a para que o sistema abaixo seja indeterminado:

$$\begin{cases} x + 3y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + az = 0 \\ 3x + 7y + z = 0 \end{cases}$$

13-Resolva os seguintes sistemas lineares homogêneos:

(a) $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 4y + z = 0 \\ 3x + y - 2z = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases}$

14- Discutir o sistema, segundo os valores dos parâmetros a:

(a) $\begin{cases} x + 4y - 5z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 3x + ay + 2z = 0 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + ay = 0 \\ 2x + 6y = 0 \end{cases}$

15- Determinar a característica das seguintes matrizes:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

16- Determinar m de modo que a característica da matriz seja 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & m & 2m \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

17- Classificar e resolver os sistemas abaixo, utilizando o Teorema de Rauché-Capelli:

(a) $\begin{cases} x & + & y & - & 2z & = & 4 \\ -x & + & 4y & - & 3z & = & 1 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 2 & - & y & + & z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 3 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 \\ 5x & + & 4y & - & 2z & = & 1 \end{cases}$

Capítulo 7

Números Complexos

7.1 Introdução:

O conjunto dos números complexos surgiu da "impossibilidade" de se extrair raiz quadrada de um número negativo .

Definição 7.1.1. *Um número complexo é um número da forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$. O conjunto formado por todos os números complexos será denotado por $\mathbb{C}$. Assim,*

$$\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Observação 7.1.1. *:*

(a) É claro que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, pois $\forall a \in \mathbb{R}$, temos $a = a + 0i \in \mathbb{C}$.

(b) $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$.

(c) A representação $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ de um número complexo é chamada de **Forma Algébrica de z.**

Exemplo 7.1.1. *Os números $z = 3 - 5i$ e $w = \sqrt{2} + 3i$ são exemplos de números complexos.*

Igualdade de números complexos:

Dados $z, w \in \mathbb{C}$ com $z = a + b_i$ e $w = c + di$, então $z = w$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

Definição 7.1.2. *Dado $z = a + b_i \in \mathbb{C}$, dizemos que a é a* **parte real de z** *e b é a* **parte imaginária de z**.

Notação: $a = Re(z)$ e $b = Im(z)$.
Exemplos:

(a) $Re(2) = Re(2 + 0i) = 2$ e $Im(2) = Im(2 + 0i) = 0$.

(b) Seja $z \in \mathbb{C}$, então $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(z) = 0$.

(c) $Re(yi) = 0$ e $Im(yi) = y$, com $y \in \mathbb{R}$.

Definição 7.1.3. *Seja $z \in \mathbb{C}$. Se $Re(z) = 0$, dizemos que z é* **imaginário puro**.

Representação Geométrica dos Números Complexos:
A cada $z = a + bi \in \mathbb{C}$, podemos associar um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Ou ainda, podemos associar um vetor de origem 0 e extremidade (a, b). Assim, o número complexo z é representado no plano pelo vetor $\overrightarrow{Oz}$.
Gráfico:

Observação 7.1.2. *:*

(a) Como $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a + bi = c + di$, então esta representação é única.

(b) O ponto (a, b) é chamado de imagem do complexo no plano, e a, b são as componentes do vetor $\overrightarrow{0z}$.

(c) Os números representados no eixo x são da forma $(x, 0) \equiv x + 0i \in \mathbb{R}$, e os números no eixo y são da forma $(0, y) \equiv 0 + yi = yi$. Logo o eixo x é chamado de **eixo real** *e o eixo y é chamado de* **eixo imaginário**.

(d) Quando representamos os números complexos no plano, chamamos o plano de "Plano Complexo" ou "Plano de Argand-Gauss".

Exemplo 7.1.2. *Represente os números complexos $z = 3i$, $w = 4$ e $t = 1 - i$ no plano complexo.*

7.2 Operações sobre os Números Complexos

Podemos operar com números complexos assim como operamos com números reais, respeitando à condição $i^2 = -1$.

7.2.1 Adição

Sejam $z = a + bi$, $w = c + di \in \mathbb{C}$, então:

$$z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Exemplo 7.2.1. *Sejam $z = 2 - i$ e $w = 4 + 2i$. Calcule $z + w$.*

Sejam $z = a + bi$ e $w = c + di$ números complexos. Então o número complexo $z + w$ é representado geometricamente como a diagonal do paralelogramo construído sobre os vetores z e w.
Gráfico:
Propriedades: Sejam $z, w, t \in \mathbb{C}$, então:

(a) $z + 0 = z$;

(b) $z + w = w + z$;

(c) $z + (w + t) = (z + w) + t$.

Já a diferença de números complexos é dado da seguinte forma: Dados $z, w \in \mathbb{C}$, então:

$$z - w = z + (-1).w$$

7.2.2 Multiplicação

Sejam $z = a + bi$, $w = c + di \in \mathbb{C}$, então:

$$z.w = (a + bi).(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Exemplo 7.2.2. *Sejam $z = 2 - i$ e $w = 4 + 2i$. Calcule $z.w$.*

Propriedades: Sejam $z, w, t \in \mathbb{C}$, então:

(a) $z.1 = z$;

(b) $z.w = w.z$;

(c) $z.(w.t) = (z.w).t$;

(d) $z.(w + t) = z.w + z.t$.

7.3 Módulos e Conjugados

Definição 7.3.1. *Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$, então:*

(a) O número complexo $a - bi$ é chamado de **conjugado** *de z e será denotado por $\overline{z}$. Assim,*

$$z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi.$$

(b) O **módulo** *de z denotado por $|z|$, é o número real positivo $\sqrt{a^2 + b^2}$. Ou seja:*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Observação 7.3.1. *Interpretação Geométrica:*

1. *O conjugado $\overline{z}$ de z é representado pelo simétrico de z em relação ao eixo $\overrightarrow{Ox}$.*

2. *O módulo de z mede a distância de 0 à z.*

Exemplos:

1. Dado $z = a + bi \in \mathbb{C}$, mostre que $|z| = \sqrt{z.\overline{z}}$ e $|\overline{z}| = |z|$.

2. Calcule o módulo de $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

3. Sejam $z = i$ e $w = 2 + i$. Calcule $z.\overline{w} + 2.z$.

7.4 Divisão de Números Complexos

Seja $z \in \mathbb{C}$ com $z \neq 0$. Existe um número complexo $\frac{1}{z}$(inverso de z) tal que $z.\frac{1}{z} = 1$. Vamos determinar $\frac{1}{z}$ na forma $c + di$. De fato:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi).(a - bi)} = \frac{\overline{z}}{z.\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Exemplo 7.4.1. *Seja $z = 2 - 3i$. Calcule $\frac{1}{z}$.*

Agora, dado 2 números complexos z e w, com $w \neq 0$, definimos o quociente de z por w, por:

$$\frac{z}{w} = z.\frac{1}{w}.$$

Exemplo 7.4.2. *Sejam $z = 3 - 2i$ e $w = 1 + i$. Calcule $\frac{z}{w}$.*

Propriedades: Sejam $z, w \in \mathbb{C}$. Então:

1. $\overline{z.w} = \overline{z}.\overline{w}$.

2. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.

3. Se $w \neq 0$, $\overline{\frac{z}{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$.

4. Se $z \in \mathbb{R}$, então $\overline{z} = z$.

5. $\overline{\overline{z}} = z$.

Exercícios:

1. Determine $a \in \mathbb{R}$ da forma que $z = \frac{a+i}{1+ai}$ seja real.

2. Determine $b \in \mathbb{R}$ de modo que $z = \frac{2-bi}{1+2bi}$ seja imaginário puro.

3. Seja $z \in \mathbb{C}$, se $z + \frac{1}{z} = 1$, calcule $|z|$.

4. Resolva a equação $2z - \overline{z} = 1 + 6i$.

5. Determine o lugar geométrico dos pontos dos planos (imagens do complexo z) que satisfazem as equações:

   (a) $Re(z) = 2$;

   (b) $Re(z) = Im(z)$;

   (c) $|z| = 1$;

   (d) $1 \leq Im(z) \leq 4$;

   (e) $|z + i| \leq 1$.

7.5 Forma Polar ou Trigonométrica de um Número Complexo

Vimos que um número complexo $z = a + bi$(forma algébrica) pode ser pensado como um ponto (a, b) do plano ou um vetor $\overrightarrow{0z}$ de origem 0 e extremidade (a, b).

Vamos ver uma representação de z que da ênfase aos elementos geométricos do vetor $\overrightarrow{0z}$.

De fato, dado $z = a + bi \neq 0$, seja $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e considere θ o ângulo formado pelo vetor $\overrightarrow{0z}$ e o eixo $\overrightarrow{0x}$. Então $\cos\theta = \frac{a}{r}$ e $\sin\theta = \frac{b}{r}$, ou seja, $a = r.\cos\theta$ e $b = r.\sin\theta$.

Dessa forma, temos $z = a + bi = (r.\cos\theta) + (r.\sin\theta)i = r.(\cos\theta + i\sin\theta)$.

A representação $z = r.(\cos\theta + i\sin\theta)$ é chamada de **forma polar ou trigonométrica de** z.

Exemplo 7.5.1. *Seja $z = 3 + 3i$. Coloque z na forma trigonométrica.*

Observação 7.5.1. *Observe que se $z = r.(\cos\theta + i\sin\theta)$ então $z = r.(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi))$, com $k \in \mathbb{Z}$.*

Os valores $\theta + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$ são chamados de **argumento de** z. E o argumento que pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$ é chamado de argumento principal e é representado por $Arg(z)$.

Exemplo 7.5.2. *Determine a forma trigonométrica do número complexo $z = -1 + \sqrt{3}i$, e represente z e $Arg(z)$ no plano complexo.*

Propriedades: Sejam $z, w \in \mathbb{C}$, então:

1. $|z| \geq 0$ e $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

2. $Re(z) \leq |z|$ e $Im(z) \leq |z|$.

3. $|z| = |\overline{z}|$.

4. $|z.w| = |z|.|w|$.

5. Se $w \neq 0$, então $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$.

6. $|z + w| \leq |z| + |w|$.

7.6 Potenciação de Números Complexos

Sejam $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, tal que $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Então:

$$z_1.z_2 = r_1.r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

Assim, considerando $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ temos $z^2 = r^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))$.

Teorema 7.6.1. Primeira Fórmula de Moivre:
Dado $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$, com $z \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$ então

$$z^n = r^n(\cos(n.\theta) + i\sin(n.\theta)).$$

Demonstração. □

Corolário 7.6.1. *Como consequência do teorema anterior, temos*

$$\frac{1}{z^n} = \frac{1}{r^n}.(\cos(-n.\theta) + i\sin(-n.\theta)).$$

Exemplo 7.6.1. *Calcule as seguintes potências:*

(a) z^5, *sendo* $z = 2 + 2\sqrt{3}i$.

(b) z^16, *sendo* $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

7.7 Raízes $n-$ésimas de um número complexo.

Seja $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \in \mathbb{C}$. Considere $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$. Dizemos que um número complexo w é uma raiz $n-$ésima de z, se $w^n = z$.

Considere então $w = |w|(\cos x + i\sin x)$. Pela primeira fórmula de Moivre, $w^n = |w|^n(\cos nx + i\sin nx)$, e como $w^n = z$, segue que, $|w|^n(\cos nx + i\sin nx) = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$. Igualando as expressões, temos:

$$|w|^n \cos nx = |z|\cos\theta \ \ e \ \ |w|^n \sin nx = |z|\sin\theta.$$

Como $w^n = z$, segue que $|w|^n = |z|$, logo $|w| = \sqrt[n]{|z|}$. Por outro lado, temos $\cos nx = \cos\theta$ e $\sin nx = \sin\theta$, então $nx = \theta + 2k\pi$, ou seja:

$$x = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \ \ , k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto, se w é raiz $n-$ésima de $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, então:

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta + 2k\pi}{n})) \ \ , k \in \mathbb{Z},$$

são as raízes $n-$ésimas de z.

Exemplo 7.7.1. *Seja* $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. *Determine as raízes cúbicas de* z:

Do exemplo anterior, percebemos que as raízes $n-$ésimas se repetem, isto é, $w_k = w_{k+n}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

De fato, se $w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos(\frac{\theta + 2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{\theta + 2k\pi}{n}))$, vê-se que os valores $\frac{\theta}{n}$,$\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}$, $\frac{\theta}{n} + \frac{4\pi}{n}$,...,$\frac{\theta}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$ correspondem as raízes distintas $w_0, w_1, ..., w_{n-1}$.

Para $k \geq n$ os valores começam a se repetir, pois temos os cossenos e senos dos ângulos $\frac{\theta}{n} + 2\pi$,$\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} + 2\pi$,...

Da mesma forma, para os valores negativos de k as raízes também se repetem. Conclui-se então que um número complexo possui exatamente n raízes de ordem n.

Observação 7.7.1. *As raízes* $n-$ *ésimas de* $z \geq 3$, *constituem os vértices de um polígono regular de* n *lados, inscrito em uma circunferência de raio* $\sqrt[n]{|z|}$.

Exemplos:

1. Determine as raízes $5-$ésimas de $z = 1$.

2. Determine as raízes cúbicas de $z = 2 + 2i$.

3. Calcular as raízes quarta de $z = -8 + 8\sqrt{3}i$.

4. Determine as raízes quadrada de $z = 1 + i$.

7.8 Exercícios

1- Efetue as seguintes operações indicadas:

(a) $(6 + 7i) \cdot (1 + i)$;

(b) $(5 + 4i) \cdot (1 - i) + (2 + i) \cdot i$

(c) $(1 + 2i)^2 - (3 + 4i)$

(d) $(7 + 2i) \cdot (7 - 2i)$

2- Se $f(z) = z^2 - z + 1$, calcule $f(1 - i)$.

3- Prove que $(1+i)^2 = 2i$ e coloque na forma algébrica o número $z = \dfrac{(1 + i)^{80} - (1 + i)^{82}}{i^{96}}$.

4- Determine $x, y \in \mathbb{R}$ para que se tenha:

(a) $2 + 3yi = x + 9i$;

(b)$(x + yi) \cdot (3 + 4i) = 7 + 26i$

(c)$(x + yi)^2 = 4i$;

(d)$(3 - i)(x + yi) = 20$

5- Coloque na forma algébrica os seguintes números:

(a) $\dfrac{2}{i}$;

(b) $\dfrac{3}{2 + i}$;

(c) $\dfrac{1 + 2i}{3 - i}$;

(d) $\dfrac{(1 + i)}{(1 - i)^2}$

6- Qual o conjugado de $\dfrac{1 + 3i}{2 - i}$?

7- Sejam u, v dois números complexos tais que $u^2 - v^2 = 6$ e $\overline{u} + \overline{v} = 1 - i$ ($\overline{u} e \overline{v}$ conjugados de ue v). Calcule $u - v$.

8- Sejam os números complexos $u = 1 + i$ e $v = 1 - i$. Calcule $u^{52} \cdot v^{-51}$

9- De as condições necessárias e suficientes para que $\dfrac{a + bi}{c + di}$(com $c + di \neq 0$) seja um :

(a) imaginário puro;

(b) real.

10- Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que $\overline{z} = -2zi$

11- Determine o módulo e o argumento principal, coloque na forma trigonométrica e de a representação gráfica dos números:

(a) 4;

(b) $1 + i\sqrt{3}$;

(c) $3i$

(d) $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$;

(e) -5;

(f) $-2i$;

(g)$-5 - 5i$;

(h)$2 - 2i$.

12- Coloque na forma algébrica os seguintes números:

(a)$3 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$;

(b)$2 \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$;

(c) $4 \cdot (\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$;

(d)$5 \cdot (\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$.

13- Calcule o módulo dos números:

(a)$(1 - i)(2 + 2i)$;

(b)$(1 + \sqrt{3}i)^6$;

(c)$\dfrac{3 + 3i}{1 + 2i}$.

14- Como é representado, na forma trigonométrica o numero complexo $\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)}$.

15- Represente no plano de Argand-Gauss os seguintes números complexos:

(a) $3+5i$;

(b) $-3+2i$;

(c) $-2-3i$;

(d) $1-4i$.

16- Interprete graficamente a soma, a diferença, a multiplicação e a divisão de dois números complexos.

17- Interprete geometricamente no plano de Argand-Gauss os seguintes subconjuntos de $\mathbb{C}$:

(a)$A = \{z \in \mathbb{C} || z| = 2\}$;

(b)$B = \{z \in \mathbb{C} || z| \leq 3\}$;

(c)$C = \{z \in \mathbb{C} || z - i| = 1\}$;

18- Calcule a potência dos seguintes números complexos:

(a)$\left(\dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{100}$;

(b)$(3-3i)^{-12}$;

(c) $(-\sqrt{3}-i)^{20}$.

19- Determine o menor número natural n para o qual $(i-\sqrt{3})^n$ é imaginário puro.

20- Use a definição de $\sqrt[n]{z}$ para determinar as raízes dos seguintes números complexos:

(a)$\sqrt{-7+24i}$;

(b)$\sqrt{5+12i}$;

(c)$\sqrt[3]{-11-2i}$;

(d)$\sqrt[4]{28-96i}$;

(e)$\dfrac{1}{\sqrt{-4i}}$;

(f)$\sqrt[3]{1+i}$.

21- Um quadrado, inscrito numa circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértices o afixo de $z_1 = 3i$. Que números complexos são representados pelos outros três vértices?

Capítulo 8

Polinômios

Definição 8.0.1. *Uma função* $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *é chamada de função polinomial se existem* $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ *tais que:*

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n, \forall x \in \mathbb{C}.$$

Os números $a_i \in \mathbb{C}$, são chamados de coeficientes da função polinomial. Quando $a_n \neq 0$, dizemos que p tem grau n.

Notação: $\partial(p(x)) = gr(p(x)) = n$.

Se um número complexo z é tal que $p(z) = 0$, dizemos que z é **raiz** de p.

Exemplos:

1. Seja $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $p(x) = x^2 + 1$. Então $\partial(p(x)) = 2$ e $i, -i$ são raízes de p, pois $p(i) = p(-i) = 0$. Observe que $p_{|\mathbb{R}}$ não tem raiz em $\mathbb{R}$.

2. Seja $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $p(x) = c$(constante), função polinomial constante.

   Se $c \neq 0$, $p(x) = cx^0 = c$, logo $\partial(p(x)) = 0$.

   Agora, se $c = 0$, temos $p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + ... + 0x^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. A rigor p não tem grau definido, por convenção: $\partial(p(x)) = \partial(0) = -\infty$.

Definição 8.0.2. *Se* $p(x) = 0, \forall x \in \mathbb{C}$*, chamamos* p *de função polinomial identicamente nula.*

Teorema 8.0.1. $p(x) = 0, \forall x \in \mathbb{C} \Leftrightarrow a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$.

Demonstração. □

8.1 Operações com Funções Polinomiais

1. **Adição:**

   Sejam $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$, com $x \in \mathbb{C}$. Vamos supor que $n < m$, então

   $$(p+q)(x) = p(x)+q(x) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+...+(a_n+b_n)x^n+b_{n+1}x^{n+1}+...+b_mx^m.$$

   Temos $\partial(p(x) + q(x)) = \max\{\partial(p(x)), \partial(q(x))\}$ se p e q são não nulos. Se $p(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{C}$, então $\partial(p(x) + q(x)) = \partial(q(x))$.

   Exemplo 8.1.1. *Calcule* $(p + q)(x)$ *onde* $p(x) = 5 + (1 - i)x + 3x^2 + 4x^3$ *e* $q(x) = -2 + ix + ix^2$.

2. **Multiplicação:**

   Sejam $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$, com $x \in \mathbb{C}$. Então

   $$p(x).q(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_0b_2)x^2 + ... + a_mb_nx^{m+n}.$$

   Logo $p(x).q(x) = h(x) = c_0 + c_1x + ... + c_{m+n}x^{m+n}$, onde os coeficientes c_k são da forma:

   $$c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + ... + a_kb_0 = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}.$$

   Observe que $\partial(p.q(x)) = \partial(p(x).q(x)) = \partial(p(x)) + \partial(q(x))$.

   Exemplo 8.1.2. *Para os polinômios do Exemplo 8.1.1, calcule* $p(x).q(x)$.

   Exemplo 8.1.3. *Determine uma função polinomial* p *de grau* 3 *tal que* $p(x + 1) = p(x) + x^2$. *Use-a para obter uma expressão para a soma* $1^2 + 2^2 + ... + n^2$.

3. **Igualdade**

   Sejam $p(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$, com $x \in \mathbb{C}$. Podemos supor $m = n$, basta completar com zeros.

   Dizemos que $p = q$ se $p(x) = q(x), \forall x \in \mathbb{C}$. Assim, $p = q \Leftrightarrow p(x) = q(x), \forall x \in \mathbb{C} \Leftrightarrow p(x) - q(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{C} \Leftrightarrow p - q$ é a função polinomial nula $\Leftrightarrow$ os coeficientes de $p - q$ são todos nulos $\Leftrightarrow a_0 = b_0, a_1 = b_1, ..., a_n = b_n$.

Exemplo 8.1.4. *Determine* $m, n, k \in \mathbb{C}$*, de forma que* $p(x) = mx^3 + (m-n)x^2 + 5ki$ *seja igual a* $q(x) = 3x^3 + 10x^2 - (3+i)$*.*

4. **Divisão**

Definição 8.1.1. *Dizemos que uma função polinomial* p *é divisível por uma função polinomial* q*, se existir uma função polinomial* d*, tal que* $p(x) = q(x).d(x)$*,* $\forall x \in \mathbb{C}$*.(Neste caso* p *também é divisível por* d*.)*

Note que $\partial(p(x)) = \partial(q(x)) + \partial(d(x))$, logo $\partial(d(x)) = \partial(p(x)) - \partial(q(x))$.

Exemplos:

(a) Verifique que $p(x) = x^2 - 4$ é divisível por $(x-2)$.

(b) Verifique que $p(x) = x^n - a^n$ é divisível por $(x-a)$.

(c) Verifique que $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - x - 1$ é divisível por $2x+1$.

Teorema 8.1.1. *Se* $\alpha \in \mathbb{C}$ *é raiz da função polinomial* p *então* p *é divisível por* q*, onde* $q(x) = x - \alpha$*,* $x \in \mathbb{C}$*.*

Demonstração. □

Corolário 8.1.1. *Se* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in \mathbb{C}$ *são raízes distintas de* p*, com* $\partial(p(x)) = n$*, então existe uma função polinomial* q *com* $\partial(q(x)) = n - k$*, tal que:*

$$p(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_k)q(x), \forall x \in \mathbb{C}.$$

Logo, p *tem no máximo* n *raízes.*

Demonstração. □

Exemplo 8.1.5. *Determine todas as raízes de* $p(x) = 2x^3 + 3x^2 - x - 1$*.*

8.2 Algoritmo da Divisão para Polinômios

Dados $n, d \in \mathbb{Z}$ com $d \neq 0$, então dividir n por d consiste em encontrar inteiros q e r $(0 \leq r \leq d-1)$ chamados de quociente e resto respectivamente, tais que $n = d.q + r$. O quociente q e o resto r da divisão são únicos.

Da mesma forma, dividir um polinômio complexo D por um polinômio complexo d, consiste em obter polinômios complexos q e r, chamados respectivamente de quociente e resto da divisão que cumpram:

(i) $d = d.q + r$;

(ii) $\partial(r(x)) < \partial(d(x))$

Teorema 8.2.1. Algoritmo da Divisão:

Dados os polinômios D e d,com $d \neq 0$, existem e são únicos os quocientes q e o resto r da divisão de D por d.

Demonstração. □

A demonstração do teorema anterior nos fornece um dispositivo prático para a divisão de dois polinômios. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 8.2.1. *Determine a e b de modo que $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + 20$ seja divisível por $x^2 + x + 5 = q(x)$.*

Exemplo 8.2.2. *Determine o quociente e o resto da divisão de $D(x)$ por $d(x)$.*

(a) Sejam $D(x) = x^3 + x + 1$ e $d(x) = x^2 + 1$.

(b) Sejam $D(x) = x + 1$ e $d(x) = x^2 + 2x + 1$.

(c) Sejam $D(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ e $d(x) = x^2 - 1$.

(d) Sejam $D(x) = 3x^4 + x^3 + 2x + 2$ e $d(x) = x^2 + x + 1$.

(e) Sejam $D(x) = x^3 + 3x^2 + 4$ por $d(x) = x - 2$

8.2.1 Divisão por $(x - \alpha)$

Teorema 8.2.2. (Teorema do Resto)

Se $\partial(p(x)) \geq 1$, o resto da divisão de $p(x)$ por $x - \alpha$ é $p(\alpha)$.

Demonstração. □

Corolário 8.2.1. *Se $\partial(p(x)) \geq 1$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ então: $p(x)$ é divisível por $(x - \alpha) \Leftrightarrow \alpha$ é raiz de $p(x)$.*

Demonstração. □

Exemplo 8.2.3. *Mostre que o resto da divisão de $p(x)$ por $ax + b$ com $a \neq 0$ é $p(-\frac{b}{a})$.*

Exemplo 8.2.4. *Determinar a e b de modo que $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 2$ seja divisível por $x + 2$ e $2x - 1$.*

Dispositivo Prático Briot-Ruffini:

Sejam $\alpha \in \mathbb{C}$ e $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Considere $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0$ o quociente da divisão de p por $(x - \alpha)$ e $r(x) = r_0$(constante) o resto, tais que:

$$p(x) = (x - \alpha)q(x) + r_0.$$

Desenvolvendo o segundo membro da equação acima, temos:

$(b_{n-1}x^{n-1} + ... + b_1 x + b_0)(x - \alpha) + r_0 = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1})x^{n-1} + ... + (b_0 - \alpha b_1)x + (r_0 - \alpha b_0) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$

Usando a igualdade de polinômios, concluímos que:

$$\begin{cases} b_{n-1} & = & a_n \\ b_{n-2} & = & a_{n-1} + \alpha b_{n-1} \\ b_{n-3} & = & a_{n-2} + \alpha b_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_0 & = & a_1 + \alpha b_1 \\ r_0 & = & a_0 + \alpha b_0 \end{cases}$$

Usando uma tabela prática, temos:

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_1	a_0
α	$a_n = b_{n-1}$	$a_{n-1} + \alpha b_{n-1} = b_{n-2}$	$a_{n-2} + \alpha b_{n-2} = b_{n-3}$	$\cdots$	$a_1 + \alpha b_1 = b_0$	$a_0 + \alpha b_0 = r_0$

Exemplo 8.2.5. *Dividir $p(x)$ por $(x - \alpha)$ usando o dispositivo de Briot-Ruffini.*

1. $p(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 5$ *por* $(x - 2)$.
2. $p(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 5$ *por* $(x + 2)$.
3. $p(x) = 2x^4 - 7x^2 + 3x - 1$ *por* $(x - 3)$.
4. $p(x) = 2x^4 - 3x^3 + x^2 - 5$ *por* $(x + 2).(x - 1)$.

Exemplo 8.2.6. *Determine a de modo que a divisão de $p(x) = x^4 - 2ax^3 + (a+2)x^2 + 3a + 1$ por $(x - 2)$ apresente resto igual á 7.*

Exemplo 8.2.7. *Determine m de modo que o polinômio $p(x) = 2x^3 + mx^2 - (2m+1)x + (m+3)$ seja divisível por $(x + 4)$.*

8.3 Equações Polinomiais

Dada uma equação polinomial da forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$. Dizemos que r é **raiz** da equação se $p(r) = 0$.

Teorema 8.3.1. (Teorema Fundamental da Álgebra(T.F.A))
Todo polinômio p de grau $n \geq 1$ admite ao menos uma raiz complexa.

Corolário 8.3.1. *Toda equação polinomial de grau $n \geq 1$ admite n raízes complexas.*

Exemplo 8.3.1. *Determine todas as raízes da equação $p(x) = x^4 - 5x^2 - 10x - 6 = 0$ sabendo que duas raízes são -1 e 3.*

Teorema 8.3.2. Teorema da Decomposição:
Todo polinômio $p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ com $a_n \neq 0$ de grau $n \geq 1$, podem ser decomposto em n fatores do primeiro grau:

$$p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)...(x - r_n),$$

em que $r_1, r_2, ..., r_n$ são as raízes de p.

8.4 Relações entre Coeficientes e Raízes(Relações de Girard)

Equação do 2º grau:

Considere a equação

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{8.1}$$

com $a \neq 0$, cujas raízes são r_1 e r_2.

Pelo Teorema da Decomposição, a Equação 8.2 pode ser escrita como:

$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2) = a(x^2 - xr_1 - xr_2 + r_1r_2) = ax^2 - a(r_1 + r_2)x + ar_1r_2$$

Dividindo a igualdade anterior por a, obtemos:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2.$$

Por igualdade de polinômios, obtemos:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 & = & -\frac{b}{a} \\ r_1r_2 & = & \frac{c}{a} \end{cases}$$

Equação do 3º grau:

Considere a equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{8.2}$$

com $a \neq 0$, cujas raízes são r_1, r_2 e r_3.

Pelo Teorema da Decomposição, a Equação 8.2 pode ser escrita como:

$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = ax^3 - a(r_1 + r_2 + r_2)x^2 + a(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3)x - a(r_1 r_2 r_3)$

Dividindo a igualdade anterior por a, obtemos:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (r_1 + r_2 + r_2)x^2 + (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3)x - (r_1 r_2 r_3)$$

Por igualdade de polinômios, obtemos:

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_3 & = & -\frac{b}{a} \\ r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_1 r_3 & = & \frac{c}{a} \\ r_1 r_2 r_3 & = & -\frac{d}{a} \end{cases}$$

Equação de grau n qualquer:

Dada a equação $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0 = 0$, com $a_n \neq 0$ cujas raízes são $r_1, r_2, ..., r_n$. Temos:

$$\begin{cases} S_1 & = & r_1 + r_2 + ... + r_n & = & -\frac{a_n - 1}{a_n} \\ S_2 & = & r_1 r_2 + r_1 r_3 + ... + r_{n-1} r_n & = & \frac{a_{n-2}}{a_n} \\ S_3 & = & r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + ... + r_{n-2} r_{n-1} r_n & = & -\frac{a_{n-3}}{a_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_k & = & \dots & = & (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_n & = & r_1 r_2 r_3 ... r_n & = & (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

Note que S_k é a soma de todos os produtos k a k das raízes.

Exemplo 8.4.1. *Calcule a soma e o produto das raízes das equações:*

(a) $2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6 = 0$

(b) $x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 11x + 1 = 0$

(c) $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$

Exemplo 8.4.2. *Se* $\{r_1, r_2, r_3\}$ *é o conjunto solução da equação* $2x^3 + 5x^2 + 8x + 11 = 0$. *Calcular* $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$.

Exemplo 8.4.3. *Sendo* $\{a, b, c\}$ *solução da equação* $2x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 0$. *Calcule o valor de:*

(a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

(b) $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$.

8.5 Raízes Múltiplas e Raízes Comuns

8.5.1 Derivada de Funções Polinomiais

Definição 8.5.1. *Dada a função polinomial $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + ... + a_1 x + a_0$ com $a_n \neq 0$ e $n > 0$. Definimos a derivada de $f(x)$ por:*

$$f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + 2a_2 x + a_1.$$

Observação 8.5.1. *Definimos a $k-$ésima derivada de $f(x)$ por $f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)}(x))'$.*

Exemplo 8.5.1. *Calcule as derivadas sucessivas de $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$.*

Observação 8.5.2. *Note que se $f(x)$ tem grau n, então todas as derivadas de ordem superior a n, são identicamente nulas.*

8.5.2 Raízes Múltiplas

Definição 8.5.2. *Dizemos que r é raiz da equação polinomial $f(x) = 0$ com multiplicidade m, se*

$$f(x) = (x-r)^m.q(x), \text{ com } q(r) \neq 0.$$

Teorema 8.5.1. *Se r é raiz de multiplicidade m da equação polinomial $f(x) = 0$, então r é raiz de multiplicidade $m-1$ da equação $f'(x) = 0$.*

Corolário 8.5.1. *Se r é raiz de multiplicidade m da equação $f(x) = 0$, então r é raiz de $f^{(1)}(x) = 0, f^{(2)}(x) = 0, f^{(3)}(x) = 0, ..., f^{(n-1)}(x) = 0$, com multiplicidade $m-1, m-2, m-3, ..., 1$ respectivamente. Mas r não é raiz de $f^{(m)} = 0$*

Exemplo 8.5.2. *Verifique se a equação polinomial $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6 = 0$ tem alguma raiz dupla.*

Exemplo 8.5.3. *Resolva a equação $4x^3 - 20x^2 + 33x - 18 = 0$, sabendo que admite uma raiz dupla.*

8.5.3 Máximo Divisor Comum(M.D.C.)

Definição 8.5.3. *Dados 2 polinômios não nulos f e g, dizemos que o polinômio h é m.d.c. se:*

(i) *h é divisor de f e de g.*

(ii) *se qualquer outro polinômio h_1 também é divisor de f e de g, então h_1 é divisor de h.*

Algoritmo para o m.d.c.

Sejam f, g dois polinômios não nulos, tais que $\partial(f) > \partial(g)$. Assim, aplicaremos sucessivamente o algoritmo de euclides da seguinte forma:

$f = g.q_1 + r_1$ $(r_1 = 0$ ou $\partial r < \partial g)$
$g = r_1.q_2 + r_2$ $(r_2 = 0$ ou $\partial r_2 < \partial r_1)$
$r_1 = r_2.q_3 + r_3$ $(r_3 = 0$ ou $\partial r_3 < \partial r_2)$
$r_2 = r_3.q_4 + r_4$ $(r_4 = 0$ ou $\partial r_4 < \partial r_3)$
....
$r_{n-2} = r_{n-1}.q_n + r_n$ $(r_n = 0$ ou $\partial r_n < \partial r_{n-1})$
$r_{n-1} = r_n.q_{n+1}$

Dessa forma, o polinômio r_n, multiplicado pelo inverso do seu coeficiente dominante será o m.d.c.(f,g).

Exemplo 8.5.4. *Determine o m.d.c.(f, g).*

(a) $f = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$ *e* $g = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

(b) $f = x^6 + 2x^5 + x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ *e* $g = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2$

(c) $f = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$ *e* $g = x^2 - 4x + 3$

8.5.4 Raízes Comuns

Teorema 8.5.2. *α é uma raiz dos polinômios f e g se, e somente se α é raiz do m.d.c.(f, g).*

Exemplo 8.5.5. *Determine as raízes comuns dos polinômios f e g.*

(a) $f = x^3 - 6x^2 + 5x + 12$ *e* $g = x^3 - 5x^2 - 2x + 24$

(b) $f = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$ *e* $g = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Definição 8.5.4. *Determinar a, b de odo que os polinômios $f = x^3 + x^2 + ax + b$ e $g = x^2 - x$ tenham 2 raízes comuns.*

8.6 Exercícios

1- Dada a função polinomial $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, calcule $f(-3), f(0), f(1), f(x + 1), f(2x), f(f(-1))$.

2- Seja a função polinomial $f(x) = x^{15}+x^{14}+x^{13}+...+x^2+x+1$. Calcule $f(0), f(1), f(-1)$.

3- Dado o polinômio $p(x) = x^2 - 2x$, calcule o valor de $p(1+i)$.

4- Determine a, b, c de modo que a função $f(x) = (a+b-5)x^2 + (b+c-7)x + (a+c)$ seja identicamente nula.

5- Dados os polinômios $f(x) = 7-2x+4x^2$, $g(x) = 5+x+x^2+5x^3$ e $h(x) = 2-3x+x^4$. Calcule $(f+g)(x)$, $(g-h)(x)$ e $(h-f)(x)$.

6- Dados os polinômios $f(x) = 2+3x-4x^2$, $g(x) = 7+x^2$ e $h(x) = 2x-3x^2+x^3$. Calcule $(f \cdot g)(x)$, $(g \cdot h)(x)$ e $(h \cdot f)(x)$.

7- Sendo dados os polinômios $f = x$, $g = x + x^3$ e $h = 2x^3 + 5x$, obtenha os números reais a, b tais que $h = a \cdot f + b \cdot g$.

8- Determine a condição para que $ax^2 + bx + c$ seja um polinômio quadrado perfeito.

9- Determine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ para que os polinômios $f = x^3 + \alpha x + \beta$ e $g = (x^2+x+1)^2 - x^4$ sejam iguais.

10- Determine o polinômio f do segundo grau tal que $f(0) = 1$, $f(1) = 4$ e $f(-1) = 0$.

11- Seja $p(x)$ um polinômio de grau 5 que satisfaz as condições $1 = p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5)$ e $p(6) = 0$. Qual o valor de $p(0)$.

12- Determine uma função polinomial $f(x)$ de grau 2 tal que $f(x) = f(-x)$ para todo $x \in \mathbb{C}$.

13- Dividindo o polinômio f por $x^2 - 3x + 5$, obtemos quociente $x^2 + 1$ e resto $3x - 5$. Determine f.

14- Efetue a divisão de $f = x^3 + ax + b$ por $g = 2x^2 + 2x - 6$. Qual é a condição para que a divisão seja exata?

15- Aplicando o método da chave, determine quociente e o resto da divisão de f por g:

(a) $f = x^2 + 5x + 1$, $g = 2x^2 + 4x - 3$;

(b) $f = x^4 + 2x^3 + x^2 + 4x - 2$, $g = x^2 + 2$;

(c) $f = 5x + 1$, $g = x^3 + 5$;

16- Demonstre que, se f e g são polinômios divisíveis por h, então o resto r da divisão de f por g também é divisível por h.

17- Use o método de Briot-Ruffini para obter o quociente e o resto da divisão de:

(a)$2x^4 - 5x^3 - 10x - 1$ por $x - 3$;

(b)$x^4 - 8x^3 + 4x^2 + 15x + 6$ por $x - 2$.

18- Determine $a \in \mathbb{R}$, de modo que o polinômio $f = ax^3 + (2a-1)x^2 + (3a-2)x + 4a$, seja divisível por $g = x - 1$, e em seguida, obtenha o quociente da divisão.

19- Determine p, q reais, de modo que $f = x^2 + (p-q)x + 2p$ e $g = x^3 + (p+q)$ sejam ambos divisíveis por $2 - x$.

20- Determine o polinômio f do segundo grau que, dividido por x, $x-1$, $x-2$, apresenta restos 4, 9 e 18,respectivamente.

21- Aplicando Briot-Ruffini, determine o quociente q e o resto r da divisão de $f = x^3 - x^2 + x - 1$ por $g = (x-2) \cdot (x-3)$.
22- Resolva em $\mathbb{C}$, a equação $x^4 - 5x^2 - 10x - 6 = 0$, sabendo que duas raízes são -1 e 3.

23-Calcule a soma e o produto das raízes das seguintes equações:

(a) $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$

(b) $x^4 + 7x^3 - 5x^2 + 11x + 1 = 0$

(c)$2x^3 + 4x^2 + 7x + 10 = 0$

24- Sendo $\{a, b, c\}$ a solução da equação $2x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 0$, calcule o valor da expressão $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$.

25-Verifique se a equação $2x^3 - 9x^2 + 12x + 6 = 0$ tem alguma raiz dupla.

26- Resolva a equação $4x^3 - 20x^2 + 33x - 18 = 0$, sabendo que admite uma raiz dupla.

27-Determine p, q de modo que a equação $x^3 + x^2 + qx + p = 0$, admita uma raiz com multiplicidade 3.

28- Determine o m.d.c. dos polinômios:

(a) $f = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$ e $g = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

(b) $f = x^6 + 2x^5 + x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ e $g = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2$.

29- Determine a, b de modo que os polinômios $f = x^3 + x^2 + ax + b$ e $g = x^2 - x$ tenham duas raízes comuns.

30- Determine as raízes comuns aos polinômios:

(a) $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$ e $x^3 - 5x^2 - 2x + 24 = 0$.

(b) $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = 0$ e $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$

Referências Bibliográficas