

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO STRICTO SENSU
MESTRADO PROFISSIONAL EM EDUCAÇÃO
UNIDADE UNIVERSITÁRIA DE CAMPO GRANDE**

PATRICK RAMALHO DE OLIVEIRA

**PROBABILIDADE NO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO: CONTRIBUIÇÕES DO JOGO
DOS DISCOS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM**

Campo Grande / MS

2020

PATRICK RAMALHO DE OLIVEIRA

**PROBABILIDADE NO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO: CONTRIBUIÇÕES DO JOGO
DOS DISCOS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Educação, área de Concentração Formação de Educadores, da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Unidade Universitária de Campo Grande – MS, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Sales

Campo Grande - MS

2020

PATRICK RAMALHO DE OLIVEIRA

**PROBABILIDADE NO 3º ANO DO ENSINO MÉDIO: CONTRIBUIÇÕES DO JOGO
DOS DISCOS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Educação da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Unidade Universitária de Campo Grande - MS, como requisito para obtenção do Título de Mestre em Educação. Área de concentração: Formação de Educadores.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Sales

Aprovado em: 14/02/2020

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio Sales

Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS)

Prof. Dra. Vilma Miranda de Brito

Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS)

Prof. Dra. Edilene Simões Costa dos Santos

Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)

O49p Oliveira, Patrick Ramalho de

Probabilidade no 3º ano do ensino médio : contribuições do jogos dos discos para o ensino e aprendizagem / Patrick Ramalho de Oliveira. – Campo Grande, MS: UEMS, 2020. 139p

Dissertação (Mestrado Profissional) – Educação - Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2020.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Sales.

1. Educação matemática 2. TSD 3. Engenharia didática 4 . Probabilidade I. Sales, Antonio II. Título

CDD 23. ed. - 519

DEDICATÓRIA

Ao meu incansável professor, pela paciência, esforço e dedicação nessa caminhada.

Aos meus pais, Florival e Maria, pelo amor incondicional e pela educação que me preparou para a vida.

Ao meu amor Rafael, que me incentivou na história desta construção.

E ao meu gerente da unidade, Helton, e ao diretor da escola, Murilo, pelos momentos de discussões e pela flexibilidade no trabalho para poder finalizar essa pesquisa.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço imensamente a Deus, pelo dom da vida. Por ter me ajudado a vencer meus limites, tanto os físicos como os cognitivos.

Seria impossível finalizar este trabalho se não tivesse sido construído coletivamente. Muitos foram os que contribuíram para que este trabalho viesse à tona. Sendo assim, quero expressar meus agradecimentos a todas as pessoas que dele participaram, em especial: Ao professor e orientador Antonio Sales, pela sabedoria compartilhada com humildade, pela compreensão e competência, pela orientação geral dada a este trabalho; agradeço pela simplicidade estampada nos singelos gestos que me dispensou; agradeço pela compreensão, pela disposição, pela atenção ao estar sempre pronto a ouvir, discutir e explicar o que eu não entendia.... Obrigado professor!

Aos meus pais, Maria e Florival, meus primeiros mestres, que me ensinaram o valor da vida e dos estudos.

Ao meu incansável marido, incentivador, Rafael, pelos momentos em que estive ausente, por todo o apoio, carinho e cumplicidade.

Às minhas amigas Márcia e Rosileide, sendo que estudamos juntos para o ingresso no Mestrado na UEMS. Não entramos na mesma turma, pois cada um teve seu rumo. A Márcia finaliza sua dissertação na UCDB (Universidade Católica Dom Bosco), a Rosileide defendeu sua dissertação no primeiro semestre do 2019 na UEMS. Mas, mesmo cada um seguindo caminhos diferentes, mantivemos parceria de diálogo para construção de nossos textos.

Também agradeço aos professores João (professor formador) e Selma (coordenadora da especialização em Matemática) do curso de especialização em Matemática da UFGD (Universidade Federal da Grande Dourados), que me proporcionaram trabalhar como tutor à distância, e assim ter contato com o material da UAB e acesso ao material sobre os jogos dos discos.

As professoras Vilma Miranda de Brito e Edilene Simões Costa dos Santos pelas valiosas contribuições que foram dadas no exame de qualificação.

Agradecimentos especiais aos professores Doutores do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Bartolina Ramalho Catanante, Carla Villamaína Centeno, Celi Correa Neres, Eliane Greice Davanço Nogueira, Nedina Roseli Martins Stein, Samira Saad Pulchéio Lancillotti, Vilma Miranda de Brito, Walter Guedes da Silva, pela dedicação e pelo compromisso profissional, com os quais tive oportunidade de

ampliar e construir novos conhecimentos por meio das disciplinas ofertadas pelos senhores, enriquecendo assim o meu fazer docente.

Aos colegas da turma de 2018, pelos conhecimentos e dúvidas compartilhadas, por tudo que vivemos e aprendemos juntos, e pela parceria que formamos, eu nunca me esquecerei de vocês.

Para meus amigos de trabalho, diretor Murilo, gerente de unidade Helton, estagiária Paula, colegas coordenadores Marcel e Gizelly, e aos professores da escola, em especial do ensino médio que me acompanharam e disponibilizaram tempo nesta caminhada, pelo carinho, pelo ombro amigo e, fundamentalmente, pela socialização de experiências, dúvidas, discussões, aprendizagens e leituras que se consolidaram com a construção desta dissertação.

Cada indivíduo tem sua prática. Todo professor ao iniciar sua carreira, vai fazer na sala de aula, basicamente, o que ele viu alguém, que o impressionou, fazendo. E vai deixar de fazer algo que viu e não aprovou. Essa memória de experiências é impregnada de emocional, mas aí entra também o intuitivo (...). Mas, sem dúvida o racional, isto é, aquilo que se aprendeu nos cursos, incorpora-se à prática docente. E à medida que vamos exercendo, a crítica sobre ela, mesclada com observações e reflexões teóricas, vai nos dando elementos para aprimorá-la. Essa nossa prática, por sua vez, vai novamente solicitar e alimentar teorizações que vão, por sua vez, refletir em sua modificação. O elo entre teoria e prática é o que chamamos de pesquisa.

(Ubiratan D'Ambrosio)

RESUMO

Esta pesquisa foi desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Educação, em nível de mestrado, na Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS) e teve como objetivo principal analisar a construção do conceito de probabilidade por estudantes do último ano do ensino médio, por meio de uma sequência didática que envolve o jogo dos discos, com a contribuição da situação didática. Dessa forma, essa pesquisa visou contribuir com o debate e sugestões de alternativas pedagógicas para o ensino e a aprendizagem de probabilidade no Ensino Médio, tendo por base a Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau e trabalhos de alguns educadores matemáticos. A pesquisa foi realizada com estudantes do 3º ano do Ensino Médio, de uma escola privada no município de Campo Grande – MS. Nas escolas, frequentemente o ensino de probabilidade se restringe apenas à contagem de casos favoráveis e casos possíveis. Porém, o trabalho com o jogo dos discos pode ser muito interessante para que os estudantes associem estudos de probabilidade e conhecimentos geométricos. Para a coleta de dados foram utilizados os seguintes instrumentos: caderno de campo, caderno de anotações dos participantes, grupos focais, testes, questionários e manifestações orais dos participantes. Para desenvolvimento dessa pesquisa foi necessária a abordagem qualitativa de pesquisa e a engenharia didática como metodologia. Com os resultados obtidos e apresentados nesta dissertação, concluímos que a sequência didática se mostrou eficiente, proporcionando o ensino e a aprendizagem de forma clara à professora e aos estudantes, tornando as aulas motivadoras e proporcionando um ambiente agradável, para aprender o conceito de probabilidade por meio do recurso do jogo dos discos.

Palavras-chave: Educação Matemática. TSD. Engenharia Didática. Probabilidade.

ABSTRACT

This research was developed in the Postgraduate Program in Education, at master's level, at the State University of Mato Grosso do Sul (UEMS) and its main objective was to analyze the construction of the concept of probability by students of the last year of high school. through a didactic sequence that involves the play of discs, with the contribution of the didactic situation. Thus, this research aimed to contribute to the debate and suggestions of pedagogical alternatives for teaching and learning probability in high school, based on the theory of didactic situations by Guy Brousseau and works by some mathematical educators. The research was conducted with students of the 3rd year of high school, from a private school in the city of Campo Grande - MS. In school, probability teaching is often restricted to counting favorable and possible cases. However, working with the disc game can be very interesting for students to associate probability studies and geometric knowledge. For data collection, the following instruments were used: field notebook, participant notebook, focus groups, tests, questionnaires, oral manifestations of participants. For the development of this research it was necessary the qualitative approach of research and the didactic engineering as methodology. With the results obtained and presented in this dissertation, we conclude that the didactic sequence was efficient, providing the teaching and learning clearly to the teacher and students, making the classes motivating and providing a pleasant environment to learn the concept of probability through the game of the discs .

Keywords: Mathematics Education. TSD. Didactic Engineering. Probability.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: IDEB: Escolas estaduais de MS	21
Figura 2: IDEB: Escolas públicas (Federal, Estadual e Municipal) de MS	21
Figura 3: Sistema didático	26
Figura 4: Representação da situação AÇÃO	28
Figura 5: Representação da situação FORMULAÇÃO	29
Figura 6: Representação da situação de VALIDAÇÃO	30
Figura 7: Exemplo do jogo de discos	49
Figura 8: Exemplos de jogadas	50
Figura 9: Construção da malha quadriculada	73
Figura 10: Plotagem	75
Figura 11: Plano quadriculado com lado L	76
Figura 12: Diâmetro contido num quadrado..	76
Figura 13: Quadrado menor formado pelos centros dos discos.....	77
Figura 14: Imagem do anexo A com as questões introdutórias	81
Figura 15: Resposta do GF A - Total de 36 lançamentos favoráveis	88
Figura 16: Resposta do GF B - Total de 24 lançamentos favoráveis	88
Figura 17: Respostas do GF C - Total de 75 lançamentos favoráveis.....	89
Figura 18: Respostas do GF D - Total de 15 lançamentos favoráveis	89
Figura 19: Respostas do GF E - Total de 22 lançamentos favoráveis	89
Figura 20: Respostas do GF F - Total de 14 lançamentos favoráveis	90
Figura 21: Respostas do GF A - Total de 46 lançamentos favoráveis	90
Figura 22: Respostas do GF B - Total de 7 lançamentos favoráveis	91
Figura 23: Resposta do GF C - Total de 67 lançamentos favoráveis	91
Figura 24: Respostas do GF D - Total de 10 lançamentos favoráveis	91
Figura 25: Respostas do GF E - Total de 8 lançamentos favoráveis	92
Figura 26: Respostas do GF F - Total de 16 lançamentos favoráveis	92
Figura 27: Respostas do GF A - Total de 117 lançamentos favoráveis	93
Figura 28: Respostas do GF B - Total de 81 lançamentos favoráveis	93
Figura 29: Respostas do GF C - Total de 94 lançamentos favoráveis	93
Figura 30: Respostas do GF D - Total de 66 lançamentos favoráveis	94
Figura 31: Respostas do GF E - Total de 76 lançamentos favoráveis	94
Figura 32: Respostas do GF F - Total de 15 lançamentos favoráveis	94
Figura 33: Respostas do GF A - Total de 104 lançamentos favoráveis	95

Figura 34: Respostas do GF B - Total de 46 lançamentos favoráveis	95
Figura 35: Respostas do GF C - Total de 57 lançamentos favoráveis	96
Figura 36: Respostas do GF D - Total de 29 lançamentos favoráveis	96
Figura 37: Respostas do GF E - Total de 33 lançamentos favoráveis	96
Figura 38: Respostas do GF F - Total de 21 lançamentos favoráveis	97
Figura 39: Tabulação dos dados do GF A	98
Figura 40: Tabulação dos dados do GF B	98
Figura 41: Tabulação dos dados do GF C	99
Figura 42: Tabulação dos dados do GF D	99
Figura 43: Tabulação dos dados do GF E	99
Figura 44: Tabulação dos dados do GF F	100
Figura 45: Plotagem do GF A	106
Figura 46: Plotagem do GF B	106
Figura 47: Plotagem do GF C.....	106
Figura 48: Plotagem do GF D	107
Figura 49: Plotagem do GF E.....	107
Figura 50: Plotagem do GF F.....	107
Figura 51: Resposta de um GF sobre probabilidade experimental X exata	110
Figura 52: Respostas de um GF da situação problema	110
Figura 53: Dados para resolução do problema proposta	122
Figura 54: Estudante desenvolvendo o cálculo	122
Figura 55: Estudantes resolvendo de forma colaborativa o problema	123
Figura 56: Estudantes testando o tabuleiro	123
Figura 57 Cálculo com as variáveis estabelecidas	124
Figura 58 Estudantes montando o tabuleiro	124
Figura 59 Finalizando o tabuleiro	125

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Estado da arte (jogos dos discos).....	41
Quadro 2: Vantagens e desvantagens dos jogos na sala de aula	48
Quadro 3: Registro de frequência	66
Quadro 4: Tabulação dos dados	67
Quadro 5: Probabilidade experimental x probabilidade exata	68
Quadro 6: Um novo desafio	69
Quadro 7: Família da moeda do Real	72

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

TSD – Teoria da Situação Didática

ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio

SAEB – Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica

TALE - Termo de Assentimento Livre e Esclarecido

UAB – Universidade Aberta do Brasil

UCDB – Universidade Católica Dom Bosco

UFGD – Universidade Federal da Grande Dourados

IDEB – Índice do Desenvolvimento da Educação Básica

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	17
1 A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS	25
1.1 A noção de situação didática	25
1.2 Tipologia das situações na didática	27
1.2.1 Situação de ação	28
1.2.2 Situação de formulação	29
1.2.3 Situação de validação	29
1.2.4 Institucionalização	31
1.3 Contrato didático	31
1.3.1 Efeito Topaze e o controle da incerteza.....	33
1.3.2 Efeito Jourdain ou mal-entendido fundamental	34
1.3.3 Deslizamento metacognitivo	34
1.3.4 O uso abusivo da analogia.....	35
1.4 As situações didáticas: componentes e estratégias	36
1.4.1 A devolução.....	36
1.4.2 A institucionalização	37
1.5 Ensino e aprendizagem	38
2 PROBABILIDADE E JOGOS DOS DISCOS	41
2.1 O jogo dos discos em dissertações	41
2.2 A probabilidade em nosso cotidiano	43
2.3 Uso dos jogos nas aulas	46
2.4 O jogo dos discos	49
3 REFERENCIAL METODOLÓGICO	51
3.1 Investigação qualitativa	51
3.2 Engenharia Didática	51
3.2.1 Análises preliminares	53
3.2.2 Concepção e análise <i>a priori</i>	54
3.2.3 Experimentação	55
3.2.4 Análise <i>a posteriori</i> e validação	60

3.3 Elaborando a sequência didática	60
4 ANÁLISE DAS ATIVIDADES	70
4.1 Análises a priori de cada atividade	70
4.2 Mão na massa – Experimentação	78
4.3 Análise da sequência de ensino	80
4.3.1 Análise a priori (anexo A)	80
4.3.2 Análise a posteriori (anexo A)	82
4.3.3 Análise a priori (anexo B)	83
4.3.4 Análise a posteriori (anexo B)	84
4.3.5 Análise a priori (anexo C)	87
4.3.6 Análise a posteriori (anexo C)	88
4.3.7 Análise a priori (anexo D)	97
4.3.8 Análise a posteriori (anexo D)	98
4.3.9 Análise a priori (anexo E)	105
4.3.10 Análise a posteriori (anexo E)	105
4.3.11 Análise a priori (anexo F)	109
4.3.12 Análise a posteriori (anexo F)	109
4.4 O X da questão	111
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	113
REFERÊNCIAS	117
APÊNDICE A: Projeto de intervenção.....	120
ANEXO A: Acontecimentos previsíveis e aleatórios.....	127
ANEXO B: Questões reflexivas antes da aplicação da sequência Didática.....	128
ANEXO C: Lançamentos dos Discos.....	130
ANEXO D: Organização dos dados do lançamento.....	132
ANEXO E: Probabilidade ideal e plotagem.....	134
ANEXO F: Um pouco de teoria	135
ANEXO G: Termo de Consentimento Livre e Esclarecido.....	136
ANEXO H: Termo de Assentimento Livre e Esclarecido.....	138

INTRODUÇÃO

Esta dissertação trata de uma pesquisa com o seguinte problema: Quais as contribuições do jogo dos discos para a construção do conceito de probabilidade por estudantes do 3º ano do ensino médio?

O problema tem relação com a vivência do pesquisador. Dessa forma, esta parte é escrita na primeira pessoa, por tratar do início de carreira profissional, motivações e anseios durante seu período escolar e seu percurso acadêmico.

Este trabalho de pesquisa foi realizado por um professor de matemática. Para compreender um pouco mais sobre o processo de constituição desse professor, descrevo o caminho percorrido desde a educação básica até a inserção no programa de mestrado profissional da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul.

Lembro da minha professora da 1ª série¹ do Ensino Fundamental, que nas aulas de Matemática realizava um jogo de bingo com os números, ditando alguns números ou passando algumas operações para resolvermos e se tivéssemos o resultado na cartela, marcávamos e preenchendo essa cartela por completo, ganhávamos algum prêmio (lápis de cor, carrinho, massinha de modelar, chocolate, entre outros prêmios). A ação dessa professora, certamente contribuiu para o meu interesse por números.

No Ensino Médio, a professora de Matemática realizava em suas aulas, sempre ao término da explicação e aplicação de exercícios de um certo conteúdo, alguns desafios chamados “racha cuca”, que eram realizados em sala de aula e os estudantes que conseguissem resolver de forma correta ganhavam nota bônus nas avaliações. E não eram exercícios simples de resolver, tanto é assim que pouquíssimos estudantes conseguiam essa bonificação, mas eu procurava estudar para resolver esses exercícios e ter a nota extra. Foram essas atividades em sala, que me fizeram apaixonar pela disciplina e realizar a graduação em Matemática.

Ao término do Ensino Médio, fui aprovado para cursar Administração ou Matemática, fazendo opção pelo segundo curso, pois além de procurar ter bom desempenho nessa disciplina durante a Educação Básica, ser professor sempre foi algo com que sonhava. Assim, aos dezessete anos iniciei o curso de Licenciatura em Matemática, realizando o primeiro ano na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, campus Dourados, mas no mês de agosto do mesmo ano, a Universidade aderiu à greve e ao perceber que iniciava o mês de março do ano

¹ Nessa época, ainda era denominado série. A partir da Lei Federal nº 11.114, aprovada em maio de 2005, altera quatro artigos da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) e estabelece que o ensino fundamental de 1ª a 8ª séries deve ser estendido para um total de nove anos.

seguinte e sem proposta para o retorno das aulas, transferi o curso para uma instituição particular no mesmo município, onde cursei durante dois anos. Como teria que mudar de cidade por questão familiar e havia conseguido bolsa em uma outra instituição em Campo Grande – MS, realizei os dois últimos anos do curso nesta outra universidade.

Esse período da graduação me trouxe muitas contribuições, proporcionando maior aprendizagem para os conteúdos matemáticos, mas principalmente, contribuindo para minha realização pessoal e vivência no âmbito escolar, por meio das disciplinas pedagógicas e dos estágios.

Antes mesmo de terminar o curso, já comecei a lecionar. Esse período inicial da docência me inquietava demais, pois tinha muitas dúvidas. E essa inquietação me incomodava, assim levantando alguns questionamentos em relação a minha prática, e não tendo com quem compartilhar essas angústias. Desses questionamentos sem respostas, tive a sensação de solidão.

O tempo foi passando e essa vontade de obter respostas a esses questionamentos, levou-me a buscar algo que me ajudasse a completar essas lacunas. Dessa forma, cursei três especializações: Administração Escolar: Supervisão, Orientação e Direção; Metodologia do Ensino de Matemática e Especialização em Matemática.

No decorrer dessas formações, atuei como professor e coordenador. Foram os três anos iniciais atuando como professor de Ensino Fundamental e Médio. No período de 2011 a 2015, tive a oportunidade e a experiência de trabalhar na coordenação, sendo primeiro no projeto de coordenação de área da rede estadual de ensino de Mato Grosso do Sul e em seguida na coordenação pedagógica na mesma escola.

Essa experiência teve tanta significância em minha vida profissional, que cursei a segunda licenciatura em Pedagogia. Em 2016 e 2017 retornei à sala de aula, como professor de Matemática, lecionando em turmas do 8º ano do Ensino Fundamental ao 2º ano do Ensino Médio. E em 2018, tive a oportunidade novamente de trabalhar na coordenação pedagógica, mas agora em uma instituição privada.

Com essa vivência entre a coordenação pedagógica e docência na disciplina de Matemática, tanto na rede privada quanto na pública, confesso que muitas vezes me perguntava qual a minha real função dentro da escola e se estava contribuindo de maneira significativa para auxiliar tanto em minha prática pedagógica quanto a prática dos outros professores.

E para obter mais formações tanto na área de formação de professores quanto ao trabalho didático em sala de aula, procurei o Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade

Estadual de Mato Grosso do Sul (UEMS), objetivando a busca por estes conhecimentos pedagógicos, como também dar continuidade aos meus estudos.

Realizei a seleção para o mestrado, sendo aprovado em 2017 no Programa de Pós-Graduação em Educação, na linha de pesquisa Organização do Trabalho didático. Mas antes da aprovação neste processo seletivo, cursei duas disciplinas como estudante especial neste programa, sendo uma em Tópicos especiais: didática da Matemática e outra em Processo de gestão da educação básica. Ao cursar a primeira disciplina, tive contato com alguns referenciais teóricos que me inquietaram, proporcionando o desenvolvimento dessa pesquisa utilizando esses conhecimentos adquiridos e, em consequência, a elaboração desta dissertação, associando alguns teóricos-metodológicos da Didática da Matemática ao conteúdo de Probabilidade, ministrado no Ensino Médio.

Apesar da ampla discussão sobre questões relacionadas à didática específica ao ensino da matemática percebe-se que este, em sua maioria, é carregado com traços de práticas mecânicas. São dificuldades no ensino e na aprendizagem que vêm se perpetuando há anos por modelos que não levam o educando a formular suas respostas, uma vez que os problemas a serem resolvidos já prontos e bem como as respectivas respostas também já prontas sem levar o estudante ao conhecimento científico ou a uma contextualização histórica, isto é, sem integrar aquele tema com a história da matemática.

Toda prática didática que norteia o processo de ensino e aprendizagem da matemática provém de tendências de ensino de matemática que tem suas raízes nos modelos epistemológicos gerais: euclidianos, quase empíricos e construtivistas (GASCÓN, 2001). É possível vislumbrarmos resquícios dessas correntes epistemológicas nas práticas didáticas contemporâneas. (...) Para Gascón (2001), essa concepção do conhecimento matemático também se estende para as práticas de ensino nos sistemas escolares. Em conformidade com esse autor, da corrente epistemológica euclidiana emergiu o modelo docente bidimensional clássico. Tal modelo didático se configura por meio do entrelaçamento dos modelos teorista e tecnicista presentes na prática do professor. Ambos concebem o conhecimento matemático como algo mecânico e totalmente controlável pelo professor. No modelo docente clássico, o docente resume o processo de ensino na apresentação de um corpo teórico (definições, teoremas, axiomas), seguido de exemplos e exercícios voltados para a compreensão da teoria e aplicação de técnicas (SALES, 2015, p. 428-429).

Essa prática mecânica, vem proporcionando uma crise do ensino de matemática. No Brasil pode-se constatar facilmente esse fato pela observação do baixo desempenho geral em avaliações de larga escala, sobretudo de matemática.

Essa questão envolve fatores além dos metodológicos, mas é frequente a reflexão que envolve certa insatisfação com o chamado “método tradicional” de ensino de Matemática. Ainda que se possa discordar dessa expressão, já que tradicional não

necessariamente significa o que se procura criticar em relação à prática comum das escolas de hoje, é possível defender uma crítica àquele método em que o professor desenvolve todo o raciocínio sozinho e pensa transmiti-lo ao estudante; oferece modelos para a resolução dos exercícios, na expectativa de que bastaria ao estudante realizar cópias e reproduzir técnicas. Essa forma de ensinar, que se pode criticar, acabaria por restringir as possibilidades de o estudante desenvolver estratégias e raciocinar. Ou seja, ela não seria adequada ao ensino de Matemática e contribuiria para a crise que mencionamos (TREVIZAN, 2014, p. 1).

Para exemplificar, logo abaixo encontram-se os resultados do IDEB² 2017, das escolas estaduais do estado de Mato Grosso do Sul, e também as metas projetadas para 2019 e 2021. Assim, observando o resultado de 2017, que foi de 3,6 e mesmo alcançando a meta de 2021 que está projetado em 4,1, esse resultado fica distante da média nacional para 2021. “A lógica é a de que para que o Brasil chegue à média 6,0 em 2021, período estipulado tendo como base a simbologia do bicentenário da Independência em 2022, cada sistema deve evoluir segundo pontos de partida distintos, e com esforço maior daqueles que partem em pior situação” (FERNANDES, 2005, p.2).

² Ideb é o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica, criado em 2007, pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep), formulado para medir a qualidade do aprendizado nacional e estabelecer metas para a melhoria do ensino.

Figura 1: IDEB: Escolas estaduais de MS



Fonte: ideb.inep.gov.br/resultado

Aqui, é o resultado do IDEB das escolas públicas (Federal, Estadual e Municipal) do estado de Mato Grosso do Sul, sendo esse resultado próximo do anterior.

Figura 2: IDEB: Escolas públicas (Federal, Estadual e Municipal) de MS



Fonte: ideb.inep.gov.br/resultado

Segundo Mizukami (2001), na abordagem tradicional, o estudante apenas executa prescrições que lhe são fixadas por autoridades exteriores; é instruído e ensinado pelo professor. Dessa forma, a inteligência é concebida pelo acúmulo de informações. Os métodos tradicionais

têm como objetivo a transmissão de conteúdos definidos, onde a variedade e a quantidade de noções, conceitos e informações prevaleçam sobre a formação do pensamento reflexivo.

Uma tendência tradicional, como práticas de muitas escolas é o método em que o professor desenvolve todo o raciocínio sozinho e pensa transmiti-lo ao estudante, oferecendo modelos para a resolução dos exercícios, crendo que basta ao estudante realizar cópias e reproduzir técnicas, que os mesmos já aprenderam o conteúdo. Essa forma de ensinar, acaba por restringir as possibilidades de o estudante desenvolver estratégias e raciocinar.

A matemática sendo ensinada segundo o modelo citado, proporciona aos estudantes a memorização, contrariando o raciocínio e suas deduções. Gascón (2001) apresenta modelos epistemológicos gerais que norteiam as práticas docentes. São os modelos: euclidianos, quase empíricos e construtivistas. O modelo euclidiano pode ser interpretado da seguinte forma: “o teorismo considera o estudante como uma ‘caixa vazia’ e o tecnicismo o vê como um ‘autômato’, cuja melhora está associada ao domínio das técnicas, sistematizando-as. Consideram o processo de ensino como algo mecânico e totalmente controlável pelo professor” (CAMILO, 2007, p. 21). Destacamos esse modelo por se aproximar dessa metodologia da memorização e, por meio dessa metodologia, o estudante não associa sua aprendizagem a sua vida extraescolar. Esse estudante deveria adquirir habilidade para resolver problemas, mas é condicionado a responder alguns problemas-padrão do conteúdo que está vendo naquele momento, reproduzindo um procedimento fornecido pelo professor.

A matemática ensinada em nossas escolas, não deveria ser, mas é desprovida de significado, quer seja pelo método enciclopédico com que é ensinada, quer seja pela fragmentação a que é submetida. Um único (e tão eficiente) resultado como o Teorema de Pitágoras seria suficiente para a obtenção da distância entre pontos da Geometria Analítica e da Relação Fundamental da Trigonometria. No entanto, cada um desses conhecimentos é ensinado separadamente, como um novo conhecimento que nada tem a ver com as ferramentas de que o estudante já dispõe (TREVIZAN, 2014, p. 10-11).

Por essa razão, esta pesquisa analisa uma perspectiva para o ensino de matemática, baseada em trabalhos e ideias que vêm sugerindo um novo olhar para o ensino de matemática, por meio da Educação Matemática, tendo como vertente a Teoria das Situações de Guy Brousseau. Essa teoria tem sido uma fonte de inspiração para novas abordagens da questão de um Ensino de Matemática mais adequado à formação de um estudante crítico e reflexivo.

Assim, esse trabalho tem como objetivo geral **analisar a construção do conceito de probabilidade por estudantes do último ano do ensino médio, por meio de uma sequência didática que envolve o jogo dos discos, com a contribuição da situação didática.**

Dessa forma, para atingir o objetivo geral desta investigação elencamos os seguintes objetivos específicos:

- Avaliar as contribuições do jogo dos discos para o ensino e aprendizagem de probabilidade
- Analisar as produções autônomas dos estudantes durante o jogo dos discos.
- Contribuir com o debate e sugestões de alternativas pedagógicas para o ensino e a aprendizagem de probabilidade no Ensino Médio.

E para alcançar esses objetivos, vamos apresentar uma proposta de atividades didáticas, sendo estas, diferentes da tradicional, proporcionando autonomia para os estudantes, envolvendo experimentação, modelagem, gráficos e função quadrática. Essas atividades, que são facilmente aplicáveis por um professor de Matemática, poderão motivar e contribuir para o processo de ensino e aprendizagem do conceito de probabilidade.

Ao dissertar sobre o ensino de matemática com foco no conteúdo de probabilidade, elaborou-se uma sequência didática constituída de atividades voltadas para a área de conhecimento escolhido, proporcionando aos estudantes (participantes da pesquisa) condições para uma melhor compreensão e construção de seu próprio aprendizado.

Nesta fase da pesquisa foi elaborada uma sequência de atividades didáticas, baseadas no livro Jogos dos discos de Caetano (2013)³, para o ensino de probabilidade que foi aplicado em um período de 8 (oito) aulas em duas tardes no período contraturno de aula dos estudantes. A concepção e posterior análise desta sequência foi feita à luz da Teoria das Situações Didáticas a fim de observar os efeitos no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de probabilidade. Assim, durante a concepção da sequência realizamos a análise a priori de cada situação elaborada, como exigência da metodologia.

A pesquisa foi realizada com estudantes do 3º ano do ensino médio, de uma escola privada no município de Campo Grande – MS, sendo que no referencial curricular dessa escola, esse conteúdo é abordado nesse ano escolar. O motivo da escolha dessa escola, é porque o pesquisador não está com vínculo em escolas públicas, trabalhando apenas nessa escola, assim facilitando o diálogo e a elaboração da proposta com a professora de Matemática, bem como,

³ Nesse livro, apresenta-se a atividade prática denominada “jogo dos discos”, que é um experimento muito atraente para os estudantes envolvendo o lançamento aleatório de discos em um quadriculado. O jogo dos discos aborda o tema probabilidade geométrica e constitui uma oportunidade para o estudante refletir sobre conceitos de probabilidade, obtenção de dados a partir de um experimento, ajuste de curvas e modelagem de dados através de uma função.

o tempo suficiente para aplicar a sequência didática, evitando cansaço para os estudantes e aplicando a sequência conforme cronograma da escola.

Optamos pelo 3º ano do ensino médio, pois nessa série consta o conteúdo de probabilidade no referencial curricular, bem como, os estudantes já possuem conhecimento sobre alguns conceitos de geometria e função, pois já fizeram parte das séries anteriores, uma vez que são necessários esses conceitos para realização dessa sequência didática. Mas destacamos que o conteúdo probabilidade compõe o currículo desde os anos iniciais do ensino fundamental, mas no último ano do ensino médio o material proporciona um maior aprofundamento sobre o assunto.

Para alcançar os objetivos propostos, este trabalho foi organizado em cinco capítulos.

No primeiro capítulo apresentamos as ideias das situações didáticas, bem como sua tipologia e seus componentes essenciais.

O segundo capítulo traz uma revisão de literatura, abordando os jogos dos discos em dissertações, também a importância da probabilidade e sua aplicação em nosso cotidiano, a importância do uso dos jogos nas aulas e descrição do funcionamento dos jogos dos discos.

No terceiro capítulo, apresentamos os caminhos que trilhamos em nossa pesquisa, sendo utilizada a engenharia didática como metodologia de pesquisa, apresentando a descrição da escola onde a sequência didática foi aplicada e a elaboração da sequência de atividades didáticas.

No quarto capítulo, temos as análises dos dados coletados e validação desses dados.

Finalizando, apresentamos as considerações, a proposta de intervenção e as referências. Assim, proporemos um projeto de intervenção no âmbito educacional, visto que é uma exigência prevista no Projeto Pedagógico do Programa de Mestrado Profissional em Educação/PROFEDUC da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, e que se encontra em apêndice.

O objetivo principal deste projeto de intervenção é o de colocar em prática a aquisição do conceito adquirido pelos estudantes sobre probabilidade para construção de um tabuleiro dos jogos dos discos, sendo esse um produto que ficará para a escola podendo ser um objeto de uso com a comunidade escolar, com propósito de lucro para qualquer evento que os estudantes queiram realizar (formatura, viagem, etc.).

CAPÍTULO 1- A TEORIA DA SITUAÇÃO DIDÁTICA

Nesse capítulo, descrevemos brevemente a Teoria da Situação Didática (TSD), trazendo uma noção da teoria, desde seus princípios e alguns autores, como Guy Brousseau – que desenvolveu a teoria, e outros autores que se baseiam na teoria. O capítulo contempla a definição da teoria, suas tipologias e os componentes essenciais.

1.1 A noção de situação didática

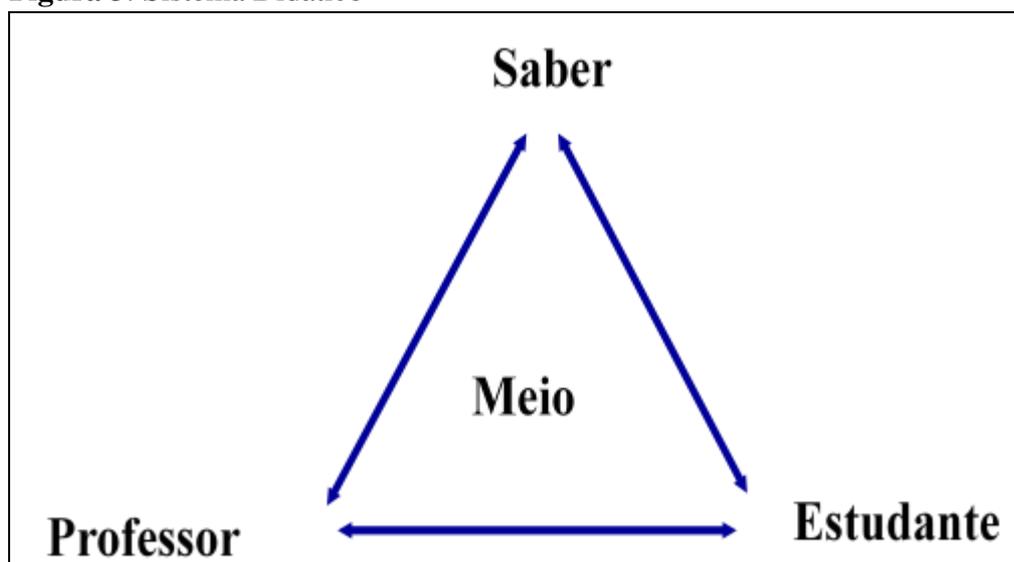
Entre várias teorias pedagógicas desenvolvidas nas últimas décadas, em sua maioria, elas abordam aspectos gerais, sendo que o modelo teórico desenvolvido por Brousseau (1986) contempla a especificidade do saber matemático. Essa teoria, iniciada em 1970, na França, representou um marco importante na pesquisa sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Essa teoria representa uma referência para o processo de aprendizagem matemática em sala de aula envolvendo professor, estudante e conhecimento matemático. Segundo Almouloud (2007), a Teoria da Situação Didática é denominada de construtivismo didático por ser uma proposta alternativa dentro da Psicologia Cognitiva que se baseou em alguns conceitos do construtivismo piagetiano como desequilíbrio, adaptação e acomodação, mas rejeita a ideia das fases de desenvolvimento infantil. Segundo Freitas

Trata-se de um referencial para uma educação matemática que, por um lado, valoriza os conhecimentos mobilizados pelo estudante e seu envolvimento na construção do saber matemático e, por outro, valoriza o trabalho do professor, que consiste fundamentalmente, em criar condições suficientes para que o estudante se aproprie de conteúdos matemáticos específicos (FREITAS, 2012, p. 78).

Nessa teoria, é importante a compreensão do termo *meio*, que é onde ocorrem as interações do sujeito. Segundo Freitas (2012, p. 79), “ao organizar o meio, o professor tem expectativas em relação à participação dos estudantes e estes também observam o trabalho do professor e buscam entender quais são as regras do jogo para direcionarem suas ações.” Dizendo em outras palavras: a expectativa do professor sobre os estudantes influencia na organização da sua sequência didática, comportamento e forma de conduzir o processo.

Assim, “o objeto central de estudo nessa teoria não é o sujeito cognitivo, mas a situação didática, na qual são identificadas as interações entre professor, estudante e saber” (ALMOULOU, 2007, p. 32).

Figura 3: Sistema Didático

Fonte: Brousseau (1986)

A situação didática existirá sempre que ficar caracterizada uma intenção do professor, de possibilitar ao estudante a aprendizagem de um determinado conteúdo, pois, segundo Bodin,

Une situation didactique est un ensemble de rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu (compre nant éventuellement des instruments ou des objets) et un système éducatif (le profes seur) aux fins de faire approprier à ces élèves⁴ un savoir constitué ou en voie de cons titution⁴ (BODIN, 1985, p. 21).

Por meio da análise das situações didáticas é possível investigar a problemática da aprendizagem matemática e empenhar em aspectos que ocorrem durante a resolução de problemas e a elaboração de conceitos pelos estudantes. Assim o trabalho do professor será “propor ao estudante uma situação de aprendizagem para que [este] elabore seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta, e os faça funcionar ou os modifique como resposta às exigências do meio e não a um desejo do professor” (BROUSSEAU, 1996b, p. 49).

Um dos grandes equívocos encontrados no ensino da Matemática é aquele que em sua prática educativa se reduziria a uma simples reprodução, em menor escala, do contexto do trabalho científico. Assim, o professor tem um trabalho desafiador, que consiste em criar

⁴ "Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas de forma explícita e / ou implícita entre um estudante ou grupo de estudantes, um determinado ambiente (possivelmente incluindo instrumentos ou objetos) e um sistema educacional (o professor) com o propósito de fazer com que esses estudantes adquiram conhecimentos que estão constituídos ou em processo de constituição". (Tradução nossa)

condições para que o estudante aprenda em pouco tempo noções que demoraram muito para serem construídas.

Consideremos um dispositivo criado por alguém que queira ensinar um conhecimento, que na proposição da presente pesquisa, o dispositivo considerado foi o jogo dos discos. Assim Brousseau relata que

esse dispositivo abrange um *meio* material - as peças de um jogo, um desafio, um problema, inclusive um exercício, fichas, etc, - e as regras de interação com esse dispositivo, ou seja, o jogo propriamente dito. Contudo, somente o funcionamento e o real desenvolvimento do dispositivo, as partidas de fato jogadas, a resolução do problema, etc, podem produzir um efeito de ensino. Portanto deve-se incluir o estudo da evolução da situação, visto pressupormos que a aprendizagem é alcançada pela adaptação do sujeito, que assimila o meio criado por essa situação, independentemente de qualquer intervenção do professor ao longo do processo. Os conhecimentos se manifestam essencialmente como instrumentos de controle das situações (BROUSSEAU, 2008, p. 22).

Dessa forma, para ilustrar o papel desempenhado pelas relações entre o funcionamento dos conhecimentos dos estudantes e as características das situações, relações essas manifestadas nos comportamentos dos estudantes, tomemos como exemplo os jogos dos discos.

1.2 Tipologia das situações na didática

São as atividades envolvendo a resolução de problema que impulsiona o processo de ensino e aprendizagem matemática. A escolha de um bom problema é a parte inicial do trabalho pedagógico, sendo que este deve ser compatível com o nível de conhecimento dos estudantes. O responsável pela realização dessa tarefa é o professor, pois é ele quem tem as condições de conhecer os estudantes e a realidade de sala de aula. “Levando em consideração que o saber tem diversos níveis de funcionalidade, dependendo do problema e dos conceitos utilizados, é de se esperar que o conhecimento elaborado pelo estudante seja diferente segundo cada caso” (FREITAS, 2012, p. 94).

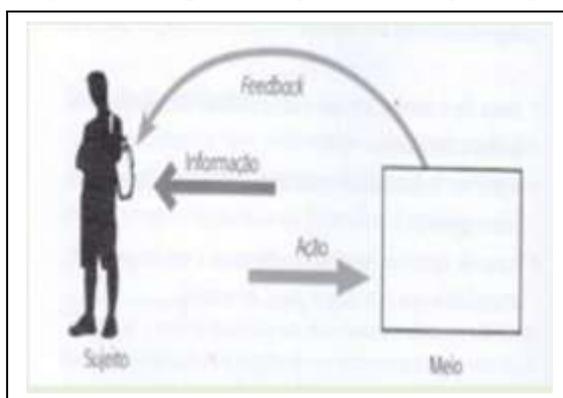
Descreveremos uma breve abordagem da classificação das situações didáticas, procurando associar as relações do estudante com essa diversidade de possibilidades de utilização do saber, sendo elas: situação da ação; situação de formulação; situação de validação e a institucionalização (BROUSSEAU, 2008).

1.2.1 Situação de ação: Para um sujeito, “atuar” consiste em escolher diretamente os estados do *meio* antagonista em função de suas próprias motivações. Se o meio reage com certa regularidade, o sujeito pode relacionar algumas informações às suas decisões, antecipar suas respostas e considerá-las em suas futuras decisões. Os conhecimentos permitem produzir e mudar essas “antecipações”. A aprendizagem é o processo em que os conhecimentos são modificados. Podemos representar esses conhecimentos por meio de descrições de táticas que o indivíduo parece seguir ou pelas declarações daquilo que parece levar em consideração, mas tudo são só projeções. A manifestação observável é um padrão de resposta explicado por um modelo de ação implícito. Em outras palavras:

Quando o estudante, que se encontra ativamente empenhado na busca de solução de um problema, realiza determinadas ações mais imediatas, que resultam na produção de um conhecimento de natureza mais operacional. Muitas vezes, essas ações podem estar fundamentadas em modelos teóricos que o estudante pode tentar ou não explicitar. Entretanto, o essencial dessa situação não é a explicitação de nenhum argumento de natureza teórica. É o caso em que o estudante fornece uma solução, mas muitas vezes não argumenta ou explicita os mecanismos utilizados na sua elaboração. A explicitação dos modelos teóricos, dos argumentos, das justificativas para as ações realizadas não é necessariamente feita pelo estudante. Na estruturação de uma dessas situações, o professor escolhe alguns dados convenientes para que o estudante tenha condições de agir e, assim, buscar a solução de um determinado problema. Numa situação de ação, há sempre o predomínio quase que exclusivo do aspecto experimental do conhecimento. Este é o caso, por exemplo, quando da solução de um problema de construção geométrica, o estudante contenta-se com uma solução apresentada exclusivamente utilizando régua e compasso. Ele realiza uma ação de natureza mais experimental sem, no entanto, preocupar-se com a explicitação de um resultado teórico que esclareça ou justifique a validade de sua resposta (FREITAS, 2012, p. 95-96).

A figura a seguir (fig.4), representa a situação da ação. A situação passa a informação ao estudante e o estudante empenha uma ação sobre a situação.

Figura 4: Representação da situação AÇÃO



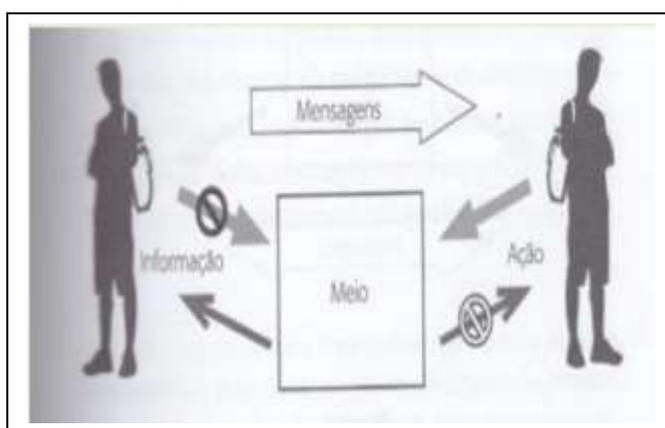
Fonte: Brousseau (2008, p.28)

1.2.2 Situação de formulação: A formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema linguístico). O *meio* que exigirá do sujeito o uso de uma formulação, deve então, envolver um outro sujeito, a quem o primeiro deverá comunicar uma informação. Porém, se quisermos determinar o conteúdo da comunicação, também será necessário que ambos os interlocutores cooperem no controle de um meio externo, de forma que nem um nem outro possa fazê-lo sozinho e que o único modo de ganhar seja obtendo do outro a formulação dos conhecimentos em questão. Em outras palavras:

O estudante já utiliza, na solução do problema estudado, alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos, além de mostrar um evidente trabalho com informações teóricas de uma forma bem mais elaborada, podendo ainda utilizar uma linguagem mais apropriada para viabilizar esse uso da teoria. Nessas situações, o saber não tem uma função de justificação e de controle das ações. O estudante pode tentar explicitar suas justificativas, mas isso não seria essencial para caracterizar esse tipo de situação. Trata-se do caso em que o estudante faz determinadas afirmações relativas à sua interação com o problema, mas sem a intenção de julgamento sobre validade, embora contenham implicitamente intenções de validação. Portanto, essas situações são caracterizadas pelo fato de não indicarem explicitamente os porquês da validade e de não estar sendo cobrado a fazê-lo (FREITAS, 2012, p. 96-97).

A figura seguinte (fig.5), representa a situação da formulação. A situação passa a informação ao estudante e o estudante empenha uma ação sobre a situação.

Figura 5: Representação da situação FORMULAÇÃO



Fonte: Brousseau (2008, p.29)

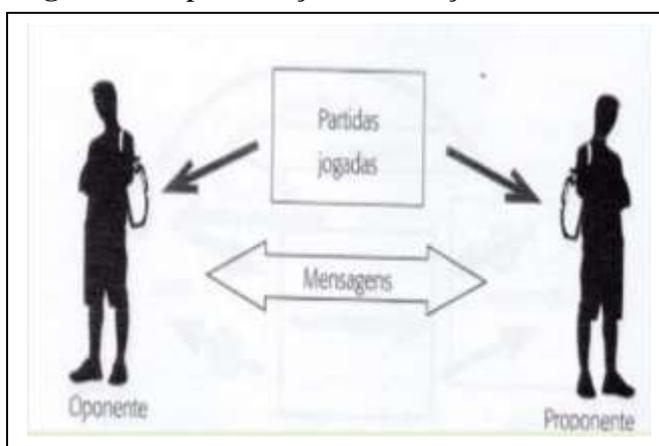
1.2.3 Situação de validação: Os esquemas de ação e de formulação implicam processos de correção, seja empírica ou apoiada em aspectos culturais, para assegurar a pertinência, a adequação, a adaptação ou a conveniência dos conhecimentos mobilizados. Mas a modelagem,

no que diz respeito à situação, permite distinguir um novo tipo de formulação: o emissor já não é um informante, mas um proponente, e o receptor, um oponente. Pressupõe-se que possuam as mesmas informações necessárias para lidar com uma questão. Colaboram na busca da verdade, ou seja, no esforço de vincular de forma segura um conhecimento a um campo de saberes já consolidados, mas entram em confronto quando há dúvidas. Juntos, encarregam-se das relações formuladas entre um meio e um conhecimento relativo a ele. Cada qual pode posicionar-se em relação a um enunciado e, havendo desacordo, pedir uma demonstração ou exigir que o outro aplique suas declarações na interação com o meio. Em outras palavras:

O estudante já utiliza mecanismos de prova e em que o saber é usado com essa finalidade. Essas situações estão relacionadas ao plano da racionalidade e diretamente voltadas para o problema da verdade. Elas podem ainda servir para contestar ou mesmo rejeitar proposições. O trabalho do estudante não se refere somente às informações em torno do conhecimento, mas a certas afirmações, elaborações, declarações a propósito desse conhecimento. Nessas situações, é preciso elaborar algum tipo de prova daquilo que já se afirmou, de outra forma, pela ação.(...) É necessário destacar que a atividade de validação é indissociável da formulação. De fato, a produção de provas necessita que seja constituído um sistema comum de validação através de uma linguagem oral ou escrita, no seio de um grupo social, mesmo se restrito a apenas dois indivíduos. Tanto na situação de formulação como na de validação matemática, pode-se recorrer a dois tipos de linguagem: a natural e a simbólica. O mais comum é que o estudante faça uso simultâneo das duas formas, expressando-se assim numa linguagem híbrida. Muitas dificuldades encontradas na produção de provas podem estar associadas ao domínio insuficiente da linguagem simbólica formal da Matemática (FREITAS, 2012, p.98-100).

Na figura nº 6, está representada a situação da validação. A situação passa a informação ao estudante e o estudante empenha uma ação sobre a situação.

Figura 6: Representação da situação de VALIDAÇÃO



Fonte: BROUSSEAU (2008, p.30)

1.2.4 Institucionalização: Afirma-se que em época passada acreditava-se que ao considerar as situações da ação, formulação e validação, dispunha-se de todos os tipos possíveis de situação (BROUSSEAU, 2008). Mas, no decorrer das experiências desenvolvidas, nota-se que os professores, depois de certo tempo, precisavam ordenar um espaço. Não queriam passar de uma lição à seguinte, queriam parar para “rever o que já haviam feito”, sistematizar, conferir com base no saber institucionalizado, ou seja, institucionalizar o conteúdo trabalhado.

Demoramos a perceber que os professores realmente eram obrigados a “fazer alguma coisa”: tinham que dar conta da produção dos estudantes, descrever os fatos observados e tudo que estivesse vinculado ao conhecimento em questão; conferir um status aos eventos da classe vistos como resultados dos estudantes e do processo de ensino; determinar um objeto de ensino e identificá-los; aproximar as produções dos conhecimentos de outras criações (culturais ou do programa) e indicar quais poderiam ser reutilizadas (BROUSSEAU, 2008, p. 31).

Assim, apresentamos um breve comentário sobre as quatro fases da situação didática. No próximo tópico descreveremos sobre as cláusulas que são estabelecidas entre professores e estudantes, podendo ser essas de forma implícita ou explícita.

1.3 Contrato Didático

A relação professor-estudante está subordinada a muitas regras e convenções, que funcionam como se fossem cláusulas de um contrato. Segundo Silva (2012, p. 49), “o conjunto das cláusulas que estabelecem as bases das relações que os professores e os estudantes mantêm com o saber constitui o chamado *contrato didático*.” Essas regras quase nunca são explícitas, mas ficam perceptíveis quando ocorre a sua transgressão.

Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos estudantes e o conjunto de comportamentos do estudante que são esperados pelo professor [...] Esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro (BROUSSEAU, apud FREITAS, 2012, p. 50).

O contrato didático não é composto apenas por regras de convívio ou lista de combinados, mas também, como um contrato pedagógico. O contrato didático seria referente ao processo de ensino e de aprendizagem, geralmente não escrito, mas formado por relações

que o professor espera do estudante e das atitudes que o estudante espera do professor, de um modo geral, o que é explicitado em contrato didático são questões sobre avaliações e como as atividades serão feitas (ALMOULOUD, 2007).

Dessa forma o contrato didático depende de estratégias adotadas no percurso do ensino, tais como: as escolhas pedagógicas, o tipo de trabalho solicitado aos estudantes, os objetivos do curso, as condições de avaliação, etc.

Nas aulas de Matemática uma prática pedagógica comum é aquela em que o professor em seu contrato didático cumpre dando aulas expositivas e passando exercícios aos estudantes. Alguns casos, o professor se refugia na segurança dos algoritmos prontos, fracionando os exercícios de matemática em estágios para que os estudantes possam fazer de forma mecânica, assim esvaziando o significado do conteúdo. A preocupação do professor é apresentar uma definição, dar alguns exemplos e solicitar exercícios idênticos aos dos exemplos dados. Os problemas sempre têm solução e contém, no próprio enunciado, o indicativo da operação. Esse procedimento é assumido pelos estudantes como um contrato. Entendem que nesse contrato cabe a eles apenas memorizar as regras para repeti-las nas provas. Nessas circunstâncias, a construção do saber fica relegada ao segundo plano. No entanto, se as regras são essas, cabe a eles cumprir o contratado.

O contrato didático quando seguido por orientações contidas em sequências didáticas, organizada pelo professor, e que a institucionalização do saber se dá por meio de sessões coletivas contém cláusulas diferentes. O docente baseia-se nas produções pessoais ou coletivas dos estudantes para poder avançar no aprendizado de todos os estudantes da sala. Nesse caso, o contrato não contém cláusulas péticas, solidificadas. Nesse tipo de contrato o problema proposto pelo professor não necessariamente é resolúvel, ou seja, pode acontecer que não se saiba que existe uma resposta ou a resposta se existir, pode não ser única. Os dados podem não ser adequados, podendo ser insuficientes ou podem ser superabundantes. E essa procura dos dados necessários à resolução do problema faz parte do contrato didático estabelecido nessas circunstâncias.

Para uma efetiva aprendizagem, em muitos casos, é necessário que aconteça rupturas e renegociação do contrato didático. Um exemplo, para ilustrar essa situação, se dá quando o professor pretende introduzir um conceito novo por meio não de uma aula expositiva, mas a partir de atividades em que os estudantes, partindo de uma situação problema, resolvem questões trabalhando individualmente ou em duplas e, no final, o professor faz com toda a classe o fechamento visando a institucionalização do conceito que se pretende construir. Os estudantes recebem a ficha de atividade e aguardam que o professor inicie o trabalho. Quando

este lhes diz que são eles que devem trabalhar, a primeira reação vem imediatamente, questionar: “não sei fazer”, “como começar?”, “a teoria não foi dada”, “você não vai explicar?”.

Com essas rupturas o erro não é mais uma falha que se deve evitar a qualquer custo. Ele pode contribuir para a construção do conhecimento pretendido. Mas, precisa-se considerar que existem muitos erros e quem nem todos os erros são construtivos para o conhecimento.

Enfim, o contrato didático existe em função do aprendizado dos estudantes e a cada nova etapa da construção do conhecimento o contrato é renovado e renegociado. Em geral, essa renegociação passa despercebida pelos parceiros da relação didática. Na maioria das vezes os estudantes encontram muita dificuldade em se adaptarem a uma mudança de contrato. E essa renovação, bem como a transgressão depende não só do tipo de trabalho como também do meio onde se dá a prática pedagógica.

Podemos afirmar que uma grande parte das dificuldades dos estudantes é causada pelos efeitos do contrato didático mal colocado ou mal-entendido. Muitos professores ao desejarem que seus estudantes obtenham bons resultados, tendem a facilitar as tarefas dadas, como por exemplo, ensinando pequenos truques, algoritmos e técnicas de memorização ou mesmo indicando pequenos passos nos problemas. Às vezes essas explicações excessivas podem impedir a compreensão. As práticas movidas pela sensação de que o esforço exigido dos estudantes esteja sendo grande demais, podem propiciar uma revisão dos objetivos da aprendizagem, ocasionando um rebaixamento dos mesmos. A seguir apresentaremos alguns efeitos do contrato didático:

1.3.1 Efeito Topaze e o controle da incerteza.

Segundo Brousseau,

Topaze fez um ditado a um mau estudante. Como não pode aceitar erros grosseiros, nem indicar diretamente a ortografia correta, ‘sopra’ a resposta dissimulada em uma codificação didática cada vez mais transparente: [...] *asss ovelhasss* estavam em um curral [...]. Para o estudante, trata-se de um problema de ortografia e gramática. Com a ênfase nos ‘esses’, o problema mudou completamente. Diante dos recorrentes fracassos, Topaze implora um sinal de apoio e reduz as condições de negociação pelas quais o estudante acabará colocando um ‘s’. É de supor que o professor poderia continuar exigindo a explanação da regra gramatical correspondente, fazendo, em seguida, com que a copiassem determinado número de vezes. O desmoronamento completo do ato de ensinar é representado em uma simples ordem: ponha um ‘s’ em ‘ovelhas’ - o professor acabaria tomando para si a responsabilidade essencial do trabalho (BROUSSEAU, 2008, p. 79-80).

Em resumo, se os conhecimentos em questão desaparecem por completo, ocorre o efeito Topaze. Portanto, para que ocorra possíveis aprendizagens, o professor precisa administrar bem a condução de suas explicações, deixada a cargo do bom senso, sendo esse objeto de pesquisas, tanto teóricas como metodológicas como de engenharia didática. São as popularmente chamadas “dicas”

1.3.2 Efeito Jourdain ou o mal-entendido fundamental.

Esse efeito retrata a primeira cena da célebre peça “Topázio”, de Marcel Pagnol. Essa cena diz respeito ao ditado feito pelo professor Topázio, com um estudante.

Segundo Brito Menezes

exemplifica dizendo, que seria, de forma ‘grosseira’, equivalente ao professor de matemática dizer ao estudante que se ele faz as combinações das peças de roupa pra produzir diferentes formas de vestir, esse estudante sabe o que é análise combinatória. Um comportamento banal do estudante tornou-se a manifestação de um saber culto. Resumindo, um comportamento banal do estudante é considerado como a manifestação de um grande conhecimento (BRITO MENEZES, 2006, p. 63).

Em outras palavras, ao ensinar o conteúdo, o professor passa apenas algumas partes do assunto, que aparentemente têm mais facilidade de aprender e coloca como objeto de estudo suas próprias explicações e seus meios heurísticos, ao invés de ter como objeto o saber matemático institucionalizado.

1.3.3 Deslizamento metacognitivo.

Em uma situação que o professor encontre uma dificuldade em ensinar um saber que entra em cena no jogo didático, essa dificuldade pode ser de ordem didática, tanto do professor quanto do estudante. O professor então substitui o discurso científico por um discurso fundamentalmente ligado ao senso comum. Promove, assim, um deslize, uma ruptura e um deslocamento do objeto de saber.

Brousseau (1996) propõe que quando uma atividade de ensino fracassa, o professor pode ser levado a justificar-se e, para continuar a sua ação, a tomar as suas próprias explicações e os seus meios heurísticos como objeto de estudo no lugar de verdadeiro conhecimento matemático. Segundo Silva (1999) pode ser percebido ao se tomar como objeto de estudo uma

técnica que se presume adequada para a resolução de um problema, perdendo de vista o verdadeiro saber a ser desenvolvido.

Um exemplo é o efeito de se tornar como objeto de estudo uma técnica que se presume útil para a resolução de um problema, perdendo-se de vista o verdadeiro saber a ser desenvolvido, como é o exemplo do diagrama de Venn, que representam conjuntos e são estudados como se fossem a própria teoria dos conjuntos.

No caso em pauta um exemplo seria o professor, ao apresentar a fórmula usual para o cálculo da probabilidade $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$, ao perceber que o estudante tem dificuldade de operar com frações, se dispersaria do assunto principal e dedicaria o tempo a ensinar a operação com frações.

1.3.4 O uso abusivo da analogia.

Segundo Brousseau,

A analogia é uma excelente ferramenta heurística, quando utilizada sob a responsabilidade de quem a aplica. Porém, seu emprego na relação didática é, na verdade, uma maneira temível de produzir efeitos Topaze. No entanto, trata-se de uma prática natural: se os estudantes fracassam em seu processo de aprendizagem, devem receber uma nova oportunidade no mesmo assunto. Eles sabem disso. Ainda que o professor dissimule o fato de que o novo problema se parece com o anterior, os estudantes vão procurar - o que é legítimo - a solução que já lhes foi dada. Essa resposta não significa que a consideram adequada para a pergunta formulada, mas simplesmente que reconheceram indícios, talvez totalmente exógenos e não controlados, de que o professor queria que eles a produzissem. Dessa forma, obtêm a solução lendo as orientações didáticas, e não graças a um compromisso com o problema (BROUSSEAU, 2008, p. 84).

Em outras palavras, para ajudar na compreensão dos conceitos, as metáforas são úteis, mas precisa evitar o uso abusivo, podendo limitar o conceito em questão. Silva (2012),

Um exemplo típico é fornecido quando se estudam números relativos, fazendo referências exclusivas ao jogo de perdas e ganhos. Quando, na realidade, os números negativos tiveram o seu nascimento ligado à resolução de equações. O uso abusivo de analogias produz o efeito anteriormente citado, em que o professor indica dicas e desenvolve técnicas para ‘ajudar’ o estudante resolver a questão proposta (SILVA, 2012, p.66-67).

Podemos sintetizar os efeitos não desejáveis do contrato didático analisados nos seguintes itens:

- ao tomar como objeto de estudo uma técnica que se presume útil para a resolução de um problema, perdendo de vista o verdadeiro saber matemático a ser desenvolvido;
- substituir o estudo de uma noção complexa por uma analogia;
- resolver a questão no lugar do estudante, quando este encontra uma dificuldade;
- interpretar um comportamento banal do estudante como uma manifestação de um saber culto;
- acreditar que os estudantes darão naturalmente a resposta esperada.

1.4 As situações didáticas: componentes e estratégias

Mostramos que a efetiva realização de um projeto didático implica na criação de situações que tendem a provocar o funcionamento do saber e dos conhecimentos aferentes (não transformados em saberes). Assim, o ensino tem por objetivo principal o funcionamento do conhecimento como produção livre⁵ do estudante em suas relações com meio didático (BROUSSEAU, 2008).

Segundo Brousseau (2008), a devolução é um componente essencial do contrato didático e a institucionalização é outro componente essencial.

1.4.1 A devolução

Como já vimos, a devolução é um componente essencial da situação didática. Nessa teoria, segundo Freitas (2012, p. 83), “a devolução tem o significado de transferência de responsabilidade, uma atividade na qual o professor, além de comunicar o enunciado, procura agir de tal forma que o estudante aceite o desafio de resolvê-lo, como se o problema fosse seu e não somente porque o professor quer.” O estudante aceita participar desse desafio proposto pelo professor e ao conseguir sucesso nessa sua empreitada, podemos dizer que se inicia o processo de aprendizagem.

Mas para a progressão de sua aprendizagem é necessária análise de certos tipos particulares da situação didática, e uma delas é variável em que o professor não tem nenhum controle ou até mesmo razoável controle da ação didática. Assim, na perspectiva de melhor

⁵ Entendemos como “produção livre” toda resposta dada a um meio, regida pelo sentido, isto é, pelo que o estudante é capaz de interpor a seus condicionamentos (externos e internos) e as suas decisões.

compreensão dessas variáveis sobre os quais o professor não tem um controle direto, faz-se necessário apresentar a noção de situação adidática. Para Brousseau:

uma situação adidática caracteriza-se essencialmente pelo fato de representar determinados momentos do processo de aprendizagem nos quais o estudante trabalha de maneira independente, não sofrendo nenhum tipo de controle direto do professor relativamente ao conteúdo matemático em jogo. [...] A devolução de uma situação consiste no conjunto de condições que permitem que o estudante se aproprie da situação. Quando os estudantes se apropriaram da situação, o professor pode deixá-los com a responsabilidade da pesquisa. [...] O professor prepara, organiza a situação e tem controle sobre o andamento dela, não sobre o saber, para que o estudante possa vivenciá-la como se fosse um pesquisador que busca encontrar a solução sem a ajuda do mestre. [...] As situações adidáticas representam os momentos mais importantes da aprendizagem, pois o sucesso do estudante nelas significa que ele, por seu próprio mérito, conseguiu sintetizar alguns conhecimentos (BROUSSEAU apud FREITAS, 2012, p. 84-86).

Destacamos aqui que toda vez que for possível caracterizar uma intenção por parte do professor ao orientar um estudante para a aprendizagem de um conteúdo, fica caracterizada a existência de uma situação didática, e que toda situação adidática é um tipo de situação didática. Mas não podemos confundir com as situações não-didáticas, que são aquelas que não foram planejadas visando uma aprendizagem.

A escolha do problema pelo professor é uma parte importante de uma situação didática mais ampla, planejada com fins pedagógicos, na qual podem ocorrer uma ou mais situações adidáticas. E ao escolher o problema, o professor deve possibilitar ao estudante o máximo de independência para que o estudante possa desenvolver autenticamente seus próprios mecanismos de resolução do problema, através de suas elaborações de conceitos.

1.4.2 A institucionalização

Outro componente essencial é a institucionalização. Pois com a situação adidática, o professor é o responsável por fazer a máquina funcionar, mas no que se refere ao conhecimento propriamente dito, suas intervenções são quase nulas. Segundo Brousseau,

No decorrer das experiências desenvolvidas na escola Jules Michelet, vimos que os professores, depois de certo tempo, antes de dar continuidade ao andamento das aulas, precisavam organizar um espaço. Assim, diziam: ‘vamos rever o que fizemos até agora’ ou ‘alguns estudantes estão meio perdidos...temos de fazer alguma coisa’. Fomos obrigados a nos perguntar por que os professores resistiam a reduzir a

aprendizagem aos processos que havíamos concebido. Não se tratava de acusá-los, mas de entender o que legitimamente precisavam fazer e por que o faziam de forma obscura diante dos pesquisadores. E foi assim que ‘descobrimos’ o que todos os professores fazem em suas aulas, mas que nosso esforço de sistematização havia tornado inconfessável: o professor devia checar o que os estudantes precisavam fazer (e refazer) ou não, o que haviam aprendido ou precisavam aprender. Essa atividade é inevitável: não se pode reduzir o ensino à organização das aprendizagens (BROUSSEAU, 2008, p. 102).

O estudante levando em conta o objeto de conhecimento e o professor considerando a aprendizagem do estudante, isso é um fenômeno social muito importante e uma fase essencial do processo didático. Esse duplo reconhecimento é o objeto da institucionalização. Portanto o papel do professor também é institucionalizar.

1.5 Ensino e Aprendizagem

Ao dissertar sobre esse tema, já no título, aparecem dois termos que ainda não foram discutidos, mas que também aparecem na teoria de Brousseau: **ensino e aprendizagem**. Esse assunto é um tema polêmico e para escrita desse tópico será baseado em Weisz (2018) para justificar o uso dos termos e a aproximação que tem com a teoria em debate nessa pesquisa.

Coloca-se como polêmico, pois o processo de aprendizagem não responde necessariamente ao processo de ensino. Como muitos afirmam, não existe um processo único de “ensino-aprendizagem”. Segundo Weisz (2018), são dois processos que se comunicam, mas não se confundem, pois, o sujeito do processo de ensino é o professor e o sujeito do processo de aprendizagem é o estudante.

Isso significa que não podemos afirmar que o estudante poderá receber qualquer ensinamento que o professor for transmitir e ele receba exatamente como lhe foi transmitido. É o professor que precisa compreender o caminho da aprendizagem que o estudante está percorrendo naquele momento, por isso a necessidade de ocorrer atividade diagnóstica com os estudantes. E assim, o professor identificará as informações e as atividades que permitam a ele avançar do patamar de conhecimento que já conquistou para outro mais evoluído. E por isso, estabelecemos o objetivo geral dessa pesquisa no intuito de analisar esse avanço na conquista do conhecimento.

E por meio da sequência didática⁶ elaborada, procura-se observar esse diálogo entre o professor e o aprendiz, organizando situações de aprendizagem, ou seja, planejando atividades

⁶ A sequência didática é um termo em educação para definir um procedimento encadeado de passos, ou etapas ligadas entre si para tornar mais eficiente o processo de aprendizado.

com a intenção de favorecer a ação do aprendiz sobre um determinado objeto de conhecimento, que em nosso caso, é a probabilidade.

Segundo Weisz (2018), boas situações de aprendizagem costumam ser aquelas em que: os estudantes precisam pôr em jogo tudo o que sabem e pensam sobre o conteúdo que se quer ensinar; os estudantes têm problemas a resolver e decisões a tomar em função do que se propõem produzir; a organização da tarefa pelo professor garante a máxima circulação de informação possível; o conteúdo trabalhado mantém suas características de objeto sociocultural real, sem se transformar em objeto vazio de significado social.

Sabe-se que nem sempre é possível organizar as atividades escolares considerando simultaneamente esses quatro pressupostos pedagógicos da Weisz, que isso é algo que depende muito do tipo de conteúdo a ser trabalhado e dos objetivos didáticos que orientaram a atividade proposta.

As duas primeiras situações, formam o pano de fundo de uma proposta didática baseada na concepção de aprendizagem por construção, ou seja, o aprendiz precisa testar suas hipóteses e enfrentar contradições, seja entre as próprias hipóteses, seja entre o que consegue sozinho e a produção de seus pares ou entre o que pode produzir e o resultado tido como convencionalmente correto. E para que o estudante possa pôr em jogo o que sabe, a escola precisa autorizá-lo e incentivá-lo a acionar seus conhecimentos e experiências anteriores fazendo uso deles nas atividades escolares.

A valorização dos saberes construídos fora das situações escolares é condição para que os estudantes tomem consciência do que e de quanto sabem, sendo que esses conhecimentos, não são necessariamente sistematizados do ponto de vista de um adulto.

Voltando aos princípios, o conhecimento avança quando o aprendiz enfrenta questões sobre as quais ainda não havia parado para pensar. Quando observa como os outros a resolvem e tenta entender a solução que os outros dão, justifica a exigência pedagógica de garantir a máxima circulação de informação possível.

E o último princípio, nos remete ao cuidado dos efeitos do contrato didático, pois toda prática social quando convertida em objeto de ensino escolar, acaba inevitavelmente sofrendo modificações. Mas é preciso cuidado para não produzir invenções pretensamente facilitadoras que acabam tendo existência própria. Cabe a escola garantir a aproximação máxima entre o uso social do conhecimento e a forma de tratá-lo didaticamente. Pois o que se pretende é que os estudantes estabeleçam relações entre o que aprende e o que vivem.

No momento em que compreendemos que não é preciso simplificar tudo o que se oferece aos estudantes, que eles podem enfrentar objetos de conhecimento complexos, desde

que o professor respeite e apoie a forma como vão penetrando esta complexidade, também passamos a poder abrir a escola para o mundo e fazer dela uma ponte de partida da aventura do conhecimento. Nunca o ponto de chegada!

Este é, em síntese, o referencial teórico da pesquisa, um resumo da Teoria da Situação Didática. No próximo capítulo serão apresentadas pesquisas que abordaram os jogos dos discos e a importância dos jogos nas aulas.

CAPÍTULO 2 - PROBABILIDADE E JOGOS DOS DISCOS

Nesse capítulo, abordaremos uma revisão de literatura, relatando sobre o que encontramos em dissertações acerca do jogo dos discos; bem como comentaremos sobre a probabilidade em nosso cotidiano, a importância do uso dos jogos nas aulas e uma breve descrição dos jogos dos discos.

2.1 O jogo dos discos em dissertações

Neste tópico apresentamos os resultados de uma revisão de literatura referente ao jogo dos discos. O objetivo dessa revisão foi mapear trabalhos que tratam desse tema e identificar as abordagens, os recursos e as atividades propostas sobre o jogo em dissertações ou teses na última década. Os trabalhos foram selecionados inicialmente pela presença no título da obra, das palavras-chave Jogo dos discos.

A busca pelas dissertações ou teses deu-se por meio da consulta ao Google Acadêmico. A escolha por essas buscas deve-se às possibilidades de pesquisar o tema probabilidade, envolvendo o jogo dos discos. E ao realizar essa busca, não se encontrou nenhuma tese com título ou palavra-chave com as palavras jogos dos discos, sendo encontrada as três dissertações, elencados abaixo.

Quadro 1: Estado da arte (jogos dos discos)

Título	Autor	Instituição	Ano
O ensino de probabilidade com o uso de problemas do jogo dos discos.	Felipe Mascagna Bittencourt Lima	Universidade Federal de São Carlos	2013
Probabilidade geométrica em lançamentos aleatórios	Ricardo Ribeiro Alcantâra	Universidade Federal do Piauí	2014
O jogo dos discos: o uso da experimentação como suporte para o ensino da probabilidade	Rodrigo Ricardo Cavalcanti de Albuquerque	Universidade Federal do Rio Grande do Norte	2015

Fonte: elaborado pelo autor

Ao realizar essas buscas, puderam-se encontrar várias dissertações e teses com uso dos jogos para ensino e aprendizagem da Matemática, como exemplo o jogo Torre de Hanoi que envolve discos, mas ao especificar jogos dos discos, somente as três apareceram.

Dessa forma, apresenta-se uma análise de como o jogo dos discos é visto por esses pesquisadores elencados acima.

Lima (2013) em sua dissertação de mestrado apresentada à Universidade Federal de São Carlos, propõe uma sequência de aulas, tendo como base o Problema do Jogo dos discos, no qual teve como objetivo determinar o diâmetro que um disco deve ter para que, quando lançado aleatoriamente sobre pisos quadrados, tenha determinada a probabilidade de interceptar suas linhas de separação. Em nossa dissertação, também utilizamos o Jogo dos Discos como ferramenta para aprendizagem de Probabilidade, em que os estudantes possam associar a relação dos quadrados com os diâmetros dos discos lançados. Ainda propomos uma sequência de aulas, indo ao encontro da metodologia de nossa pesquisa – a Engenharia Didática, que propõe uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, para realizar um projeto de aprendizagem para certa população de estudantes.

Lima (2013) propõe que os estudantes tentem resolver o problema em grupos e com o mínimo de ajuda do professor. A nossa experiência de pesquisa seguiu esse parâmetro e a atividade desenvolvida foi analisada à luz dos componentes da teoria da situação didática. Lima ainda faz um paralelo do conteúdo com alguns documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Proposta Curricular do Estado de São Paulo, e destaca a importância da experimentação concreta para um efetivo ensino da Probabilidade. O autor conclui em sua pesquisa, que a proposta didática mostrou-se eficiente, tornando as aulas motivadoras e proporcionou um ambiente ao qual os estudantes, além de aprender, puderam exercitar sua capacidade criativa.

Na segunda dissertação de mestrado apresentada à Universidade Federal do Piauí, Alcântara (2014) desenvolve sua pesquisa com o objetivo de explicitar algumas de suas aplicações com soluções bem elaboradas sobre probabilidade geométrica, visando uma fácil compreensão para os estudantes de ensino médio. A dissertação apresenta alguns conceitos matemáticos pertinentes à probabilidade geométrica, dando ênfase ao jogo dos discos. O pesquisador desenvolveu a pesquisa apresentando algumas estratégias para a resolução do problema do referido jogo destacando os casos dos pisos com rejunte e sem rejunte. Na presente pesquisa discutiremos a importância da espessura do grafite ao construir os quadriculados, podendo as linhas interferirem no jogo.

A terceira dissertação sobre o jogo dos discos foi defendida na Universidade Federal do Rio Grande do Norte sendo que Albuquerque (2015) apresenta uma proposta de aula para a introdução do ensino de probabilidade por meio do jogo, baseado no conceito de probabilidade geométrica. O problema consiste em determinar a probabilidade de um disco não interceptar as linhas de uma superfície quadriculada, quando lançado aleatoriamente. O problema também foi proposto a uma turma da 3ª série do Ensino Médio, onde os estudantes construíram um tabuleiro quadriculado de forma que o percentual de êxito do jogador fosse previamente definido por eles. Na presente pesquisa, destacamos como relevante o uso de discos diferentes nos lançamentos, pra que os estudantes possam compreender como calcular a probabilidade conforme tamanho do lado do quadrado e o diâmetro do disco. Albuquerque conclui sua pesquisa relatando que, através de atividades realizadas por meio de jogos, os estudantes que apresentam alguma dificuldade no conteúdo tendem a ter outra percepção sobre o tema pois, ao jogar, esse estudante se depara com situações que envolvem investigação, resolução de problemas, análise de jogadas e tomada de decisão.

2.2 A probabilidade em nosso cotidiano

Este tópico é descrito conforme fatos e explicações do livro de Caetano (2013), denominado Jogos dos discos: módulo I. O livro descreve algumas ações de uma personagem, presumivelmente fictícia envolta em um fantasioso enredo com cenas do cotidiano. Essa personagem inicia em certa manhã um dia de cão. Ao final discute-se se é possível prever determinados eventos ou não. O enredo fantasioso foi proposital para oferecer muitos exemplos de eventos aleatórios. O propósito do livro é evidenciar que a probabilidade não é um conceito que se situa apenas no âmbito da teoria matemática. Ela permeia, ainda que imperceptível para um grande público, as cenas do cotidiano e é a partir desse cotidiano que a teoria se consolidou.

A seguir descreveremos, na íntegra, o enredo proposto pelo autor:

- Abro os olhos assustada e me dou conta de que perdi a hora. Tenho menos de 10 minutos para sair de casa. Pulo da cama, pensando na reunião marcada há semanas por meu chefe, que não vai com a minha cara. Se me atrasar, perco meu emprego! Olho pela janela e nuvens cinzas no céu sugerem frio e chuva.

- meias... Preciso de minhas meias de lã. Morro de frio naquela sala de reuniões, sempre com o ar-condicionado no máximo. Meias na gaveta de meias, conforme esperado. Visto a primeira roupa que vejo, corro para a sala, pego minha bolsa e penduro no pescoço o pen-drive (não posso esquecer a apresentação em slides que passei a madrugada preparando para abrir a reunião). Busco, freneticamente, meu guarda-chuva! Onde deixei mesmo? Nossa, pode estar em qualquer lugar da casa! Por que deixo o guarda-chuva cada dia em um lugar diferente?

- deixa pra lá, vou arriscar sair assim mesmo. Tomara que não chova logo... Abro a porta de casa e tropeço no jornal. Mesmo atrasada, leio a manchete e fico chocada com a notícia sobre um avião que caiu, no meio do Atlântico, com mais de 200 passageiros a bordo. Que tragédia! Ainda atordoada com o desastre, olho o relógio e me dou conta de que tenho que correr para o ponto de ônibus e que, se o danado atrasar mais de cinco minutos, eu não chego no trabalho a tempo. Com a chuva começando a cair, agora mesmo é que a condução não tem hora pra passar...

- miraculosamente, o ônibus chega. Subo os degraus voando e sento no último lugar vago. No meio do caminho, cedo meu lugar para uma mulher grávida, imaginando se o bebê que ela carrega é menino ou menina. Vou para o corredor do ônibus. Que confusão!

- chego no trabalho e a chuva aperta. Percebo que perdi o pen-drive no empurra-empurra do ônibus e, com ele, a apresentação da reunião, o emprego, o aluguel, as férias, tudo... Que dia de cão! Ensopada, atrasada e desolada.

- subo as escadas apressada e logo encontro um colega, saindo da sala de reuniões, com uma expressão de incredulidade no rosto. Penso: fui demitida! Meu colega olha pra mim e diz, com a voz falha: você não vai acreditar... O chefe ganhou sozinho na loteria... Descobriu hoje, assim que entrou na sala... Subiu na mesa de reunião, dançou um tango com o ventilador de pé, e pediu demissão! Foi direto pro aeroporto, pegar o próximo voo para o Egito. Disse que queria conversar com a esfinge, e que você seria a nova chefe... (CAETANO, 2013, p.11-12).

Nesta história podemos identificar dentre os possíveis acontecimentos que a personagem poderia prever: perda do emprego devido à sua chegada atrasada na reunião, justificada pelo conhecimento das políticas da empresa e da personalidade de seu chefe; o dia ser chuvoso e frio, justificado pelas nuvens cinzentas; ter facilidade para encontrar as meias e dificuldade para encontrar o guarda-chuva, justificado por haver um lugar específico onde ela guarda suas meias.

E dentre os acontecimentos aleatórios que a personagem não poderia prever, pode-se ser identificado como: O sexo do bebê, pois as chances são iguais para menino ou menina; a manchete do jornal sobre a queda do avião, por se tratar de um evento raro, não esperado; o ônibus ter chegado rápido, por se tratar de um dia chuvoso e horário de tráfego intenso; o chefe ter ganhado sozinho na loteria, pois se trata de um acontecimento extremamente raro, de natureza imprevisível; a promoção para o cargo de chefia, pois dependeu do fato de o chefe ter ganhado na loteria.

Assim, Caetano traz a definição do que é evento aleatório.

É um acontecimento com resultado imprevisível. Por exemplo, se lançamos para cima uma moeda qualquer e a deixamos cair em um piso duro, não temos como prever qual a posição em que ela vai ficar, após cessar seu movimento. É quase certo que ela fique sobre uma de suas faces, mas não temos como prever qual (CAETANO, 2013, p.14).

A chance de ocorrência de um evento aleatório é medida por meio do cálculo da probabilidade que leva em conta a razão entre o número de vezes que tal evento ocorreu e a possibilidade total dele ocorrer. E a probabilidade aparece em nosso dia a dia de um jeito que nem nos damos conta. Por exemplo, hoje em dia muitas pessoas pagam um plano de saúde e o valor da mensalidade envolve cálculos de probabilidades. A empresa que oferece o plano de saúde recebe mensalidades de diferentes usuários, desde crianças recém-nascidas até pessoas idosas. Com os recursos recolhidos mensalmente, a empresa tem de pagar as despesas de consultas, operações e procedimentos diversos solicitados por eles. Para que não tenha prejuízo a operadora leva em conta o número médio de consultas requeridas por uma pessoa naquela faixa etária em um universo hipotético de consultas que pode pagar com os recursos recebidos do contratante.

Além disso, precisa sustentar sua estrutura operacional, como funcionários, prédios, veículos, impostos, etc. Os donos da empresa também querem que, no final do mês, sobre um lucro para eles mesmos.

Como calcular a mensalidade a ser cobrada dos clientes de modo que esse recurso seja suficiente para a empresa pagar suas despesas? Como a empresa pode prever quantos clientes vão ter um determinado problema de saúde, quantas consultas vão solicitar, exames clínicos, operações, etc?

Ao fazer esses cálculos, a empresa usa a teoria das probabilidades para estimar a ocorrência de problemas e necessidades de saúde na população. Calculando essas probabilidades, e conhecendo o perfil de seus clientes, a empresa pode saber qual a provável despesa que terá em um determinado mês. Por exemplo, não faz sentido esperar que um homem faça uma operação de ligadura de trompas, nem que uma mulher tenha câncer de próstata. Também é pouco provável que uma criança utilize os serviços relacionados a doenças do coração e que moradores de cidades pacatas tenham problemas de estresse. Como podemos perceber, a probabilidade está presente em nossas vidas e possui importância na sociedade atual.

Outras aplicabilidades de probabilidade no cotidiano são: na Biologia a Probabilidade se faz extremamente necessária para o estudo da genética, dando significado para as leis da hereditariedade. Ela nos permite calcular, por exemplo, quais são as chances de um casal com sangue tipo AB ter um filho com sangue tipo A, ou ainda quais são as chances de um casal ter três filhos homens em seguida. Também no preço do petróleo pode ser alterado em função da probabilidade da ocorrência de algum conflito no Oriente Médio. Assim, quando se nota que

uma guerra nestes países é mais ou menos provável, o preço do petróleo pode ficar maior ou menor, contagiando toda a economia do mundo.

A aprendizagem da probabilidade é necessária para quem deseja compreender os fenômenos naturais, do mundo econômico e até a ocorrência de fatos sociais ou mesmo do cotidiano de cada pessoa.

O documento Matriz de Referência para o ENEM-2009 indica que, ao término do Ensino Médio, o estudante deve ter desenvolvido a seguinte competência: “Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais, e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis, apresentadas em uma distribuição estatística” (Caetano, 2013, p. 15). Os Parâmetros Curriculares Nacionais sugerem que o desenvolvimento da temática probabilidade seja abordado através de situações de aprendizagem que orientem os estudantes a coletar, organizar e analisar informações. No Caderno do SAEB 2009 encontramos o dado de que apenas 24% dos estudantes conseguem compreender o cálculo da probabilidade de um evento. Tal fato indica que os professores precisam trabalhar mais fortemente essa habilidade.

2.3 Uso dos jogos nas aulas

Como explicitado na introdução, o ensino da matemática, na maioria das vezes, é permeado com traços de práticas mecânicas. E alguns professores, ao tentarem se desfazer deste agir tradicional, procuram aplicar jogos em suas aulas, com o intuito de estimular os estudantes. Alguns professores tentam utilizar jogos em sala de aula sem uma visão clara do objetivo do jogo, não tendo, portanto, o entendimento de como dar encaminhamento ao trabalho depois que o jogo termina. Assim, esses professores desenvolvem as atividades com jogos de forma espontânea, ou seja, sem um objetivo definido, sem condições de aplicar o jogo para a aprendizagem, restando “o jogo pelo jogo” e privilegiando apenas o caráter motivacional da atividade proposta. Muitas vezes os jogos são aplicados apenas para cumprimento de suas regras, com elaboração informal e espontânea de estratégias e sem muita contribuição para o processo de ensino-aprendizagem da Matemática (GRANDO, 2004).

Quando são propostas atividades com jogos para os estudantes, a reação mais comum é de alegria e prazer pela atividade a ser desenvolvida: “- Oba! Que legal!”. O interesse pelo material do jogo, pelas regras ou pelo desafio proposto envolvem o estudante, estimulando-o à ação. Este interesse natural pelo jogo já é concebido no senso comum. Entretanto, alguns professores acreditam que, pelo fato de o estudante já se sentir estimulado somente pela proposta de uma atividade com jogos e estar durante todo o

jogo, envolvido na ação, participando, jogando, isto garante a aprendizagem. É necessário fazer mais do que simplesmente jogar um determinado jogo. O interesse está garantido pelo prazer que esta atividade lúdica proporciona, entretanto é necessário o processo de intervenção pedagógica a fim de que o jogo possa ser útil à aprendizagem, principalmente para os adolescentes e adultos. Além disso, é necessário que a atividade de jogo proposta, represente um verdadeiro desafio ao estudante, ou seja que seja capaz de gerar “conflitos cognitivos” ao estudante, despertando-o para a ação, para o envolvimento com a atividade, motivando-o ainda mais (GRANDO, 2004, p. 1-2).

E, para os adolescentes, as atividades com jogos de regras podem significar cooperação e interação em grupos sociais. Além do mais os jogos podem representar situações bastante motivadoras e desafiadoras. Para o uso de jogos em sala é importante estar claro os objetivos do mesmo. A metodologia a ser utilizada deve ser adequada ao nível em que se está trabalhando.

A inserção de jogos na sala de aula de Matemática implica em vantagens e desvantagens que devem ser refletidas e assumidas pelos professores, ao se proporem a desenvolver um trabalho pedagógico, com os jogos (Quadro nº2).

Quadro 2: Vantagens e desvantagens dos jogos na sala de aula

VANTAGENS	DESVANTAGENS
<ul style="list-style-type: none"> - (re) significação de conceitos já aprendidos de uma forma motivadora para o estudante; - introdução e desenvolvimento de conceitos de difícil compreensão; - desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas (desafio dos jogos); - aprender a tomar decisões e saber avaliá-las; - significação para conceitos aparentemente incompreensíveis; - propicia o relacionamento das diferentes disciplinas (interdisciplinaridade); - o jogo requer a participação ativa do estudante na construção do seu próprio conhecimento; - o jogo favorece a interação social entre os estudantes e a conscientização do trabalho em grupo; - a utilização dos jogos é um fator de interesse para os estudantes; - dentre outras coisas, o jogo favorece o desenvolvimento da criatividade, de senso crítico, da participação, da competição “sadia”, da observação, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do prazer em aprender; - as atividades com jogos podem ser utilizadas para desenvolver habilidades de que os estudantes necessitem. Útil no trabalho com estudantes de diferentes níveis; - as atividades com jogos permitem ao professor identificar, diagnosticar algumas dificuldades dos estudantes. 	<ul style="list-style-type: none"> - quando os jogos são mal utilizados, existe o perigo de dar ao jogo um caráter puramente aleatório, tornando-se um “apêndice” em sala de aula. Os estudantes jogam e se sentem motivados apenas pelo jogo, sem saber porque jogam; - o tempo gasto com as atividades de jogo em sala de aula é maior e, se o professor não estiver preparado, pode existir um sacrifício de outros conteúdos pela falta de tempo; - as falsas concepções de que se devem ensinar todos os conceitos através de jogos. Então as aulas, em geral, transformam-se em verdadeiros cassinos, também sem sentido algum para o estudante; - a perda da “ludicidade” do jogo pela interferência constante do professor, destruindo a essência do jogo; - a coerção do professor, exigindo que o estudante jogue, mesmo que ele não queira, destruindo a voluntariedade pertencente à natureza do jogo; - a dificuldade de acesso e disponibilidade de material sobre o uso de jogos no ensino, que possam vir a subsidiar o trabalho docente.

FONTE: Grando (2004. p. 31-32).

A linguagem matemática, de difícil acesso e compreensão do estudante, pode ser simplificada através da ação no jogo. A construção, pelo estudante, de uma linguagem auxiliar, coerente com a situação de jogo, propicia estabelecer uma "ponte" para a compreensão da linguagem matemática, enquanto forma de expressão de um conceito, e não como algo abstrato, distante e incompreensível, que se possa manipular independentemente da compreensão dos

conceitos envolvidos nesta exploração. O registro no jogo, gerado por uma necessidade, pode representar um dos caminhos à construção desta linguagem matemática.

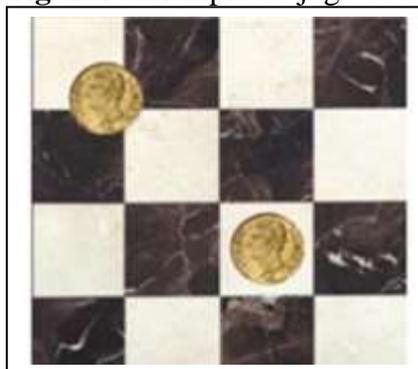
2.4 O jogo dos discos

O jogo dos discos é um experimento que propõe uma investigação na qual a chance de que um disco, jogado ao acaso sobre uma região quadriculada, toque ou sobreponha alguma das linhas dessa grade. E nesse tópico, o objetivo é apresentar o que é o jogo dos discos e como jogá-lo.

Na França, no século XVIII, era moda ladrilhar pisos de castelos e jardins. As crianças não perderam tempo e logo fizeram desses ladrilhos um grande tabuleiro. Inventaram o jogo dos discos, lançando moedas aleatoriamente no piso e apostando na parada da moeda no interior de um ladrilho. Mas, que fatores contribuam para uma criança ganhar a aposta e ver sua moeda inteiramente dentro de um ladrilho, num lançamento aleatório, sem tocar nenhuma de suas bordas? (fig.7). As crianças mais espertas logo perceberam que o diâmetro da moeda e o tamanho dos ladrilhos influenciavam e muito na probabilidade de ganhar nesse jogo (CAETANO, 2013, p. 16).

Nas representações abaixo, há explicações do jogo de discos e exemplos de jogadas (posição favorável e não favorável).

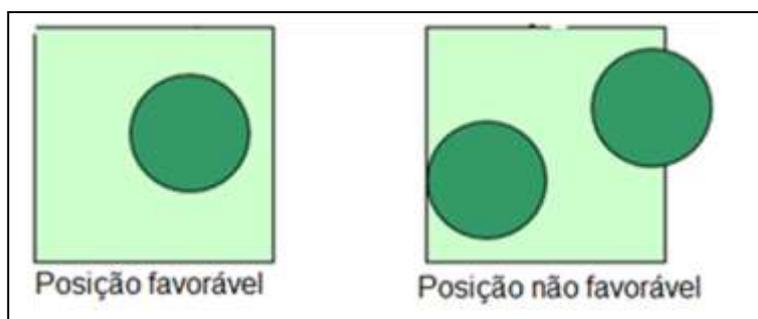
Figura7: Exemplo do jogo de discos



Fonte: LIMA (2013)

Nesse jogo, os fatores que contribuem para a probabilidade do disco tocar ou não as bordas do ladrilhamento são apenas o diâmetro do disco e o tamanho dos ladrilhos (fig. 8).

Figura 8: Exemplos de jogadas



Fonte: LIMA (2013)

E com suporte do livro *Jogo dos discos* de Caetano (2013), o pesquisador e a professora de Matemática, realizam adaptação das atividades do livro em sequência de atividades didáticas, para a realização dessa pesquisa. Nessa sequência de atividades haverá problemas que levarão os estudantes investigar sobre as dimensões do ladrilhamento e os diâmetros dos discos, pois quanto maior for o diâmetro, melhor para a escola⁷, e quanto menor o diâmetro, melhor para o jogador.

Após o referencial teórico dessa pesquisa (TSD, revisão de literatura, e descrição do jogo dos discos) o próximo capítulo tem como intuito apresentar o percurso da pesquisa.

⁷ Aqui, nos referimos como melhor para a escola levando em conta o fato de que os estudantes podem montar uma barraca na festa julina, com o objetivo de angariar fundos para a formatura. Sendo essa barraca no dia da festa, o projeto de intervenção dessa pesquisa.

CAPÍTULO 3 - REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO

Neste capítulo, discutem-se os referenciais que nortearam o desenvolvimento desta pesquisa. Apresentamos uma breve justificativa da escolha por uma abordagem qualitativa e a proposta metodológica da engenharia didática.

3.1 Investigação qualitativa

Diante da proposta de pesquisa, o pesquisador necessita de escolhas que nortearão o seu trabalho. Partindo da necessidade desta escolha, optamos por trabalhar com uma abordagem qualitativa.

Para Strauss e Corbin (1998), a metodologia de pesquisa é um conjunto de procedimentos e técnicas utilizados para coletar e analisar dados. O método fornece os meios para se alcançar o objetivo proposto, ou seja, são as “ferramentas” das quais fazemos uso na pesquisa a fim de responder nossa questão.

Godoy (1995) ressalta a diversidade entre os trabalhos qualitativos e enumera um conjunto de características essenciais capazes de identificar uma pesquisa desse tipo:

(a) o ambiente natural como fonte direta de dados e o pesquisador como instrumento fundamental; (b) o caráter descritivo; (c) o significado que as pessoas dão às coisas e à sua vida como preocupação do investigador; (d) enfoque indutivo (GODOY, 1995, p. 62).

As características acima não devem ser vistas como regras, visto que, de forma recursiva, o próprio entendimento do que é pesquisa qualitativa está em movimento e as noções acima levam a ênfases diferentes.

3.2 Engenharia Didática

A engenharia didática é considerada uma metodologia de pesquisa. Ela tem por finalidade analisar as situações didáticas. Essa metodologia inclui uma parte experimental. Segundo Michèle Artigue:

[...] este termo foi ‘cunhado’ para o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos depurados da ciência e, portanto, a enfrentar praticamente com todos os meios de que se dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta (ARTIGUE, 1988, p. 283).

Douady explicita a engenharia didática como uma metodologia de pesquisa específica, como sendo:

[...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizada(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de estudantes. No decurso das trocas entre professor e estudantes e em função das escolhas e decisões do professor (DOUADY, 1993, p. 2).

Essa metodologia pode ser compreendida tanto como um produto resultante de uma análise *a priori*, caso da metodologia de pesquisa, também como uma produção para o ensino. Artigue (1988, p. 285) caracteriza a engenharia didática: “[...] como um esquema experimental baseado sobre ‘realizações didáticas’ em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de sequências de ensino.”

Nessa metodologia de pesquisa, o registro dos estudos e a validação são características da engenharia didática. Dessa forma, Machado confronta a engenharia didática com outros tipos de metodologia.

A de tipo etnográfico, embora coincida com a engenharia didática na suposição de que o pesquisador se insere no lócus da investigação, no que concerne às fases da pesquisa ela não admite uma análise *a priori*, no que se contrapõe à engenharia didática, onde a análise *a priori* é uma fase fundamental. As que se baseiam em métodos estatísticos diferem da engenharia didática pela validação. Na engenharia, a validação é interna, enquanto as do segundo tipo têm uma validação do tipo externo, isto é, utilizam métodos comparativos para validar seus resultados, ou seja, fazem uma comparação estatística entre os desempenhos dos grupos-controle e grupos-experimentais (MACHADO, 2012, p. 236-237).

Portanto, a singularidade da engenharia didática está em suas características de funcionamento metodológico. Assim o processo experimental da engenharia didática se compõe de quatro fases: análises preliminares; concepção e análise *a priori* das situações didáticas; experimentação; análise *a posteriori* e validação.

3.2.1 Análises preliminares

As análises preliminares para a concepção da engenharia são feitas por meio da análise epistemológica do conteúdo visado – para caracterizar o conceito em sua gênese histórica, seu lugar atual na diversidade dos problemas onde ele intervém como ferramenta adaptada; localizar outros conceitos que interagem com ele e contribuem para lhe dar significado. Estudo do conceito na qualidade de objeto de estudo. Estudo do ponto de vista geralmente adotado no ensino e, também, de sua evolução ao longo das mudanças de programa e levantamento de condutas dos estudantes tendo em vista o ensino habitual (erros, procedimentos, concepções...). A análise preliminar permite formular hipóteses cognitivas e didáticas e também fundamentar a construção da engenharia didática. Tudo isso levando em consideração os objetivos específicos da pesquisa.

Simões (1995) em sua dissertação de mestrado, traz um exemplo:

A primeira fase foi estruturada ao redor, tanto do conceito matemático em questão quanto da análise do funcionamento do ensino usual, levando principalmente em conta textos de livros didáticos utilizados por volta de 1994. Tais estudos mostraram um estado de equilíbrio de funcionamento do sistema didático. Foram analisados os entraves que contribuíram para chegar a esse equilíbrio e procurou-se determinar condições para estabelecer um novo ponto de equilíbrio mais satisfatório. Os entraves foram analisados nos três quadros: **quadro algébrico**, da resolução através de fórmulas; **quadro numérico** da resolução por aproximação; **quadro geométrico** do estudo global qualitativo da forma da função, e em cada quadro segundo três dimensões: **epistemológica**, associada à função polinomial do 2º grau, sua gênese, seu lugar, na diversidade dos problemas; **cognitiva**, associada a estudantes de 8ª série; **didática**, associada ao sistema de ensino vigente. Simões percebeu que o assunto tinha seu ensino focado no quadro algébrico, o que tornava natural, tanto a procura de um tratamento epistemológico mais satisfatório quanto o estudo dos entraves que se opunham à extensão do ensino aos outros quadros.

Os entraves identificados como dificultadores da extensão ao quadro geométrico foram: **na dimensão cognitiva**: a exigência de integração entre os quadros para um estudo qualitativo (coisa não usual para os estudantes que, se e quando estudaram Geometria, o fizeram como assunto totalmente dissociado do resto da Matemática), a falta da noção de simetria (assunto inexistente nos currículos da época); **na dimensão didática**: o peso do ‘refúgio algorítmico’ (dedica-se muita atenção à aprendizagem e memorização da fórmula de Baskara, ela é o objeto de estudo, em detrimento da compreensão de sua utilidade para o estudo polinomial do 2º grau, onde ela aparece como ferramenta. Na fase da *concepção e da análise a priori* o pesquisador orientado pelas análises preliminares delimita certo número de variáveis pertinentes do sistema sobre o qual o ensino pode atuar, as quais são chamadas de variáveis de comando. (...) após análise dos entraves, foram feitas as primeiras escolhas globais, quais sejam: retomada do estudo de função polinomial de 1º grau enfatizando a mudança do quadro algébrico para geométrico (gráfico) e vice-versa, valorização da validação pelos próprios estudantes, valorização e provocação de conjecturas pelos estudantes, exploração do trabalho em grupos, transferência da parte algorítmica aos estudantes, ensino explícito de métodos para estudo qualitativo (MACHADO, 2012, p. 239-242, *grifos nossos*).

Em relação as variáveis, elas podem ser tanto de ordem geral como específica, dependendo do conteúdo didático a ser ensinado. Quando a variável for do tipo microdidático, tem-se as variáveis intrínsecas ao problema, sendo de ordem geral e para ser específicas as variáveis dependem da situação, ligadas à organização e à gestão do meio.

E as escolhas de ordem geral, globais, precedem a descrição de cada fase da engenharia, quando influem as escolhas locais. E as escolhas globais podem aparecer separadamente das escolhas locais, mas elas são interdependentes.

3.2.2 Concepção e análise *a priori*

Para Artigue,

A análise *a priori* deve ser concebida como uma análise do controle do sentido, pois a teoria das situações didáticas que serve de referência à metodologia de engenharia didática teve, desde sua origem, a ambição de se construir como uma teoria de controle das relações entre sentido e situações.

[...] o objetivo da análise *a priori* é determinar no que as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos estudantes e o significado de cada um desses comportamentos. Para isso, ela vai se basear em hipóteses e são essas hipóteses cuja validação estará, em princípio, indiretamente em jogo, na confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* a ser operada na quarta fase (ARTIGUE, 1988, p. 293).

A análise *a priori* tem uma parte de descrição e outra de antecipação. Alguns exemplos de questionamento a serem realizados na análise *a priori*:

- Que problema cada estudante tem para resolver?
- O que o estudante precisa saber para compreender o problema?
- O que o estudante precisa saber para resolver o problema?
- Que tipo de controle o estudante tem sobre sua ação?

Os elementos de uma análise *a priori* são: a sequência didática (as atividades a serem propostas aos estudantes); descrição e justificativa das escolhas (geral e particular); estratégias de resolução (prevendo comportamentos cognitivos dos estudantes), corretas ou não, dos problemas propostos acompanhadas das análises de cada uma delas.

É a análise *a priori* que revelará se uma situação pode ser vivida como adidática. Segundo Machado (2012), algumas condições para uma situação ser vivida como adidática são:

- a) O estudante deve pensar numa resposta inicial (procedimento de base que é relativo aos saberes e conhecimentos anteriores), porém, essa não é a resposta desejada, caso contrário não seria uma situação de aprendizagem.
- b) Esse procedimento de base deve se mostrar rapidamente insuficiente ou ineficaz para que o estudante seja obrigado a realizar acomodações, modificações de seu sistema de conhecimento. Há incerteza do estudante quanto às decisões a tomar.
- c) O conhecimento visado é, *a priori*, indispensável para passar da estratégia de base à estratégia “ótima”.
- d) Existe um “meio” para validação: o meio permite retroações.
- e) O jogo pode ser “repetido” ou reinvestido.

Portanto a análise *a priori* comporta uma parte de descrição e outra de previsão. Nesta etapa deve-se:

- a) Descrever cada escolha local feita e as características da situação adidática decorrentes de cada escolha;
- b) Analisar qual o desafio da situação para o estudante, decorrente das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que ele disporá durante a experimentação.
- c) Prever campos de comportamentos possíveis e tentar demonstrar como a análise permite controlar seus significados e assegurar, particularmente, que se tais comportamentos esperados ocorreram, é por consequência do desenvolvimento visado pela aprendizagem.

3.2.3 Experimentação

A fase da experimentação é a fase da realização da engenharia didática com uma certa população de estudantes. Inicia-se no momento em que existe o contato do professor e pesquisador com os estudantes (objeto de investigação). Machado relata que a experimentação supõe:

- a) a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de estudantes que participará da experimentação;
- b) O estabelecimento do contrato didático;
- c) Aplicação dos instrumentos de pesquisa;
- d) Registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc)” (MACHADO, 2012, p. 244-245)

Nessa fase de aproximação do objeto de conhecimento com os estudantes que se estabelece o contrato didático, sendo esta uma ação da Teoria da Situação Didática. E na experimentação professor e pesquisador executam por meio dos instrumentos de pesquisa da sequência de atividades didáticas.

E deve-se atentar nessa fase, que ao ocorrer mais de uma sessão, é aconselhável fazer uma análise *a posteriori* local, sendo necessário confrontar com as análises *a priori* feitas, para possíveis correções quando necessário.

Antes de apresentar a sequência de atividades didáticas, vamos situar qual é a escola em que a sequência será desenvolvida e o seu funcionamento.

A escola onde foi desenvolvido essa pesquisa é uma escola privada do município de Campo Grande. A escolha da escola teve como principal fator o fato do pesquisador não estar com vínculo em escolas públicas. Trabalhando apenas nessa escola ficou facilitado o diálogo e elaboração da proposta com a professora de Matemática, bem como, possibilitou tempo suficiente para aplicar a sequência didática, evitando cansaço para os estudantes e ocorrendo a aplicação da sequência conforme cronograma da escola.

Optamos pelo 3º ano do ensino médio, pois nessa série consta o conteúdo de probabilidade no referencial curricular, bem como, os estudantes já possuem conhecimento sobre alguns conceitos de geometria e função, sendo que esses conceitos são necessários para realização da referida sequência didática. Mas destaca-se que o conteúdo de probabilidade já deve ter sido visto pelos estudantes desde os anos iniciais do ensino fundamental. No entanto, é no último ano do ensino médio que o tema é tratado com a devida formalidade e um pouco mais de aprofundamento.

Essa escola pertence a uma rede nacional de instituições educativas, de direito privado, inscrita no Cadastro Nacional de Pessoa Jurídica, funcionando conforme o regulamento aprovado pelo Decreto n.º 57.375, de 02 de dezembro de 1965.

Atualmente essa escola tem 21 (vinte e uma) turmas, sendo 13 (treze) turmas do ensino fundamental II (6º ao 9º ano) e 8 (oito) turmas do ensino médio, sendo 7 (sete) turmas de ensino médio regular e 1 (uma) turma do novo ensino médio. Dessas sete turmas do ensino médio

regular, duas são de 3º ano. O funcionamento da escola concentra-se em sua maior parte no período matutino, tendo apenas no período vespertino as aulas de oficina de aprendizagem, o projeto de iniciação científica e o projeto de robótica.

A escola possui um quadro de 30 (trinta) professores, sendo 5 (cinco) de Matemática, dos quais 3 (três) lecionam no ensino fundamental e 2 (dois) no ensino médio. O pesquisador é coordenador pedagógico do ensino médio, assim facilitando o planejamento e execução da sequência didática conforme a realidade da escola.

Quanto à sequência didática de atividades adaptada do livro do Caetano (2013) e a análise *a priori*, estão presentes duas fases: a descrição do objeto, problemática referente ao objeto de estudo, e as hipóteses que deverão ser verificadas no decorrer da prática investigativa da proposta didática a ser elaborada. A elaboração das hipóteses do trabalho é considerada como um ponto muito importante no trabalho com a engenharia didática, pois é por intermédio delas que serão traçados parâmetros de comparação com os resultados finais da sequência para verificar a validação ou não da mesma, também é nessa fase que são delineadas as variáveis de controle, o que faz com que se permita conhecer o que se pretende experimentar. Segundo Artigue (1988), essas variáveis são classificadas como:

- Variáveis globais referem-se ao planejamento geral da engenharia. Essas variáveis se encontram envolvidas desde a elaboração do pré-teste, das atividades até a institucionalização dos conteúdos da sequência.
- Variáveis locais são aquelas que dizem respeito ao planejamento específico de uma sessão da sequência didática, portanto é restrita a uma fase da pesquisa.
- Variáveis de situação se referem à escolha das atividades, à forma de trabalho e o tempo necessário para trabalhá-las.

A elaboração da sequência didática constitui-se de atividades voltadas para a área de conhecimento escolhida, visando proporcionar aos sujeitos pesquisados condições para uma melhor compreensão e construção de seu próprio aprendizado. Para a construção da sequência de atividades didáticas leva-se em conta o campo de conhecimento sobre o tema determinado e os resultados obtidos nos instrumentos de pesquisa utilizados para recolhimento de informações.

Assim, a sequência de atividades didáticas para o ensino de probabilidade foi aplicada durante as aulas de oficinas de aprendizagem, na qual os estudantes do ensino médio, uma vez por semana, ficam em período integral na escola. No turno vespertino, eles participam de 4

(quatro) aulas de um projeto e 1 (uma) aula de empreendedorismo. Essas oficinas foram elaboradas pelo professor, e uma semana antes, os estudantes se inscrevem na oficina de seu interesse, sendo que cada oficina varia entre duas a três semanas. A oficina “Jogos dos discos” foi desenvolvida em duas semanas, portanto em 8 (oito) aulas. Aqui descreveremos a sequência didática que foi aplicada aos estudantes:

1ª atividade: Apresentar aos estudantes uma história em quadrinho para que em seguida possam interpretar algumas questões.

2ª atividade: Apresentar as características das moedas brasileiras.

3ª atividade: Construir um quadriculado, com quadrados de 3 cm de lado, desenhados em papel cartolina de 42 cm 42 cm. O lado de 3 cm combina bem com moedas pequenas e botões de camisa.

4ª atividade: Realizar algumas reflexões, por meio de um questionário.

5ª atividade: Realizar lançamento com dez moedas de 10 centavos simultaneamente (discos de 2,0 cm de diâmetro). Repita esse procedimento 20 vezes. Preencha a tabela abaixo:

L	Q	F		L	Q	F
1	10			11	10	
2	10			12	10	
3	10			13	10	
4	10			14	10	
5	10			15	10	
6	10			16	10	
7	10			17	10	
8	10			18	10	
9	10			19	10	
10	10			20	10	
T	100			T	100	

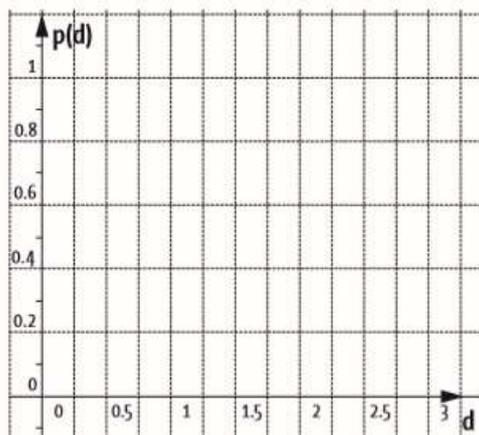
L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
 Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

6ª atividade: Organizar os dados obtidos com lançamentos experimentais de discos com diâmetros variados e responder algumas questões:

Lado do quadrado do quadriculado = 3 cm				
Tipo de disco	Diâmetro (cm)	Quant. de lançamentos	Eventos favoráveis	Probabilidade de ganho

7ª atividade: Propor para a turma o seguinte questionamento: “Com o tabuleiro montado, precisa-se tomar cuidado na hora de determinar o diâmetro dos discos, pois o jogador mostrará interesse pelo jogo se acharem que têm chance de ganhar o jogo. Agora digam: qual será o diâmetro ideal?”

8ª atividade: Construir gráfico utilizando dados dos dois eixos (diâmetro e probabilidade). Plotar os dados obtidos na atividade 6.



9ª atividade: Realizar uma abordagem teórica para obter uma fórmula algébrica exata para essa função ($p(d)$).

10ª atividade: Probabilidade experimental versus probabilidade teórica.

Comparando a probabilidade experimental com a probabilidade teórica e estimando o erro.

Tipo de disco	Diâmetro cm	Probabilidade experimental	Probabilidade exata	Erro
Botão de roupinha de bebê				
Botão camisa				
Moeda R\$ 0,10				
Moeda R\$ 0,25				

3.2.4 Análise *a posteriori* e validação

Essa fase é considerada a última fase da engenharia didática. Essa fase se apoia sobre todos os dados colhidos durante a experimentação constante das observações realizadas durante cada sessão de ensino, bem como das produções dos estudantes em classe ou fora dela.

É nessa fase que se dá o tratamento dos dados que constam da seleção dos dados pertinentes à análise *a posteriori*. Muitas vezes, para uma melhor compreensão do ocorrido, tornam-se necessários dados complementares como: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas tanto durante a experimentação quanto no final dela. Isto é, as fases 3 e 4 não são excludentes, mas complementares (MACHADO, 2012, p. 246).

Nesta etapa que ocorre a confrontação das análises *a priori* com *a posteriori*, validando o conhecimento ou refutando as hipóteses levantadas no início da engenharia.

3.3. Elaborando a sequência didática

A sequência didática elaborada pela professora e o pesquisador foi aplicada em oficinas de aprendizagem no contraturno⁸, e essas aulas são destinadas para execução de ações com cunho mais participativo dos estudantes, ou seja, tornando os estudantes protagonistas. A

⁸ No período matutino, os estudantes têm 6 (seis) tempos das disciplinas do currículo, sendo de Língua Portuguesa, Matemática, História, Geografia, Língua Estrangeira Inglesa, Física, Química, Biologia, Literatura, Filosofia, Sociologia, Técnicas de Redação e Oficinas Tecnológicas. E no contraturno, uma vez por semana, os estudantes tem 5 (cinco) aulas de oficinas de aprendizagem, sendo uma de Empreendedorismo e as demais aulas práticas com duração entre 2 a 3 semanas cada tema das aulas práticas.

professora e o pesquisador, prepararam essas atividades com uso do jogo dos discos para compreensão de probabilidade por recursos da geometria.

Ao dialogar com os estudantes e professor, pode-se perceber que o conhecimento que os estudantes possuem sobre probabilidade são os conceitos tradicionais que aparecem nos manuais, como entendimento de ponto amostral, espaço amostral, evento e fórmula de probabilidade, sendo esses conceitos aprendidos em anos escolares anteriores.

Quando o pesquisador e a professora de Matemática realizam um diálogo para a adaptação do livro do Caetano para elaboração da sequência de atividades dessa pesquisa, pode-se observar a fase das análises preliminares, permitindo formular hipóteses cognitivas e didáticas e também fundamentar a construção da engenharia didática.

Ao estruturar esse planejamento das atividades, o pesquisador e a professora já procuram estabelecer algumas cláusulas do contrato didático, como tempo de cada atividade, quantidade de aulas, como será a formação dos grupos, como ocorrerá a leitura da história em quadrinho, se o professora passará a resposta de imediato ou deixará sempre uma dúvida para que os grupos possam argumentar e tirar as suas próprias conclusões. Essa última é estabelecida na aplicação da sequência didática e a dedução da fórmula, sendo decidido que a professora não demonstrará, por questão do tempo de aula, mas comentará de forma breve alguns pontos relevantes para se chegar na fórmula, como explícito na 9ª atividade da sequência didática.

Assim, decidimos que o desenvolvimento das atividades ocorreria em 6 (seis) grupos focais⁹, para que os estudantes pudessem interagir entre os membros do grupo e talvez a interação entre os grupos focais. E no momento em que a situação se tornou didática, foi possível analisar com maior precisão o desenvolvimento das atividades. A sequência tem 11 (onze) atividades, e para aquelas que necessitaram registros (anotações), foi entregue para cada grupo uma cópia dessa atividade e por meios desses registros que foi possível fazer a validação.

Abaixo a sequência didática de atividades adaptada do livro do Caetano (2013) pela professora e pelo o pesquisador, com apoio do material Jogo dos discos, módulo I, de Paulo Antonio Silvani Caetano, sendo que esse material foi preparado para o curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio, material disponível no portal da UAB (Universidade Aberta do Brasil).

⁹ Morgan (1997) define grupos focais como uma técnica de pesquisa qualitativa, derivada das entrevistas grupais, que coleta informações por meio das interações grupais. Para Kitzinger (2000), o grupo focal é uma forma de entrevistas com grupos, baseada na comunicação e na interação. Seu principal objetivo é reunir informações detalhadas sobre um tópico específico (sugerido por um pesquisador, coordenador ou moderador do grupo) a partir de um grupo de participantes selecionados. Ele busca colher informações que possam proporcionar a compreensão de percepções, crenças, atitudes sobre um tema, produto ou serviços.

A apresentação da sequência das atividades didáticas nesse tópico tem como propósito destacar o momento da análise *a priori*, pois é nesse momento da análise *a priori*, que é possível conceber uma análise do controle do sentido, com a ambição de se construir como uma teoria de controle das relações entre sentido e situações. Dessa forma, é possível determinar no que as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos estudantes e o significado de cada um desses comportamentos. Para isso, ela vai se basear em hipóteses em relação aos objetivos de cada atividade, e são essas hipóteses cuja validação estará, em princípio, indiretamente em jogo, na confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* a ser operada na quarta fase.

E para cada atividade proposta abaixo, será apresentado o objetivo de cada uma delas, para validar o alcance ou não após aplicação da sequência didática.

1ª atividade:

Objetivo: Apresentar aos estudantes uma história em quadrinho por meio de projeção com datashow já fixo na sala. Em seguida os estudantes devem interpretar duas questões que estão abaixo da ilustração.



MEIAS... PRECISO DE MINHAS MEIAS DE LÃ. MORRO DE FRIO NAQUELA SALA DE REUNIÃO, SEMPRE COM O AR-CONDICIONADO NO MÁXIMO. MEIAS NA GAVETA DE MEIAS, CONFORME ESPERADO. VISTO A PRIMEIRA ROUPA QUE VEJO, CORRO PARA A SALA, PEGO MINHA BOLSA E PENDO NO PESCOÇO O PEN-DRIVE (NÃO POSSO ESQUECER A APRESENTAÇÃO EM SLIDES QUE PASSEI A MADRUGADA PREPARANDO PARA ABRIR A REUNIÃO). BUSCO, FRENETICAMENTE, MEU GUARDA-CHUVA! ONDE DEIXEI MESMO? NOSSA, PODE ESTAR EM QUALQUER LUGAR DA CASA! POR QUE DEIXO O GUARDA-CHUVA CADA DIA EM UM LUGAR DIFERENTE?



DEIXA PRA LÁ, VOU ARRISCAR SAIR ASSIM MESMO. TOMARA QUE NÃO CHOVA LOGO... ABRO A PORTA DE CASA E TROPEÇO NO JORNAL. MESMO ATRASADA, LEO A MANCHETE E FICO CHOCADA COM A NOTÍCIA SOBRE UM AVIÃO QUE CAIU NO MEIO DO ATLÂNTICO, COM MAIS DE 200 PASSAGEIROS A BORDO. QUE TRAGÉDIA! ANDA ATORRADA COM O DESASTRE, OLHO O RELÓGIO E ME DOI: CONTA DE QUE TENHO QUE CORRER PARA O PONTO DE ÔNIBUS E QUE, SE O DIABO ATRASAR MAIS DE CINCO MINUTOS, EU NÃO CHEGO NO TRABALHO A TEMPO. COM A CHUVA COMEÇANDO A CAIR, AGORA MESMO É QUE A CONDIÇÃO NÃO TEM HORA PRA PASSAR...

MIRACULOSAMENTE, O ÔNIBUS CHEGA. SUBO OS DEGRAUS VOANDO E SENTO NO ÚLTIMO LUGAR VAÇO. NO MEIO DO CAMINHO, CEDO MEU LUGAR PARA UMA MULHER GRÁVIDA, IMAGINANDO SE O BEBÊ QUE ELA CARREGA É MENINO OU MENINA. VOU PARA O CORREDOR DO ÔNIBUS. QUE CONFUSÃO!



CHEGO NO TRABALHO E A CHUVA APERTA. PERCEBO QUE PERDI O PEN-DRIVE NO EMPURRA-EMPURRA DO ÔNIBUS E, COM ELE, A APRESENTAÇÃO DA REUNIÃO, O EMPREGO, O ALUGUEL, AS FÉRIAS, TUDO... QUE DIA DE CÃO! ENSOPADA, ATRASADA E DESOLADA.



Fonte: Caetano (2013)

Questões:

Na história em quadrinhos, diversos acontecimentos dão-se ao longo de uma tumultuada manhã. Do ponto de vista da personagem, selecione um acontecimento que você considera ser previsível e um acontecimento que você considera ser não previsível ou aleatório. Justifique sua resposta.

- Acontecimento previsível. Justificativa.
- Acontecimento não previsível ou aleatório. Justificativa.¹⁰

2ª atividade:

Objetivo: Apresentar as características das moedas brasileiras.

3ª atividade:

Objetivo: Determinar qual é a influência do diâmetro do disco e do tamanho dos lados dos ladrilhos na probabilidade de o jogador ganhar com lançamentos aleatórios no jogo dos discos.

¹⁰ Entende-se por **experimento aleatório** os fenômenos que, quando repetidos inúmeras vezes em processos semelhantes, possuem resultados imprevisíveis.

4ª atividade:

Objetivo: Refletir antes do início dos lançamentos levantando os conhecimentos prévios dos estudantes sobre alguns procedimentos de lançamentos aleatórios.

- 1- Como proceder com os lançamentos para que sejam aleatórios?
- 2- Um jogador, ao lançar uma moeda, chega bem perto e mira no centro de um quadrado. Seu lançamento é aleatório?
- 3- O que acontece se fizermos 1.000 lançamentos com uma moeda cujo diâmetro é maior do que o lado do quadrado do quadriculado? É um evento aleatório?
- 4- Um estudante, ao desenhar um quadriculado, usou um pincel de ponta grossa, que faz linhas de 3 mm. O que muda em relação ao resultado esperado?
- 5- Foi solicitado a um estudante que fizesse 200 lançamentos de uma determinada moeda. Ele teve a seguinte ideia, para acelerar a contagem: arrumou dez moedas iguais e lançava as dez simultaneamente. Assim, fez apenas 20 lançamentos, mas contou 200. Isso pode?
- 6- Se for válido o lançamento de várias moedas de uma vez, para acelerar a contagem, o que fazer se em um determinado lançamento duas moedas ficarem sobrepostas? Ou não couberem no quadrado?

5ª atividade:

Objetivo: Lançar os discos (moedas e botões) na malha quadriculada.

Construindo conhecimento através de uma conversa com os estudantes.

Para prosseguir com o experimento, precisamos obter estimativas de $p(d)$ para outros valores de d . Deste modo, você pode fazer outros lançamentos com moedas de 25 centavos da segunda família de moedas do real, que possuem 2,5 cm de diâmetro, com botões idênticos de camisa, com cerca de 1,1 cm de diâmetro, e outro botão com cerca de 1,7 cm de diâmetro. Lembre-se de que, ao lançarmos 200 (duzentas) vezes um disco de diâmetro d , a probabilidade estimada $p(d)$ de ganho com o disco é:

$$p(d) \approx \frac{\text{número de lançamentos favoráveis}}{200}$$

Realize um lançamento com dez moedas de 10 centavos simultaneamente (discos de 2,0 cm de diâmetro). Repita esse procedimento 20 vezes. Preencha a tabela abaixo:

OBS.: Foi solicitado aos estudantes que cada grupo trouxesse 10 moedas de 10 centavos e 10 moedas de 25 centavos, bem como o pesquisador trouxe 60 (sessenta) botões de diâmetro de 1,1 cm e 60 (sessenta) botões de diâmetro de 1,7cm.

Quadro 3: Registro de frequência

L	Q	F		L	Q	F
1	10			11	10	
2	10			12	10	
3	10			13	10	
4	10			14	10	
5	10			15	10	
6	10			16	10	
7	10			17	10	
8	10			18	10	
9	10			19	10	
10	10			20	10	
T	100			T	100	

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
 Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Caetano (2013)

6ª atividade:

Objetivo: Organizar os dados obtidos com lançamentos experimentais de discos com diâmetros variados e responder as questões:

Quadro 4: Tabulação dos dados

Lado do quadrado do quadriculado = 3 cm				
Tipo de disco	Diâmetro (cm)	Quant. de lançamentos	Eventos favoráveis	Probabilidade de ganho

Fonte: Caetano (2013)

- 1- Qual foi a probabilidade encontrada no lançamento de 200 moedas de 10 centavos? Compare este valor com o valor de lançamento de 5 moedas apenas. Os dois resultados estão muito diferentes? Por que isso aconteceu?
- 2- Como você pode decidir se 200 lançamentos são suficientes para obter uma precisão de uma casa decimal no valor de $p(d)$? Não seriam necessários mais lançamentos? Será que 100 lançamentos não seriam suficientes?¹¹
- 3- Você deve ter observado que o texto dá a entender que, ao lançar discos em um quadriculado com quadrados de 3 cm de lado, é melhor escolher discos com diâmetros espalhados no intervalo $[0,3]$. Por que isso?
- 4- Considerando que a probabilidade é um quociente, qual o menor valor que ela pode atingir e qual o maior valor?

7ª atividade:

¹¹ Segundo Triola (1999, p. 128) para amostras maiores do que 30 pode-se aplicar o Teorema Central do Limite. "Para amostras de tamanho $n > 30$, a distribuição das médias pode ser aproximada satisfatoriamente por uma distribuição normal". E conforme Luchesa e Chaves Neto (2011, p.11) "O Teorema do Limite Central garante que amostras maiores do que 30 são normais, independentemente do formato da distribuição de probabilidade da população da qual está sendo retirada a amostra"

Objetivo: Propor uma barraca para a festa junina da escola e definir o diâmetro ideal para o jogo dos discos.

8ª atividade:

Objetivo: Construir os gráficos conforme os pontos plotados no plano cartesiano.

9ª atividade:

Objetivo: Fazer uma abordagem teórica para obter uma fórmula algébrica exata

10ª atividade: Probabilidade experimental versus probabilidade teórica.

Objetivo: Comparar a probabilidade experimental com a probabilidade exata e estimar o erro. Fixar o conhecimento adquirido por meio da resolução de uma situação problema (desafio).

Quadro 5: Probabilidade experimental x probabilidade exata

Tipo de disco	Diâmetro cm	Probabilidade experimental	Probabilidade exata	Erro
Botão de roupinha de bebê				
Botão camisa				
Moeda R\$ 0,10				
Moeda R\$ 0,25				

Fonte: Caetano (2013)

Agora um novo desafio. Em uma escola, o desafio do jogo dos discos foi aplicado em seu piso, formado por peças quadradas de 30 cm de lado. Os estudantes lançaram discos de borracha de vários diâmetros e obtiveram as probabilidades dispostas na tabela abaixo. Sua tarefa é completar essa tabela, comparando a probabilidade exata com a experimental e calculando o erro.

Quadro 6: Um novo desafio

Diâmetro (cm)	Probabilidade experimental	Probabilidade exata	Erro
4	0,755 = 75,5%		
6	0,685 = 68,5%		
8	0,62 = 62%		
10	0,5 = 50%		
12	0,38 = 38%		
14	0,32 = 32%		

Fonte: Caetano (2013)

11ª atividade:

Objetivo: Estabelecendo as regras do jogo dos discos na barracada da festa junina.

Ao concluir esse capítulo em que apresentamos a trajetória dessa pesquisa (abordagem qualitativa, metodologia da engenharia didática e os dados das duas primeiras fases da engenharia), o próximo capítulo relata as outras duas fases da engenharia didática: análise *a priori*, experimentação; análise *a posteriori* e validação.

CAPÍTULO 4 – ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Antes de iniciar essa seção, destaca-se que ao realizar as análises das atividades da sequência didática, o pesquisador se baseia em partes da engenharia didática, portanto não utiliza todos os recursos da metodologia para sua análise.

Assim, nesta seção, descrevemos detalhes da aplicação de algumas etapas da engenharia didática da sequência de atividades e o confronto dos dados da análise *a priori* com os dados da análise *a posteriori*. É importante lembrar que este planejamento foi feito especialmente para a turma do 3º ano do Ensino Médio de uma escola privada do município de Campo Grande/MS.

Apresentaremos a análise de cada situação descrevendo cada etapa e fazendo a análise *a priori* e a *a posteriori* de cada uma das atividades. Identificamos, para isso, cada grupo focal por GF **A** até GF **F** e a professora é identificada pela letra **P**. As atividades foram desenvolvidas em 8 (oito) etapas, sendo em dois encontros (duas quintas-feiras) e em cada quinta-feira desenvolveram-se 4 (quatro) etapas.

Os nomes das escolas, dos estudantes e da professora ao longo desta pesquisa não foram revelados para manter sigilo, conforme acordado desde o início. A escola apenas foi identificada por uma escola privada no município de Campo Grande, a professora é identificada apenas como professora ou pela letra **P** e os estudantes foram identificados por Estudantes **A** até **F**, sendo selecionadas as respostas distantes entre todos os estudantes, para análise do alcance do objetivo geral da pesquisa.

4.1 Análises *a priori* de cada atividade

Abaixo, descrevemos alguns conceitos de forma geral. Sendo esses conceitos as análises preliminares para a concepção da engenharia didática realizadas por meio da análise epistemológica do conteúdo (antecipações).

1-Ponto amostral

Dado um **experimento aleatório**, qualquer **resultado** único desse experimento é chamado de *ponto amostral*.

No lançamento de dois dados ao mesmo tempo, os **resultados possíveis** são:

1 e 1, 1 e 2, 1 e 3 ... 6 e 5, 6 e 6

No lançamento de uma moeda, os pontos amostrais são cara ou coroa.

2-Espaço amostral

Espaço amostral é o conjunto que possui todos os **pontos amostrais** de um **evento aleatório**. Sendo assim, o **espaço amostral** referente ao experimento “lançar uma moeda” é formado por cara e coroa.

O **espaço amostral** também é comumente chamado de **universo**. Além disso, como se trata de um **conjunto**, qualquer notação de conjuntos pode representá-lo.

3-Evento

Um **evento** é qualquer subconjunto de um **espaço amostral**. Sendo assim, os eventos são formados por pontos amostrais. Um exemplo de **evento** é o seguinte: no lançamento de dois dados, somente números ímpares devem aparecer.

O subconjunto que representa esse **evento** possui os seguintes pontos amostrais:

(1, 1)

(3, 3)

(5, 5)

4-Probabilidade

A **probabilidade** é um número que representa a chance que um evento possui de acontecer. O cálculo desse número é feito da seguinte maneira: seja A um **evento** qualquer dentro do **espaço amostral** Ω , a probabilidade $P(A)$ desse evento acontecer é dada por:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Esclarece-se, que esses conceitos são fundamentais para a aplicação dos jogos dos discos, mas em forma de parênteses destacamos que o ensino e a aprendizagem de probabilidade, na maioria das vezes, resume-se a esses conceitos e exercícios de fixação. E ao aplicar o jogo dos discos, pode-se associar com outros conceitos já estudados, ou seja, os estudantes têm a possibilidade associar com os conceitos já aprendidos em geometria, como os elementos da circunferência (centro, raio e diâmetro) e área do quadrado e do círculo.

Abaixo a análise a priori de cada atividade:

Análise a priori da 1ª atividade:

Uma análise do controle do sentido, sendo possível determinar no que as escolhas feitas permitem controlar os comportamentos dos estudantes nessa atividade é apresentar uma história em quadrinho, pois as ilustrações podem permitir melhor entendimento da história e ao levantar as questões sobre acontecimento previsível e não previsível, as respostas dos estudantes são direcionadas para os fatos da história apresentada, não permitindo respostas tão dispersas.

Análise a priori da 2ª atividade:

Em 1998, o Banco Central lançou a 2ª família de moedas do Real. Em vez do aço inoxidável, que reveste a 1ª família, as moedas da 2ª família são feitas de aço carbono, revestidas de cobre ou latão, com exceção da moeda de 50 centavos, que é feita com uma liga de cobre-níquel. A 2ª família de moedas tem cores, formatos e tamanhos diferentes das moedas da família anterior. Veja, nas tabelas abaixo, as características técnicas que diferenciam essas duas famílias de moedas. Essas imagens também foram projetada pelo datashow fixo da sala.

Quadro 7: Família de moedas do Real

		Valor Facial (R\$)	Diâmetro (mm)	Peso (g)	Espessura (mm)	Bordo	Material
1ª Família de Moedas do Real		0,01	20,00	2,96	1,20	liso	Aço inoxidável
		0,05	21,00	3,27	1,20	liso	Aço inoxidável
		0,10	22,00	3,59	1,20	liso	Aço inoxidável
		0,25	23,50	4,78	1,40	liso	Aço inoxidável
		0,50	23,00	3,92	1,20	liso	Aço inoxidável
		1,00	24,00	4,77	1,20	liso	Aço inoxidável
2ª Família de Moedas do Real		0,01	17,00	2,43	1,95	liso	Aço revestido de cobre
		0,05	22,00	4,10	1,95	liso	Aço revestido de cobre
		0,10	20,00	4,80	2,23	Serrilhado	Aço revestido de bronze
		0,25	25,00	7,55	2,25	Serrilhado	Aço revestido de bronze
		0,50 (1998-2001)	23,00	9,25	2,85	Legenda*	Cuproníquel
		0,50 (2002-atual)	23,00	6,80	2,85	Legenda*	Aço inoxidável
		1,00 (1998-2001)	27,00	7,84	1,95	Serrilha Intermitente	Cuproníquel (núcleo) e Alpacá (anel)
		1,00 (2002-atual)	27,00	7,00	1,95	Serrilha Intermitente	Aço inoxidável (núcleo) e Aço revestido de bronze (anel)

* • ORDEM E PROGRESSO • BRASIL
Fonte: Banco Central do Brasil

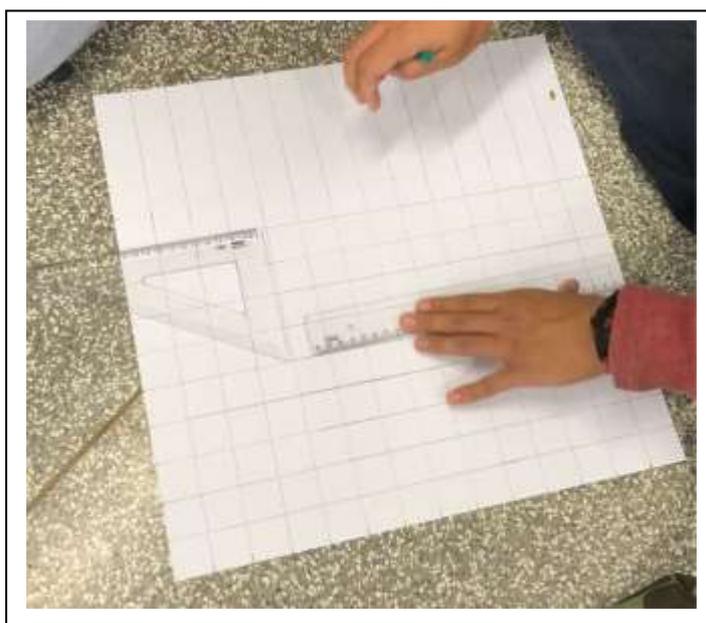
Fonte: Caetano (2013)

Outra análise *a priori* nessa atividade é apresentar o quadro no data show, permitindo visualização da imagem colorida e os estudantes podem explorar informações das moedas do Real (diferenças das moedas da 1ª e 2ª família e dados como valor facial, diâmetro, peso, espessura, bordo e material), sendo que para as futuras atividades a informação a ser utilizado será o diâmetro das moedas.

Análise a priori da 3ª atividade:

Para estudar os conceitos matemáticos envolvidos, vamos fazer vários experimentos considerando discos de diâmetros variados. Faremos muitos lançamentos aleatórios e anotaremos tudo, para comparar as jogadas vencedoras com o total delas. Podemos sair por aí e procurar pisos ladrilhados para fazer os lançamentos. Mas fica mais prático se adotarmos algumas simplificações, principalmente se quisermos executar os lançamentos em sala de aula. Nossa sugestão é construir um quadriculado, com quadrados de 3 cm de lado, desenhados em papel cartolina de 42 cm 42 cm. O lado de 3 cm combina bem com moedas pequenas e botões de camisa. Mas quando os estudantes foram construir o tabuleiro, na escola não tinha cartolina, mas tinha papel A3 (conhecido como sulfite). Os estudantes colaram dois papeis A3, assim permitindo ficar um retângulo de 42cmx30cm. Essa é mais uma análise do controle do sentido, bem como nas demais atividades, procurou-se analisar o controle do sentido, para que as escolhas feitas pelos estudantes permitissem controle dos comportamentos.

Figura 9: Construção da malha quadriculada



Fonte: autor da pesquisa

Análise a priori da 4ª atividade:

Quando os estudantes respondem essas questões e compartilham com os outros grupos focais e com a professora, pode-se estabelecer regras quando começarem os lançamentos dos discos no tabuleiro. E os argumentos levantados nessas questões também interfere na elaboração do material na proposta de intervenção da pesquisa, por isso a importância dessa fase da engenharia didática nesse momento.

Análise a priori da 5ª atividade:

Não tem análise a priori, pois a atividade baseia-se apenas em lançar os discos sobre a malha quadriculadas.

Análise a priori da 6ª atividade:

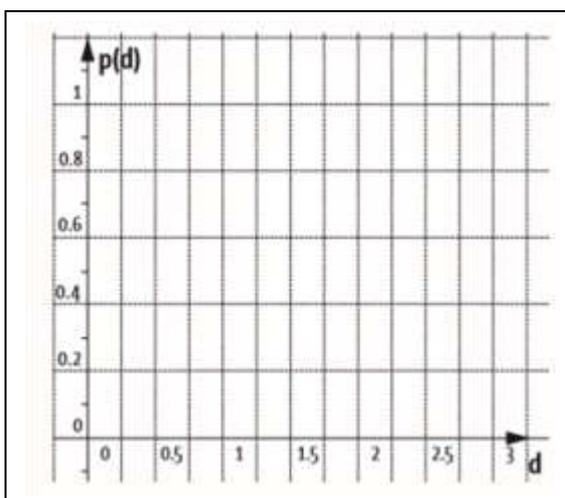
As questões dessa atividade são importantíssimas para a validação da engenharia didática, pois por meio dessas respostas foi possível confrontar a análise *a priori* com a análise *a posteriori*, validando a aprendizagem de novos conceitos dos estudantes, observando as antecipações com os novos conceitos.

Análise a priori da 7ª atividade:

A professora e o pesquisador levaram um questionamento para os estudantes, com a seguinte situação: Se vocês fossem fazer barraca do jogo dos discos na festa junina da escola para os estudantes levantarem fundos para o baile de formatura, precisariam propor o seguinte questionamento: “Vocês só precisam tomar cuidado na hora de determinar o diâmetro desses discos, pois os convidados da festa somente irão se interessar pelo jogo se acharem que têm chance de ganhar o prêmio. Agora digam: qual será o diâmetro ideal?”

Análise a priori da 8ª atividade:

Existe outra forma de obter essa informação. Que tal fazer um gráfico? É isso mesmo, podemos plotar os pontos $(d;p(d))$ que já temos em um gráfico. Supondo que o gráfico da função $p(d)$ seja uma curva contínua, podemos desenhar uma curva que melhor se ajuste aos pontos plotados. Utilize os eixos a seguir para plotar os dados que você obteve na atividade 6 e responda à questão:

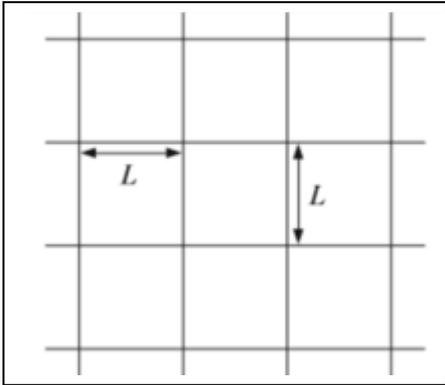
Figura 10: Plotagem

Fonte: Caetano (2013)

- 1- Qual deve ser o diâmetro aproximado do disco, para uma probabilidade de acerto de 0,5 ou 50%?

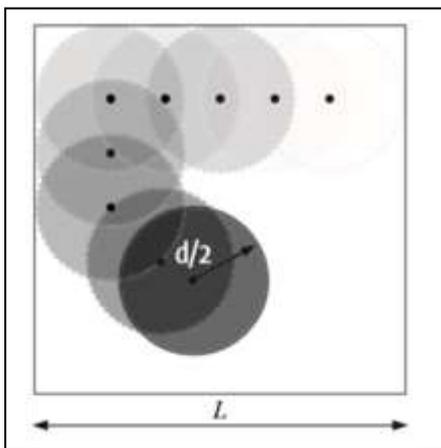
Análise a priori da 9ª atividade:

Até à atividade anterior obteve-se, através de experimentos, estimativas para a probabilidade de lançamento favorável no jogo dos discos em função do diâmetro. A partir desta atividade iremos fazer uma abordagem teórica para obter uma fórmula algébrica exata para essa função ($p(d)$). Portanto a professora apresentará a parte teórica para os estudantes. Como podemos passar do caso estudado até o momento, com o quadriculado formado por quadrados de 3 cm de lado, para um caso mais geral, sem especificar o valor do lado dos quadrados do quadriculado? Isto é, como podemos generalizar a probabilidade do jogo dos discos? A generalização em Matemática é fundamental quando pretendemos validar os dados obtidos a partir de um determinado experimento. Este é um aspecto muito importante da Matemática que merece ser trabalhado com os estudantes da Educação Básica. Inicialmente, vamos supor que a brincadeira ocorrerá em um plano quadriculado com quadrados, todos de mesmo lado L .

Figura 11: Plano quadriculado com lado L 

Fonte: Caetano (2013)

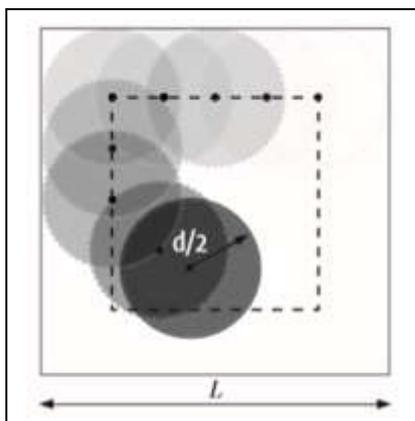
Os valores interessantes para o diâmetro d estão no intervalo $0 \leq d < L$. Então, professor, qual é a condição geométrica para que um disco de diâmetro d esteja contido num quadrado de lado L ? Imagine a figura de um disco que foi lançado e está parando sobre um dos quadrados do quadriculado. Pense no disco confinado nesse quadrado, em todas as posições possíveis, tocando ou não as bordas do quadrado.

Figura 12: Diâmetro contido num quadrado

Fonte: Caetano (2013)

Observando a figura acima, você consegue visualizar que a localização do centro de um disco confinado no quadrado determina a posição desse disco no quadrado? Observe a figura abaixo e deduza o tamanho do lado do quadrado menor formado pelos centros dos discos de diâmetro d confinados no quadrado de lado L .

Figura 13: Quadrado menor formado pelos centros dos discos



Fonte: Caetano (2013)

Ao descobrir que os centros dos discos de diâmetro d , no interior de um quadrado de lado L , onde $d < L$, geram outro quadrado de lado $L - d$. Utilizando essa informação e o conceito de probabilidade geométrica, obtemos:

$$p(d) = \frac{\text{área do quadrado de lado } L-d}{\text{área do quadrado de lado } L} = \frac{(L-d)^2}{L^2}$$

Agora desenvolva ao máximo essa fórmula e tente descobrir a expressão polinomial da função $p(d)$. Tendo ao final a equação:

$$p(d) = \frac{1}{L^2}d^2 - \frac{2}{L}d + 1$$

Após obtenção desta expressão polinomial, vamos retomar as atividades anteriores, onde fizemos experimentos com um quadriculado com quadrados de 3 cm de lado ($L=3$). Nossos primeiros lançamentos foram feitos com uma moeda de dez centavos, com diâmetro de 2 cm ($d = 2$). Expresse a função $p(d)$ nesse caso e calcule o valor exato da probabilidade de uma jogada favorável para $d=2$.

$$p(2) = \frac{1}{9} \cdot 4 - \frac{2}{3} \cdot 2 + 1 = \frac{1}{9} \approx 0,111$$

Análise a priori da 10ª atividade:

Comparando os dois valores obtidos, podemos observar que existe um erro a ser considerado. Este erro pode ser calculado pela diferença positiva entre o valor exato e o experimental.

Análise a priori da 11ª atividade:

Considerando o fato de montar a barraca do jogo dos discos para a festa junina, vamos à seguinte problemática. A intenção é que o jogador jogue uma moeda de R\$ 1,00 e se o caso for favorável ele receberá sua moeda de volta e mais R\$ 1,00 e se o caso não for favorável, o valor de R\$ 1,00 fica para a barraca. Portanto, qual será a medida do lado dos quadrados desse quadriculado para resultar em uma probabilidade de ganho de 50% favorável ao jogador (considerando que o disco será uma moeda de R\$1,00)?

4.2 Mão na massa – Experimentação

Após elaboração das atividades dessa sequência didática, chegou o momento da experimentação, sendo esta a fase da realização da sequência didática com certa população de estudantes. É nessa fase que existe o contato do professor e pesquisador com os estudantes.

Na primeira semana de aplicação da oficina de aprendizagem foram desenvolvidas as seguintes etapas:

ETAPA 1: A professora orienta os estudantes que, a partir dessa aula, todos participarão de uma atividade diferente e que até o término dessas atividades, todos os estudantes devem formar grupos, sendo que cada grupo terá entre 5 e 6 estudantes, totalizando 6 grupos.

ETAPA 2: Após as constituições dos grupos, a professora inicia com a atividade 1, apresentando a história em quadrinho, solicitando que os estudantes leiam a história em voz alta e um estudante por vez, lê o slide projetado. Após leitura, a professora entrega uma folha para cada grupo para discussão e redação de suas respostas, (ANEXO A)¹². Após um tempo para discussão e redação de suas respostas, a professora solicita que cada grupo relate os apontamentos levantados e a professora realiza mediações nas respostas dos estudantes. Ainda

¹² As atividades estão no material da UAB (Universidade Aberta do Brasil), no livro do Caetano (2013). Mas no livro Jogos dos discos: módulo I, essas atividades estão com as mesmas nomenclaturas desta pesquisa.

nessa aula, a professora entrega dois papéis A3 para cada grupo, onde os estudantes colam as duas folhas e constroem uma malha quadriculada de lado 3cm, com recursos de régua e lápis.

ETAPA 3: Nessa aula, os estudantes continuam construindo o tabuleiro. Como cada grupo tem seu tempo de desenvolvimento e para o grupo que vai terminando a construção, a professora entrega uma folha com algumas questões para discussão dos membros do grupo e registro das respostas em seguida. As questões estão no ANEXO B.

ETAPA 4: Nesse momento, os estudantes começam os lançamentos dos discos no tabuleiro de forma aleatória e registrando os resultados na tabela entregue a eles. Essa tabela está no ANEXO C.

Na segunda semana de aplicação da sequência didática nas oficinas de aprendizagem, desenvolveram-se as seguintes etapas:

ETAPA 5: Após os registros dos resultados os estudantes organizaram os dados coletados em uma nova tabela mais resumida. Essa tabela encontra-se no ANEXO D. Junto dessa tabela há um questionário com 5 questões, que levanta um debate entre os integrantes do grupo sobre: um comparativo de poucos lançamentos com vários lançamentos; qual o número ideal de lançamentos; a relação de probabilidade em conjectura das áreas das figuras; a relação do diâmetro do disco com o tamanho do quadrado; e o quociente de menor e maior valor, quando lançados os discos.

ETAPA 6: Em seguida, propõem-se para a turma o seguinte questionamento: “Com o tabuleiro montado, precisa-se tomar cuidado na hora de determinar o diâmetro dos discos, pois o jogador mostrará interesse pelo jogo se achar que tem chance de ganhar o jogo. Agora digam-me: qual será o diâmetro ideal? Após esse debate, o professor entrega para cada grupo uma folha com um plano cartesiano, para que os estudantes possam construir um gráfico utilizando dados dos dois eixos (diâmetro e probabilidade), plotando os dados obtidos na atividade 6. O modelo do plano cartesiano, encontra-se no ANEXO E.

ETAPA 7: A professora nessa etapa realiza uma abordagem teórica para obter uma fórmula algébrica exata para essa função ($p(d)$). Conforme a atividade 9 do planejamento.

ETAPA 8: Após essa abordagem teórica, o professor propõe para os estudantes resolverem em grupo alguns exercícios relativos a teoria. Verificar os exercícios no ANEXO F. Ainda, a professora propõe um desafio aos estudantes, no qual nos dados do problema, é ofertado a probabilidade e deve-se calcular a medida do lado do quadrado. Esse problema é a atividade 11 do planejamento.

4.3 Análises da sequência de ensino

Nesse momento analisaremos a última fase da engenharia didática. Essa fase se apoia sobre todos os dados colhidos durante a experimentação constante das observações realizadas durante cada sessão de ensino, bem como das produções dos estudantes em classe.

É nessa fase que se dá o tratamento dos dados que constam da seleção dos dados pertinentes à análise *a posteriori*. Para que isso ocorra, foi necessária aplicação do questionário¹³ para cada grupo focal e após a aplicação da sequência didática, realizamos uma entrevista com estudantes e professores, durante a aula de planejamento da professora (hora atividade), sendo que essas entrevistas foram gravadas por áudio, para transcrição e análise.

4.3.1 Análise a priori (anexo A)

Após a professora estabelecer alguns contratos didáticos ao detalhar a ETAPA 1, ela apresenta a história em quadrinhos e ao final entrega uma folha para cada grupo focal (anexo A) para discussão e redação de suas respostas. Essa atividade tem como objetivo verificar os conhecimentos dos estudantes sobre acontecimento previsível e não previsível.

¹³ Este questionário encontra-se no anexo, podendo ser reaplicado por todos os professores de Matemática.

Figura 14: Imagem do anexo A com as questões introdutórias

Questões:

Na história em quadrinhos, diversos acontecimentos dão-se ao longo de uma tumultuada manhã. Do ponto de vista da personagem, selecione um acontecimento que você considera ser previsível e um acontecimento que você considera ser não previsível ou aleatório. Justifique sua resposta.

a) Acontecimento previsível. Justificativa.

b) Acontecimento não previsível ou aleatório. Justificativa.

Fonte: Caetano (2013)

Para essa atividade esperamos que os estudantes saibam diferenciar acontecimentos previsíveis de acontecimentos aleatórios e as respostas ao qual o pesquisador a professora previu para essa atividade são:

Dentre os possíveis acontecimentos que a personagem poderia prever, você pode ter identificado:

- ❖ A perda do emprego devido à sua chegada atrasada à reunião, justificada pelo conhecimento das políticas da empresa e da personalidade de seu chefe;
- ❖ O dia ser chuvoso e frio, justificada pelas nuvens cinzentas;
- ❖ Ter facilidade para encontrar as meias e dificuldade para encontrar o guarda-chuva, justificada por haver um lugar específico onde ela guarda suas meias.

Dentre os acontecimentos aleatórios que a personagem não poderia prever, você pode ter identificado:

- ❖ O sexo do bebê, pois as chances são iguais para menino ou menina;
- ❖ A manchete do jornal sobre a queda do avião, por se tratar de um evento raro, não esperado.
- ❖ O ônibus ter chegado rápido, por se tratar de um dia chuvoso e horário de tráfego intenso;

❖ O chefe ter ganho sozinho na loteria, pois se trata de um acontecimento extremamente raro, de natureza imprevisível.

❖ A promoção para o cargo de chefia, pois dependeu do fato de o chefe ter ganho sozinho na loteria.

4.3.2 Análise a posteriori (anexo A)

Nessa atividade, podemos associar a aplicabilidade da teoria da situação didática, pois esta teoria representa uma referência para o processo de aprendizagem matemática em sala de aula envolvendo professor, estudante e conhecimento matemático, neste caso a probabilidade. A situação didática existirá sempre que ficar caracterizada uma intenção do professor, de possibilitar ao estudante a aprendizagem de um determinado conteúdo.

Assim, a professora escutou as respostas dos estudantes e em seguida apresentou a resposta elaborada por ela, para debate paralelo entre sua resposta e as dos estudantes:

Ao desenvolver essa discussão com os estudantes, a professora comentou que não há necessidade de as respostas dos estudantes serem idênticas às respostas elaboradas por ela, e sim esse poder de argumentação e reflexão das respostas que são essenciais para a aprendizagem.

Abaixo estão transcritas algumas respostas de alguns grupos focais:

Acontecimento previsível:

GF A: *O acontecimento previsível, foi o fato dela tomar chuva, pois o clima estava propício para chuva e frio, mas mesmo assim ela saiu sem guarda-chuva.*

GF C: *Achar meias na caixa de meias, pois ela que as guarda. Chuva, pois há nuvens escuras. Perder o guarda chuvas, pois ela não guardou em um bom lugar;*

Acontecimento aleatório:

GF A: *O acontecimento não previsível, foi o chefe dela ganhar na loteria e lhe passar o cargo de chefe.*

GF E: *Ela saber o sexo do bebê, pois existe 50% de chance dela estar certa ou não; A queda de avião, pois é pouco provável de acontecer; Ela ser promovida, pois ela pensava que seria demitida; O chefe ganhar na loteria, pois as chances são baixas.*

Pode-se perceber que as respostas dos estudantes se aproximam da resposta prevista pela professora, mas sendo escrita em linguagem própria deles.

4.3.3 Análise a priori (anexo B)

Após essa análise do conhecimento dos estudantes sobre acontecimento previsível e acontecimento aleatório e a professora apresentar as características das moedas brasileiras, projetando uma tabela com essas informações, ela solicita para cada grupo focal construir um quadriculado com quadrados de 3 cm de lado, desenhados em papel sulfite de 42 cm x 42 cm. O lado de 3 cm combina bem com moedas pequenas e botões de camisa. Ao finalizar a construção da malha quadriculada, os estudantes pegaram uma folha com algumas questões. Esse questionário teve como objetivo, compreender alguns conhecimentos prévios dos estudantes para o desenvolvimento do jogo, como proceder para que os lançamentos sejam aleatórios; a relação entre o diâmetro do disco e o tamanho do lado do quadrado; a interferência da grossura da linha do quadrado; e se os discos ficarem sobrepostos, como proceder. Ao elaborar essas atividades, esperava-se uma sintonia entre os grupos focais.

Quando os estudantes desenvolvem a atividade da construção da malha quadriculada, espera-se que ocorra um componente essencial do contrato didático, que é a devolução. Segundo a TSD, “a devolução tem o significado de transferência de responsabilidade, uma atividade na qual o professor, além de comunicar o enunciado, procura agir de tal forma que o estudante aceite o desafio de resolvê-lo, como se o problema fosse seu e não somente porque o professor quer.” (FREITAS, 2012, p. 83). A partir dessa atividade, foi esperado que os estudantes aceitassem participar desse desafio proposto pela professora e a professora alcançando o objetivo dessa empreitada, podemos dizer que se inicia o processo de aprendizagem.

Ao desenvolver o questionário para ser respondido em grupo, a professora propôs esta atividade para que os estudantes pudessem refletir sobre os lançamentos, levantando os conhecimentos prévios dos estudantes sobre alguns procedimentos de lançamentos aleatórios. O resultado é que ela propôs uma situação de aprendizagem no qual eles pudessem elaborar os seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta e os fizessem funcionar ou modificasse como resposta às exigências do meio e não a um desejo do professor.

4.3.4 Análise a posteriori (anexo B)

Pode-se perceber que os estudantes ficaram bem curiosos com a história e as características das moedas brasileiras. Em 1998, o Banco Central lançou a 2ª família de moedas do Real. Em vez do aço inoxidável, que reveste a 1ª família, as moedas da 2ª família são feitas de aço carbono, revestidas de cobre ou latão, com exceção da moeda de 50 centavos, que é feita com uma liga de cobre-níquel. A 2ª família de moedas tem cores, formatos e tamanhos diferentes das moedas da família anterior. Além da história foram apresentadas algumas características técnicas como (diâmetro, peso, espessura, borda e material).

E quando chegou o momento da construção do tabuleiro para cada grupo focal, pôde-se perceber a empolgação dos estudantes, pois a professora apenas comentou que cada grupo teria que construir um tabuleiro com quadrados de 3 cm de lados, desenhando em folha de sulfite¹⁴ e o tabuleiro precisa ter medidas de 42cm por 42 cm e o quadrado de cada lado do quadrado 3 cm. Após a atenção dos estudantes nas cláusulas do contrato didático estabelecido para essa atividade, cada grupo foi atrás de materiais para construção do seu tabuleiro (sulfite, régua, esquadro, lápis).

A primeira percepção que os estudantes tiveram é que apenas uma folha do sulfite não seria suficiente, assim havendo a necessidade de colar duas folhas. Depois os integrantes de cada grupo resgataram estratégias para traçar linhas paralelas, bem como retas perpendiculares, sendo que grupos utilizaram esquadro de 90° e outros apenas régua, fazendo marcações de pontos. Cada grupo focal desenvolveu no seu ritmo essa atividade, sendo que alguns finalizaram primeiros que outros. Mas aos que foram terminando, a professora entregou o questionário para cada grupo, para que eles pudessem refletir sobre as respostas e colocassem suas considerações por escrito, conforme anexo B.

As respostas dos estudantes para esse questionário foram:

1-Como proceder com os lançamentos para que sejam aleatórios?¹⁵

GF A: *Não planejar um ponto específico para a queda do objeto.*

GF B: *Lançar sem mira, de longa distância, sem nenhum objetivo.*

GF C: *Jogá-las para que façam movimentos rotativos de 360°.*

GF D: *Lançar a moeda bem alto.*

GF E: *Realizar uma sequência de movimentos.*

¹⁴ Papel sulfite de tamanho A3, com medidas de 297 x 420 mm.

¹⁵ Após as respostas dos estudantes de todas as questões (total de 6 questões), apresentamos a resposta esperada elaborada pela professora e o pesquisador.

GF F: *Pegar as moedas, uma de cada valor que dará valor aleatório.*

2-Um jogador, ao lançar uma moeda, chega bem perto e mira no centro de um quadrado. Seu lançamento é aleatório?

GF A: *Não. O mesmo lança a moeda no centro do quadrado.*

GF B: *Não, pois ele fixou e mirou no quadrado, foi um lançamento previsível.*

GF C: *Seu lançamento é aleatório, pois tem vários quadrados e a probabilidade de cair no centro é baixa.*

GF D: *Não, pois o objetivo era acertar a moeda no centro do quadrado.*

GF E: *O lançamento não será aleatório, mas o resultado (onde a moeda cai) sim, pois não se sabe onde ela irá cair.*

GF F: *Não, ele tenta calcular sua força para que a moeda chegue mais próximo do centro.*

3-O que acontece se fizermos 1.000 lançamentos com uma moeda cujo diâmetro é maior do que o lado do quadrado do quadriculado?

GF A: *A moeda nunca vai cair no quadrado, só se o quadrado for maior que a moeda.*

GF B: *Elas nunca vão conseguir aleatoriamente ou objetivamente se encaixar no quadrado corretamente.*

GF C: *Não, pois o diâmetro da moeda é maior que o lado do quadrado, ficando impossível acertar o seu centro.*

GF D: *É impossível a moeda ficar dentro do quadrado quadriculado se o diâmetro for maior, fazendo assim a moeda ficar para fora do quadrado.*

GF E: *Ela sempre vai cair fora do quadrado e em diversos pontos.*

GF F: *Ela vai ocupar vários quadrados do quadriculado.*

4-Um estudante, ao desenhar um quadriculado, usou um pincel de ponto de grossa, que faz linhas de 3mm. O que muda?

GF A: *Vai ficar completamente diferente, a linha do desenho vai passar da linha proposta.*

GF B: *A área interna do quadrado diminui.*

GF C: *O quadrado vai ficar com uma área menor, ficando impossível acertar seu centro.*

GF D: *As chances da moeda ficar dentro do quadrado vai ser menor pois a borda ficará mais grossa.*

GF E: *A área do quadriculado.*

GF F: *Diminuirá a área do quadrado do quadriculado.*

5-Um estudante foi solicitado pelo professor a fazer 200 lançamentos de uma determinada moeda. Teve a seguinte ideia, para acelerar a contagem: arrumou dez moedas iguais e lançava as dez simultaneamente. Assim, fez apenas 20 lançamentos, mas contou 200. Isso pode?

GF A: *Sim, pois o cálculo bate ($10 \cdot 20 = 200$)*

GF B: *Pode, pois de qualquer maneira ele fez os 200 lançamentos pensando nas possibilidades em exercê-los mais rápido.*

GF C: *Sim, pois aumentou o número de moedas, sendo $20 \times 10 = 200$.*

GF D: *Sim, pois em teoria houveram 200 lançamentos do mesmo tipo de moeda, tornando assim válido o método.*

GF E: *Não, pois uma pode influenciar no desempenho da outra moeda, alterando o resultado.*

GF F: *Até daria certo pois acontecerá os 200 lançamentos, porém o percursos dos moedas será diferente do que fosse um lançamento de cada vez.*

6- Se for válido o lançamento de várias moedas de uma vez, para acelerar a contagem, o que fazer se, em um determinado lançamento, duas moedas ficarem sobrepostas?

GF A: *Conta como 2 lançamento, pois se elas se sobrepõem aparece o resultado de 1 lançamento.*

GF B: *Jogar novamente.*

GF C: *Só jogar outra moeda para substituir a outra que perdi, ficando em cima.*

GF D: *Realizar novamente o procedimento.*

GF E: *Considerar as duas com o mesmo resultado do que está em cima.*

GF F: *Será contado como se fosse apenas uma moeda, então não será válido.*

Abaixo, descreveremos as possíveis respostas elaboradas pelo pesquisador e professora. **“Perceba que, se a moeda for lançada horizontalmente e a certa distância do tabuleiro, pode-se praticamente assegurar que o lançamento é aleatório. A distância não precisa ser muito grande. Deve-se evitar “mirar” em um quadrado, ou “deixar cair” verticalmente a moeda. É preferível que não sejam colocados obstáculos nos lados do quadriculado e nem colocar o quadriculado junto a paredes. Observe também que, ao lançar uma moeda ou um disco com diâmetro maior do que o lado dos quadrados do quadriculado, ele sempre tocará algum lado de um quadrado. Neste caso, o jogador nunca ganha. É importante que a espessura das linhas do quadriculado seja a mais fina possível, caso contrário o tamanho dessa espessura pode influenciar na probabilidade de ganho do jogador. Para acelerar a**

contagem, você pode lançar várias moedas ou discos idênticos de uma só vez, desde que haja um razoável espalhamento. Se dois discos caírem sobrepostos, pode-se retirar o de cima e fazer novo lançamento apenas com ele.”

As respostas dos estudantes que não coincidem com a nossa, não significa que estão erradas e sim que possuem outros pontos de vistas. Exemplo disso é na questão 6, em que as respostas são bem diversificadas.

4.3.5 Análise a priori (anexo C)

Os estudantes ao desenvolverem a atividade 5, observam que muitos professores trabalham com o conteúdo de probabilidade, apenas definindo a fórmula:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Partimos do pressuposto de que um dos equívocos encontrados no ensino da Matemática consiste em pensar que sua prática educativa se reduziria a uma simples reprodução, em menor escala, do contexto do trabalho científico. Assim, o professor tem um trabalho desafiador, que consiste em criar condições para que o estudante aprenda em pouco tempo noções que demoraram muito para serem construídas. E ao desenvolver esta sequência, o professor pode contribuir para construção do conceito de probabilidade.

Desse modo, as atividades propostas até o momento procuram associar as relações do estudante com diversas possibilidades de utilização do saber, e alcançando a **Situação de ação**. Para um sujeito, “atuar” consiste em escolher diretamente os estados do *meio* antagonista em função de suas próprias motivações. Se o meio reage com certa regularidade, o sujeito pode relacionar algumas informações às suas decisões, antecipar suas respostas e considerá-las em suas futuras decisões. Os conhecimentos permitem produzir e mudar essas “antecipações”. A aprendizagem é o processo em que os conhecimentos são modificados. Podemos representar esses conhecimentos por meio de descrições de táticas que o indivíduo parece seguir ou pelas declarações daquilo que parece levar em consideração, mas tudo são só projeções. A manifestação observável é um padrão de resposta explicado por um modelo de ação implícito.

4.3.6 Análise a posteriori (anexo C)

Na atividade nº 5, pode-se observar essa manifestação de um padrão de resposta, por meio de um modelo de ação implícito, sendo regido por uma certa regularidade.

Abaixo alguns exemplos dessas tabelas preenchidas pelos estudantes demonstrando essa possível regularidade nos resultados obtidos.

Ao realizar os lançamentos com dez moedas de 10 centavos simultaneamente (discos de 2,0 cm de diâmetro), os dados são:

FIGURA 15: Resposta do GF A - Total de 36 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	2		11	10	1
2	10	2		12	10	2
3	10	1		13	10	3
4	10	4		14	10	2
5	10	3		15	10	1
6	10	3		16	10	3
7	10	1		17	10	0
8	10	3		18	10	2
9	10	0		19	10	1
10	10	3		20	10	1
T	100	20		T	100	16

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
 Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 16: Resposta do GF B - Total de 24 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	1		11	10	0
2	10	2		12	10	0
3	10	0		13	10	2
4	10	2		14	10	2
5	10	0		15	10	0
6	10	1		16	10	0
7	10	2		17	10	3
8	10	2		18	10	2
9	10	1		19	10	0
10	10	2		20	10	0
T	100	13		T	100	11

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
 Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 17: Respostas do GF C - Total de 75 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	2		11	10	3
2	10	1		12	10	5
3	10	2		13	10	4
4	10	5		14	10	7
5	10	5		15	10	2
6	10	4		16	10	5
7	10	4		17	10	4
8	10	6		18	10	1
9	10	4		19	10	2
10	10	3		20	10	5
T	100	37		T	100	38

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 18: Respostas do GF D - Total de 15 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	2		11	10	2
2	10	1		12	10	1
3	10	1		13	10	0
4	10	2		14	10	1
5	10	1		15	10	1
6	10	0		16	10	0
7	10	0		17	10	1
8	10	2		18	10	0
9	10	0		19	10	0
10	10	0		20	10	1
T	100	8		T	100	7

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 19: Respostas do GF E - Total de 22 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	0		11	10	0
2	10	1		12	10	2
3	10	1		13	10	1
4	10	0		14	10	0
5	10	3		15	10	2
6	10	2		16	10	2
7	10	2		17	10	0
8	10	0		18	10	2
9	10	2		19	10	1
10	10	1		20	10	0
T	100	12		T	100	10

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 20: Respostas do GF F - Total de 14 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	1		11	10	2
2	10	0		12	10	0
3	10	0		13	10	0
4	10	0		14	10	0
5	10	3		15	10	1
6	10	1		16	10	1
7	10	1		17	10	1
8	10	0		18	10	1
9	10	0		19	10	0
10	10	1		20	10	1
T	100	7		T	100	7

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
 Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

Ao observar os valores favoráveis, pode-se perceber que os resultados não foram muito distintos, exceto o grupo focal C, que deve ter realizado os lançamentos com proximidade ao tabuleiro.

Realizando os lançamentos com dez moedas de 25 centavos simultaneamente (discos de 2,5 cm de diâmetro), obtêm-se os seguintes resultados:

FIGURA 21: Respostas do GF A - Total de 46 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	2		11	10	1
2	10	1		12	10	2
3	10	2		13	10	2
4	10	0		14	10	4
5	10	2		15	10	5
6	10	1		16	10	3
7	10	1		17	10	2
8	10	1		18	10	2
9	10	4		19	10	5
10	10	1		20	10	2
T	100	24		T	100	32

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
 Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 22: Respostas do GF B - Total de 7 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	1		11	10	0
2	10	0		12	10	0
3	10	0		13	10	1
4	10	1		14	10	0
5	10	0		15	10	0
6	10	0		16	10	1
7	10	0		17	10	0
8	10	1		18	10	0
9	10	1		19	10	0
10	10	1		20	10	0
T	100	5		T	100	2

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
 Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 23: Resposta do GF C - Total de 67 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	3		11	10	4
2	10	4		12	10	3
3	10	5		13	10	4
4	10	5		14	10	2
5	10	4		15	10	5
6	10	4		16	10	4
7	10	4		17	10	2
8	10	2		18	10	2
9	10	1		19	10	3
10	10	3		20	10	3
T	100	39		T	100	32

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
 Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

FIGURA 24: Respostas do GF D - Total de 10 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	0		11	10	1
2	10	3		12	10	1
3	10	0		13	10	1
4	10	0		14	10	0
5	10	0		15	10	0
6	10	1		16	10	0
7	10	0		17	10	2
8	10	0		18	10	0
9	10	0		19	10	0
10	10	0		20	10	1
T	100	4		T	100	6

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
 Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 25: Respostas do GF E - Total de 8 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	1		11	10	0
2	10	0		12	10	0
3	10	0		13	10	0
4	10	1		14	10	0
5	10	0		15	10	0
6	10	1		16	10	1
7	10	1		17	10	0
8	10	0		18	10	1
9	10	0		19	10	0
10	10	2		20	10	1
T	100	6		T	100	2

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 26: Respostas do GF F - Total de 16 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	1		11	10	0
2	10	3		12	10	1
3	10	1		13	10	1
4	10	0		14	10	0
5	10	0		15	10	1
6	10	1		16	10	1
7	10	0		17	10	1
8	10	0		18	10	2
9	10	1		19	10	1
10	10	1		20	10	0
T	100	8		T	100	8

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

Ao realizar esses lançamentos com discos de diâmetros de 2,5 cm, espera-se que os casos favoráveis sejam menores que os lançamentos de discos com diâmetros de 2,0 cm. Mas pode-se perceber, duas circunstâncias: o grupo focal C continua com valores mais elevados que os demais grupos focais, confirmando que a proximidade para os lançamentos torna-se favorável para acerto do disco no interior do quadrado e o grupo focal A, houve um aumento nos casos favoráveis com o diâmetro maior, mas que não foi observado pela professora e pesquisador o motivo.

Realizando os lançamentos com dez botões idênticos de camisa, com cerca de 1,1 cm de diâmetro simultaneamente, obtêm-se os seguintes dados:

FIGURA 27: Respostas do GF A - Total de 117 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	5		11	10	5
2	10	8		12	10	6
3	10	6		13	10	2
4	10	2		14	10	7
5	10	9		15	10	5
6	10	6		16	10	8
7	10	7		17	10	7
8	10	2		18	10	10
9	10	0		19	10	6
10	10	6		20	10	8
T	100	51		T	100	66

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
 Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 28: Respostas do GF B - Total de 81 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	3		11	10	6
2	10	3		12	10	4
3	10	6		13	10	0
4	10	3		14	10	3
5	10	3		15	10	5
6	10	5		16	10	5
7	10	6		17	10	5
8	10	2		18	10	9
9	10	3		19	10	3
10	10	2		20	10	3
T	100	38		T	100	43

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
 Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 29: Respostas do GF C - Total de 94 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	6		11	10	6
2	10	6		12	10	6
3	10	3		13	10	5
4	10	6		14	10	4
5	10	6		15	10	6
6	10	6		16	10	6
7	10	4		17	10	5
8	10	6		18	10	4
9	10	2		19	10	3
10	10	5		20	10	5
T	100	50		T	100	44

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
 Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 30: Respostas do GF D - Total de 66 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	4		11	10	5
2	10	1		12	10	6
3	10	1		13	10	2
4	10	3		14	10	4
5	10	2		15	10	3
6	10	5		16	10	4
7	10	3		17	10	3
8	10	2		18	10	5
9	10	4		19	10	3
10	10	3		20	10	3
T	100	28		T	100	38

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
 Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 31: Respostas do GF E - Total de 76 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	4		11	10	4
2	10	6		12	10	3
3	10	3		13	10	5
4	10	4		14	10	6
5	10	5		15	10	3
6	10	2		16	10	4
7	10	6		17	10	1
8	10	5		18	10	4
9	10	4		19	10	3
10	10	2		20	10	2
T	100	41		T	100	35

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
 Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 32: Respostas do GF F - Total de 15 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	1		11	10	2
2	10	0		12	10	0
3	10	0		13	10	0
4	10	0		14	10	1
5	10	1		15	10	0
6	10	0		16	10	0
7	10	0		17	10	0
8	10	0		18	10	3
9	10	2		19	10	0
10	10	1		20	10	0
T	100	7		T	100	8

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
 Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

Ao observar os dados desses lançamentos do disco de 1,1 cm de diâmetro, pode-se perceber ainda que os grupos focais A e C permanecem com valores altos nos casos favoráveis e ainda o grupo focal F tem muita dificuldade nos lançamentos para obtenção de casos favoráveis.

Nos lançamentos dos discos com dez botões idênticos de camisa, com cerca de 1,7 cm de diâmetro, tem-se como dados:

FIGURA 33: Respostas do GF A - Total de 104 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	4		11	10	6
2	10	09		12	10	4
3	10	4		13	10	4
4	10	4		14	10	5
5	10	5		15	10	4
6	10	8		16	10	4
7	10	5		17	10	3
8	10	7		18	10	6
9	10	4		19	10	5
10	10	7		20	10	6
T	100	57		T	100	47

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
 Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 34: Respostas do GF B - Total de 46 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	1		11	10	2
2	10	3		12	10	4
3	10	1		13	10	1
4	10	2		14	10	2
5	10	2		15	10	3
6	10	3		16	10	4
7	10	2		17	10	3
8	10	1		18	10	3
9	10	1		19	10	3
10	10	2		20	10	3
T	100	18		T	100	28

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
 Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 35: Respostas do GF C - Total de 57 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	2		11	10	2
2	10	3		12	10	4
3	10	4		13	10	2
4	10	4		14	10	3
5	10	2		15	10	5
6	10	3		16	10	5
7	10	2		17	10	4
8	10	2		18	10	1
9	10	1		19	10	1
10	10	3		20	10	4
T	100	26		T	100	31

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 36: Respostas do GF D - Total de 29 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	0		11	10	3
2	10	1		12	10	0
3	10	0		13	10	2
4	10	1		14	10	0
5	10	1		15	10	1
6	10	2		16	10	2
7	10	3		17	10	2
8	10	2		18	10	1
9	10	2		19	10	4
10	10	1		20	10	1
T	100	13		T	100	16

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 37: Respostas do GF E - Total de 33 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	2		11	10	3
2	10	1		12	10	4
3	10	3		13	10	2
4	10	1		14	10	2
5	10	2		15	10	0
6	10	1		16	10	1
7	10	1		17	10	0
8	10	2		18	10	0
9	10	1		19	10	1
10	10	3		20	10	3
T	100	17		T	100	16

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 38: Respostas do GF F - Total de 21 lançamentos favoráveis

L	Q	F		L	Q	F
1	10	2		11	10	0
2	10	0		12	10	3
3	10	3		13	10	0
4	10	0		14	10	1
5	10	1		15	10	0
6	10	2		16	10	0
7	10	0		17	10	1
8	10	0		18	10	0
9	10	1		19	10	0
10	10	2		20	10	3
T	100	11		T	100	10

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

Nessa última análise, confirmam-se as seguintes informações: que os grupos focais A e C realizaram lançamentos mais próximos do tabuleiro construído, obtendo mais casos favoráveis em relação aos demais grupos e o grupo focal F foi o grupo com menor número de casos favoráveis, talvez sendo o grupo que fez lançamentos com maior distância do tabuleiro.

4.3.7 Análise a priori (anexo D)

A professora ao propor a atividade nº 6, envolvendo a resolução de problema, poderá impulsionar o processo de ensino e aprendizagem matemática. Sendo que a escolha de um bom problema é a parte inicial do trabalho pedagógico, e este deve ser compatível com o nível de conhecimento dos estudantes. O responsável pela realização dessa tarefa é o professor, pois é ele quem tem as condições de conhecer os estudantes e a realidade de sala de aula.

Assim, após aceitação do problema pelos estudantes na atividade anterior, pois eles se envolveram com os lançamentos, o professor organiza uma nova atividade para organização dos dados coletados nos lançamentos.

Ainda nessa atividade, como foi na proposta da atividade 4, há um questionário para ser respondido em grupo, a professora propõe estas questões para que os estudantes possam refletir. Assim, os estudantes acabam apresentando uma situação de aprendizagem para que estes elaborem seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta, e os faça funcionar ou os modifique como resposta às exigências do meio e não a um desejo do professor, podendo sempre voltar às informações que já tem das atividades anteriores.

4.3.8 Análise a posteriori (anexo D)

Apresentaremos os dados de cada grupo focal e em seguida uma análise desses dados:

FIGURA 39: Tabulação dos dados do GF A

Lado do quadrado do quadriculado = 3 cm					
Tipo de disco	Diâmetro (cm)	Quant. de lançamentos	Eventos favoráveis	Probabilidade de ganho	
moeda de 10 centavos	2,0	200	36	0,18	18%
25 centavos	2,5	200	46	0,23	23%
Botão	1,1	200	117	0,585	58,5%
Botão	1,7	200	104	0,52	52%

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 40: Tabulação dos dados do GF B

Lado do quadrado do quadriculado = 3 cm				
Tipo de disco	Diâmetro (cm)	Quant. de lançamentos	Eventos favoráveis	Probabilidade de ganho
0,10	2,0	200	24	12%
0,25	2,5	200	7	3,5%
bolé	1,1	200	81	40,5%
Atulero	1,7	200	46	23%

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 41: Tabulação dos dados do GF C

Lado do quadrado do quadriculado = 3 cm				
Tipo de disco	Diâmetro (cm)	Quant. de lançamentos	Eventos favoráveis	Probabilidade de ganho
10 centavos	2,0	200	75	37,5%
25 centavos	2,5	200	67	33,5%
10 botões	1,1	200	94	47%
10 botões	1,7	200	57	28,5%

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 42: Tabulação dos dados do GF D

Lado do quadrado do quadriculado = 3 cm					
Tipo de disco	Diâmetro (cm)	Quant. de lançamentos	Eventos favoráveis	Probabilidade de ganho	
0,10	2 cm	200	15	7,5%	0,075
0,25	2,5 cm	200	10	5%	0,05
Botão Gde	1,7 cm	200	29	14,5%	0,145
Botão Pqn.	1,1 cm	200	66	33%	0,33

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 43: Tabulação dos dados do GF E

Lado do quadrado do quadriculado = 3 cm					
Tipo de disco	Diâmetro (cm)	Quant. de lançamentos	Eventos favoráveis	Probabilidade de ganho	
Moeda 10 centavos	2	200	32	16%	0,16
Moeda 25 centavos	2,5	200	8	4%	0,04
Botão Amarelo	1,1	200	76	38%	0,38
Botão Verde	1,7	200	33	16,5%	0,165

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

FIGURA 44: Tabulação dos dados do GF F

Lado do quadrado do quadriculado = 3 cm				
Tipo de disco	Diâmetro (cm)	Quant. de lançamentos	Eventos favoráveis	Probabilidade de ganho
0,10 cent.	2,00cm	200	14	$0,07 \times 100 = 7\%$
0,25 cent.	2,50cm	200	16	$0,08 \times 100 = 8\%$
B. grande	1,7cm	200	21	$0,105 \times 100 = 10,5\%$
B. pequeno	1,1cm	200	15	$0,075 \times 100 = 7,5\%$

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

Pode-se perceber nesses dados que poderia ser acrescentado mais uma coluna nessa tabela, pois a professora abordou (revisou) a probabilidade em forma decimal e percentual. Ainda, pode-se observar que a probabilidade de ganho teve as seguintes variações:

- Moeda de 10 centavos (2 cm de diâmetro), uma variação na probabilidade entre 7% a 37,5%.
- Moeda de 25 centavos (2,5 cm de diâmetro), uma variação na probabilidade entre 3,5% a 33,5%.
- Botão pequeno de camisa (1,1 cm de diâmetro), uma variação na probabilidade entre 7,5% a 58,5%.
- Botão grande de camisa (1,7 cm de diâmetro), uma variação na probabilidade entre 10,5% a 52%.

É possível notar que essa variação é de forma aleatória, pois nem sempre a menor porcentagem é sempre do mesmo grupo focal, como ao contrário, nem sempre a maior porcentagem é sempre do mesmo grupo focal.

E sobre o questionário após a tabulação dos dados, temos transcritos as seguintes respostas:

1- Qual foi a probabilidade encontrada no lançamento de 200 moedas de 10 centavos? Compare este valor com o valor de lançamento de 5 moedas apenas. Os dois resultados estão muito diferentes? Por que isso aconteceu?

GF A:

18% sim, o resultado aumenta em 2%

GF B:

200 moedas: 12%

$1/5 - 0,20 \cdot 100 = 20\%$

Quanto menos quantidade de moedas, maior a quantidade de acertos, mais chances.

GF C:

A probabilidade encontrada foi de 37,5%. Seria de maior probabilidade, pois teria menos moeda, sendo uma moeda com 20% de chances.

GF D:

Não, pois como discos é pequeno e elas são iguais, as chances do favorável são as mesmas e alta para cada moeda.

GF E:

16%. Sim, porque com o lançamento de 5 moedas a probabilidade de acertos seria maior.

GF F:

7%. Sim, pela quantidade de lançamento.

2- Como você pode decidir se 200 lançamentos são suficientes para obter uma precisão de uma casa decimal no valor de $p(d)$? Não seriam necessários mais lançamentos? Será que 100 lançamentos não seriam suficientes?

GF A:

Sim. Reduzirá a chance de acertos.

GF B:

A quantidade de lançamento não influência na probabilidade e sim, o diâmetro.

GF C:

Sim, pois tem mais possibilidades com 200 moedas. Não.

GF D:

100 lançamentos seriam suficientes, mas quanto maior o número de lançamentos, mais preciso serão os resultados.

GF E:

Qualquer quantidade acima do número de discos já pode servir como base. Não, 100 ou mais lançamentos servem para obter maior precisão.

GF F:

Não podemos decidir a quantidade de lançamento necessário. Se determinasse, o quanto de lançamento favorável, iria precisar mais lançamentos.

3- Imagine que você está realizando esse experimento em sala de aula. Um dos seus estudantes, ao lançar os discos no tabuleiro, conjecturou que essa probabilidade seria a razão entre a área da superfície do disco pela área do quadrado. Com os conhecimentos obtidos até o momento, como será possível ver se o estudante fez uma boa conjectura?

GF A:

Não, porque os dois primeiros números se aproximam. Mas os dois últimos nem se aproximam.

Ex: (0,11 / 0,027 Q 0,40 Q 0,18)

GF B:

razão: $\pi r^2/L^2$

ex: $3,14 \cdot 1^2/3^2 = 34\%$

ex: $3,14 \cdot 1,25^2/3^2 = 17,36\%$

As áreas tem relação, para que o disco consiga entrar dentro do quadrado.

GF C:

$9m = \text{área do quadrado}$

1π

Razão $9/\pi$, a razão entre a moeda e o quadrado.

GF D:

Testar a hipótese fazendo lançamentos e trocando o valor do diâmetro das moedas para provar tal hipótese.

GF E:

A conjectura dele estaria certa se ele acertasse todas as moedas dentro do quadrado.

GF F:

Testar a hipótese fazendo lançamentos.

4- Você deve ter observado que o texto dá a entender que, ao lançar discos em um quadriculado com quadrados de 3 cm de lado, é melhor escolher discos com diâmetros espalhados no intervalo [0,3]. Por que isso?

GF A:

Porque o intervalo de 0 – 3 cm possibilita que a moeda caiba no quadrado.

GF B:

$L^2 = 3^2 = 9$, para que a área do disco não seja maior que a do quadrado.

GF C:

Sim, pois se for maior que 3 acabaria por ser impossível a taxa de acerto.

GF D:

Para não ultrapassar o limite dos quadrados.

GF E:

Porque qualquer lançamento com discos maiores que o quadrado ficará fora.

GF F:

Por que for maior que 3, irá passar da linha do quadrado, sendo assim ocupando mais de um quadrado.

5- Considerando que a probabilidade é um quociente, qual o menor valor que ela pode atingir e qual o maior valor?

GF A:

mínimo = 0 máximo = 200

GF B:

resultado de uma divisão: 0 a 100%

GF C:

O menor valor seria 0,10 e o maior será 0,54.

GF D:

O menor valor é 5 e o maior é 33.

GF E:

menor = 0% Maior = 100%

GF F:

Menor = 0,07 Maior = 10,7%

É perceptível que ao responder essas questões, os estudantes possuem dúvidas sobre alguns termos matemáticos, inclusive já estudados por eles, e foi necessária intervenção da professora para revisar alguns conceitos, como por exemplo: na questão número 2, compreender a notação $p(d)$, sendo que essa notação foi estudo no conteúdo de função (1º ano do ensino médio); Na questão número 3, houve falta de compreensão do termo *conjectura e razão*. Uma situação que chamou atenção é que os estudantes ainda lembravam a fórmula para calcular área do círculo e área do quadrado. Na questão número 4, houve dúvidas sobre o que seria a notação $[0,3]$, sendo interpretado a primeiro momento como um número decimal 0,3, mas no decorrer da discussão uma estudante lembrou do conteúdo intervalo.

4.3.9 Análise a priori (anexo E)

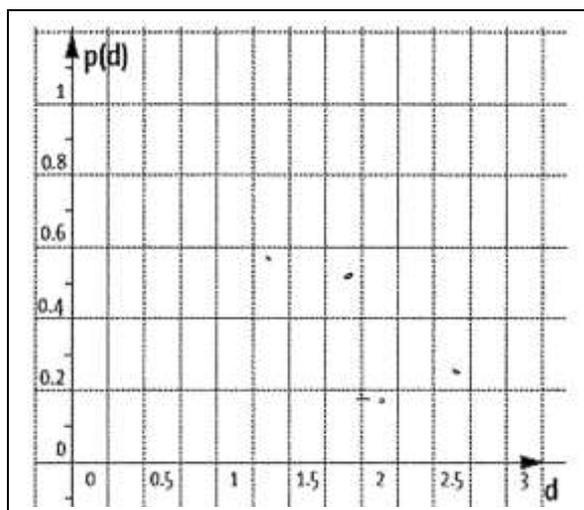
Os estudantes quando chegam na atividade 7, podem alcançar a **Situação de formulação**. A formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema linguístico). O *meio* que exigirá do sujeito o uso de uma formulação, deve então, envolver um outro sujeito, a quem o primeiro deverá comunicar uma informação. Porém, se quisermos determinar o conteúdo da comunicação, também será necessário que ambos os interlocutores cooperem no controle de um meio externo, de forma que nem um nem outro possa fazê-lo sozinho e que o único modo de ganhar seja obtendo do outro a formulação dos conhecimentos em questão.

Pode-se notar esse momento da situação de formulação, quando propusemos a seguinte indagação: **Como a ideia também é ter a barraca do jogo dos discos na festa junina desta escola para os estudantes levantarem fundo para o baile de formatura, precisa-se levantar o seguinte questionamento: “Vocês só precisam tomar cuidado na hora de determinar o diâmetro desses discos, pois os convidados da festa somente irão se interessar pelo jogo se acharem que têm chance de ganhar o prêmio. Agora me digam: qual será o diâmetro ideal?** Aparecendo como respostas: *“Um meio termo entre a área do quadrado e a área do disco; O de 2,5 cm, ou seja, moeda de 25 centavos, pois é mais provável que saia dentro do quadrado de 9 cm²; Uma medida intermediária entre 2,5 e 1,1 (disco de 1,4 cm de diâmetro em quadrados de 3x3 de área).”*

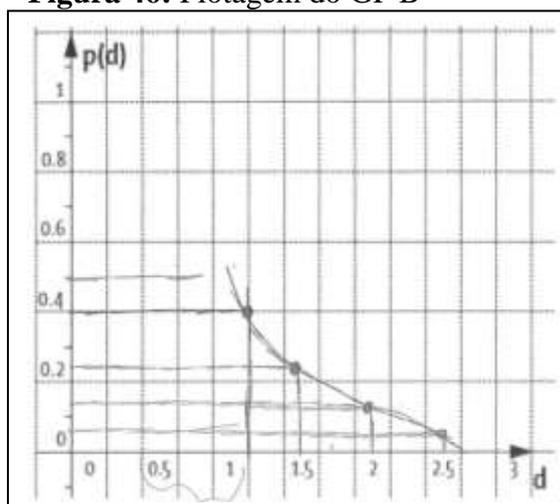
Em seguida foi proposta a atividade de plotagem dos pontos. Os estudantes podem plotar os pontos $(d;p(d))$ que já estão no gráfico. Supondo que o gráfico da função $p(d)$ seja uma curva contínua, pode-se desenhar uma curva que melhor se ajuste aos pontos plotados. Utilizem os eixos para plotar os dados que você obteve na atividade 6 e responda à questão:

4.3.10 Análise a posteriori (anexo E)

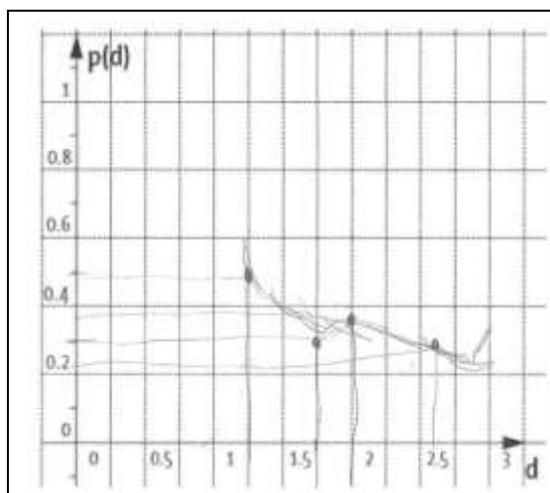
Alguns grupos focais, sentiram muita dificuldade nessa atividade, marcando apenas os pontos. Outro grupo marcou os pontos e o gráfico, não obtendo uma curva contínua e três grupos desenvolveram com êxito.

Figura 45: Plotagem do GF A

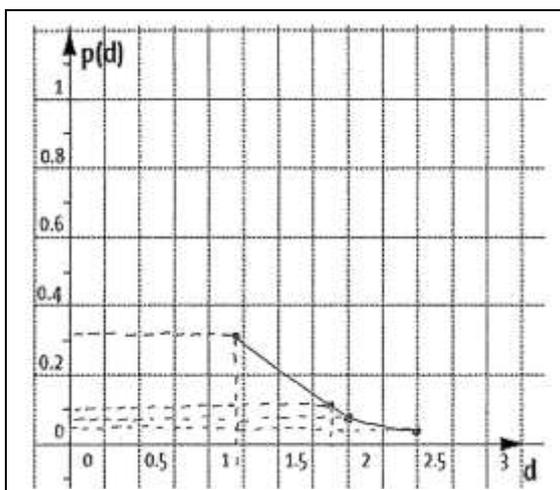
Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

Figura 46: Plotagem do GF B

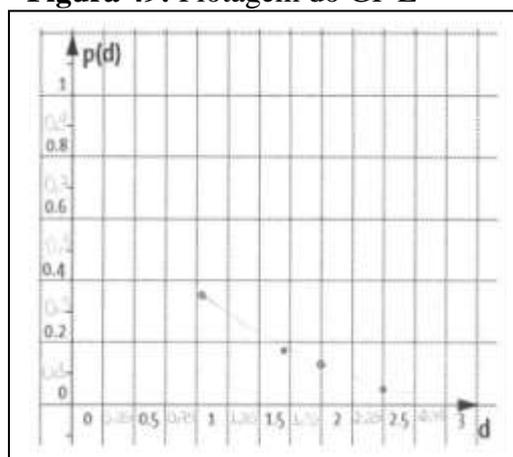
Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

Figura 47: Plotagem do GF C

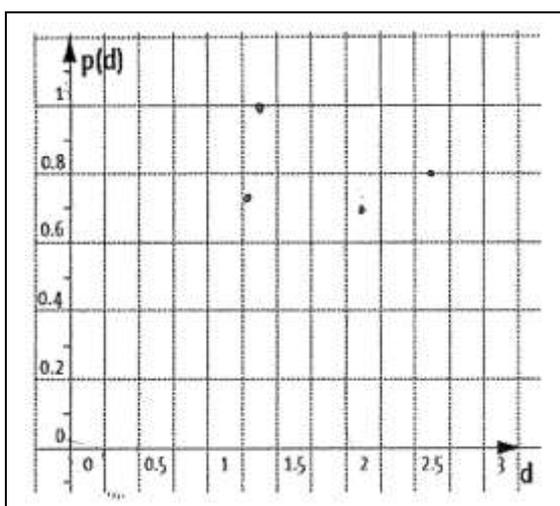
Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

Figura 48: Plotagem do GF D

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

Figura 49: Plotagem do GF E

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

Figura 50: Plotagem do GF F

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

Assim sobre a plotagem dos pontos, os estudantes responderam a seguinte pergunta: **qual deve ser o diâmetro aproximado do disco, para uma probabilidade de acerto de 0,5 ou 50%?** Aos grupos que conseguiram esboçar o gráfico, também conseguiram responder à pergunta colocando como resposta:

entre 0,5 e 1 diâmetro

“entre 0,5 e 1 diâmetro”

Menor que 1, e maior que 0,5.

“Menor que 1, e maior que 0,5.”

Aos grupos que não conseguiram esboçar o gráfico, um deles colocou qualquer resposta, sendo:

Entre 1 e 2 cm

“Entre 1 e 2 cm”

E outro grupo deixou a resposta em branco.

Ao desenvolver essa atividade pôde-se notar que ao realizar as situações-problematizadas desta sequência didática, ocorreram em alguns momentos da aula a situação adidática, quando fica caracterizada pelo fato de representar determinados momentos do processo de aprendizagem nos quais o estudante trabalha de maneira independente, não sofrendo nenhum tipo de controle direto do professor relativo ao conteúdo matemático em jogo. Inclusive a própria professora, relata que ficaram perceptíveis esses momentos da situação adidática, em que os estudantes produziam por iniciativa própria. Houve um momento no desenvolver dessas atividades que um estudante abordou a professora e perguntou se não existe fórmula nesse conteúdo?

Ao desenvolver essas atividades, os estudantes já utilizaram uma fórmula realizando a razão entre os casos favoráveis e o total de 200 lançamentos. Mas para o estudante, o jogo estava ocorrendo de forma tão natural, que nem percebeu que utilizou uma fórmula ao qual já tinha estudado em anos anteriores. Encontra-se nessa circunstância uma grande diferença entre as aulas de Matemática tradicionais (expositivas) e com o uso do jogo: os estudantes esperam mais fórmulas e mais cálculos, pois nas aulas de Matemática sempre aparecem e ao desenvolver o jogo, os estudantes sentem esse desconforto por não visualizar tantos cálculos.

4.3.11 Análise a priori (anexo F)

A professora preparou alguns slides para projeção com o desenvolvimento dessa fórmula, como consta na 9ª atividade da elaboração da sequência didática.

Ao chegar na atividade nº 10, finalizando a sequência didática, espera-se que chegue na Situação de Validação. Os esquemas de ação e de formulação implicam processos de correção, seja empírica ou apoiada em aspectos culturais, para assegurar a pertinência, a adequação, a adaptação ou a conveniência dos conhecimentos mobilizados. Mas a modelagem, no que diz respeito à situação, permite distinguir um novo tipo de formulação: o emissor já não é um informante, mas um proponente, e o receptor, um oponente. Pressupõe-se que possuam as mesmas informações necessárias para lidar com uma questão. Colaboram na busca da verdade, ou seja, no esforço de vincular de forma segura um conhecimento a um campo de saberes já consolidados, mas entram em confronto quando há dúvidas. Juntos, encarregam-se das relações formuladas entre um meio e um conhecimento relativo a ele. Cada qual pode posicionar-se em relação a um enunciado e, em havendo desacordo, pedir uma demonstração ou exigir que o outro aplique suas declarações na interação com o meio.

4.3.12 Análise a posteriori (anexo F)

Após a professora comunicar que existe uma fórmula para calcular a probabilidade de acertos, levando em consideração as duas incógnitas utilizadas até o momento: lado do quadrado e diâmetro do disco, a professora chega no momento da Institucionalização. O fato de garantir a consistência do conjunto das modelagens, eliminando as que são contraditórias, exige um trabalho teórico que consiste em mostrar a necessidade de considerar as fases de institucionalização. É ela que confere aos conhecimentos o status cultural indispensável de saber.

É nesse momento que os estudantes resolveram alguns exercícios que proporcionaram essa situação da validação, sendo que eles preencheram uma tabela, comparando a probabilidade experimental com a probabilidade exata e em seguida estimaram o erro.

Figura 51: Resposta de um GF sobre probabilidade experimental X exata

Tipo de disco	Diâmetro cm	Probabilidade experimental	Probabilidade exata	Erro
Botão de roupinha de bebê	1,7	0,52	0,18	0,34
Botão camisa	1,1	0,585	0,40	0,185
Moeda R\$ 0,10	2,0	0,18	0,11	0,07
Moeda R\$ 0,25	2,5	0,23	0,27	-0,04

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

Por fim, a professora propõe uma situação problema, sendo:

Agora um novo desafio. Em uma escola, o desafio do jogo dos discos foi aplicado em seu piso, formado por peças quadradas de 30 cm de lado. Os estudantes lançaram discos de borracha de vários diâmetros e obtiveram as probabilidades dispostas na tabela abaixo. Sua tarefa é completar essa tabela, comparando a probabilidade exata com a experimental e calculando o erro.

Sendo a resposta de um dos grupos:

Figura 52: Respostas de um GF da situação problema

Diâmetro (cm)	Probabilidade experimental	Probabilidade exata	Erro
4	0,755 = 75,5%	0,75 = 75%	0,5
6	0,685 = 68,5%	0,64 = 64%	4,5
8	0,62 = 62%	0,53 = 53%	9
10	0,5 = 50%	0,444 = 44,4%	6,4
12	0,38 = 38%	0,36 = 36%	2
14	0,32 = 32%	0,284 = 28,4%	3,6

Fonte: Atividades realizadas pelos estudantes

Com a resolução desse último exercício, a professora propôs aos estudantes montarem a barraca dos jogos dos discos na festa julina da escola, para arrecadação de dinheiro para a formatura. Os estudantes, mostraram todo um entusiasmo com a proposta e a professora comentou que ao final do próximo bimestre retornaria a discussão com toda a turma apresentando a proposta e orientando a montagem do tabuleiro.

“Para obtermos lucros na barraca, é necessário que a moeda seja de maior valor, assim, utilizaremos moedas de R\$ 1,00 para a barraca. E como debatemos na oficina, o jogador precisa sentir segurança e confiabilidade no jogo, para ter o máximo de pessoas participando na barraca, então vamos estabelecer uma probabilidade de ganho em 50%. Qual deve ser o tamanho do lado do quadrado, com as informações do nosso problema?”

A resolução desse problema, é a execução do projeto de intervenção dessa pesquisa.

4.4 - O X da questão

Nesse tópico, verifica-se se o X da questão, ou seja, se objetivo geral da pesquisa foi alcançado. Para isso, o pesquisador entrevistou os integrantes dos grupos focais, após aplicação da sequência didática, fazendo aos estudantes os seguintes questionamentos:

- 1- Para vocês, o que é probabilidade?

- 2- Após a aplicação dos jogos dos discos, houve algum conhecimento diferente de probabilidade? Comente.

As respostas foram gravadas por meio de áudio, assim o pesquisador fez a transcrição dos mesmos.

Estudante A - *“Eu achei um pouco mais frustrante do que antes, pois eu sempre esperava valores altos na probabilidade, mas muitas vezes dava valores baixos”*

Pesquisador - *“Mas porque você sempre espera números altos?”*

Estudante A – *“Porque eu gosto de vencer”*

Risos de todos

Estudante o B – *“Mas para você vencer, sempre terá algo que definirá a vitória.”*

Nesse caso o estudante refere-se as variáveis do jogo (diâmetro e lado do quadrado).

Estudante C – *“Acredito que com o jogo nada mudou muito do que sabíamos. Percebo que ampliou aquilo que já sabia antes. ”*

Nessa fala do estudante houve até uma contradição, mas ao questionar o que ele quis dizer, o pesquisador interpreta que não mudou muito referente como calcular probabilidade por meio de lançamento de moedas, mas ampliou seu conhecimento por estudar probabilidade com recursos da geometria e discutir o assunto conforme fatos do dia a dia.

Estudante D – *“Com o jogo tivemos a parte prática, invés só da teórica. Podemos colocar a mão na massa, daquilo que a gente aprendeu. ”*

Estudante E – *“O jogo me proporcionou compreender que a probabilidade pode variar, pois eu tinha muito comigo que a probabilidade fica entre 50% e 50%, por exemplo, caso da moeda para cara ou coroa ou caso do sexo do bebê. ”*

Estudante D – *“Verdade, pois em sala, sempre aprendi probabilidade com uso de moeda e dados, apenas. E agora pude perceber que dá para fazer com outros tipos de materiais.”*

Estudante F – *“Realmente deu perceber a probabilidade no cotidiano, pois conseguimos manipular”*

Estudante D – *“Pude observar que o posicionamento das mãos para o lançamento pode variar para que o caso seja favorável. Ou seja, a forma como você lança pode te ajudar a vencer, a ter melhor resultado na probabilidade.”*

Estudante F – *“Com o jogo, aprendi muito mais sobre probabilidade, pois não fiquei apenas na fração e porcentagem. Envolveu função e geometria. Então percebi que probabilidade tem mais coisas. ”*

Ao analisar as respostas dos estudantes, pode-se perceber que o jogo dos discos, contribuiu para que os estudantes pudessem construir novos conceitos de probabilidade, pois perceberam que probabilidade vai além de fração e porcentagem, e não se estuda apenas com moedas e dados. Também não fica restrito apenas a uma fórmula da razão dos casos favoráveis pelos casos possíveis, podendo abordar função e geometria para esse estudo.

5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa “Contribuições do jogo dos discos para ensino e aprendizagem de probabilidade no 3º ano do ensino médio”, desde o início do trabalho buscou compreender as contribuições do jogo dos discos para a construção do conceito de probabilidade por estudantes do último ano do ensino médio à luz da teoria da situação didática.

E para o alcance desse objetivo, a professora de Matemática de uma escola privada do município de Campo Grande – MS aplicou aos estudantes do 3º ano do ensino médio uma sequência de atividades didáticas para análise da compreensão do conceito de probabilidade por meio de um jogo no viés da teoria da situação didática. Por meio da análise do resultado dessa dissertação, acreditamos que aplicações semelhantes possam ser feitas para qualquer tipo de turma, dado o resultado que obtivemos.

E por que o pesquisador, teve anseios de estudar esse tema? Ele, ao ter contato com o material da Universidade Aberta, sendo este do curso de especialização em matemática, encantou-se com a proposta e já procurou associar a uma teoria, ao qual estudou como estudante especial no Programa de Pós-Graduação da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul.

Assim, teve a necessidade de compreender como é o funcionamento dos jogos dos discos e definir se a pesquisa se desenvolveria no foco de ensino, de aprendizagem ou de ambos, mas ao se apropriar da teoria, nota-se que a pesquisa teve foco no ensino e aprendizagem, como abordado no título da dissertação.

Para o desenvolvimento dessa pesquisa, foi necessário estudos de teóricos sobre a Teoria da Situação Didática. Compreender alguns termos importantes da teoria, como a própria definição da TSD, o significado dos termos meio, devolução, contrato didático e situação didática.

E para delimitar mais ainda o desenvolvimento dessa pesquisa, definiu-se o público para aplicação de uma sequência didática. Optou-se por estudantes do 3º ano do Ensino Médio, por já terem conhecimentos básicos para construção do conceito de probabilidade por meio de outros conceitos já estudados como a geometria e função.

Para a coleta de dados foram utilizados os seguintes instrumentos: caderno de campo, caderno de anotações dos participantes, grupos focais, testes, questionários, manifestações orais dos participantes. Para desenvolvimento dessa pesquisa foi necessário a abordagem qualitativa de pesquisa e como foi aplicada uma sequência didática, utilizou-se a engenharia didática como metodologia.

Enfatiza-se que as atividades dos jogos dos discos estão disponíveis na internet, no material da UAB. Mas o intuito dessa pesquisa, não é apenas apresentar a sequência didática, e sim associar a algumas teorias da Educação Matemática.

Para a aprendizagem autônoma dos estudantes, sendo um dos objetivos específicos dessa pesquisa, a TSD, proporciona o alcance desse objetivo. Pois nessa teoria, é importante a compreensão do termo *meio*, que é onde ocorrem as interações do sujeito.

O trabalho da professora foi propor aos estudantes uma situação de aprendizagem para que [estes] elaborem seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta, e os faça funcionar ou os modifique como resposta às exigências do meio e não a um desejo do professor.

Portanto, a relação professor-estudante está subordinada a muitas regras e convenções, que funcionam como se fossem cláusulas de um contrato didático. Essas regras quase nunca são explícitas, mas ficam perceptíveis quando ocorre a sua transgressão.

O contrato didático quando seguido por orientações contidas em sequências didáticas organizada pelo professor e que a institucionalização do saber se dá por meio de sessões coletivas já é um meio para proporcionar a aprendizagem autônoma. O docente baseia-se nas produções pessoais ou coletivas dos estudantes para poder avançar no aprendizado de todos os estudantes da sala. Nesse tipo de contrato o problema proposto pelo professor não necessariamente é resolúvel, ou seja, pode acontecer que não se saiba que existe uma resposta, a resposta se existir, pode não ser única, os dados podem não ser adequados, podendo ser insuficientes ou podem ser superabundantes. E essa procura dos dados pertinentes a resolução do problema faz parte do contrato didático.

O estudante levando em conta o objeto de conhecimento e o professor considerando a aprendizagem do estudante é um fenômeno social muito importante e uma fase essencial do processo didático. Esse duplo reconhecimento é o objeto da institucionalização. Portanto o papel do professor também é institucionalizar.

E ao desenvolver essa sequência didática, à luz da teoria da situação didática, nota-se que ocorrem as quatro fases da situação didática (ação, formulação, validação e institucionalização). Ainda, evitam-se os efeitos do contrato didático: ao tomar como objeto de estudo uma técnica que se presume útil para a resolução de um problema, perdendo de vista o verdadeiro saber matemático a ser desenvolvido; substituir o estudo de uma noção complexa por uma analogia; resolver a questão no lugar do estudante quando este encontra uma dificuldade; interpretar um comportamento banal do estudante como uma manifestação de um saber culto; acreditar que os estudantes darão naturalmente a resposta esperada.

E ao elaborar e aplicar a sequência de atividades didáticas, pressupomos um problema contextualizado para o ambiente deles, e os estudantes precisariam entre outras coisas, realizar várias experimentações concretas. Além disso, em nossa sequência de atividades, criamos uma situação na qual os estudantes precisariam fazer uso da criatividade para conseguir resolver a atividade, já que o fizemos apenas apresenta-la a eles e deixar com que resolvessem sozinhos, com o professor palpitando o mínimo possível. Pôde-se perceber que o fato de o problema ser contextualizado e permitir com que os estudantes usassem sua capacidade criadora motivou-os a solucionar a atividade, seja pela curiosidade criada pela situação em si, seja pelo próprio desafio da atividade.

É claro que para aplicar o jogo dos Discos da maneira como planejamos, foi necessário utilizar um tempo que em muitas situações pode ser difícil de o professor conseguir. Esta dificuldade pode se dar devido à necessidade de cumprimento do cronograma da escola ou do próprio programa da disciplina. Todavia, observamos que o ganho que esta aplicação trouxe para os estudantes foi muito grande. A metodologia investigativa utilizada, dando intervalos de tempos razoáveis para os estudantes pensarem em como resolver um problema cujo tema ainda não havia sido apresentado (no caso foram 8 horas aulas para aplicação da sequência de atividades didática e mais 3 horas aulas para montagem do tabuleiro), resultou em um olhar diferenciado sobre a Matemática por parte deles, mostrando que ela não é um conhecimento pronto e acabado. E como o problema se mostrou contextualizado para a realidade dos estudantes, eles também puderam enxergar a Matemática não é apenas algo abstrato, mas que possui bastante utilidade para resolução de problemas que podem fazer parte da vida cotidiana.

Para finalizar, destacamos a importância do contrato didático. O contrato interfere muito nas possibilidades que se abrem para uma situação didática. É incrível o poder que o contrato didático exerce em uma sala de aula. Se em suas cláusulas constam que só tem valor a atividade que vale nota, ou que resolver um problema matemático é concatenar números e operações, ou que aprender Matemática é apenas uma formalidade que nada tem a ver com suas vidas, ou ainda que Matemática é um conjunto de técnicas cujo sentido não é necessário compreender, é preciso romper esse contrato e criar outro. Mas romper um contrato antigo não é tão fácil assim. Parece que um contrato implícito tem muito mais poder que um contrato feito com papel e caneta. Se ele é implícito, são implícitas também as formas em que se encontra registrado.

E a principal atividade do professor que se preocupa em criar situações potencialmente didáticas é a de planejamento, pois nela irá elaborar sequências didáticas apropriadas, levando-se em consideração o conhecimento que já possui de seus estudantes e preparando recursos adequados. Pois, na concepção ingênua de que o professor transmite o conhecimento e o estudante absorve-o,

de fato, é necessário pouco planejamento. Mas consideramos que é função do professor elaborar situações que despertem o interesse e a aprendizagem; enriquecer o meio para que o estudante, raciocinando, seja capaz de formular e testar hipóteses, as quais posteriormente o professor irá institucionalizar.

Também conclui-se algo que, por mais óbvio que pareça, nunca me esteve tão claro. É o estudante que decide se irá aprender ou não. E se o professor acha inútil pensar estratégias para convencê-lo da importância que aquele conteúdo tem, gastará seu tempo “ensinando” algo que não será aprendido. A atividade de convencimento se dá não só em cada conteúdo, mas em cada problema. Numa visão pessimista, isso significaria atribuir ao estudante a responsabilidade por não aprender. Mas, na perspectiva deste trabalho, e tomando como pressuposto o compromisso que cada professor tem com o ensino, isso significa atribuir ao professor a responsabilidade de proporcionar experiências ricas de aprendizagem.

Além disso, ao alcançar o objetivo geral da pesquisa, fica evidente as boas situações de aprendizagem em que: os estudantes precisam pôr em jogo tudo o que sabem e pensam sobre o conteúdo que se quer ensinar e aprender; os estudantes têm problemas a resolver e decisões a tomar em função do que se propõem produzir; a organização da tarefa pelo professor garante a máxima circulação de informação possível; o conteúdo trabalhado mantém suas características de objeto sociocultural real, sem se transformar em objeto vazio de significado social.

REFERÊNCIAS

- ALBUQUERQUE, R. R. C.. **O jogo dos discos: o uso da experimentação como suporte para o ensino da probabilidade**' 25/11/2015 50 f. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE, Rio de Janeiro Biblioteca Depositária: undefined
- ALCÂNTARA, R. **Probabilidade Geométrica em Lançamentos Aleatórios** / Ricardo Alcântara - 2014 xx.p.
- ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. 1ª ed. Curitiba: Editora UFPR, 2007. v. 1. 218 p
- ARTIGUE, M. (1988): **“Ingénierie Didactique”**. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 9.3, 281-308.
- BODIN, A. **Problemes de L’evaluation des Savairs Mathematiques**. Petit x» nO 7 pp. 5 à 28. 1985
- BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.
- BRITO MENEZES, A.P.A. **Contrato Didático e Transposição Didática: Inter-Relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação á Álgebra na 6º Série do Ensino Fundamental**. Tese de Doutorado, UFPE. (2006).
- BROUSSEAU, G. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, Cecília; SAIZ, Irma (org). **Didática da Matemática: Reflexões Psicológicas**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996b. Cap. 4. p. 48-72.
- BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino** / Guy Brousseau ; apresentação de Benedito Antonio da Silva; consultoria técnica José Carlos Miguel; [tradução Camila Bogéa]. – São Paulo: Ática, 2008.
- CAETANO, P. A. S. **Jogo dos discos: módulo I**. -- Cuiabá, MT : Central de Texto, 2013. -- (Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização em ensino de matemática para o ensino médio)
- CAMILO, C. M. **Geometria nos currículos dos anos finais do ensino fundamental: uma análise à luz dos modelos teóricos de Josep gascón**. PUC/SP 2007. Dissertação 187 p.
- CAMPO GRANDE, **Projeto Político Pedagógico**. Escola do Sesi Campo Grande. 2016.44 p.
- DOUADY, R. **L’ingénierie didactique: un moyen pour l’enseignant d’organiser les rapports entre l’enseignement et l’apprentissage**. Cahier de DIDIREM, Paris: IREM de Paris VII. 1993.
- FERNANDES, R. **Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB): Metas intermediárias para a sua trajetória no Brasil, Estados, Municípios e Escolas**. INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais, 2005.

FREITAS, J. L. M. **Teoria das situações didáticas**. In: MACHADO, Silvia Dias Alacântara. (Org.) *Educação Matemática – Uma (nova) introdução*. – São Paulo: EDUC, 2012. p. 77 – 112.

GASCÓN, J. (2001). Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)**, 4(2), 129-159.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de Administração de Empresas**, v. 35, n. 2, p. 57-63, 1995.

GRANDO, R. C. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula**. Textos: Recortes do livro intitulado: O jogo e a matemática no contexto da sala de aula. p. 1 – 8. 2004.

LIMA, F. M. B. **O ensino de probabilidade com o uso do problema do jogo dos discos** / Felipe Mascagna Bittencourt Lima. -- São Carlos : UFSCar, 2013. 119 p.

LUCHESA, C. J. ; CHAVES NETO, A. **Cálculo do tamanho da amostra nas pesquisas em Administração**. Unicuritiba, 2011.

MACHADO, S. D. A. Engenharia didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alacântara. (Org.) **Educação Matemática – Uma (nova) introdução**. – São Paulo: EDUC, 2012. p. 233 – 247.

MIZUKAMI, M. G.N. **Ensino**: as abordagens do processo. São Paulo: EPU, 2001.

SALES, A. Prática Docente: uma Análise do Ensino das Frações com Base nos Modelos Docentes de Gascón. **UNOPAR Cient., Ciênc. Human. Educ., Londrina**, v.16, n.esp., p , 2015

SILVA, B. A. **Contrato didático**. In: MACHADO, Silvia Dias Alacântara. (Org.) *Educação Matemática – Uma (nova) introdução*. – São Paulo: EDUC, 2012. p. 49 – 76.

SIMÕES, R. P. **Relações Públicas**: Função Política. São Paulo: Summus, 1995.

STRAUSS, A. L.; CORBIN, J. **Pesquisa qualitativa**: técnicas e procedimentos para o desenvolvimento de teoria fundamentada. Tradução Luciene de Oliveira da Rocha. Porto Alegre: Artmed, 1998.

TREVIZAN, W. A. **Ensinando matemática por meio de situações potencialmente adidáticas**: estudo de casos envolvendo Análise Combinatória. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

TRIOLA, Mario F. **Introdução à Estatística**. 7.ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1999.

WEISZ, T. **O diálogo entre o ensino e a aprendizagem** / Telma Weisz, com Ana Sanchez. – 3. Ed. – São Paulo : Ática, 2018.

APÊNDICE

APÊNDICE A - Projeto de Intervenção

MÃO NA MASSA: CONSTRUÇÃO DO TABULEIRO JOGO DOS DISCOS PARA UTILIZAÇÃO EM FESTAS DA ESCOLA COM PRÓPOSITO DE LEVANTAR FUNDOS PARA REALIZAÇÃO DE EVENTOS

Coordenador do projeto: Patrick Ramalho de Oliveira

Período de desenvolvimento: Ano letivo de 2019

Duração: Algumas aulas de Matemática do 2º semestre de 2019

Este projeto tem por objetivo elaborar e confeccionar um tabuleiro do jogo dos discos para uso dos estudantes em eventos da escola (festa junina, entre outros), para arrecadação de fundos em prol de realização de eventos dos estudantes, como exemplo, formatura ou viagem. O interesse por essa temática surgiu a partir do momento em que o pesquisador conheceu o jogo no material da UAB – curso de especialização em Matemática para professores do ensino médio, ofertada pela UFGD (Universidade Federal da Grande Dourados). Mas no material consta o jogo com algumas atividades, e com objetivo de evitar a utilização do jogo pelo jogo. Dessa forma ao desenvolver essa dissertação procurou-se associar esse material com algumas teorias da Educação Matemática, sendo elas: Teoria da Situação Didática e Engenharia Didática.

A pesquisa e execução do projeto de intervenção foi realizado em uma escola privada no município de Campo de Grande – MS, sendo a mesma onde o pesquisador atua como coordenador pedagógico.

Ao se tratar em aprendizagem do conteúdo de probabilidade no ensino médio, o documento Matriz de Referência para o ENEM-2009 indica que, ao término do Ensino Médio, o estudante deve ter desenvolvido a seguinte competência: “Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais, e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis, apresentadas em uma distribuição estatística”. Os Parâmetros Curriculares Nacionais sugerem que o desenvolvimento da temática probabilidade seja abordado através de situações de aprendizagem que orientem os estudantes a coletar, organizar e analisar informações.

E essa sequência de atividades didáticas aplicada no desenvolvimento dessa pesquisa, proporcionou aos estudantes essas situações de aprendizagem em que puderam coletar, organizar e analisar os dados.

Para o desenvolvimento da pesquisa e aplicação do projeto de intervenção, primeiramente ocorreu um diálogo com a direção da escola e a professora de matemática do 3º ano do ensino médio para o aceite da proposta. Houve interesses das duas partes no estudo que estava sendo apresentado. Após esse primeiro contato, tivemos um momento de estudo com a professora, para planejamento de aplicação dessa sequência didática.

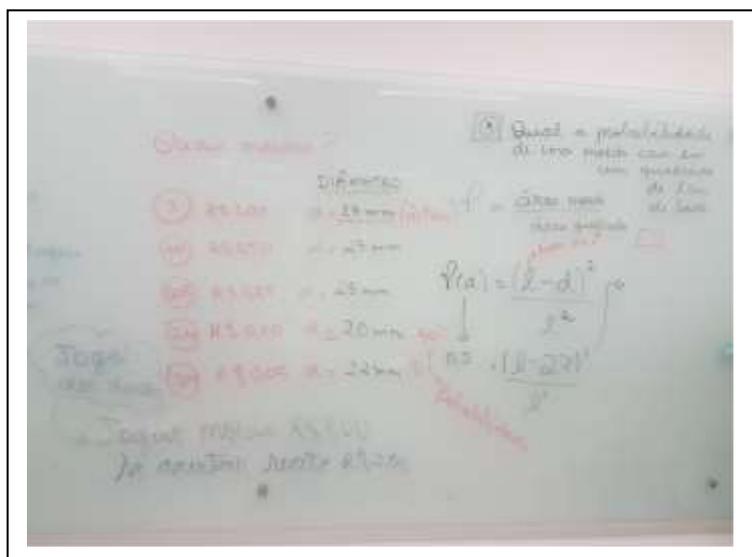
Nesse planejamento, o pesquisador e a professora levantaram como hipótese, deixar um tabuleiro de jogos dos discos para a escola, sendo que esse material pode ser utilizado em todos os eventos da escola para arrecadação de fundos para os estudantes tanto para formatura ou viagem de final de ano. Como o tabuleiro foi montado no mês de novembro do ano vigente, o tabuleiro ficará para outras turmas utilizarem no próximo ano.

A sequência de atividades pedagógicas foi aplicada durante duas tardes nas aulas de oficinas de aprendizagem no 1º semestre do ano. Mas somente no mês de novembro que a professora retornou a discussão sobre o tema, pois como os participantes da pesquisa são estudantes do 3º ano ensino médio, a professora priorizou a finalização do livro didático e a revisão para o ENEM.

Portanto nessa etapa final, a professora recordou a fórmula para calcular probabilidade, tendo como variável o diâmetro do disco e o lado do quadrado, estudado durante as oficinas de aprendizagem. E como ao final da oficina ficou o seguinte desafio: *“Para obtermos lucros na barraca, é necessário que a moeda seja de maior valor, assim, utilizaremos moedas de R\$ 1,00 para a barraca. E como debatemos na oficina, o jogador precisa sentir segurança e confiabilidade no jogo, para ter o máximo de pessoas participando na barraca, então vamos estabelecer uma probabilidade de ganho em 50%. Qual deve ser o tamanho do lado do quadrado, com as informações do nosso problema?”*

A professora deixou à vontade para que os estudantes registrassem a possível resposta desse problema, sendo que os estudantes poderiam resolver sozinhos, em duplas ou em pequenos grupos e ainda registrar no caderno ou lousa. Dois estudantes optaram em resolver na lousa, sendo registrado por fotos esse momento.

Figura 53: Dados para resolução do problema proposta



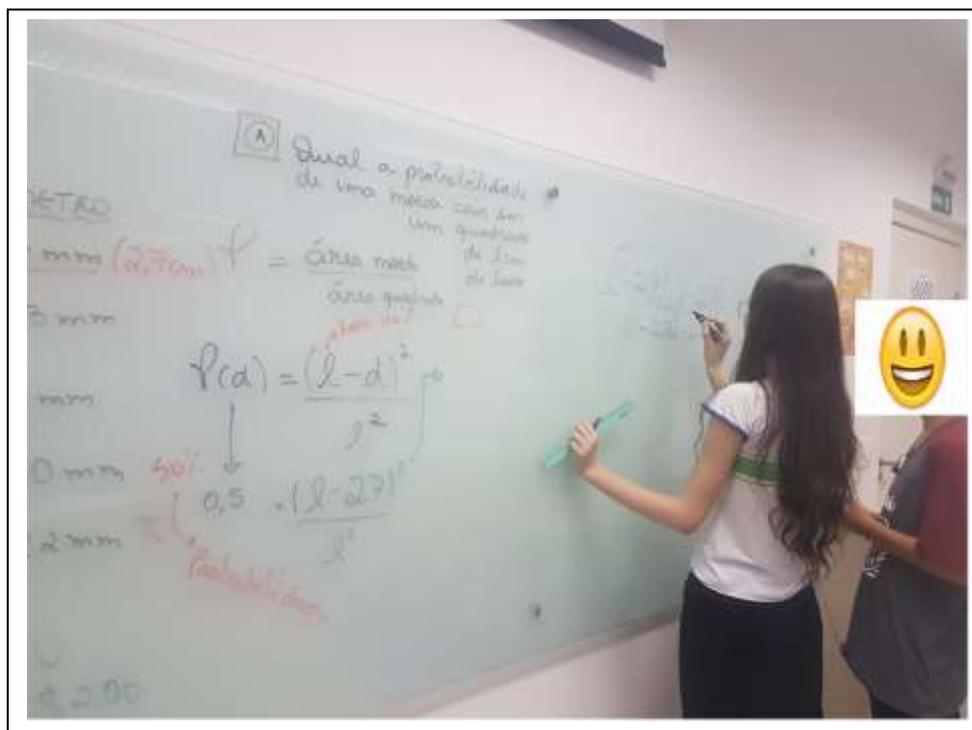
Fonte: pesquisador

Figura 54: Estudantes resolvendo de forma colaborativa o problema



Fonte: pesquisador

Figura 55: Estudantes resolvendo de forma colaborativa o problema



Fonte: pesquisador

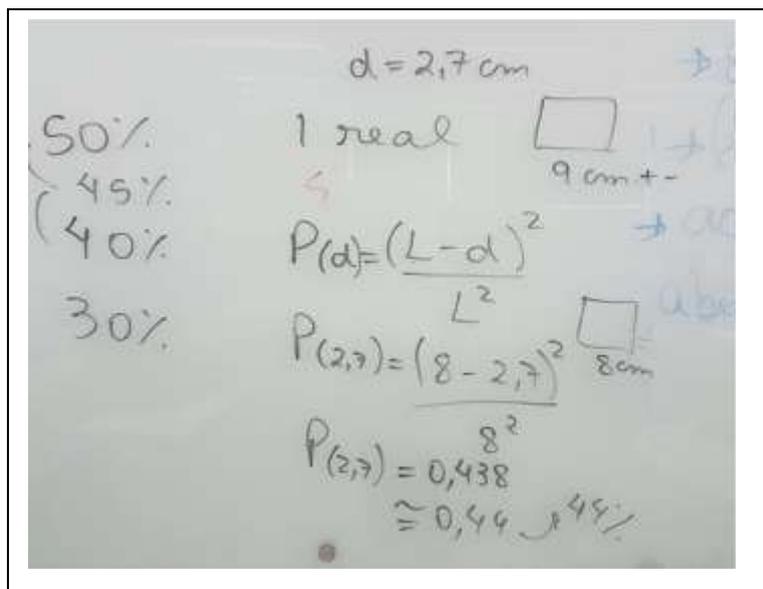
Antes de montarem o tabuleiro, ficou uma grande discussão entre os estudantes de qual a probabilidade de acerto, pois esse valor interfere no tamanho do quadrado. Primeiramente fizeram o cálculo com 50% de chance de acerto. Em seguida, desenharam os quadrados e testaram o jogo, chegando à conclusão que ainda está fácil o jogo.

Figura 56: Estudante testando o jogo



Fonte: pesquisador

Figura 57: Cálculo com as variáveis estabelecidas



Fonte: pesquisador

Após algumas discussões, os estudantes realizam o cálculo colocando a variável do lado do quadrado com valor de 8 cm e determinam uma probabilidade de acerto em 44%, ficando estabelecido essas variáveis: Probabilidade de acerto (44%), lado do quadrado (8 cm) e diâmetro do disco (moeda de 1 real tem 2,7 cm de diâmetro). Em seguida, os estudantes pensaram quais os recursos para montagem do tabuleiro, sendo necessário um pálete, uma folha de papel paraná, fita adesiva colorida e E.V.A. Assim, os estudantes iniciam a montagem do tabuleiro.

Figura 58: Estudantes montando o tabuleiro



Fonte: pesquisador

Figura 59: Finalizando o tabuleiro



Fonte: pesquisador

Ao desenvolver esse projeto de intervenção, pode-se observar que para os estudantes a possibilidade de aplicação de um conteúdo matemático no dia-a-dia dos estudantes, procurando responder à pergunta clássica deles: Onde vou utilizar isso na minha vida?

Como o tabuleiro foi confeccionado no 2º semestre de 2019, espera-se utilizar ele na festa junina do próximo ano.

ANEXO

ANEXO A: Acontecimentos previsíveis e aleatórios**Nome dos estudantes**

Questões:

Na história em quadrinhos, diversos acontecimentos dão-se ao longo de uma tumultuada manhã. Do ponto de vista da personagem, selecione um acontecimento que você considera ser previsível e um acontecimento que você considera ser não previsível ou aleatório. Justifique sua resposta.

a) Acontecimento previsível. Justificativa.

b) Acontecimento não previsível ou aleatório. Justificativa.

ANEXO B: Questões reflexivas antes da aplicação da sequência didática**Grupo 1:**

Antes de iniciarmos os lançamentos, é importante fazermos algumas reflexões. Façam a atividade a seguir e pense nas questões propostas.

1-Como proceder com os lançamentos para que sejam aleatórios?

2-Um jogador, ao lançar uma moeda, chega bem perto e mira no centro de um quadrado. Seu lançamento é aleatório?

3-O que acontece se fizermos 1.000 lançamentos com uma moeda cujo diâmetro é maior do que o lado do quadrado do quadriculado?

4-Um estudante, ao desenhar um quadriculado, usou um pincel de ponta grossa, que faz linhas de 3 mm. O que muda?

5-Um estudante foi solicitado pelo professor a fazer 200 lançamentos de uma determinada moeda. Teve a seguinte ideia para acelerar a contagem: arrumou dez moedas iguais e lançava as dez simultaneamente. Assim, fez apenas 20 lançamentos, mas contou 200. Isso pode?

6-Se for válido o lançamento de várias moedas de uma vez, para acelerar a contagem, o que fazer se, em um determinado lançamento, duas moedas ficarem sobrepostas?

ANEXO C: Lançamentos dos discos

Grupo 1:

Realize um lançamento com dez moedas de 10 centavos simultaneamente (discos de 2,0 cm de diâmetro). Repita esse procedimento 20 vezes. Preencha a tabela abaixo:

L	Q	F		L	Q	F
1	10			11	10	
2	10			12	10	
3	10			13	10	
4	10			14	10	
5	10			15	10	
6	10			16	10	
7	10			17	10	
8	10			18	10	
9	10			19	10	
10	10			20	10	
T	100			T	100	

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
 Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Realize um lançamento com dez moedas de 25 centavos simultaneamente (discos de 2,5 cm de diâmetro). Repita esse procedimento 20 vezes. Preencha a tabela abaixo:

L	Q	F		L	Q	F
1	10			11	10	
2	10			12	10	
3	10			13	10	
4	10			14	10	
5	10			15	10	
6	10			16	10	
7	10			17	10	
8	10			18	10	
9	10			19	10	
10	10			20	10	
T	100			T	100	

L = número do lançamento F = quantidade de lançamentos favoráveis
 Q = quantidade de moedas lançadas T = totalização das colunas

Realize um lançamento com dez botões idênticos de camisa, com cerca de 1,1 cm de diâmetro simultaneamente. Repita esse procedimento 20 vezes. Preencha a tabela abaixo:

L	Q	F		L	Q	F
1	10			11	10	
2	10			12	10	
3	10			13	10	
4	10			14	10	
5	10			15	10	
6	10			16	10	
7	10			17	10	
8	10			18	10	
9	10			19	10	
10	10			20	10	
T	100			T	100	

L = número do lançamento

F = quantidade de lançamentos favoráveis

Q = quantidade de moedas lançadas

T = totalização das colunas

Realize um lançamento com dez botões idênticos de camisa, com cerca de 1,7 cm de diâmetro. Repita esse procedimento 20 vezes. Preencha a tabela abaixo:

L	Q	F		L	Q	F
1	10			11	10	
2	10			12	10	
3	10			13	10	
4	10			14	10	
5	10			15	10	
6	10			16	10	
7	10			17	10	
8	10			18	10	
9	10			19	10	
10	10			20	10	
T	100			T	100	

L = número do lançamento

F = quantidade de lançamentos favoráveis

Q = quantidade de moedas lançadas

T = totalização das colunas

ANEXO D: Organização dos dados do lançamento

Grupo 1:

Organizar os dados obtidos com lançamentos experimentais de discos com diâmetros variados e responde as questões:

Lado do quadrado do quadriculado = 3 cm				
Tipo de disco	Diâmetro (cm)	Quant. de lançamentos	Eventos favoráveis	Probabilidade de ganho

1- Qual foi a probabilidade encontrada no lançamento de 200 moedas de 10 centavos? Compare este valor com o valor de lançamento de 5 moedas apenas. Os dois resultados estão muito diferentes? Por que isso aconteceu?

2- Como você pode decidir se 200 lançamentos são suficientes para obter uma precisão de uma casa decimal no valor de $p(d)$? Não seriam necessários mais lançamentos? Será que 100 lançamentos não seriam suficientes?

3- Imagine que você está realizando esse experimento em sala de aula. Um dos seus estudantes, ao lançar os discos no tabuleiro, conjecturou que essa probabilidade seria a razão entre a área da superfície do disco pela área do quadrado. Com os conhecimentos obtidos até o momento, como será possível ver se o estudante fez uma boa conjectura?

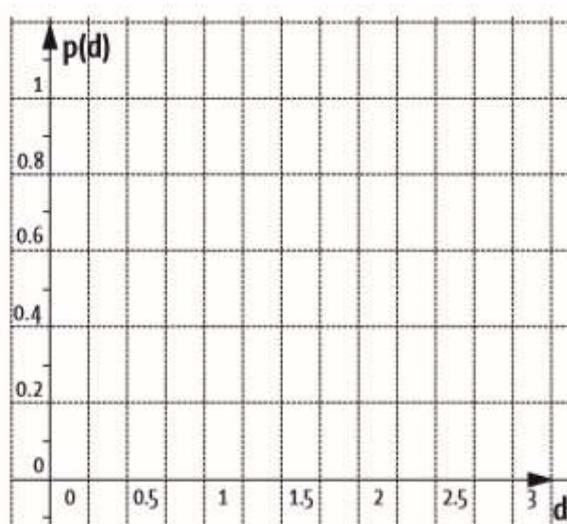
4-Você deve ter observado que o texto dá a entender que, ao lançar discos em um quadriculado com quadrados de 3 cm de lado, é melhor escolher discos com diâmetros espalhados no intervalo $[0,3]$. Por que isso?

5-Considerando que a probabilidade é um quociente, qual o menor valor que ela pode atingir e qual o maior valor?

ANEXO E: Probabilidade ideal e plotagem**Grupo 1:**

1-Como a ideia também é ter a barraca do jogo dos discos na festa junina desta escola para os estudantes levantarem fundo para o baile de formatura, precisa-se levantar o seguinte questionamento: “Vocês só precisam tomar cuidado na hora de determinar o diâmetro desses discos, pois os convidados da festa somente irão se interessar pelo jogo se acharem que têm chance de ganhar o prêmio. Agora me digam: qual será o diâmetro ideal?”

2-Existe outra forma de obter essa informação. Que tal fazer um gráfico? É isso mesmo, podemos plotar os pontos $(d;p(d))$ que já temos em um gráfico. Supondo que o gráfico da função $p(d)$ seja uma curva contínua, podemos desenhar uma curva que melhor se ajuste aos pontos plotados. Utilize os eixos a seguir para plotar os dados que você obteve na atividade 6 e responda a questão:



3-Qual deve ser o diâmetro aproximado do disco, para uma probabilidade de acerto de 0,5 ou 50%?

ANEXO F: Um pouco de teoria**Grupo 1:**

Probabilidade experimental versus probabilidade teórica.

Comparando a probabilidade experimental com a probabilidade exata e estimando o erro.

Tipo de disco	Diâmetro cm	Probabilidade experimental	Probabilidade exata	Erro
Botão de roupinha de bebê				
Botão camisa				
Moeda R\$ 0,10				
Moeda R\$ 0,25				

Agora um novo desafio. Em uma escola, o desafio do jogo dos discos foi aplicado em seu piso, formado por peças quadradas de 30 cm de lado. Os estudantes lançaram discos de borracha de vários diâmetros e obtiveram as probabilidades dispostas na tabela abaixo. Sua tarefa é completar essa tabela, comparando a probabilidade exata com a experimental e calculando o erro.

Diâmetro (cm)	Probabilidade experimental	Probabilidade exata	Erro
4	0,755 = 75,5%		
6	0,685 = 68,5%		
8	0,62 = 62%		
10	0,5 = 50%		
12	0,38 = 38%		
14	0,32 = 32%		

ANEXO G: Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Termo de consentimento livre e esclarecido

Prezado(a) Pai, Mãe ou responsável, V.Sa. está sendo convidado(a) a permitir que o seu/sua filho(a) participe de uma pesquisa sobre **“ANÁLISE DO JOGO DOS DISCOS PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO NA PERSPECTIVA DA TEORIA DA SITUAÇÃO DIDÁTICA”** que será conduzida por **Patrick Ramalho de Oliveira** mestrando da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul. A pesquisa tem por objetivo **analisar as contribuições do jogo dos discos para o ensino e a aprendizagem de probabilidade no ensino médio na perspectiva da teoria da situação didática** e será desenvolvida durante o horário regular de aula com a autorização e presença do professor titular da sala. Os temas abordados são da própria matemática e fazem parte do programa de um curso de matemática para o ensino médio. A identidade do/da seu/sua filho(a) será preservada, ele/ela não será submetido(a) a nenhuma situação constrangedora e o resultado da pesquisa poderá ser publicado em revistas ou eventos científicos. Não está prevista nenhuma recompensa financeira ou atribuição de nota pela participação bem como nenhuma penalidade pela não participação. Para que seu filho(a) possa ser incluído na pesquisa o estudante deverá estar devidamente matriculado na 3ª série do ensino médio da escola SESI e concordar em participar. Será excluído da pesquisa, todo estudante que se recusar em assinar o TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE) ou que seus pais não assinarem o Termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE). Esta pesquisa visa reunir informações correlatas à aplicação de um jogo (jogo dos discos) para associar a aprendizagem do conteúdo de probabilidade. Para tanto, seu filho(a) participará no desenvolvimento/realização de uma sequência didática, coordenada pelo professor de Matemática da turma. Esclarece-se que este estudo está previsto no plano de aula do professor, portanto não é de escolha dos estudantes a participação dessa sequência didática. No entanto, o estudante poderá recusar-se em permitir que a sua atividade seja analisada pelo pesquisador. Nesse caso ele participa da atividade, mas não da pesquisa. Aos estudantes, podem ocorrer as seguintes implicações éticas em termos de riscos e benefícios: Riscos: sentir-se cansado, desestimulado. No desenvolvimento da sequência didática, por ser uma atividade que normalmente ocorre nas aulas de matemática, não se vislumbra nenhuma possibilidade de ataque a integridade física, moral, social ou intelectual do participante. Mas os benefícios ao

participar dessa pesquisa é: possibilidade de aprender probabilidade de uma forma diferente. O estudo de probabilidade faz parte do currículo e o que está se testando é uma nova abordagem metodológica e por isso não está previsto a possibilidade da não participação do estudante. Os benefícios previstos para os participantes consistem na aprendizagem do conceito de probabilidade, que é um conteúdo matemático importante. E para a sociedade, os benefícios previstos estão na possibilidade de uma metodologia alternativa para o estudo de probabilidade. Apesar disso por se tratar de uma nova metodologia, tomaremos cuidado de evitar o cansaço embora se saiba que o esforço faz parte do processo de estudo. E para que essa metodologia não venha prejudicar as notas dos colaboradores, tomaremos o cuidado para se aplicar após a semana de prova, evitando que o conteúdo seja objeto de avaliação. No caso do estudante sentir-se cansado será proposto a ele um pequeno intervalo da atividade, para prosseguimento em seguida. Também evitaremos atividades muito longas que poderiam causar o cansaço. Esse termo será elaborado em duas vias, sendo que uma fica com o sujeito da pesquisa ou por seu representante legal e uma arquivada pelo pesquisador.

Em caso de dúvida pode-se consultar o pesquisador pelo fone 67 99105-2851 ou o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humano da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul Rodovia Dourados Itahum - Km 12 - Cx:351, Cidade Universitária **UF: MS Município: DOURADOS**, CE: 79.804-970, Fone:(67)3902-2699 **E-mail:** cesh@uems.br

Nome completo do estudante: _____.

Nome completo dos pais/responsáveis: _____.

Assinatura dos pais/responsáveis: _____.

Campo Grande, ____ de _____ de _____.

ANEXO H: Termo de Assentimento Livre e Esclarecido

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Você está sendo convidado (a) para participar, como voluntário, do projeto de pesquisa **“ANÁLISE DO JOGO DOS DISCOS PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE NO ENSINO MÉDIO NA PERSPECTIVA DA TEORIA DA SITUAÇÃO DIDÁTICA”** que será conduzida por **Patrick Ramalho de Oliveira** mestrando da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul. A pesquisa tem por objetivo **analisar as contribuições do jogo dos discos para o ensino e a aprendizagem de probabilidade no ensino médio na perspectiva da teoria da situação didática** e será desenvolvida durante o horário regular de aula com a autorização e presença do professor titular da sala. Os temas abordados são da própria matemática e fazem parte do programa de um curso de matemática para o ensino médio. A sua identidade será preservada, e não será submetido(a) a nenhuma situação constrangedora. O resultado da pesquisa poderá ser publicado em revistas ou eventos científicos. Não está prevista nenhuma recompensa financeira ou atribuição de nota pela participação bem como nenhuma penalidade pela não participação. Para ser incluído na pesquisa o estudante deverá estar devidamente matriculado na 3ª série do ensino médio da escola SESI e concordar em participar. Será excluído da pesquisa, todo estudante que se recusar em assinar o TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TALE) ou que seus pais não assinarem o Termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE). Esta pesquisa visa reunir informações correlatas à aplicação de um jogo (jogo dos discos) para associar a aprendizagem do conteúdo de probabilidade. Para tanto, os colaboradores participarão no desenvolvimento/realização de uma sequência didática, coordenada pelo professor de Matemática da turma. Esclarece-se que este estudo está previsto no plano de aula do professor, portanto não é de escolha dos estudantes a participação dessa sequência didática. No entanto, o estudante poderá recusar-se em permitir que a sua atividade seja analisada pelo pesquisador. Nesse caso ele participa da atividade, mas não da pesquisa. Aos colaboradores, podem ocorrer as seguintes implicações éticas em termos de riscos e benefícios: Riscos: sentir-se cansado, desestimulado. No desenvolvimento da sequência didática, por ser uma atividade que normalmente ocorre nas aulas de matemática, não se vislumbra nenhuma possibilidade de ataque a integridade física, moral, social ou intelectual do participante. Os benefícios ao participar dessa pesquisa é: possibilidade de aprender probabilidade de uma forma diferente. O estudo de probabilidade faz parte do currículo e o que está se testando é uma nova abordagem metodológica e por isso não está previsto a

possibilidade da não participação do estudante. Os benefícios previstos para os participantes consistem na aprendizagem do conceito de probabilidade, que é um conteúdo matemático importante. E para a sociedade, os benefícios previstos estão na possibilidade de uma metodologia alternativa para o estudo de probabilidade. Apesar disso por se tratar de uma nova metodologia, tomaremos cuidado de evitar o cansaço embora se saiba que o esforço faz parte do processo de estudo. E para que essa metodologia não venha prejudicar as notas dos colaboradores, tomaremos o cuidado para se aplicar após a semana de prova, evitando que o conteúdo seja objeto de avaliação. No caso do estudante sentir-se cansado será proposto a ele um pequeno intervalo da atividade, para prosseguimento em seguida. Também evitaremos atividades muito longas que poderiam causar o cansaço. Esse termo será elaborado em duas vias, sendo que uma fica com o sujeito da pesquisa ou por seu representante legal e uma arquivada pelo pesquisador.

Em caso de dúvida pode-se consultar o pesquisador pelo fone 67 99105-2851 ou o Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humano da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul Rodovia Dourados Itahum - Km 12 - Cx:351, Cidade Universitária **UF: MS Município: DOURADOS**, CE: 79.804-970, Fone:(67)3902-2699 **E-mail:** cesh@uems.br

Nome completo do estudante: _____.

Assinatura do estudante: _____.

Campo Grande, ____ de _____ de _____.